

UNIVERSITE JOSEPH FOURIER-GRENOBLE 1
SCIENCES & GEOGRAPHIE

N° bibliothèque :

THESE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER

Discipline : Physique

Présentée et soutenue publiquement
par

MANDRILLON Vincent

Le 13 Novembre 2000

**Réduction de la puissance de commande de microactionneurs au voisinage
d'une instabilité magnétique ou élastique : application au bilame
magnétostrictif.**

Directeur de thèse :

PEUZIN Jean-Claude

COMPOSITION DU JURY :

Mr. Robert BAPTIST (rapporteur)
Mr. Philippe PERNOD (rapporteur)
Mr. François BASTIEN
Mr. Michel DUFOUR
Mr. Jean-Claude PEUZIN
Mr. Jean-Louis PORTESEIL

Remerciements.

Je remercie Jean Claude Peuzin d'avoir été mon directeur de thèse pendant trois ans. Je remercie également tous ceux qui m'ont accueilli et aidé au Laboratoire Louis Néel. Parmi eux, merci particulièrement à Serge Biston, Véronique Richard-Fauvel, Eliane Foret et à tout le personnel technique du laboratoire. Enfin, merci aux joyeux compagnons qu'ont été Benjamin Canals, Jessy Cledière, Nora Dempsey, Maged El Hajal, Luana Fratila, Alexandre Giguere, Anna Llobet, Délia Ristoiu, Johan Rothman, François Wacquant

Réduction de la puissance de commande de microactionneurs au voisinage d'une instabilité magnétique ou élastique : application au bilame magnétostrictif.

Table des matières.

CHAPITRE I. INTRODUCTION.....	5
CHAPITRE II. PRÉSENTATION GÉNÉRALE DE LA MAGNÉTOSTRICITION : DU MATÉRIAU MASSIF AUX COUCHES MINCES.....	15
II.1. PRÉSENTATION GÉNÉRALE.	17
II.1.1. Introduction et définition.....	17
II.1.2. Origine physique.	18
II.1.3. La magnétostriction isotrope.	19
II.2. LA MAGNÉTOSTRICITION ISOTROPE ET LES COUCHES MINCES.....	20
II.2.1. Déformations planaires de la couche mince élastiquement libre.....	21
II.2.2. Energie libre de la couche.	24
II.2.3. Bilame magnétostrictif : cas de la couche mince collée sur son substrat.....	25
II.2.4. Raideur planaire ramenée à la surface du substrat.....	26
II.2.5. Energie du bilame magnétostrictif.....	28
II.2.6. Application à la mesure du coefficient de couplage magnétoélastique b	30
II.3. LES COUCHES MINCES AMORPHES : CARACTÉRISATION ET ÉLABORATION	31
II.4. CONCLUSION.....	33
CHAPITRE III. ETUDE DE L'INSTABILITÉ MAGNÉTIQUE DES COUCHES MAGNÉTOSTRICITIVES.	35
III.1. TRANSITION DU SECOND ORDRE DANS UN MODÈLE DE STONER-WOHLFARTH.....	37
III.2. INSTABILITÉ MAGNÉTIQUE DU BILAME MAGNÉTOSTRICITIF.....	40
III.3. MONTAGE EXPÉRIMENTAL ET RÉSULTATS.	44
III.3.1. Dispositif expérimental.	44
III.3.2. Propriétés magnétiques de la couche mince utilisée.	46
III.3.3. Résultats de l'expérience.....	48
III.4. CONCLUSION	51
CHAPITRE IV. ETUDE DE L'INSTABILITÉ ÉLASTIQUE DU BILAME MAGNÉTOSTRICITIF.....	53
IV.1. TRANSITION ÉLASTIQUE DU SECOND ORDRE ET DIVERGENCE DE LA RÉPONSE PIÉZOMAGNÉTIQUE DANS UN BILAME MAGNÉTOSTRICITIF PRÉCONTRAINTE.	55
IV.2. INTRODUCTION ET PRÉSENTATION DE L'INSTABILITÉ ÉLASTIQUE DE FLAMBEMENT DES POUTRES. ..	57
IV.2.1. Exemple le plus simple : formule d'Euler.	57
IV.2.2. Flambement d'une poutre sous l'action d'une déformation longitudinale imposée : Approche énergétique de l'instabilité élastique.....	62
IV.2.3. Relation entre contrainte et déformation planaires à la surface d'une poutre proche du flambement.	67
IV.3. CONCLUSION	68
CHAPITRE V. ETUDE PRATIQUE DU FLAMBEMENT ÉLASTIQUE DES POUTRES : RÔLE DES DÉFAUTS.	71
V.1. MONTAGE DE PRINCIPE : CONTRÔLE DE LA DÉFORMATION LONGITUDINALE D'UNE POUTRE ÉPAISSE. ..	73
V.1.1. Introduction.	73
V.1.2. Description du dispositif.	74
V.1.3. Modèle sans défauts.	78
V.1.4. Résultats de l'expérience.	79
V.1.5. Modèle avec défauts.....	81
V.1.6. Application du modèle aux résultats obtenus avec le montage de principe.	89

V.1.7.	Conclusion.....	92
V.2.	POUTRES MONOLITHIQUES.....	94
V.2.1.	Solution choisie.....	94
V.2.2.	Fabrication des membranes.....	94
V.2.3.	Dégagement des poutres.....	96
V.2.4.	Avantages et inconvénients des poutres monolithiques.....	98
V.3.	MONTAGE HYBRIDE : PRÉCONTRAINTE D'UNE POUTRE À L' AIDE D' UNE CÉRAMIQUE PIÉZOÉLECTRIQUE.....	100
V.3.1.	Description du montage.....	100
V.3.2.	Résultats.....	102
V.3.3.	Conclusion.....	108
V.4.	OSCILLATIONS NON-LINÉAIRES DES POUTRES PRÉCONTRAINTE.....	110
V.4.1.	Equation différentielle.....	110
V.4.2.	Allure des courbes de résonance.....	112
V.4.3.	Conclusion.....	120
V.5.	POUTRES PRÉCONTRAINTE PAR DÉPÔT DE SiO_2	121
V.5.1.	Modèle du Flambement des poutres par dépôt d'une couche mince précontrainte.....	121
V.5.2.	Mesure de η	123
V.5.3.	Précontrainte du SiO_2 déposé en couche mince sur du Si.....	126
V.5.4.	Résultats expérimentaux.....	127
V.5.5.	Conclusion.....	136
CHAPITRE VI. CONCLUSION GÉNÉRALE.....		137
BIBLIOGRAPHIE.....		143
ANNEXE A. PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES DU SILICIUM.....		145
ANNEXE B. INTERFÉROMÈTRE.....		147
ANNEXE C. POUTRE ENCASTRÉE : RÔLE DES DÉFAUTS.....		151
ANNEXE D. OSCILLATIONS NON-LINÉAIRES DES POUTRES PRÉCONTRAINTE.....		153

Chapitre I. Introduction.

Chapitre I. Introduction.

Le microactionneur est, comme son homologue macroscopique, un dispositif électromécanique dont la variable d'entrée, ou commande, est de nature électrique (tension ou courant), et la variable de sortie un déplacement mécanique ou une force. On rencontre la nécessité d'une telle fonction par exemple dans les microrelais, les microvalves, les micropompes, les asservissements fins de têtes magnétiques etc. Le microactionneur est d'une façon générale un composant très important des microsystèmes qui fait l'objet d'une recherche active car sa miniaturisation et son intégration nécessitent la mise en œuvre de solutions souvent radicalement différentes de celles que l'on rencontre dans les actionneurs classiques.

En particulier on est conduit à exploiter de façon beaucoup plus systématique dans les microactionneurs, des effets de déformation solide. Par ce terme on désigne ici les déformations élastiques induites dans certains matériaux solides par l'application d'un champ électrique (électrostriction et piézoélectricité) ou d'un champ magnétique (magnétostriction). Les matériaux en question sont qualifiés d'actifs et leur utilisation dans les micro actionneurs se justifie par de nombreuses raisons pratiques. Une de ces raisons, très importante, est que la mise en œuvre d'une déformation solide est fondamentalement compatible avec une règle de conception presque impérative des microdispositifs mécaniques à savoir l'utilisation systématique de liaisons élastiques plutôt que glissantes pour assurer le guidage des organes mobiles. On élimine ainsi les problèmes liés aux jeux et au frottement sec, et par ailleurs les structures sont beaucoup plus simples qu'un actionneur électromagnétique classique, ce qui est évidemment souhaitable pour la microfabrication.

Au cours de ce travail nous nous sommes exclusivement intéressés aux matériaux magnétostrictifs, mais comme nous le soulignerons à maintes reprises, un de ces " nouveaux principes " que nous avons étudiés s'applique également aux matériaux piézoélectriques. La magnétostriction et les matériaux magnétostrictifs, particulièrement les couches minces d'alliages à magnétostriction géante, sont étudiés au laboratoire Louis Neel depuis de nombreuses années. En 1994 les recherches se sont franchement orientées vers les applications, et en particulier vers le microactionneur compte tenu des déformations très importantes générées dans les alliages à magnétostriction géante. A l'issue de ce programme de recherche qui comportait un important effort sur les matériaux, on disposait de différents alliages et nanocomposites en couches minces présentant des "effets de magnétostriction en champ faible" qui paraissaient très encourageants pour leur mise en œuvre dans des microactionneurs.

Toutefois, il faut avoir présent à l'esprit un handicap sérieux des actionneurs magnétiques sur leurs homologues piézoélectriques. En effet, dans un actionneur fonctionnant en régime linéaire la génération d'un déplacement statique nécessite le maintien du champ de

commande. Dans l'actionneur piézoélectrique cela n'implique généralement aucune dépense permanente de puissance car le courant est quasi nul. Sauf à disposer de supraconducteurs pour l'enroulement de commande, ce n'est malheureusement pas le cas de l'actionneur magnétique qui nécessite une puissance de maintien proportionnelle au carré du champ de commande. D'autres considérations plus concrètes portant en particulier sur la commande à distance de microactionneurs (notamment en vue d'applications médicales) amènent à la conclusion que l'utilisation dans des configurations "classiques" de microactionneurs des couches minces à magnétostriction géante disponibles les plus performantes conduit à des champs de commande qui restent prohibitifs dans de nombreuses applications.

Comme on l'expliquera de manière plus détaillée dans le chapitre suivant cette introduction, une amélioration des matériaux au delà des résultats obtenus à présent semblait problématique, et pour cette raison nous avons essayé de résoudre ce problème de la réduction des champs de commande en travaillant sur la structure de l'actionneur plutôt que sur le matériau magnétostrictif. Notre but était de rendre possible l'utilisation des matériaux existants dans des applications qui leur paraissaient interdites.

Notre idée de départ s'explique bien en partant de considérations très classiques sur le régime de fonctionnement linéaire d'un actionneur magnétostrictif. En effet, on a affaire alors à un système non dissipatif, dans le cas le plus simple à deux degrés de liberté, un déplacement δ , et une composante de moment magnétique total m du volume de matériau actif. On suppose que pour $m = \delta = 0$, le dispositif est dans une situation stable. Toutes les propriétés du système se déduisent d'une fonction énergie libre W qui à l'ordre le plus bas s'écrit :

$$W = \frac{R\delta^2}{2} + \frac{m^2}{2\chi} + em\delta$$

Dans cette expression R apparaît comme une rigidité élastique, χ est une susceptibilité magnétique (relative au moment total du matériau actif) et e est un module "piézo-magnétique".

De la fonction W , on déduit les équations d'état de l'actionneur:

$$F = R\delta + em \quad \text{et} \quad H = \frac{m}{\chi} + e\delta.$$

Ici F est la force de réaction en sortie de l'actionneur, tandis que H est le champ de commande.

Ces équations nous permettent de calculer le déplacement à force nulle en fonction du champ de commande:

$$\delta_0 = \left(\frac{H}{e} \right) \left(\frac{k^2}{k^2 - 1} \right)$$

Le coefficient sans dimension $k^2 = \frac{e^2 \chi}{R}$ est le coefficient de couplage magnéto-mécanique du système et il vérifie obligatoirement la condition $k^2 < 1$. On montre en effet que si ce n'était pas le cas la fonction W ne présenterait pas de minimum absolu en $m = \delta = 0$ et cette position ne serait pas stable.

Des considérations tout à fait similaires s'appliquent au cas de l'actionneur piézoélectrique en remplaçant tout simplement m par le moment électrique total p et le champ magnétique H par le champ électrique E .

Il s'agit là, encore une fois, de résultats bien connus au moins dans le cas où le système considéré se réduit à un échantillon de matériau actif. Ici nous considérons un actionneur complet et notre problème consiste à augmenter la sensibilité $\frac{\delta_0}{H}$ au champ de commande H .

Or nous notons d'après la dernière expression que dans l'hypothèse où e est donné, $\frac{\delta_0}{H}$ diverge lorsque k^2 tend vers l'unité. Partant d'une valeur faible de k^2 , il y a deux possibilités, au moins théoriques, de l'augmenter et de le faire tendre vers l'unité:

- i) en augmentant la susceptibilité à raideur constante, k^2 atteint l'unité pour $\chi = \chi_c = \frac{R}{e^2}$.
- ii) en diminuant la raideur R , à susceptibilité constante, k^2 atteint l'unité pour $R = R_c = e^2 \chi$.

Ce qui débouche sur deux méthodes pratiques.

Exploitation d'une instabilité magnétique.

Il se trouve que dans certains matériaux magnétiques il est possible de contrôler dans une très large mesure la valeur de la susceptibilité magnétique par un champ de polarisation statique. Il s'agit là d'une propriété très spécifique des matériaux magnétiques qui n'a pas d'équivalent dans les diélectriques. Fondamentalement la méthode revient à créer grâce au champ de polarisation une instabilité de l'aimantation dans le matériau. C'est pourquoi nous parlerons dans ce cas de la mise en œuvre d'une instabilité magnétique. Il est important d'ajouter pour conforter la valeur pratique de cette solution que la présence du champ de polarisation n'implique pas de dépense permanente de puissance dans la mesure où il peut être créé par un petit aimant.

Exploitation d'une instabilité élastique.

La deuxième méthode qui implique le contrôle de la raideur R est rendue possible par la possibilité de réaliser des structures spéciales d'actionneur présentant une instabilité élastique. Un avantage de cette méthode est d'être applicable aussi bien aux actionneurs piézoélectriques qu'aux actionneurs magnétostrictifs.

Il est clair que dans ce deuxième cas, on parlera de la mise en oeuvre d'une instabilité élastique.

Ces deux idées sont le résultat d'un effort de réflexion collectif mené au laboratoire Louis Neel à l'issue du programme de recherche sur les alliages et nanocomposites à magnétostriction géante. Nous avons depuis constaté sans trop de surprise que des idées très similaires étaient nées indépendamment dans d'autres équipes de recherche. L'exploitation de l'instabilité élastique de flambement pour augmenter le coefficient de couplage des transducteurs piézoélectriques a déjà été proposée. L'exploitation de l'instabilité magnétique pour diminuer le champ de commande des actionneurs magnétostrictifs est une solution également proposée et activement étudiée à l'IEMN de Lille [Ref. I-1].

Ce mémoire décrit notre propre travail sur cette problématique de la réduction du champ de commande des actionneurs magnétostrictifs, essentiellement consacré à la démonstration de faisabilité des deux solutions discutées ci dessus.

Dans le chapitre II, nous introduisons la magnétostriction et les matériaux magnétostrictifs et plus particulièrement les couches minces à magnétostriction géante. On décrit tout d'abord le modèle théorique connu de la couche à magnétostriction isotrope et anisotropie uniaxiale dans la situation simple où elle est élastiquement libre. On traite ensuite le bilame magnétostrictif, ce qui implique la prise en compte d'un couplage élastique entre la couche et son substrat. Si le substrat est très raide, on est dans la situation de la couche bloquée qui n'est pas fondamentalement différente de celle de la couche libre. La situation intéressante, surtout du point de vue pratique, est évidemment celle où le substrat a une raideur comparable à celle de la couche. Dans certaines conditions, ce cas peut être traité de façon simple en introduisant la notion de "raideur planaire ramenée en surface". On montre alors que la fonction énergie libre du bilame prend exactement la même forme que dans la couche libre à condition d'introduire des raideurs élastiques effectives qui rendent compte de l'interaction avec le substrat. Il s'agit là - du moins à notre connaissance- d'une partie originale, dans un chapitre qui est par ailleurs essentiellement introductif. Un point important qui ressort de la discussion du modèle de couche à anisotropie uniaxiale est que dans les configurations

classiques d'actionneur où notamment le seul champ appliqué est le champ de commande, le déplacement maximum n'est obtenu que pour une valeur de ce champ proche du champ d'anisotropie H_A , une caractéristique du matériau que l'on ne contrôle que partiellement. On décrit enfin le dépôt des couches sur substrat de silicium par pulvérisation ionique, généralement suivi d'un recuit sous champ, ainsi que la caractérisation de leur propriétés magnétiques et magnétostrictives élémentaires .

Le chapitre III est consacré à l'étude théorique et expérimentale de l'instabilité magnétique. La situation considérée, tout d'abord dans la partie théorique, est celle d'une couche mince magnétostrictive idéale à anisotropie uniaxiale et magnétostriction isotrope, soumise à un champ de polarisation statique H_0 perpendiculaire à son axe facile. On traite en fait directement le cas du bilame en utilisant le modèle simple introduit au chapitre II. Quand on diminue H_0 en partant d'une valeur très supérieure au champ d'anisotropie H_A , la système subit une transition du second ordre pour une valeur critique du champ H_0 voisine de H_A . Cette transition s'accompagne comme nous l'espérons d'une anomalie très prononcée, de la susceptibilité magnétique (mesurée selon l'axe facile), et surtout de la réponse piézo-magnétique, mais par ailleurs le système devient profondément non linéaire. Lorsque H est inférieur au champ critique , le système est dans une phase bistable avec deux valeurs possibles opposées de la composante d'aimantation selon l'axe facile . Ces deux positions "d'aimantation spontanée" s'accompagnent de deux déformations spontanées , ce qui suggère l'utilisation de cette situation dans des actionneurs bistables. En fait ce dispositif présente une analogie complète avec un système thermodynamique présentant une transition du second ordre et conforme à la théorie de Landau. H_0 y joue le rôle de la température, H_c celui de la température de transition.

La vérification expérimentale est conduite sur des bilames comportant une couche d'alliage TbDyFeCo et consiste essentiellement à tracer les courbes de torsion en fonction du champ H_y appliqué selon l'axe facile, en présence du champ de polarisation H_x perpendiculaire à l'axe facile.

Les prévisions du modèle théorique sont qualitativement confirmées, avec tout d'abord, l'observation d'une réponse essentiellement linéaire à fort champ de polarisation. En diminuant ce dernier on observe une divergence en $1/(H_0-H_c)$ de la pente à l'origine tandis que les effets non linéaires deviennent dominants. On observe également, dès que le champ de polarisation devient inférieur au champ critique, un cycle d'hystérèse caractéristique d'une phase bistable. Toutefois, les cycles d'hystérèse observés se distinguent des cycles théoriques par une valeur beaucoup plus faible de leur champ coercitif. D'autres désaccords semblent impliquer un comportement des couches assez différent du modèle à anisotropie uniaxiale. Néanmoins, une conclusion pratique particulièrement significative de l' étude est que cette solution conduit effectivement à une diminution spectaculaire du champ de commande, d'un facteur 10 à 100 selon les cas.

Dans le chapitre IV, nous abordons l'étude de la solution élastique. On part de l'expression de l'énergie libre du bilame magnétostrictif dans laquelle l'interaction avec le substrat est prise en compte par des constantes élastiques effectives et on se ramène à un cas pratique simple où la composante d'aimantation pertinente n'est couplée qu'à un seul degré de liberté mécanique (la flexion du bilame). On admet alors que la constante élastique effective pertinente peut être contrôlée et qu'en particulier on peut la faire passer par zéro et changer de signe. Comme cette raideur effective dépend linéairement de la raideur en flexion du substrat, le problème revient à contrôler cette dernière, ce qui est tout à fait possible au moins en principe en utilisant le phénomène bien connu du flambement (ou flambage) des poutres. On sait en effet que la raideur en flexion d'une poutre peut être contrôlée par l'application d'une contrainte de compression longitudinale. Cette raideur s'annule puis devient même négative lorsque la contrainte de compression atteint puis dépasse une valeur critique appelée contrainte de flambement. En pratique il vaut mieux contrôler la déformation de compression plutôt que la contrainte car cela permet d'éviter que le flambement soit destructif. On prévoit alors un comportement de la réponse magnétostrictive très similaire à celui observé au voisinage de l'instabilité magnétique, c'est à dire un comportement de système subissant une transition du second ordre "à la Landau", avec notamment, ce qui répondait à notre préoccupation première, une divergence de la réponse piézomagnétique à la transition.

Dans l'étude expérimentale, l'idée initiale était de réaliser un bilame magnétostrictif en forme de poutre encastree à ses deux extrémités et de vérifier si effectivement on avait dans un tel système un comportement conforme au modèle de transition de phase de Landau, le paramètre de contrôle étant la déformation de compression imposée à la poutre.

En réalité nous n'avons pas complètement atteint cet objectif à cause notamment de nombreuses difficultés pratiques de réalisation des structures instables. La plus grande partie de notre effort expérimental a été en fait consacré à l'étude de l'instabilité de flambement et aux moyens pratiques de la contrôler dans des poutres en silicium dépourvues de dépôts magnétostrictifs. Cette étude est développée dans le chapitre V.

Tout d'abord nous avons tenté d'évaluer l'efficacité pratique de la méthode en terme de raideur résiduelle. En effet, si en théorie il est possible de réduire à zéro la raideur en flexion, nous avons observé en pratique que les imperfections du système conduisent toujours à une raideur résiduelle non nulle. En fait la présence d'imperfections tend à effacer la transition élastique et la divergence de la souplesse (inverse de la raideur). La raideur pertinente est mesurée en excitant - à faible amplitude - par un moyen électrostatique très commode, la résonance de flexion des poutres.

Différentes méthodes d'application de la contrainte de compression ont été mises en œuvre.

Notre premier montage macroscopique nous a en fait permis de prendre toute la mesure de la difficulté de contrôler avec précision la transition de flambement . Dans ce montage en effet , on n'est arrivé à réduire la raideur que d'un facteur 4.

Dans les deux autres expériences, nous avons étudié des techniques directement applicables aux microsystèmes.

La première peut être qualifiée d' hybride. La micropoutre est encastrée à ses deux extrémités dans un cadre en silicium, l'ensemble constituant une structure évidemment monolithique réalisée par les techniques conventionnelles de microgravure. Dans une des variantes de la méthode, on colle le cadre maintenu en compression, sur un substrat épais (en silicium également). La compression du cadre est réalisée en le collant temporairement sur une céramique piézoélectrique sur laquelle on applique le champ nécessaire. Après quoi la céramique piézoélectrique est désolidarisée du cadre, celui-ci restant collé sur son substrat silicium. En réalité cette technique initialement envisagée dans un but de fabrication est rapidement devenue un moyen d'étude de la transition de flambage dans les micropoutres. Pour cela nous n'avons utilisé que la première phase de la méthode , c'est à dire le collage du cadre sur une céramique piézoélectrique. Le flambement a pu ainsi être étudié de manière commode en faisant varier la tension appliquée à la céramique. La deuxième technique peut être qualifiée de monolithique car elle consiste à contrôler le flambement par un dépôt de SiO_2 sur la poutre. On sait qu'un dépôt, par pulvérisation ionique de SiO_2 sur le silicium est généralement dans un état de compression et par conséquent, tend à allonger la poutre. En présence du cadre beaucoup plus rigide , cela conduit effectivement au flambement. Cette méthode est séduisante notamment parce qu'elle permet de contrôler assez facilement la valeur de la déformation longitudinale en agissant sur l'épaisseur de dépôt.

Dans les deux méthodes, les résultats obtenus en termes de raideur résiduelle ne sont pas à la hauteur de nos espérances puisque dans le meilleur des cas nous obtenons seulement une réduction par un facteur 8 de la raideur en flexion de la poutre.

En revanche les résultats sont conformes à un modèle de flambement, à notre connaissance original, dans lequel on tient compte des divers défauts présents dans nos structures.

Une conséquence de l'atténuation de la transition de flambement due aux imperfections, particulièrement gênante dans le cas des microstructures, est qu'il devient souvent difficile de décider si dans une structure donnée , on a dépassé ou non la déformation critique. Ce problème nous a amené à nous intéresser plus qu'il n'était prévu à l'origine au comportement dynamique de nos poutres et plus particulièrement aux oscillations non linéaires au voisinage de la résonance de flexion. C'est pourquoi une grande partie de ce chapitre se trouve aussi consacré aux oscillations non linéaires. Nous avons notamment développé une analyse originale, à notre connaissance, du modèle d'oscillateur non linéaire équivalent à la poutre en utilisant la méthode de Ritz. On explique de manière satisfaisante tous les comportements

observés expérimentalement . En particulier, il est possible en fonction de ce comportement de décider si une structure donnée est au dessous ou au dessus du seuil de flambement.

Nous n'avons pas été en mesure faute de temps de mettre à profit tous ces résultats dans la réalisation et l'étude expérimentale d'un bilame magnétostrictif élastiquement instable. Cet objectif reste donc libre pour de futures recherches. Dans notre conclusion , nous soulignons l'intérêt des résultats acquis sur le principe de l'instabilité magnétique et donnons quelques exemples concrets de microactionneurs dans lesquels ce principe pourrait être mis en œuvre. Bien que sa faisabilité n'ait pas été véritablement confirmée au cours de ce travail , la solution élastique demeure à notre avis prometteuse , car elle conduit à des structures plus compactes (sans aimant de polarisation).

Chapitre II. Présentation générale de la magnétostriction : du matériau massif aux couches minces.

Chapitre II. Présentation générale de la magnétostriction : du matériau massif aux couches minces.

Dans ce chapitre, nous faisons dans une première partie une présentation générale de la magnétostriction. On rappelle dans un premier temps les principales caractéristiques de la magnétostriction. Cela nous permet ensuite d'expliquer plus précisément ce qu'est la magnétostriction isotrope.

Dans une deuxième partie, nous développons un modèle analytique de la magnétostriction isotrope des couches minces. Ce modèle est ensuite appliqué au cas du bilame magnétostrictif. Il est très important car il permet d'une part de retrouver la méthode classique de caractérisation de la magnétostriction d'un bilame, mais il permet surtout dans le chapitre III l'étude de l'instabilité magnétique dans le cas du bilame.

Enfin, nous présentons les moyens utilisés pour caractériser et pour élaborer les couches minces que nous allons utiliser pour l'expérience du chapitre III.

II.1. Présentation générale.

II.1.1. Introduction et définition.

Lorsqu'un échantillon de matériau magnétique est soumis à un champ magnétique, ses dimensions changent. Cet effet est appelé la magnétostriction. Il a été découvert en 1842 par Joule, qui a montré que la longueur d'une tige de fer initialement désaimantée augmentait lorsqu'elle était aimantée longitudinalement par un faible champ magnétique. Ce changement de longueur correspond à une déformation traditionnellement notée λ .

$$\lambda = \frac{\Delta l}{l_0}$$

La valeur de λ mesurée à saturation magnétique est appelée magnétostriction à saturation et est notée λ_s .

Dans la plupart des matériaux, $\lambda_s \cong 10^{-5}$. Pour certains matériaux, on observe des valeurs de λ_s beaucoup plus importantes. Par exemple, certains alliages de type terre rare / métal de transition (R-M) développent une magnétostriction géante. Le plus connu d'entre eux, le Terfenol (TbFe_2) est ferrimagnétique avec $\lambda_s > 1500 \cdot 10^{-6}$.

Ce sont précisément des alliages de ce type qui ont été étudiés au cours de ce travail. Comme nous l'avons déjà expliqué dans l'introduction, la mise en forme commode pour les applications microsystèmes est celle de la couche mince déposée sur un substrat de manière à constituer un bilame.

Les couches minces magnétostrictives étudiées sont réalisées par pulvérisation cathodique RF à partir d'un alliage proche du Terfenol. Leur composition atomique après dépôt est

$(\text{Tb}_{0,3}\text{Dy}_{0,7})_1(\text{Fe}_{0,5}\text{Co}_{0,5})_2$. Cette composition respecte le rapport de un atome de terre rare pour deux atomes de métal de transition du Terfenol et correspond à la composition étudiée dans [Ref. II-1].

II.1.2. Origine physique.

La magnétostriction est principalement due au couplage spin-orbite. A cause de ce couplage, le nuage électronique est déformé dans la direction du moment magnétique porté par les atomes.

Au dessus de la température de Curie T_C , le matériau ne possède pas d'ordre magnétique et les moments magnétiques sont orientés aléatoirement. Les déformations des nuages électroniques le sont donc aussi.

Lorsque la température passe en dessous de T_C , le matériau devient magnétiquement ordonné et possède des domaines magnétiques. A l'intérieur d'un domaine magnétique, les moments magnétiques sont tous orientés dans la même direction. Les déformations des nuages électroniques sont alors cohérentes et s'additionnent pour donner une déformation macroscopique à l'échelle d'un domaine qu'on appelle magnétostriction spontanée.

Lorsqu'on modifie la distribution des domaines à l'intérieur d'un échantillon, par exemple en appliquant un champ magnétique, les déformations des différents domaines se combinent pour donner une déformation résultante qui est cette fois à l'échelle de l'échantillon. Cet effet de déformation induit par la modification de la structure en domaines est appelé magnétostriction de Joule. On la distingue de la magnétostriction spontanée.

En fait, la magnétostriction de Joule n'est observée que dans la mesure où le processus technique considéré entraîne une rotation des vecteurs aimantation spontanée.

Un cas intéressant est celui de l'échantillon monodomaine dans lequel on fait varier l'orientation de l'aimantation spontanée. Dans le cas de symétrie le plus général, la déformation observée dans une direction donnée dépend en même temps des cosinus directeurs de la direction de l'aimantation et des cosinus directeurs de la direction d'observation par rapport aux directions de symétrie du matériau. Dans le cas d'un monocristal, il s'agit des directions cristallographiques principales.

Les couches minces que nous étudions sont amorphes. Cela est vérifié expérimentalement par diffraction de rayons X. Le matériau ne possède plus de direction de symétrie. La déformation observée dépend alors uniquement de l'angle entre la direction d'observation de la déformation et la direction de l'aimantation. On parle dans ce cas de magnétostriction isotrope.

II.1.3. La magnétostriction isotrope.

Nous allons maintenant donner une formulation précise de la magnétostriction isotrope de Joule. C'est cette formulation qui sera utilisée pour établir les résultats obtenus ultérieurement.

Considérons un échantillon monodomaine élastiquement libre. Quelle que soit la direction de l'aimantation dans cet échantillon, les déformations de l'échantillon relativement à un état magnétiquement complètement désordonné (au dessus de T_c par exemple) et selon des directions fixées par rapport à l'aimantation sont constantes. Son volume est donc indépendant de la direction de l'aimantation. On en déduit que, quelle que soit l'orientation et la répartition de l'aimantation en domaines dans un échantillon à magnétostriction isotrope, son volume reste constant. La conservation du volume est une conséquence de l'isotropie de la magnétostriction pour un échantillon élastiquement libre.

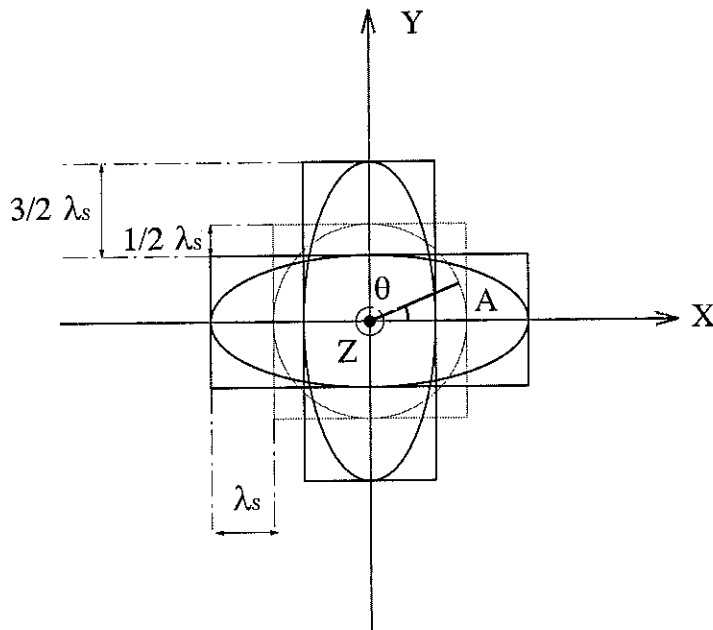


Illustration de la magnétostriction isotrope

Fig. II-1

La figure (Fig. II-1) illustre cela. Elle représente en gris un échantillon dont la forme dans un état magnétique complètement désordonné est un cube d'arrête unité. Aucune contrainte extérieure n'est imposée aux déformations de cet échantillon. On impose à l'aimantation de cet

échantillon d'être monodomaine et orientée selon la direction x . Cela peut être fait par exemple en appliquant un champ magnétique le saturant dans la direction x . Sa déformation dans cette direction sera alors égale au coefficient de magnétostriction λ_s traditionnellement appelé magnétostriction à saturation. La conservation du volume de la magnétostriction isotrope correspond à une déformation de $-\frac{\lambda_s}{2}$ dans les directions y et z . La déformation mesurée dans une direction donnée (y par exemple) lorsque la direction de l'aimantation de l'échantillon saturé passe de cette direction à une deuxième direction perpendiculaire (x par exemple) est égale à $\frac{3}{2}\lambda_s$. Ce résultat est à la base de toutes les mesures de la magnétostriction isotrope.

En effet, à champ nul, l'aimantation d'un matériau magnétique n'est jamais désordonnée, mais est organisée en domaines dont la taille et l'orientation dépend de nombreux facteurs tels que la forme du matériaux, son histoire magnétique, ses défauts ... etc. On ne peut donc pas avoir accès à λ_s en mesurant par exemple simplement la déformation de l'échantillon dans une direction lorsqu'il est amené à saturation dans cette direction. Le seul moyen d'avoir accès à λ_s est de mesurer la déformation dans une direction donnée lorsque la direction de l'aimantation de l'échantillon saturé passe de la direction de mesure à une direction perpendiculaire. C'est cette méthode qui est utilisée comme nous le verrons plus loin pour caractériser la magnétostriction isotrope des couches minces.

Soit un point A situé dans l'état (hypothétique) magnétiquement désordonné sur le cercle de rayon unité dessiné sur la figure (Fig. II-1) et situé dans le plan (x,y) . Ses coordonnées sont $(\cos(\theta), \sin(\theta))$. Lors de la saturation de l'échantillon dans la direction x , elles vont simplement devenir $\left(\cos(\theta) \cdot (1 + \lambda_s), \sin(\theta) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\lambda_s \right) \right)$.

On en déduit immédiatement que au premier ordre en λ_s la déformation $\lambda(\theta)$ dans une direction formant un angle θ avec la direction de l'aimantation à saturation est par rapport à l'état magnétiquement désordonné :

$$\lambda(\theta) = \frac{3}{2}\lambda_s \left(\cos^2(\theta) - \frac{1}{3} \right)$$

On retombe sur la formule classique de la magnétostriction isotrope [Ref. II-2].

II.2. La magnétostriction isotrope et les couches minces.

Nous allons dans cette section nous intéresser à la magnétostriction isotrope des couches minces. Nous allons tout d'abord exposer le modèle utilisé pour la décrire. Ce modèle relie les déformations d'une couche mince libre monodomaine à la direction de l'aimantation dans le plan de la couche. Il permet ensuite d'exprimer l'énergie magnéto-élastique de cette couche en fonction de la direction de l'aimantation et de la déformation imposées à la couche. Ensuite, nous préciserons la méthode d'élaboration des couches minces utilisées pour la fabrication des bilames que nous étudions. Pour finir, on expliquera la caractérisation des propriétés magnétostrictives des couches minces utilisée dans les bilames.

II.2.1. Déformations planaires de la couche mince élastiquement libre.

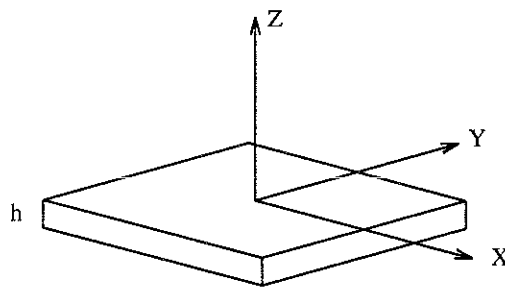


Fig. II-2

Considérons une couche mince de matériau magnétostrictif amorphe dont le plan principal est le plan (x, y) . Cette couche fait une épaisseur h dans la direction z . La couche est pour l'instant supposée libre de toute contrainte. Les axes X et Y sont choisis de manière arbitraire dans la couche pour l'instant. Dans la suite, dans le cas du bilame, ils seront en général pris selon les directions caractéristiques de celui-ci.

La couche mince peut être considérée comme infinie dans le plan (x, y) vis à vis de son épaisseur. Dans le cas d'une couche continue et homogène, on en déduit que le coefficient de champ démagnétisant vaut 1 dans l'épaisseur de la couche (axe z) et 0 dans le plan de la couche. Ceci n'est bien sûr valable que dans le cas idéal d'une couche mince sans défauts (structure colonnaire par exemple dans certaines couches amorphes). C'est pourquoi, dans nos couches minces amorphes, on va considérer que l'aimantation à champ nul est spontanément dans le plan de la couche.

On considère maintenant que la couche élastiquement libre est monodomaine. Nous allons nous intéresser aux déformations de la couche par rapport aux axes x et y lorsque l'aimantation est dans le plan de la couche.

On note θ l'angle entre l'axe x et la direction D de l'aimantation.

On note classiquement S_1, S_2, S_3 les déformations d'allongement dans les directions x, y et z et S_4, S_5, S_6 les déformations de cisaillement dans les plans (y, z), (z, x) et (x, y). Si on note (u, v, w) le déplacement d'un point de la couche, Elles sont définies comme dans le cas classique de l'élasticité linéaire [Ref. II-3] par :

$$\begin{cases} S_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, S_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, S_3 = \frac{\partial w}{\partial z} \\ S_4 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, S_5 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, S_6 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

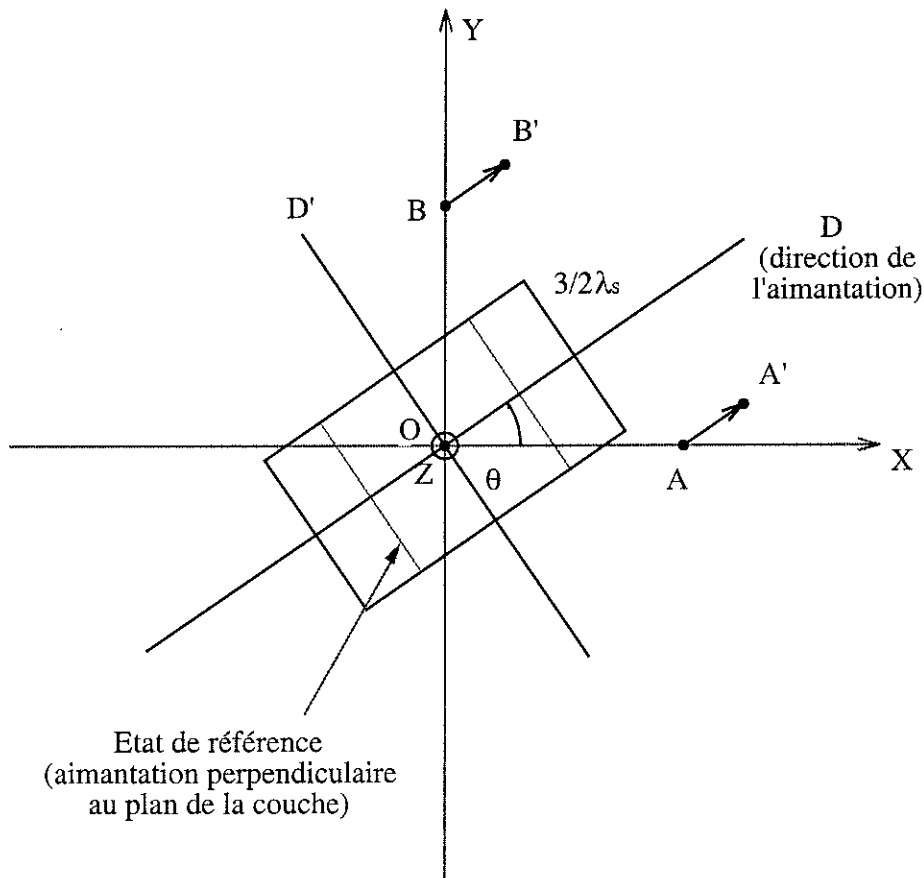


Fig. II-3

L'état pris comme état de référence pour les déformations de la couche est l'état correspondant à une aimantation dirigée selon l'axe z. On part d'une couche dans cet état de référence et on fait basculer l'aimantation dans la direction D du plan de la couche. Imaginons (Fig. II-3) une section carrée de la couche dans son état de référence telle que celle représentée en gris sur la figure. Elle va se transformer en rectangle. D'après ce que l'on a dit

sur la magnétostriction isotrope d'un échantillon élastiquement libre, sa déformation va être de $S_0 = \frac{3}{2}\lambda_s$ dans la direction D, de $-S_0 = -\frac{3}{2}\lambda_s$ dans la direction z et nulle dans la direction D' du plan de la couche perpendiculaire à D. Ces trois axes sont donc les axes principaux pour les déformations de la couche.

On en déduit immédiatement que $S_4 = S_5 = 0$.

On en déduit également facilement les autres déformations.

Au cours de notre transformation, le point A de la couche mince se déplace selon la direction D en A'. La déformation S_1 correspond à l'allongement relatif du vecteur OA dans la direction x.

Au cours de notre transformation, le point B de la couche mince se déplace selon la direction D en B'. La déformation S_2 correspond à l'allongement relatif du vecteur OB dans la direction y.

La déformation S_6 correspond à la somme des déplacements relatifs de OA dans la direction y et de OB dans la direction x.

On aboutit à :

$$\begin{cases} S_1 = S_0 \cos^2 \theta \\ S_2 = S_0 \sin^2 \theta \\ S_3 = -S_0 \\ S_4 = 0 \\ S_5 = 0 \\ S_6 = S_0 \sin 2\theta \end{cases}$$

De ces formules on peut facilement déduire la valeur des déformations de la couche si on prend par exemple comme état de référence la couche mince avec l'aimantation dirigée dans le plan de la couche selon l'axe x :

$$\begin{cases} S_1 = -S_0 \sin^2 \theta \\ S_2 = S_0 \sin^2 \theta \\ S_3 = 0 \\ S_4 = 0 \\ S_5 = 0 \\ S_6 = S_0 \sin 2\theta \end{cases} \quad (\text{Eq. II-1})$$

C'est cet état de référence qui sera utilisé dans les prochains paragraphes. On aboutit avec cet état de référence à des déformations non nulles uniquement dans le plan de la couche.

II.2.2. Energie libre de la couche.

Nous allons maintenant établir l'expression de l'énergie libre de la couche monodomaine lorsque l'aimantation est dans le plan de la couche. Dans ce cas, les variables d'état pertinentes pour décrire notre système sont les déformations planaires S_1 , S_2 , S_6 de la couche et l'angle θ entre l'aimantation et l'axe x .

On prend comme état de référence pour les déformations l'état correspondant à la couche libre dont l'aimantation est dirigée dans le plan de la couche selon l'axe x . Pour une direction donnée de l'aimantation, on appelle S_1^0 , S_2^0 , S_6^0 les déformations planaires de la couche élastiquement libre données par (Eq. II-1). L'énergie élastique volumique f_1 de notre couche pour une direction θ donnée de l'aimantation va donc avoir la forme :

$$f_1(\theta, S_1, S_2, S_6) = \frac{1}{2}\alpha(S_1 - S_1^0)^2 + \frac{1}{2}\alpha(S_2 - S_2^0)^2 + \beta(S_1 - S_1^0)(S_2 - S_2^0) + \frac{1}{2}\gamma(S_6 - S_6^0)^2$$

Dans cette relation, les constantes d'élasticité α , β et γ de notre matériau à aimantation bloquée sont définies pour une couche mince, c'est à dire une couche pour laquelle la déformation S_3 est libre. Comme nous supposons le matériau élastiquement isotrope, elles vérifient également la relation :

$$2\gamma = \alpha - \beta$$

Si de plus on applique dans le plan de la couche un champ magnétique H et si la couche possède une constante d'anisotropie K_L pour la direction x , alors la couche aura également l'énergie magnétique volumique :

$$f_2 = K_L \sin^2 \theta - \mu_0 M_s (H_x \cos(\theta) + H_y \sin(\theta))$$

Le premier terme correspond à l'énergie d'anisotropie magnétique et le deuxième à l'énergie des moments magnétiques dans le champ H .

L'énergie libre volumique totale $f = f_1 + f_2$ de la couche sera finalement donnée par :

$$f = \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha(S_1^2 + S_2^2) + \beta S_1 S_2 + \frac{1}{2}\gamma S_6^2 \\ +b\left((S_1 - S_2)\sin^2\theta - \frac{1}{2}S_6\sin(2\theta)\right) \\ +K_B\sin^2\theta - \mu_0 M_s(H_x \cos(\theta) + H_y \sin(\theta)) \end{cases} \quad (\text{Eq. II-2})$$

Le premier terme de cette expression correspond à l'énergie de déformation élastique de la couche.

Le deuxième terme correspond au couplage magnétoélastique et $b = (\alpha - \beta)S_0$ est le coefficient de couplage magnétostrictif.

Le dernier terme est un terme d'énergie magnétique dans lequel $K_B = K_L + (\alpha - \beta)S_0^2$ est la constante d'anisotropie couche bloquée.

II.2.3. Bilame magnétostrictif : cas de la couche mince collée sur son substrat.

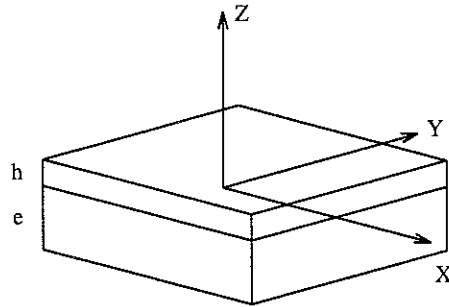


Fig. II-4

Dans le paragraphe précédent, on a donné l'expression de l'énergie libre de la couche en fonction des déformations planaires et de la direction de l'aimantation dans le plan de la couche. Cette expression suppose que les déformations planaires sont homogènes dans l'épaisseur de la couche. Dans le cas du bilame magnétostrictif, la couche est collée sur un substrat en Silicium. Les déformations de la couche ne seront homogènes sur son épaisseur que si l'épaisseur h de la couche est faible vis à vis de celle e du substrat ($h \ll e$). Dans la suite, on suppose que l'on est dans cette situation. Notre idée est simplement de ramener le problème du couplage de la couche à son substrat en flexion et en torsion à un problème d'élasticité plane où l'effet du substrat est

simplement d'introduire une certaine raideur effective ramenée en parallèle sur la couche.

II.2.4. Raideur planaire ramenée à la surface du substrat.

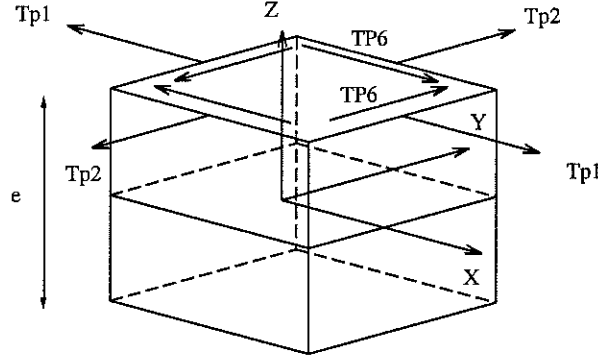


Fig. II-5

Le substrat sur lequel est collée la couche magnétostrictive est une plaque mince de plan moyen (x,y) et d'épaisseur e dans la direction z.

Soit T_p (tenseur d'ordre deux dont les composantes ont la dimension d'une force par unité de longueur) la contrainte planaire appliquée à la surface du substrat. On va calculer la déformation planaire qui en résulte.

C'est la somme de deux contributions dont la première correspond à une déformation planaire uniforme dans l'épaisseur e de la plaque et dont les composantes sont:

$$\begin{cases} S_{p1} = \frac{T_{p1} - \eta T_{p2}}{eE} \\ S_{p2} = \frac{T_{p2} - \eta T_{p1}}{eE} \\ S_{p6} = \frac{T_{p6}}{eG} \end{cases}$$

dans cette relation, E et η sont le module d'Young et le coefficient de Poisson du substrat pour les directions x et y que l'on suppose être équivalentes. (par exemple les directions (110)

pour un substrat en silicium). G est le module de cisaillement du substrat dans le plan du substrat lorsque les contraintes de cisaillement sont appliquées dans les directions x et y . Dans le cas d'un substrat isotrope, $G = \frac{E}{2(1 + \eta)}$.

La deuxième contribution est due aux courbures C_1 et C_2 et à la torsion C_6 de la plaque induites par les moments linéiques M_1 , M_2 de flexion $\frac{eT_{p1}}{2}$, $\frac{eT_{p2}}{2}$, et M_6 de torsion $\frac{eT_{p6}}{2}$.

On a [Ref. II-4] :

$$\begin{cases} C_1 = \frac{6}{Ee^2}(T_{p1} - \eta T_{p2}) \\ C_2 = \frac{6}{Ee^2}(T_{p2} - \eta T_{p1}) \\ C_6 = \frac{3T_{p6}}{Ge^2} \end{cases}$$

(avec cette définition, une courbure négative correspond à un échantillon concave)

d'où une déformation planaire supplémentaire ΔS_p à la surface du substrat :

$$\begin{cases} \Delta S_{p1} = \frac{3(T_{p1} - \eta T_{p2})}{eE} \\ \Delta S_{p2} = \frac{3(T_{p2} - \eta T_{p1})}{eE} \\ \Delta S_{p6} = \frac{3T_{p6}}{eG} \end{cases}$$

La déformation planaire totale à la surface du substrat est donc $S = S_p + \Delta S_p$:

$$\begin{cases} S_1 = \frac{4(T_{p1} - \eta T_{p2})}{eE} \\ S_2 = \frac{4(T_{p2} - \eta T_{p1})}{eE} \\ S_6 = \frac{4T_{p6}}{eG} \end{cases} \quad (\text{Eq. II-3})$$

Les relation liant les courbures et la torsion aux déformations à la surface du bilame sont donc :

$$C_1 = \frac{3}{2e} S_1, C_2 = \frac{3}{2e} S_2 \text{ et } C_6 = \frac{3}{4e} S_6 \quad (\text{Eq. II-4})$$

En inversant (Eq. II-3) on a:

$$\begin{cases} T_{P1} = \frac{eE}{4(1-\eta^2)} (S_1 + \eta S_2) \\ T_{P2} = \frac{eE}{4(1-\eta^2)} (S_2 + \eta S_1) \\ T_{P6} = \frac{eG}{4} S_6 \end{cases} \quad (\text{Eq. II-5})$$

et l'énergie élastique par unité de surface du substrat associée à la déformation de surface S_1 , S_2 , S_6 est donc :

$$F_s = \frac{eE}{8(1-\eta^2)} (S_1^2 + S_2^2) + \frac{\eta eE}{4(1-\eta^2)} S_1 S_2 + \frac{eG}{8} S_6^2 \quad (\text{Eq. II-6})$$

II.2.5. Energie du bilame magnétostrictif.

On est maintenant en mesure de traiter le problème complet du bilame magnétostrictif dans l'hypothèse du substrat épais.

Dans un premier temps, on suppose que le substrat n'est pas déformé quand l'aimantation est dirigée selon la direction x. Dans la pratique, cela est le cas lorsque par exemple, la couche est déposée sur le substrat en induisant une direction de facile aimantation dans la direction x.

Dans le cas où les déformations sont homogènes dans l'épaisseur de la couche, ses déformations vont être égales aux déformations planaires S_1 , S_2 , S_6 de la surface du substrat avec laquelle elle est en contact.

L'énergie surfacique totale du bilame est d'après (Eq. II-6) et (Eq. II-2)

$$F = F_s + hf$$

qui se met sous la forme :

$$f_{eq} = F/h = \begin{cases} \frac{1}{2} A(S_1^2 + S_2^2) + BS_1S_2 + \frac{1}{2} CS_6^2 \\ +b \left((S_1 - S_2) \sin^2 \theta - \frac{1}{2} S_6 \sin(2\theta) \right) \\ +K_B \sin^2 \theta - \mu_0 M_s (H_x \cos(\theta) + H_y \sin(\theta)) \end{cases} \quad (\text{Eq. II-7})$$

$$\text{Avec } A = \alpha + \frac{eE}{4h(1-\eta^2)}, \quad B = \beta + \frac{\eta eE}{4h(1-\eta^2)}, \quad C = \gamma + \frac{eG}{4h} \quad (\text{Eq. II-8})$$

Cette expression à comparer avec (Eq. II-2) est la même que celle de l'énergie libre volumique d'une couche d'épaisseur h qui aurait les constante élastiques A , B et C .

Attention : Cette expression suppose que le substrat n'est pas déformé quand l'aimantation est dirigée selon la direction x

De plus, dans le cas d'un substrat isotrope, ces relations vérifient la relation d'isotropie $C = \frac{(A-B)}{2}$. Dans le cas où les modules de rigidité du substrat et du bilame sont du même ordre de grandeur et dans le cas où $e \gg 4h / \eta$, alors $A \equiv a$, $B \equiv d$ et $C \equiv c$ avec $a = \frac{eE}{4h(1-\eta^2)}$, $d = \frac{\eta eE}{4h(1-\eta^2)}$ et $c = \frac{eG}{4h}$

Regardons maintenant le cas le plus général dans lequel le substrat est déjà déformé quand l'aimantation est dirigée selon la direction x . Dans ce cas, si S_1^* , S_2^* et S_6^* sont les déformation planaires de la surface du substrat lorsque l'aimantation de la couche est dirigée selon la direction x , alors l'énergie libre surfacique du bilame s'exprime comme:

$$F = F_s((S_1 - S_1^*), (S_2 - S_2^*), (S_6 - S_6^*)) + hf(\theta, S_1, S_2, S_6)$$

et

$$f_{eq} = F/h = \begin{cases} \frac{1}{2}A(S_1^2 + S_2^2) + BS_1S_2 + \frac{1}{2}CS_6^2 - a(S_1S_1^* + S_2S_2^*) - d(S_1S_2^* + S_2S_1^*) - c(S_6S_6^*) + cste \\ +b\left((S_1 - S_2)\sin^2\theta - \frac{1}{2}S_6\sin(2\theta)\right) \\ +K_B\sin^2\theta - \mu_0M_s(H_x\cos(\theta) + H_y\sin(\theta)) \end{cases}$$

(Eq. II-9)

On retrouve l'expression précédente avec un terme élastique supplémentaire dans lequel

$$a = \frac{eE}{4h(1-\eta^2)}, \quad d = \frac{\eta eE}{4h(1-\eta^2)} \quad \text{et} \quad c = \frac{eG}{4h}$$

II.2.6. Application à la mesure du coefficient de couplage magnétoélastique b.

Considérons un bilame libre de toute contrainte élastique extérieure. Il n'y a aucune force appliquée au système donc $\frac{\partial F}{\partial S_i} = 0$.

Cela donne pour S_1 et S_2 dans le cas le plus général (Eq. II-9) :

$$AS_1 + BS_2 + b\sin^2\theta - aS_1^* - dS_2^* = 0 \quad \text{et} \quad AS_2 + BS_1 - b\sin^2\theta - aS_2^* - dS_1^* = 0$$

$$\text{On en déduit que : } S_1 = -\frac{b\sin^2\theta}{A-B} + Cste$$

On en déduit la méthode suivante pour mesurer b :

Lorsqu'un bilame magnétostrictif est saturé dans la direction x, $\theta=0$ et $S_1(0) = Cste$.

Lorsqu'il est saturé dans la direction y, $\theta=\pi/2$ et

$$S_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = Cste - \frac{b}{A-B}.$$

$$\text{D'où } S_1\left(\frac{\pi}{2}\right) - S_1(0) = -\frac{b}{A-B}$$

Dans le cas où la couche et le substrat ont des rigidité élastiques du même ordre de grandeurs : $S_1\left(\frac{\pi}{2}\right) - S_1(0) = -\frac{4h(1+\eta)b}{eE}$ ce qui correspond d'après (Eq. II-4) à une variation ΔC_1 de la courbure dans la direction x de :

$$\Delta C_1 = -\frac{6h(1+\eta)b}{e^2E} \quad (\text{Eq. II-10})$$

On retrouve bien le résultat de [Ref. II-5].

Pour déterminer b , on va donc être amené à mesurer la variation de courbure dans une direction du bilame lorsque il est saturé dans la direction de mesure puis lorsqu'il est saturé dans la direction perpendiculaire du plan de la couche. On retrouve bien un résultat similaire à celui donné sur la mesure de la magnétostriction isotrope dans un échantillon massif.

Remarque : C'est bien b et non λ_s qui est la grandeur pertinente à mesurer pour caractériser la magnétostriction des couches minces car pour les couches minces, on ne connaît pas a priori la valeur des coefficient de rigidité élastique qui relie b à λ_s .

II.3. Les couches minces amorphes : caractérisation et élaboration .

Les couches minces élaborées au laboratoire sont réalisées par pulvérisation ionique radio fréquence à partir d'une cible composite dont la composition moyenne est proche de celle du Terfenol.

On rappelle brièvement que la pulvérisation ionique radio fréquence consiste à placer une cible composée du matériau que l'on veut déposer dans un plasma d'argon dont la pression est typiquement de 10^{-2} mbar. Ce plasma est créé par un champ magnétique radio fréquence. Les ions présent dans ce plasma viennent frapper la cible et arrachent de la matière à celle-ci. Les espèces arrachées à la cible viennent alors se coller ou plus exactement se condenser sur le substrat sur lequel on veut déposer la couche mince.

La composition atomique de nos couches minces après dépôt est $(\text{Tb}_{0,3}\text{Dy}_{0,7})_1(\text{Fe}_{0,5}\text{Co}_{0,5})_2$. Cette composition respecte le rapport de un atome de terre rare pour deux atomes de métal de transition du Terfenol et correspond à la composition étudiée dans [Ref. II-6]. La couche utilisée pour l'expérience du bilame polarisé excité en torsion est déposée sous champ. Pendant le dépôt, le bilame est placé dans l'entrefer d'un aimant permanent de manière à créer une direction de facile aimantation dans le plan de celui-ci. Les cycles d'aimantation de la couche mince obtenue sont présentés dans le paragraphe V.2.4 et illustrés figure (Fig. III-6). Le coefficient de couplage magnétoélastique de la couche est mesuré à l'aide du déflecteur optique décrit ci-dessous.

Le principe retenu pour mesurer la magnétoélasticité d'un bilame est basé sur la détection de la flexion du bilame. Ce déplacement peut être détecté par un capteur capacitif ou un capteur

optique. Au laboratoire, c'est la méthode optique qui a été retenue car elle est moins sensible aux variations thermiques et plus simple à utiliser.

Le principe de mesure du déflecteur optique est le suivant (Fig. II-6):

Un faisceau laser modulé en intensité à la fréquence f_L est envoyé à l'extrémité libre du bilame magnétostrictif simplement encastré. Le faisceau est réfléchi et renvoyé sur une photodiode différentielle (PSD – Position Sensing Diode) à deux éléments sensibles au déplacement du faisceau dans une direction qu'on fait coïncider avec celle correspondant au déplacement provoqué par la flexion du bilame dans sa longueur. Le déplacement du faisceau laser sur la diode est ensuite extrait du signal analogique en sortant à l'aide d'une détection synchrone calée sur la fréquence f_L de modulation du laser. La diode est calibrée avant chaque mesure à l'aide d'un actionneur piézoélectrique asservi en déplacement.

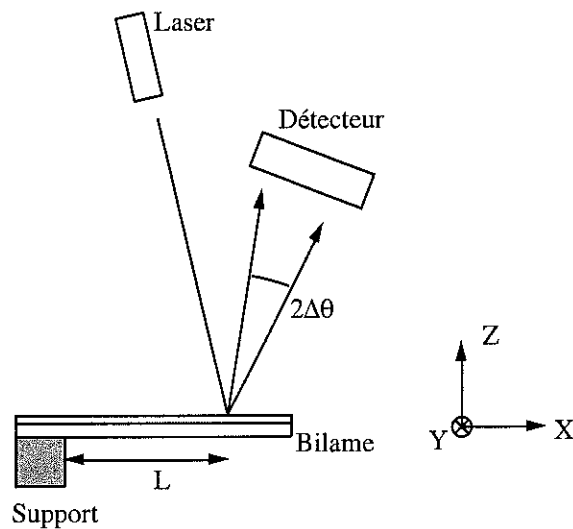


Fig. II-6

La distance séparant l'échantillon de la diode est de 1,141m dans notre montage, cela assure une très bonne résolution puisque l'angle de déflexion minimal détectable est typiquement de 5.10^{-8} rad soit une sensibilité de mesure du coefficient de couplage magnétoélastique b de 0.03 MPa pour des couches de 200 nm sur un substrat en Silicium de 200μm.

A l'aide du déflecteur optique, on mesure donc la variation $\Delta 2\theta$ de l'angle correspondant à la déflexion du faisceau laser lorsque la courbure C de l'échantillon varie dans la direction x . Cette variation de l'angle de déflexion est liée à la variation de la courbure C de l'échantillon dans le sens de la longueur par la relation : $\Delta \theta = \Delta C$.

Pour déterminer b , on va donc mesurer la variation de courbure du bilame dans la direction x lorsque il est amené à saturation dans la direction y et dans la direction x par un champ magnétique créé par un électro-aimant et appliqué bien évidemment respectivement dans les

directions y et x . On en déduit les deux courbes $b_{\perp}$ (champ magnétique appliqué perpendiculaire à la direction de mesure) et $b_{//}$ (champ magnétique appliqué parallèle à la direction de mesure) représentées figure Fig. III-7 et la valeur du couplage magnétoélastique b à l'aide de la relation Eq. II-10.

II.4. Conclusion.

Nous avons établi l'expression de l'énergie magnétoélastique du bilame magnétostrictif. Nous pouvons maintenant utiliser cette expression pour étudier différentes manières d'abaisser le champ de commande d'un bilame magnétostrictif. Dans le chapitre III, nous verrons que l'on peut y parvenir en utilisant une instabilité magnétique du bilame. . Dans le chapitre V, nous verrons que l'on peut y parvenir en utilisant une instabilité élastique du bilame.

Chapitre III. Etude de l'instabilité magnétique des couches magnétostrictives.

Chapitre III. Etude de l'instabilité magnétique des couches magnétostrictives.

Dans ce chapitre, nous étudions la faisabilité d'une méthode de réduction des champs de commande des micro actionneurs magnétostrictifs qui consiste à mettre à profit le fait que dans une couche mince à anisotropie uniaxiale il est possible de produire une instabilité de l'aimantation à l'aide d'un champ de polarisation statique convenablement orienté.

On expose tout d'abord les fondements théoriques qui sont déjà bien connus pour une couche non magnétostrictive et que l'on étend très simplement au cas du bilame magnétostrictif.

On décrit ensuite les expériences. Les bilames étudiés sont constitués d'une couche d'alliage TbDyFeCo déposées sur des poutres cantilever en silicium. Les dimensions typiques du substrat sont une longueur de 20mm, une largeur de 2mm et une épaisseur de 100 à 200 μm . L'épaisseur de la couche magnétique est typiquement de 1 μm .

Les couches ont une anisotropie uniaxiale d'axe facile aligné avec la grande longueur de la poutre. On trace la réponse en torsion du cantilever en fonction du champ magnétique appliqué selon l'axe facile pour divers champs de polarisation appliqués selon l'axe difficile. Conformément aux prévisions théoriques, on observe que le système subit une transition du second ordre (contrôlée par le champ de polarisation) conforme au modèle de Landau avec notamment le résultat espéré que la réponse piézomagnétique diverge à la transition. En dépit du fait que le comportement des couches d'alliage s'éloigne quelque peu de celui du modèle idéal à anisotropie uniaxiale, la validité pratique de la méthode est confirmée avec notamment la mise en évidence de champs de commande 10 à 100 fois inférieurs au champ d'anisotropie.

III.1. Transition du second ordre dans un modèle de Stoner-Wohlfarth.

Dans une couche à anisotropie uniaxiale monodomaine non magnétostrictive soumise à un champ de composante H_0 selon l'axe difficile et de composante H selon l'axe facile, la densité volumique d'énergie libre se réduit à:

$$W = K \sin^2 \theta - \mu_0 M_s (H_0 \sin \theta + H \cos \theta) \quad (\text{Eq. III-1})$$

Ici, θ est l'angle que fait l'aimantation supposée dans le plan de la couche avec l'axe facile.

Ce système est formellement équivalent au modèle de Stoner et Wohlfarth d'une particule magnétique à symétrie uniaxiale [Ref. III-1]. Ici nous discuterons une situation particulière de ce modèle dans laquelle le champ H_0 (champ de polarisation) fait partie du système (en tant que paramètre de contrôle) et H est le champ d'excitation extérieur au système. La variable

d'état pertinente est alors la composante d'aimantation M selon l'axe facile et on pose $\frac{M}{M_s} = m$, où M_s est l'aimantation spontanée. On a donc $\cos\theta = m$ et $\sin^2\theta = 1 - m^2$.

L'énergie réduite W/K s'écrit finalement (avec $H_a = \frac{2K}{\mu_0 M_s}$ et $u_0 = \frac{H_0}{H_a}$) :

$$\frac{W}{K} = 1 - m^2 - 2u_0 \sqrt{1 - m^2} \quad (\text{Eq. III-2})$$

En développant le radical à l'ordre 4 en m , il vient à un terme constant près :

$$\frac{W}{K} = (u_0 - 1)m^2 + \frac{1}{4}u_0 m^4 \quad (\text{Eq. III-3})$$

Cette expression est très proche de la forme classique de Landau qui est la description la plus simple d'un système thermodynamique présentant une transition du second ordre. Ici c'est le champ de polarisation qui joue le rôle de la température.

En effet tant que $u_0 > 1$, il n'existe qu'un état stable correspondant à $m = 0$ c'est à dire à une aimantation alignée avec le champ de polarisation H_0 . Quand $u_0 < 1$, il y a deux états stables d'aimantation opposées $+m_0$ et $-m_0$ avec

$$m_0^2 = \frac{2(1 - u_0)}{u_0} \quad (\text{Eq. III-4})$$

On a donc bien pour $u_0 = 1$ une transition d'une phase monostable vers une phase bistable, le paramètre d'ordre m_0 étant continu à la transition.

Le champ d'excitation ou de commande H vérifie

$$H = \frac{\partial W}{\mu_0 \partial M} = \frac{K}{\mu_0 M_s} \frac{\partial (W/K)}{\partial m} \quad (\text{Eq. III-5})$$

et en posant $u = \frac{H}{H_a}$, il vient en utilisant l'approximation de (Eq. III-3):

$$u = \frac{1}{2} \frac{\partial (W/K)}{\partial m} = (u_0 - 1)m + \frac{1}{2}u_0 m^3 \quad (\text{Eq. III-6})$$

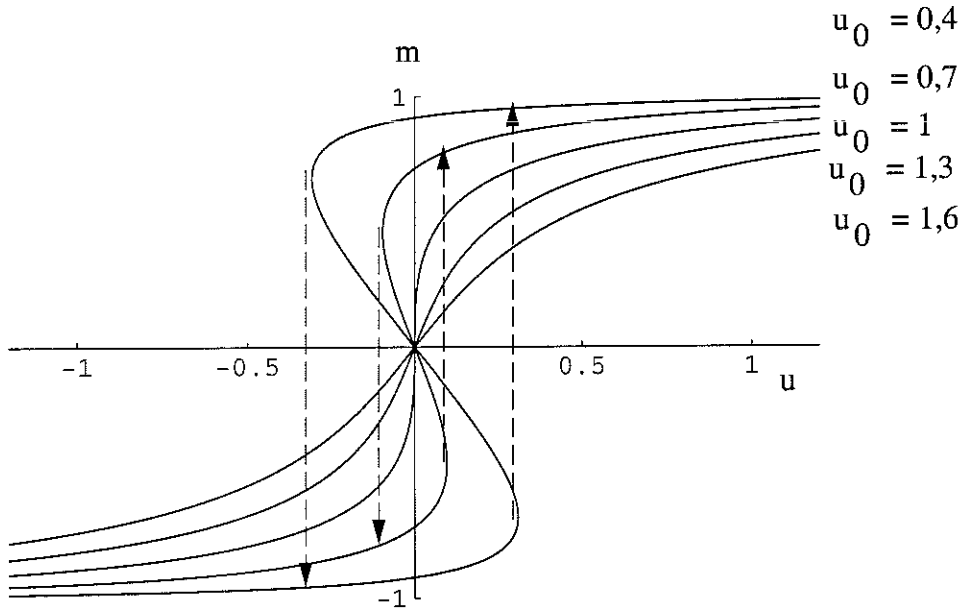
La susceptibilité (magnétique) différentielle est donc :

$$\frac{\partial M}{\partial H} = \left(\frac{M_s}{H_a} \right) \frac{\partial m}{\partial u} = \left(\frac{M_s}{H_a} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial m} \right)^{-1} = \left(\frac{M_s}{H_a} \right) \left(u_0 - 1 + \frac{3}{2}u_0 m^2 \right)^{-1} \quad (\text{Eq. III-7})$$

Dans la phase monostable on a $m = 0$ et la susceptibilité différentielle réduite au voisinage de cet état s'écrit :

$$\left(\frac{H_A}{M_s}\right) \frac{\partial M}{\partial H} = \frac{\partial m}{\partial u} = \frac{1}{u_0 - 1} \quad (\text{Eq. III-8})$$

La susceptibilité suit donc une loi "de Curie" avec divergence à la transition ($u_0 = 1$). On note aussi que près de la transition l'expression $u(m)$ est fortement non linéaire car $(u_0 - 1)m$ devient rapidement petit devant $\frac{1}{2}u_0 m^3$. Dans la phase bistable l'expression de $u(m)$ comporte une branche instable à pente négative, ce qui conduit à un hystérèse dans la relation effectivement observable entre l'aimantation et le champ d'excitation.



Relation $m(u)$ pour diverses valeurs de u_0 illustrant une transition de phase du second ordre dans un modèle de Stoner et Wolhfarth:

$m = M/M_s$; $u_0 = \mu_0 M_s H_0 / 2K$; $u = \mu_0 M_s H / 2K$. M est la composante d'aimantation et H le champ d'excitation tous deux selon l'axe facile. H_0 est le champ de polarisation appliqué selon l'axe difficile. K est la constante d'anisotropie uniaxiale et M_s l'aimantation spontanée.

Fig. III-1

La figure Fig. III-1 résume et illustre tous ces comportements.

Nous allons maintenant montrer que ces résultats peuvent être étendus avec quelques modifications non seulement au cas des couches magnétostrictives isolées mais aussi au bilame magnétostrictif complet.

III.2. Instabilité magnétique du bilame magnétostrictif.

On part de l'expression complète de la densité volumique f_{eq} d'énergie libre de la couche équivalente au bilame soumis à un champ statique, établie au chapitre II (Eq. II-7), et que rappelle ici pour la commodité de la lecture:

$$f_{eq} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}A(S_1^2 + S_2^2) + BS_1S_2 + \frac{1}{2}CS_6^2 \\ +b\left((S_1 - S_2)\sin^2\theta - \frac{1}{2}S_6\sin(2\theta)\right) \\ +K_B\sin^2\theta - \mu_0M_S(H_x\cos(\theta) + H_y\sin(\theta)) \end{array} \right.$$

On rappelle que S_1 , S_2 et S_6 sont les composantes de déformation planaires de la couche active prises ici comme variables d'état élastiques de tout le système, sachant que les déformations du bilame (courbures et torsion) leurs sont directement reliées par les relations (Eq. II-4).

Les constantes élastiques effectives A,B, et C sont données on le rappelle par les équations

$$A = \alpha + \frac{eE}{4h(1-\eta^2)}, \quad B = \beta + \frac{\eta eE}{4h(1-\eta^2)}, \quad C = \gamma + \frac{eG}{4h}$$

où E est le module de Young du substrat, G son module de cisaillement, et η son coefficient de Poisson.

On rappelle enfin que l'on se place dans l'hypothèse du substrat isotrope (ce qui est une approximation relativement grossière dans le cas du silicium) et que par conséquent A, B, C vérifient la relation d'isotropie

$$C = 1/2 (A+B) \quad (\text{Eq. III-9})$$

Bilame libre polarisé :

Il n'y a aucune force extérieure appliquée au système, donc $\frac{\partial f_{eq}}{\partial S_i} = 0$.

$$AS_1 + BS_2 + b \sin^2\theta = 0 ; BS_1 + AS_2 - b \sin^2\theta = 0 ; CS_6 - 1/2 b \sin 2\theta = 0 \quad (\text{Eq. III-10})$$

Le seul couple appliqué à l'aimantation est celui dû au champ statique H_x , H_y dont on tient déjà compte dans l'énergie libre F , donc $\frac{\partial f_{eq}}{\partial \theta} = 0$:

$$K_b \sin 2\theta + b [(S_1 - S_2) \sin 2\theta - S_6 \cos 2\theta] + \mu_0 M_s (H_x \sin\theta - H_y \cos\theta) = 0 \quad (\text{Eq. III-11})$$

Considérons maintenant le cas où le champ statique se réduit au champ de polarisation appliqué perpendiculairement à l'axe facile de la couche soit $H_x = 0$; $H_y = H_0$.

Compte tenu de (Eq. III-10) on a :

$$S_1 - S_2 = -2b \sin^2\theta / (A - B) \quad \text{et} \quad S_6 = (1/2C) b \sin 2\theta \quad (\text{Eq. III-12})$$

Ce qui donne avec (29):

$$2K_b \sin\theta - (4b^2 / (A - B)) \sin^3\theta + (2/C) b^2 \sin^3\theta - (1/C) b^2 \sin\theta - \mu_0 M_s H_0 = 0$$

Compte tenu de la relation d'isotropie (Eq. III-9), le terme en $\sin^3\theta$ disparaît et il vient :

$$\sin\theta = \mu_0 M_s H_0 / (2K_b - b^2/C) = \mu_0 M_s H_0 / 2K_{ef} \quad (\text{Eq. III-13})$$

$$\text{où} \quad K_{eff} = K_b - \frac{b^2}{2C}$$

peut être considérée comme une *constante d'anisotropie effective* de la couche sur son substrat élastique de raideur finie.

A cause de la relation (Eq. III-10), le système n'a plus que θ comme degré de liberté, et la relation (Eq. III-13) implique que l'énergie libre incluant l'interaction avec le champ de polarisation prenne nécessairement la forme :

$$f_{eq} = K_{ef} \sin^2\theta - \mu_0 M_s H_0 \cos\theta \quad (\text{Eq. III-14})$$

On retrouve la même expression (Eq. III-1) que dans le modèle de Stoner-Wohlfarth où H_0 est considéré comme le paramètre de contrôle du système.

L'analyse conduite dans le paragraphe précédent est donc immédiatement applicable au bilame magnétostrictif. La seule différence, c'est qu'à l'angle θ ou à une composante d'aimantation choisie comme variable d'état, par exemple la composante selon l'axe facile,

sont associées de façon univoque trois composantes de déformations planaires de la couche qui correspondent à deux courbures et une torsion du bilame.

On va s'intéresser à la réponse magnétostrictive du bilame libre à un champ d'excitation H appliqué là encore selon l'axe facile (donc perpendiculairement au champ de polarisation).

On définit ici le champ de polarisation réduit et le champ d'excitation réduit respectivement par :

$$u_0 = \frac{H_0}{H_{Aef}}, u = \frac{H}{H_{Aef}} \text{ avec } H_{Aef} = \frac{2K_{ef}}{\mu_0 M_s}$$

on note toujours $m = M/M_s = \cos\theta$.

Conformément à (Eq. III-2) on peut écrire directement :

$$\frac{W}{K_{ef}} = 1 - m^2 - 2u_0 \sqrt{1 - m^2}$$

Toutefois, contrairement au paragraphe précédent nous n'utilisons pas ici un développement limité de $\frac{W}{K_{ef}}$ et conservons sa forme exacte. D'après (Eq. III-5) il vient alors :

$$u = \frac{u_0 m}{\sqrt{1 - m^2}} - m \quad (\text{Chapitre II.})$$

Par ailleurs les déformations S_1, S_2, S_6 se déduisent de (Eq. III-13) en rappelant que $m = \cos\theta$

$$S_2 = -S_1 = (b/(A-B))(1-m^2) ; S_6 = (b/C)m (1-m^2)^{1/2} = (2b/(A-B)) m (1-m^2)^{1/2}$$

Enfin, des expressions donnant les déformations on peut tirer les courbures et torsion. En particulier, la torsion s'écrit d'après (Eq. II-4).

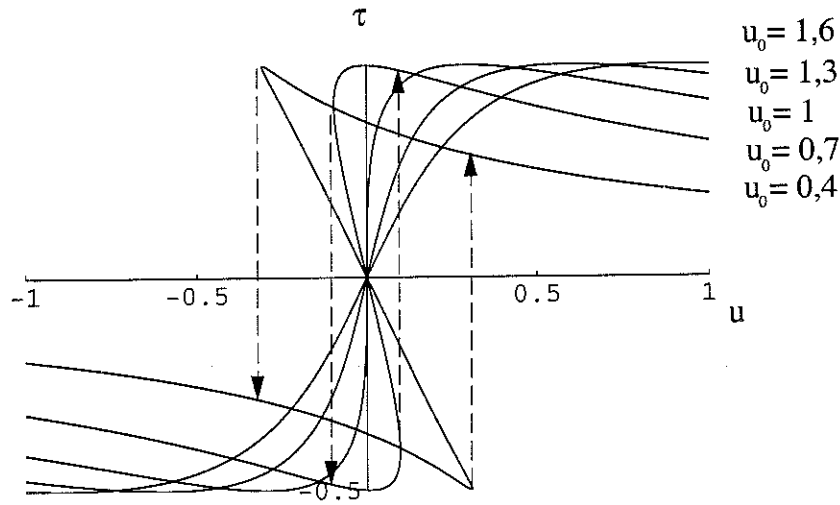
$$C_6 = \frac{3}{4e} S_6 = \frac{3b}{4eC} m \sqrt{1 - m^2} \quad (\text{Eq. III-15})$$

En définissant le cisaillement réduit par $\tau_6 = C_6 \left(\frac{4eC}{3b} \right)$, il vient finalement :

$$\tau_6 = m \sqrt{1 - m^2} \quad (\text{Eq. III-16})$$

La relation intéressante $\tau(u)$ est fournie sous forme paramétrique par les équations (Chapitre II) et (Eq. III-16) .

La famille des courbes correspondantes $\tau_6(u)$ à u_0 donné est donnée sur la figure (Fig. III-2).



Torsion réduite τ selon l'axe difficile en fonction du champ d'excitation réduit u pour des valeurs du champ de polarisation réduit u_0 de 0,4 ; 0,7 ; 1 ; 1,3 ; et 1,6. Le champ d'excitation est appliqué selon l'axe facile et le champ de polarisation selon l'axe difficile.

Fig. III-2

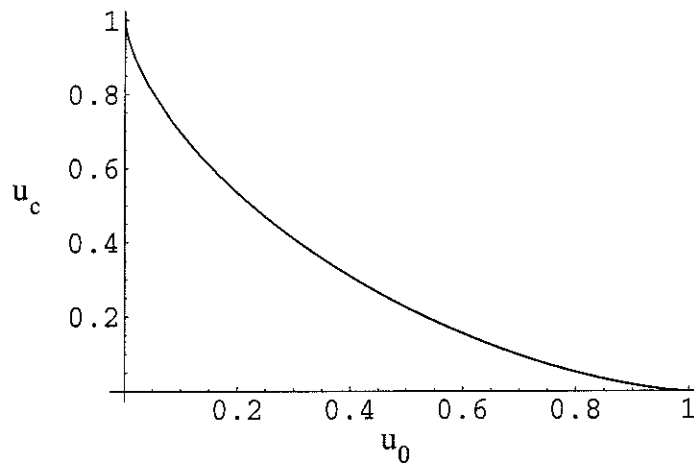
Cette famille de courbe montre bien qu'on a affaire à un système de type Landau dans lequel le champ de polarisation réduit joue le rôle de la température. On voit en particulier que la pente à l'origine des courbes, plutôt faible lorsque u_0 est grand, diverge effectivement lorsque $u_0 = 1$.

Cette analyse confirme donc qualitativement les prévisions du modèle harmonique naïf discuté dans l'introduction.

Quand $u_0 < 1$, il apparaît une branche instable et par conséquent de l'hystérésis dans la réponse observable. Le cycle d'hystérèse se caractérise par un champ de basculement ou champ coercitif que l'on calcule facilement en écrivant qu'il correspond à une pente infinie de la courbe $m(u)$.

On obtient ainsi la variation théorique du champ coercitif réduit u_c en fonction du champ de polarisation u_0 (Fig. III-3).

Il reste à vérifier expérimentalement toutes ces prédictions!

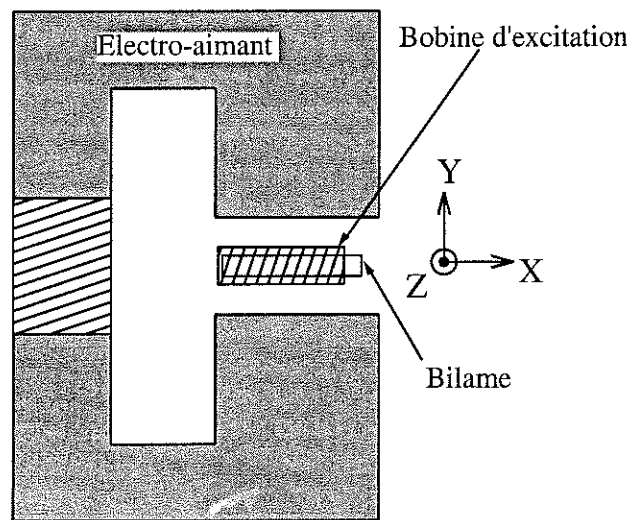


Evolution théorique du champ coercitif réduit u_c avec le champ de polarisation réduit u_0 .

Fig. III-3

III.3. Montage expérimental et résultats.

III.3.1. Dispositif expérimental.



Bilame polarisé excité en torsion : montage expérimental.

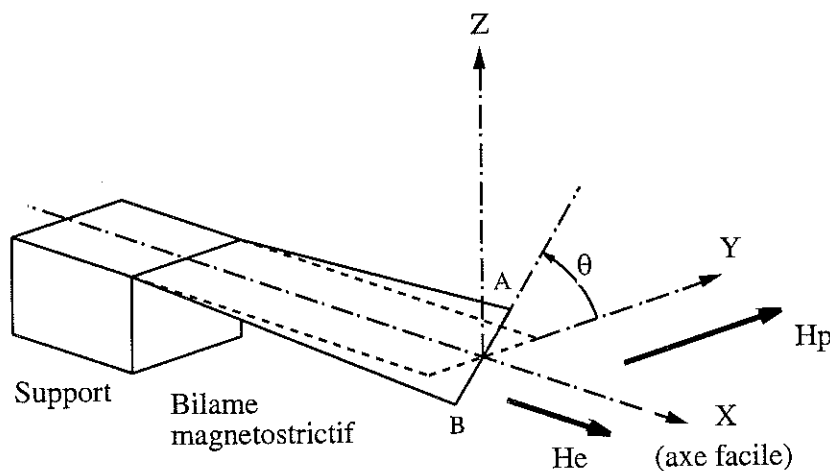
Fig. III-4

Le montage expérimental que nous décrivons ici nous permet de vérifier dans le cas du bilame polarisé excité en torsion l'instabilité magnétique des couches minces magnétostrictives développée au paragraphe précédent. La figure (Fig. III-4) décrit le montage expérimental utilisé.

La largeur du bilame est de 2 mm et sa longueur est de 12 mm. Le bilame est constitué d'un substrat taillé selon les directions (110) dans une plaquette de silicium orientée (100) et d'une couche mince magnétostrictive. L'épaisseur de la plaquette de silicium est de 100 μm . La couche magnétostrictive a une épaisseur de 1,35 μm . Elle est déposée sur le substrat en Silicium par pulvérisation RF. Sa composition exacte déterminée par micro-analyse X est $(\text{Tb}_{0,38}\text{Dy}_{0,62})_{0,35}(\text{Fe}_{0,45}\text{Co}_{0,55})_{0,65}$ (les chiffres correspondent à la composition atomique).

La couche mince possède une direction de facile aimantation dans le sens de la longueur (direction x). Cette direction de facile aimantation a été induite grâce à un dépôt sous champ magnétique.

Le bilame est simplement collé à une extrémité sur un support et placé dans une bobine située dans l'entrefer d'un électro-aimant.



*bilame polarisé excité en torsion
schéma de principe.*

Fig. III-5

L'électro-aimant est utilisé pour créer un champ magnétique H_p de polarisation dans la largeur du bilame (direction y), c'est à dire perpendiculairement à la direction de facile aimantation (Fig. III-5).

La bobine dans laquelle est placé le bilame est utilisée pour créer un champ d'excitation H_e dans la longueur du bilame (direction x), c'est à dire selon la direction de facile aimantation (Fig. III-5).

Pour plusieurs valeurs du champ de polarisation H_p , on mesure l'évolution de l'angle de torsion θ du bilame en fonction du champ d'excitation H_e lorsque H_e décrit la plage de valeur $-H_{e_{\max}} \leq H_e \leq +H_{e_{\max}}$ de manière croissante et décroissante.

La méthode utilisée pour la mesure de θ est la suivante :

A l'aide de la sonde d'un vibromètre optique MTI-2000, on mesure le déplacement vertical moyen (selon l'axe z) des points A et B sur plusieurs cycles de H_e effectués à la fréquence de 1Hz (donc de manière quasi statique). Pour chaque valeur de H_e , on soustrait alors la valeur obtenue pour chacun des deux cycles, puis on la divise par la distance séparant A et B. On obtient ainsi le cycle décrivant l'évolution de θ avec H_e .

III.3.2. Propriétés magnétiques de la couche mince utilisée.

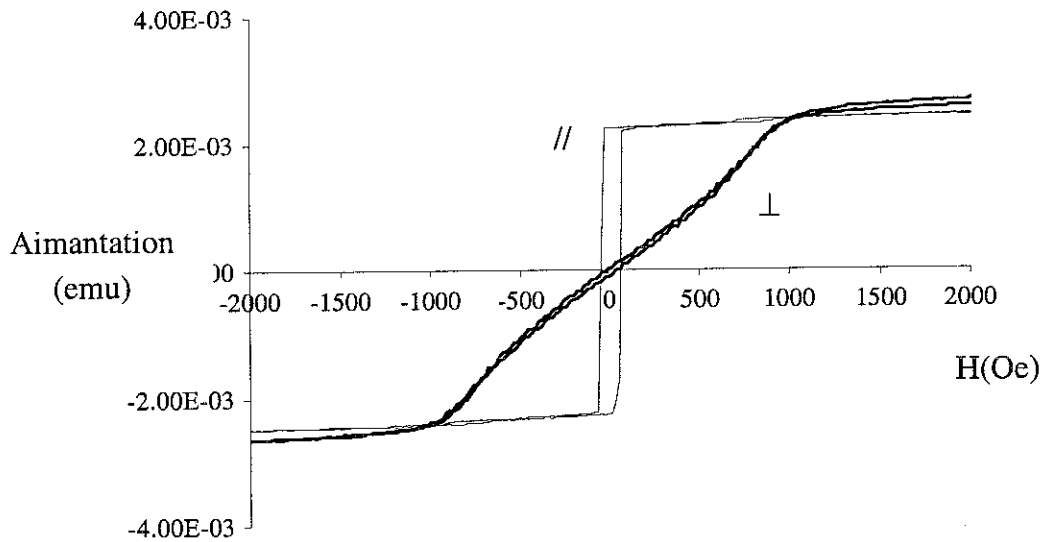
La figure (Fig. III-6) montre les deux cycles d'aimantation dans le plan de la couche magnétostrictive utilisée pour l'expérience du bimorphe polarisé excité en torsion. Ces cycles ont été acquis à l'aide d'un VSM (Vibrating Sample Magnetometer) à température ambiante.

Le cycle noté (//) correspond au cycle d'hystérésis dans la direction x du bilame (sens de la longueur). Le cycle noté ($\perp$) correspond au cycle mesuré dans la direction y du bilame.

Ces deux cycles sont caractéristiques d'une couche mince dont l'aimantation est dans le plan de la couche (plan x,y de notre bilame) et possédant un seul axe d'anisotropie [Ref. III-2], [Ref. II-1]. Cette anisotropie correspond à une direction de difficile aimantation dans la direction y de notre bilame.

Le champ d'anisotropie H_a de la couche déterminé à partir de ces cycles est de 1100 Oe.

La figure (Fig. III-7) montre les courbes de magnétostriction du bilame utilisé. Ces courbes sont mesurées à l'aide du déflectomètre à température ambiante.



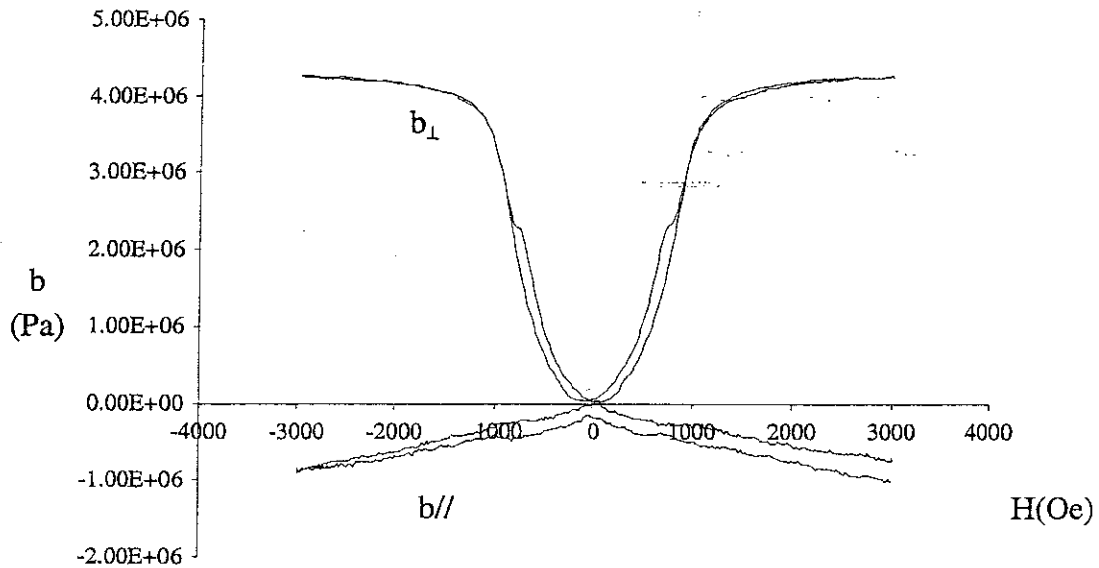
Courbes d'aimantation à température ambiante.

Fig. III-6

La courbure du bilame est mesurée dans la direction x , direction de facile aimantation. La courbe notée ($//$) correspond à un champ magnétique appliqué dans la direction x . La courbe notée ($\perp$) correspond à un champ magnétique appliqué dans la direction y , perpendiculairement à la direction de facile aimantation. On retrouve la valeur de 1100 Oe du champ d'anisotropie H_a de la couche.

Quand l'échantillon n'est soumis à aucun champ magnétique, l'aimantation dans les domaines magnétiques de la couche mince est orientée dans la direction de facile aimantation.

Lorsque le champ magnétique est appliqué dans la direction de facile aimantation, on ne constate pas (très peu) de déflexion du bilame (courbe $b_{//}$). C'est bien ce qui est attendu puisque l'application d'un champ magnétique dans cette direction ne provoque pas de rotation de l'aimantation dans les domaines magnétiques mais seulement une augmentation de la taille des domaines par déplacement de paroi.



Courbe de magnétostriction à température ambiante

Fig. III-7

Lorsque le champ magnétique est appliqué dans la direction de difficile aimantation, on constate bien une déflexion du bilame (courbe $b_{\perp}$) car il y a rotation de l'aimantation dans chacun des domaines.

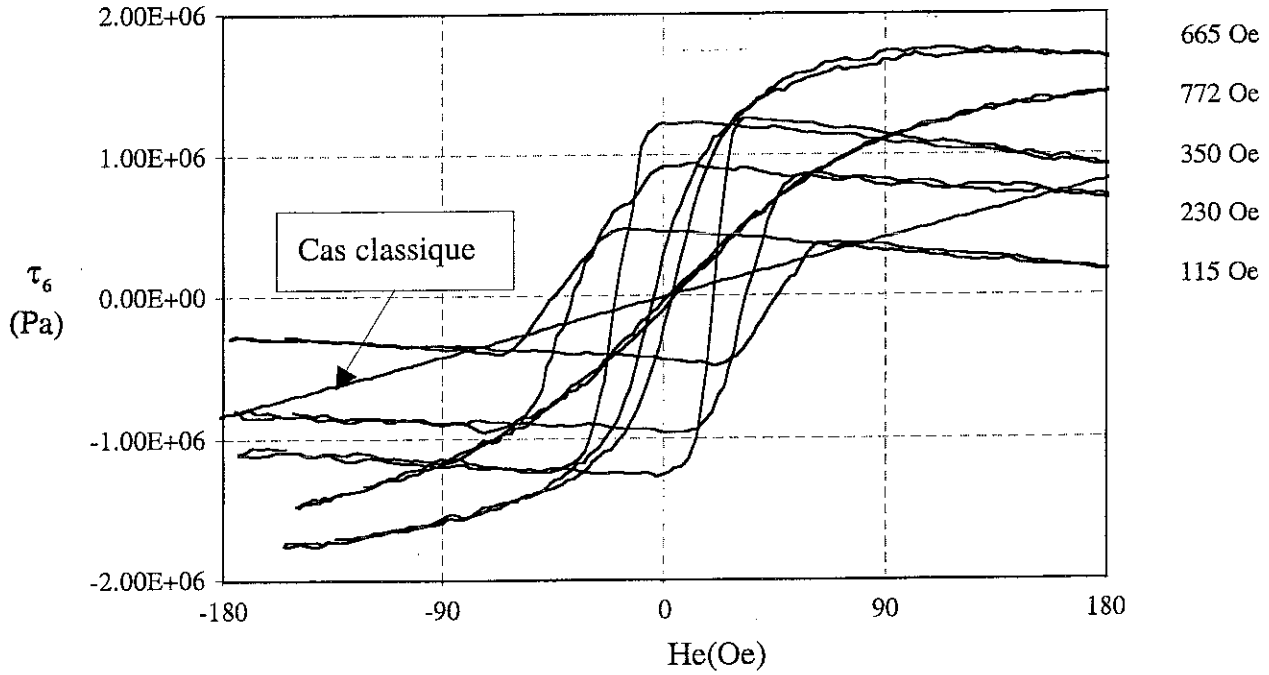
On déduit également de ces mesures la valeur du coefficient de couplage magnétoélastique b du bilame. On obtient pour b une valeur de 5 Mpa.

III.3.3. Résultats de l'expérience.

Pour des valeurs du champ de polarisation H_p allant de 115 Oe à 885 Oe, nous avons fait l'acquisition de θ en fonction du champ d'excitation H_e . La (Fig. III-8) représente ces cycles pour des valeurs représentatives de H_p . On a, en fait, représenté sur cette figure la contrainte de cisaillement τ_6 de la couche.

Conformément au modèle, on constate bien le passage d'un fonctionnement bistable à un fonctionnement linéaire en torsion. Ce passage a lieu pour une valeur critique du champ de polarisation H_p de 700 ± 50 Oe. Expérimentalement, on observe clairement à champ d'excitation nul, deux valeurs possibles pour τ_6 pour $H_p \leq 650$ Oe. Théoriquement, ce

passage doit avoir lieu pour une valeur du champ critique égale au champ d'anisotropie de 1100 Oe.



Contrainte de cisaillement dans le bilame polarisé excité en torsion pour différentes valeurs du champ de polarisation. La courbe "cas classique" représente la torsion obtenue sans polarisation, en appliquant le champ d'excitation perpendiculairement à l'axe facile .

Fig. III-8

Le modèle de la couche bloquée pour le bilame polarisé excité en torsion prévoit qu' à champ d'excitation nul et en régime bistable d'après (Eq. III-15):

$$\tau_6 = b h_p \sqrt{1 - h_p^2} \quad \text{soit} \quad \frac{\tau_6}{h_p \sqrt{1 - h_p^2}} = b \quad (\text{Eq. III-17})$$

avec
$$h_p = \frac{H_p}{H_a}$$

désignant le champ de polarisation réduit, qui s'exprime comme le rapport du champ de polarisation sur le champ d'anisotropie.

La courbe de la figure (Fig. III-9) représente la valeur de b déduite du rapport de l'équation (Eq. III-17) en fonction de H_p . Ce rapport a été tracé dans les cas pour lesquels le régime bistable est clair. On constate un relativement bon accord avec la valeur de 5 Mpa trouvée

expérimentalement pour b (trait continu sur la figure) lors de la mesure classique de magnétostriction (Fig. III-7).

Lorsqu'il existe deux positions stables à champ d'excitation nul, on définit H_c le champ coercitif comme le champ d'excitation H_e auquel la contrainte de cisaillement τ_6 change de signe dans la couche. Cela correspond au champ auquel s'effectue le basculement d'une position stable à l'autre. La figure (Fig. III-9) compare les valeurs obtenues expérimentalement aux valeurs déduites du modèle et correspondant à un retournement cohérent de l'aimantation.

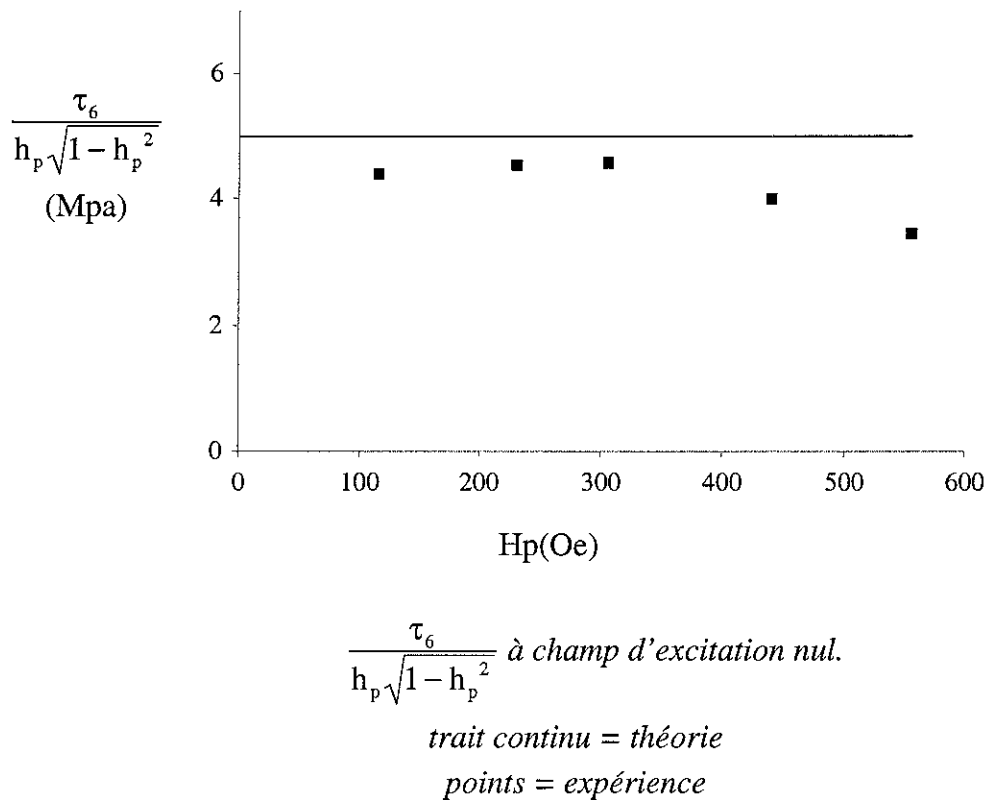
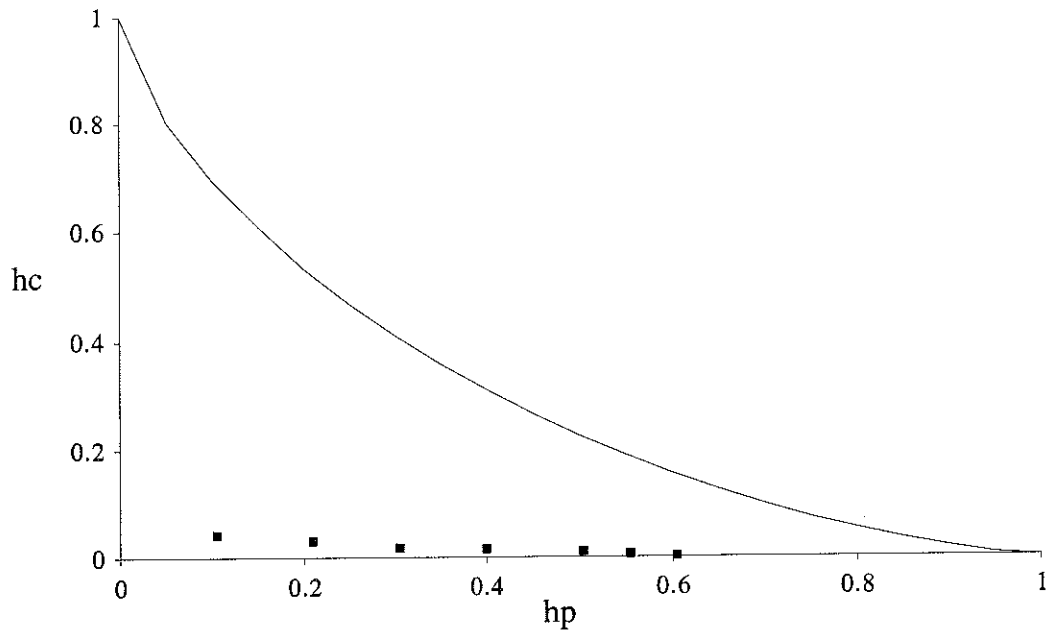


Fig. III-9

Les valeurs trouvées expérimentalement sont beaucoup plus faibles que les valeurs théoriques. Dans notre modèle, le retournement de l'aimantation correspond au franchissement d'une barrière d'énergie. Dans la réalité, ce processus est en compétition avec des mécanismes de nucléation et de propagation de domaines qui abaissent fortement la valeur du champ coercitif.



Champ coercitif réduit en fonction du champ de polarisation. Réduit.

$$(h_c = \frac{H_c}{H_a}, h_p = \frac{H_p}{H_a})$$

t

Trait continu = théorie.

Points = expérience.

Fig. III-10

III.4. Conclusion

On a étudié la réponse en torsion du bilame magnétostrictif cantilever en fonction du champ magnétique appliqué selon l'axe facile pour divers champ de polarisation appliqués selon l'axe difficile. Conformément aux prévisions théoriques, la réponse piézomagnétique diverge à la transition. Bien que le comportement des couches d'alliage s'éloigne quelque peu de celui du modèle idéal monodomaine à anisotropie uniaxiale, la validité pratique de la méthode est confirmée avec notamment la mise en évidence de champs de commande 10 à 100 fois inférieurs au champ d'anisotropie. Dans le prochain chapitre, nous allons montrer que d'une manière équivalente, on peut utiliser une instabilité d'origine élastique pour diminuer le champ de commande d'un bilame magnétostrictif.

Chapitre IV. Etude de l'instabilité élastique du bilame magnétostrictif.

Chapitre IV. Etude de l'instabilité élastique du bilame magnétostrictif.

Au cours de ce travail nous avons tenté de vérifier qu'en se plaçant au voisinage d'une instabilité élastique, on peut réduire le champ de commande d'un microactionneur mettant en œuvre la flexion d'un bilame magnétostrictif. L'instabilité élastique considérée est le classique flambement des poutres.

Le modèle de bilame magnétostrictif introduit et utilisé dans les précédents chapitres faisait appel à la notion de raideur élastique ramenée à la surface du substrat. Parler de raideur sous entend que la réponse est linéaire. Ici on envisage une situation plus générale où la relation entre contrainte et déformation de surface d'un substrat comporte un terme d'ordre 3 en plus du terme linéaire. On admet aussi, sous réserve de justifications qui sont exposées plus loin, que le terme linéaire peut s'annuler et changer de signe.

On montre alors en étudiant une situation simple bien spécifique que l'on peut induire dans le bilame une transition du second ordre très analogue à celle déjà étudiée au chapitre précédent mais qui est ici de nature élastique plutôt que magnétique.

A cette transition est encore une fois associée une divergence de la réponse piézomagnétique conformément à ce qu'on espérait.

On présente ensuite les résultats classiques sur le flambement des poutres encastrees à leurs deux extrémités et dans une partie plus originale, on introduit et on précise cette notion utilisée plus haut de réponse élastique non linéaire ramenée à la surface du substrat.

IV.1. Transition élastique du second ordre et divergence de la réponse piézomagnétique dans un bilame magnétostrictif précontraint.

Nous nous plaçons dans la situation simple suivante.

Le bilame est une poutre rectangulaire de largeur L et de longueur $l \gg L$ et d'épaisseur e . La couche magnétique recouvre toute la largeur du bilame mais seulement sur une longueur $l_1 < l$; on comprendra pourquoi plus loin. Attention, h désigne ici et dans le paragraphe IV.2.3 l'épaisseur de la couche afin de retrouver les notations des chapitres II et III. Soit Ox l'axe parallèle à la longueur. On suppose que la couche magnétique a son axe facile à 45° de Ox .

Cette situation vise à obtenir que les oscillations de l'aimantation spontanée autour de sa position de repos soient couplées à la déformation en flexion de la poutre.

On va développer l'énergie libre totale U du bilame à l'ordre 2 en $d\theta$, S_1 , S_2 , S_6 , $d\theta$ étant un faible écart de θ à sa valeur de repos de 45° . On peut pour cela partir de l'expression (Eq. II-7) qui ramène l'énergie du bilame complet à celle d'une couche magnétique équivalente possédant, toutes choses égales par ailleurs, des *constantes élastiques effectives* tenant compte du substrat.

Nous utilisons ici la notation A_1, B_1, C_1 au lieu de A, B, C car les formules (Eq. II-8) ne sont plus a priori valables dans le problème qui nous occupe ici.

En faisant par ailleurs $H_x = H_y = 0$ dans (Eq. II-7), le développement cherché s'écrit :

$$U = 1/2 A hLl_1 (S_1^2 + S_2^2) + BhLl_1 S_1 S_2 + 1/2 ChL_1 S_6^2 + b hLl_1 (S_1 - S_2) d\theta + K_b hLl_1 d\theta^2$$

(Eq. IV-1)

On a tenu compte évidemment en écrivant l'énergie d'anisotropie, de la nouvelle position de l'axe facile . On voit que seules les déformations d'élongations sont couplées à $d\theta$.

On peut donc faire $S_6 = 0$ sans perdre en généralité et admettre également que S_2 est nul . Il se trouve que c'est rigoureusement vrai au moins dans la poutre en silicium nue, dans la mesure où elle est orientée selon 110 car le coefficient de Poisson s'annule et il y a découplage entre les deux composantes d'élongation . On a donc un système simple à deux degrés de liberté, S_1 qu'on écrira S , et $d\theta$, dont la densité d'énergie libre s'écrit :

$$U/hLl_1 = f = 1/2 A S^2 + b S d\theta + K_b d\theta^2 \quad (\text{Eq. IV-2})$$

On retrouve ici la forme très simple discutée dans l'introduction.

Nous faisons maintenant l'hypothèse que le coefficient A peut s'annuler et changer de signe. On verra plus loin par quels moyens on peut obtenir ce résultat. Toutefois si le terme en S^2 s'annule, on ne peut plus négliger les termes d'ordre supérieur. On ajoutera donc un terme d'ordre 4 en S . En revanche on conservera pour le degré de liberté magnétique, un développement à l'ordre deux. Cela donne:

$$F = 1/2 A_1 S^2 + 1/4 A_2 S^4 + b S d\theta + K_b d\theta^2 \quad (\text{Eq. IV-3})$$

Les équations d'état prennent la forme :

$$\begin{cases} T = A_1 S + A_2 S^3 + b d\theta \\ \Gamma = b S + 2K_b d\theta \end{cases} \quad (\text{Eq. IV-4})$$

où T est la contrainte conjuguée de S et Γ le couple appliqué à l'aimantation.

Examinons tout d'abord ce qui se passe à aimantation libre, c'est à dire pour $\Gamma = 0$. Alors :

$$T = \left(A_1 - \frac{b^2}{2K_b} \right) S + A_2 S^3$$

Quand $A_1 \gg \frac{b^2}{2K_b}$, on a un comportement élastique classique, le terme d'ordre 3 étant négligeable devant le terme linéaire.

Pour $A_1 < \frac{b^2}{2K_b}$, la relation $T(S)$ présente une branche instable. On observe un cycle d'hystérèse élastique caractéristique d'une phase bistable.

La transition se produit pour $A_1 = \frac{b^2}{2K_b}$. C'est une transition du second ordre tout à fait analogue à la transition magnétique étudiée dans le chapitre précédent. Mais ici, la transition est de nature élastique.

Ce qui nous intéresse plus particulièrement est réponse piézomagnétique du système. On la calcule dans l'hypothèse où il n'y a aucune force extérieure, donc $T=0$. On trouve avec $H_a = \frac{2K_b}{\mu_0 M_s}$

$$\frac{H}{H_A} = \left(-\frac{1}{b} \right) \left(A_1 - \frac{b^2}{2K_b} \right) S - \left(\frac{A_2}{b} \right) S^3 \quad (\text{Eq. IV-5})$$

Lorsque A_1 est positif et grand (la situation "normale") cette équation décrit une réponse piézomagnétique linéaire de pente $dS/dH = 1/ (H_A) (A_1 - b^2/2K_b)$ dont on ne s'étonnera pas qu'elle soit inversement proportionnelle aux "duretés" magnétique et mécanique du système. Comme nous l'attendions , cette pente diverge pour $A_1 - b^2/2K_b = 0$ et la réponse devient alors totalement non linéaire.

Lorsque $A_1 < \frac{b^2}{2K_b}$, la relation $S(H)$ n'est plus univoque. On vérifie facilement que les branches stables sont celles qui ne passent pas par 0. (Le critère de pente positive n'est plus applicable ici car les variables H et S ne sont pas des conjuguées au sens thermodynamique). Le système présente alors une bistabilité élastique et le basculement entre les deux est commandable par un champ magnétique.

Nous allons maintenant examiner les principes que l'on peut mettre en œuvre pour contrôler effectivement la valeur de A_1 , ce qui nous permettra de justifier l'expression (Eq. IV-3).

IV.2. Introduction et présentation de l'instabilité élastique de flambement des poutres.

IV.2.1. Exemple le plus simple : formule d'Euler.

Le développement important de travaux dans le domaine de la résistance des matériaux et du calcul des structures aux dix-huitièmes et dix-neuvièmes siècles [Ref. IV-1] a montré que lorsque l'on applique un effort de compression selon l'axe principal d'une poutre parfaitement rectiligne, il existe une valeur critique de l'effort de compression pour laquelle une déformation latérale prend naissance. Cette déformation croît très rapidement avec l'effort de compression. Il s'agit du flambement élastique des poutres.

Pour illustrer cela, nous allons nous intéresser à l'exemple suivant.

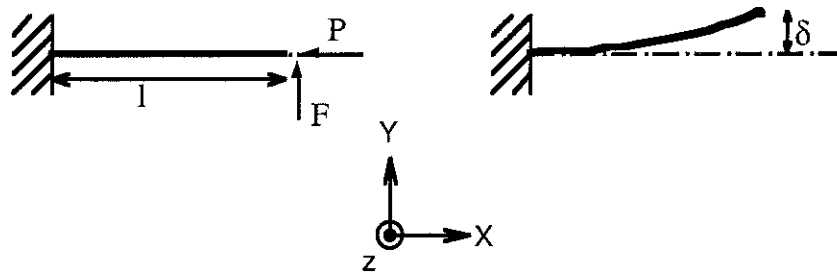


Fig. IV-1

Considérons le cas d'une poutre prismatique parfaitement rectiligne d'axe x encastree à une extrémité, libre à l'autre et comprimée par une force P appliquée suivant son axe (Fig. IV-1) [Ref. IV-2]. On suppose la poutre parfaitement élastique et on admet qu'il n'y a aucune contrainte dépassant la limite d'élasticité. Tant que la force P reste inférieure à la valeur critique, la barre est simplement soumise à une compression axiale mais reste rectiligne. Cette forme rectiligne de l'équilibre élastique est stable, c'est à dire que si l'on applique une légère force latérale F , il se produit une légère flèche δ qui disparaît quand la force latérale cesse d'agir et la barre redevient rectiligne. En augmentant progressivement P , on arrive à un état où la forme d'équilibre rectiligne devient instable et où la flèche produite par la force latérale F est importante et ne disparaît plus quand cette dernière cesse d'agir. La charge critique ou charge d'Euler est alors définie comme étant la charge axiale suffisante pour que la poutre conserve une forme fléchie.

Cette charge critique peut être calculée au moyen de l'équation différentielle de la ligne élastique des poutres [Ref. IV-3] en évaluant l'effet de la force de compression P sur la flèche δ lorsque une force latérale F est appliquée à l'extrémité libre de la poutre.

$$C \frac{d^2 y}{dx^2} = P(\delta - y) + F(1 - x) \quad (\text{Eq. IV-6})$$

P la force appliquée selon la direction x (comptée positivement dans le sens des x négatifs).

F la force latérale appliquée selon la direction y .

$y(x)$ la déformée de la ligne moyenne de la poutre.

δ la flèche à l'extrémité libre de la poutre.

C est la rigidité en flexion de la poutre dans le plan (x,y) . elle vaut EI dans le cas des poutres prismatiques avec E module d'Young du matériau constituant la poutre et I moment quadratique de sa section par rapport à l'axe z .

Le terme de droite de l'équation correspond à la somme des moments appliqués sur une section droite de la poutre située à la cote x , l'origine des x étant prise à l'encastrement de la poutre. Le terme de gauche est la relation classique qui relie la courbure de la ligne moyenne de la poutre en x à la somme des moments appliqués sur une section droite de la poutre située à la cote x .

Cette relation ne tient pas compte des effets des efforts tranchants et du raccourcissement de la poutre. Elle est seulement valable pour les petites valeurs de la flèche δ . La solution générale de cette équation est de la forme :

$$y = A \cos kx + B \sin kx + \delta + \frac{F}{P}(1-x)$$

(Eq. IV-7)

avec $k^2 = \frac{P}{C}$

où A et B sont des constantes déterminées par les conditions aux limites habituelles aux extrémités de la poutre.

Dans le cas de la poutre de longueur l représentée (Fig. IV-1), dont une extrémité est libre et l'autre encastree, ces conditions imposent la flèche δ :

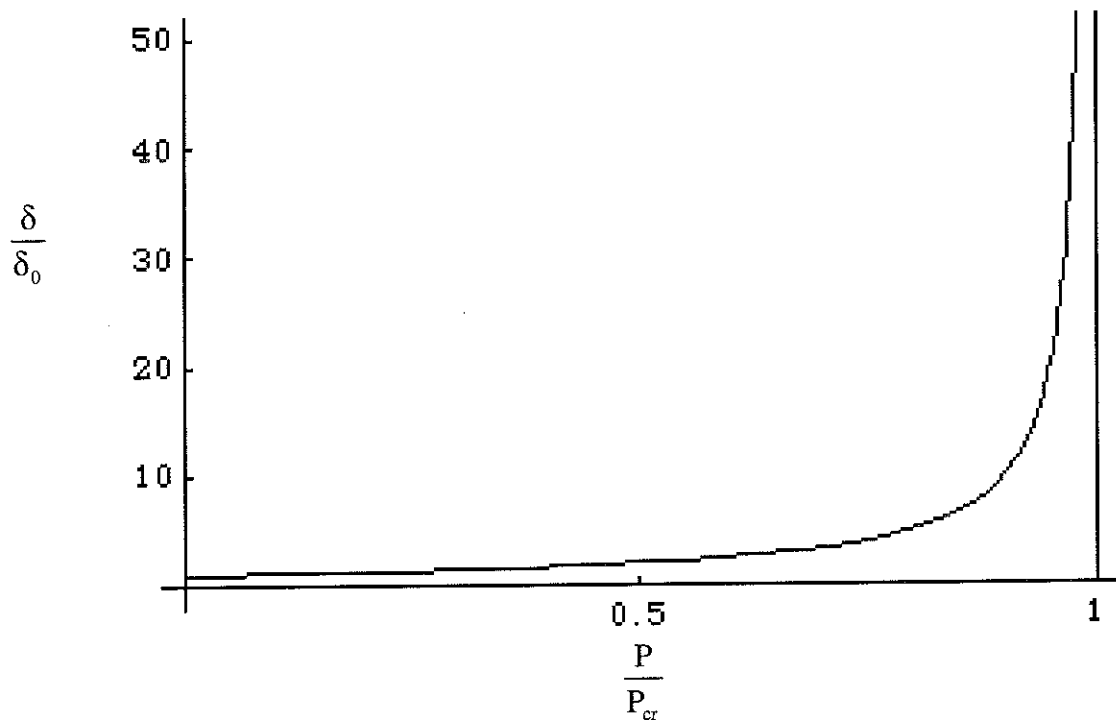


Fig. IV-2

$$\delta = 3\delta_0 \left(\frac{\tan u - u}{u^3} \right)$$

(Eq. IV-8)

avec $u = kl = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 C}{4l^2}$$

et $\delta_0 = \frac{Fl^3}{3C}$

δ_0 est la flèche produite par la charge latérale F en l'absence d'effort de compression axiale P de la poutre. La figure (Fig. IV-2) montre l'évolution de la flèche en fonction du rapport $\frac{P}{P_{cr}}$.

On constate que la flèche δ à l'extrémité de la poutre diverge pour une valeur de F aussi petite que l'on veut lorsque :

$$P = P_{cr} = \frac{\pi^2 C}{4l^2} \quad (\text{Eq. IV-9})$$

L'équation (Eq. IV-9) est appelée formule d'Euler et définit la charge critique, c'est à dire la charge à partir de laquelle la forme rectiligne n'est plus stable : Une très faible charge latérale provoque une divergence de la flèche δ . En réalité, il n'y a pas divergence de δ , mais soit celle-ci atteint une valeur importante soit il y a rupture de la poutre. L'équation (Eq. IV-7) n'est en effet valable que pour les petites valeurs de δ .

Pour le traitement exacte des flèches de grande valeur produites par le flambement des barres élastiques, on pourra se reporter aux références [Ref. IV-4] et [Ref. IV-5].

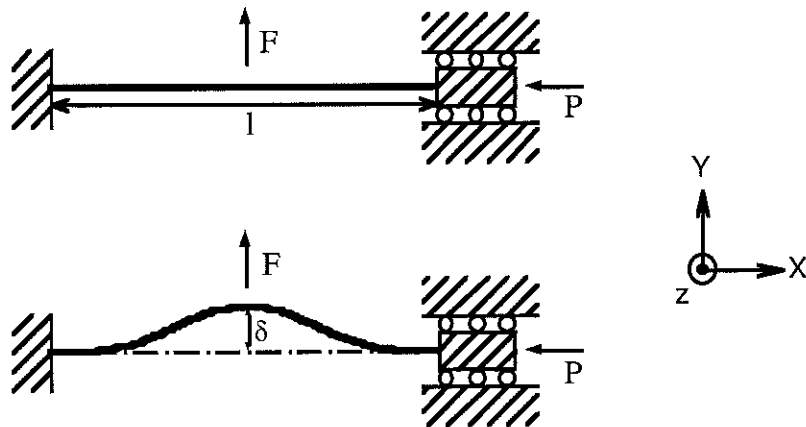


Fig. IV-3

Nous allons maintenant examiner le cas d'une poutre rectiligne de longueur l encastree à ses deux extrémités et soumise à un effort de compression longitudinal P (Fig. IV-3). On émet les mêmes hypothèses que précédemment et on regarde l'influence de l'effort P sur la flèche δ au centre de la poutre lorsque une force latérale F est appliquée en ce point. On obtient le

même résultat que précédemment pour l'évolution de la flèche δ en fonction de l'effort de compression P :

$$\delta = 3\delta_0 \left(\frac{\tan u - u}{u^3} \right)$$

avec $u = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}$

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 C}{l^2}$$

et $\delta_0 = \frac{F}{3C} \left(\frac{l}{4} \right)^3$

δ_0 est la flèche produite par la charge latérale F en l'absence d'effort de compression axial P de la poutre. La figure (Fig. IV-2) montre à nouveau l'évolution de la flèche δ en fonction du rapport $\frac{P}{P_{cr}}$. On constate que la flèche δ au milieu de la poutre diverge pour une valeur de F aussi petite que l'on veut lorsque :

$$P = P_{cr} = \frac{4\pi^2 C}{l^2} \quad (\text{Eq. IV-10})$$

On peut remarquer que cette valeur de la charge critique est la même que celle donnée par l'équation (Eq. IV-9) pour une poutre encastree à une extrémité et libre à l'autre de longueur $\frac{l}{4}$.

L'intérêt de ce calcul est qu'il nous donne l'allure de la déformée de la poutre tant que $P < P_{cr}$ et que δ est suffisamment petit. En regardant la figure (Fig. IV-2), on s'aperçoit que l'on peut choisir F (donc δ_0) assez petite pour que la poutre puisse être considérée comme rectiligne tant que P n'a pas atteint une valeur choisie aussi proche que l'on veut de P_{cr} . Or, lorsque $P \rightarrow P_{cr}$, on a :

$$y(x) \propto (1 - \cos(\frac{2\pi}{l}x)) \quad (\text{Eq. IV-11})$$

On en déduit que à l'approche du flambement, une très légère perturbation de la forme rectiligne de la poutre provoque une déformation dont l'allure est donnée par l'équation précédente. On nomme cette déformée le premier mode de flambement pour la poutre encastree à ses deux extrémités.

Les fortes déformations provoquées par une très faible charge latérale F à l'approche du flambement impliquent que la rigidité en flexion de la poutre devient très faible et même aussi

petite que l'on veut. Cela présente un important intérêt pratique pour les microystèmes, puisque dans ce domaine, les actionneurs sont souvent constitués de poutres ou de membranes se déformant en flexion. Les deux exemples précédents introduisent le flambement des poutres soumises à un effort de compression P constant. Ce type de situation provoque d'après le modèle utilisé pour les étudier une divergence de la déformation latérale de la poutre lorsque la charge axiale atteint sa valeur critique. Dans la pratique, on aboutit le plus souvent à une destruction du système. De plus, expérimentalement, aux échelles centimétriques et millimétriques des microsystèmes, un effort de compression axial constant est difficile à réaliser. C'est pourquoi dans la suite de ce chapitre nous allons nous intéresser au flambement des poutres non plus sous charge axiale constante, mais à déformation longitudinale imposée.

IV.2.2. Flambement d'une poutre sous l'action d'une déformation longitudinale imposée : Approche énergétique de l'instabilité élastique.

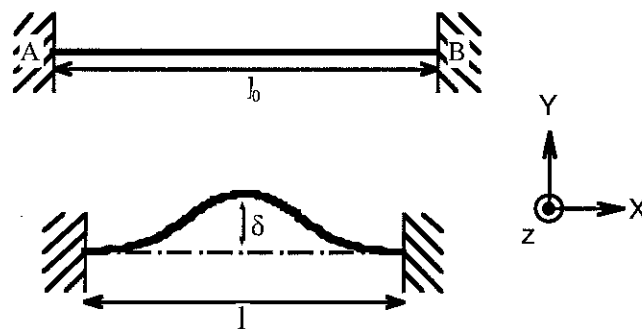


Fig. IV-4

Soit une poutre rectiligne (Fig. IV-4) d'axe x et de longueur l_0 encastée à ses deux extrémités A et B . On suppose la poutre parfaitement élastique et on admet qu'il n'y a aucune contrainte dépassant la limite d'élasticité. On dispose d'un système permettant d'imposer l'écartement l ($l \leq l_0$) des points A et B sur l'axe x . Il y a flambement élastique de la poutre quand une déformation latérale de flèche δ apparaît.

Pour étudier le flambement élastique de la poutre dans ce système, nous allons utiliser une méthode de minimisation d'énergie. L'énergie totale U de la poutre comprend deux termes. Le premier U_1 que l'on appelle énergie de compression correspond à l'énergie due à l'allongement de la fibre moyenne de la poutre. Le second terme U_2 que l'on appelle énergie de flexion correspond à l'énergie due à la flexion de la ligne moyenne de la poutre.

Lors de la flexion de la poutre, les déplacements longitudinaux des extrémités A et B de la poutre sont impossibles. Dans ce cas, une flexion entraîne un allongement de la fibre moyenne de la poutre.

Nous prenons comme état de référence de la ligne moyenne de la poutre la forme rectiligne lorsque les deux extrémités A et B de la poutre ont été rapprochées à la distance l . Dans cet état de référence, l'allongement de la ligne moyenne de la poutre est alors uniforme sur toute la longueur de la poutre et vaut :

$$\varepsilon_0 = \frac{l_0 - l}{l_0} \quad (\text{Eq. IV-12})$$

Il s'agit de la déformation longitudinale imposée à la poutre.

On note $v(x)$ le déplacement vertical d'un point de la ligne moyenne par rapport à cet état de référence. Alors, l'allongement d'un élément de longueur dx de la ligne moyenne de la poutre est donné par :

$$\left(\frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right) dx \quad (\text{Eq. IV-13})$$

Cette relation est celle qui est généralement utilisée pour la description du flambement de poutres ou de membranes [Ref. IV-6][Ref. IV-7]. On obtient ainsi pour l'énergie de compression :

$$U_1 = \frac{K}{2} \int_0^l \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 - \varepsilon_0 \right) dx \quad (\text{Eq. IV-14})$$

et pour l'énergie de flexion de la poutre :

$$U_2 = \frac{C}{2} \int_0^l \left(\left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 \right) dx \quad (\text{Eq. IV-15})$$

où

C est la raideur en flexion de la poutre étudiée

K est la raideur à l'allongement de la poutre étudiée.

Effectuons un peu d'analyse dimensionnelle sur les coefficients K et C .

K et C dépendent du module de rigidité élastique γ du matériau constituant la poutre et des dimensions latérales r caractéristiques d'une section de la poutre. On a :

$$K := [\text{énergie}] \cdot [\text{longueur}]^{-1}$$

$$C := [\text{énergie}] \cdot [\text{longueur}]$$

$$\gamma := [\text{énergie}] \cdot [\text{longueur}]^{-3}$$

$$r := [\text{longueur}]$$

d'où $K \propto \gamma r^2$ et $C \propto \gamma r^4$

dans la suite, on posera donc :

$$K = \alpha \gamma r^2 \quad \text{et} \quad C = \beta \gamma r^4 \quad (\text{Eq. IV-16})$$

où α et β sont des coefficients qui dépendent uniquement de la géométrie de la poutre. Par exemple, pour une poutre prismatique de module d'Young E , de section rectangulaire d'épaisseur h et de largeur L , on obtient :

$$K = \left(E \frac{L}{h} \right) h^2 \quad \text{et} \quad C = \left(E \frac{L}{12h} \right) h^4 \quad (\text{Eq. IV-17})$$

Ces valeurs sont aussi valables pour la flexion pure selon une seule direction des plaques minces [Ref. IV-8].

On suppose pour les déplacements $v(x)$ de la ligne moyenne de la poutre qu'ils correspondent à ceux donnés (Eq. IV-11) par le premier mode de flambement de la poutre encastree étudiée au paragraphe précédent.

Ainsi, avec :

$$v(x) = A(1 - \cos(\frac{2\pi}{l}x)) \quad (\text{Eq. IV-18})$$

on a :

$$U = \underbrace{C \frac{4\pi^4}{l^3} A^2}_{U_2} + \underbrace{K \frac{3\pi^4}{4l^3} A^4 - K \frac{\pi^2}{l} A^2 \epsilon_0 + \text{Cste}}_{U_1}$$

en utilisant l'expression de K et C donnée par la relation (Eq. IV-16)

$$U = \frac{r^6 \pi^4}{l^3} 4\gamma \beta \left((1 - \eta) \delta^2 + \frac{3\alpha}{16\beta} \delta^4 \right) + \text{cste} \quad (\text{Eq. IV-19})$$

que l'on met sous sa forme réduite :

$$\tilde{U} = (1 - \eta) \delta^2 + \frac{3\alpha}{16\beta} \delta^4 = a\delta^2 + b\delta^4 \quad (\text{Eq. IV-20})$$

Avec :

$\delta = A/r$ déplacement transversal réduit de la poutre

$$\eta = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{cr}}$$

$$\epsilon_{cr} = 4\pi^2 \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{r}{l} \right)^2 \quad (\text{Eq. IV-21})$$

δ est le paramètre qui décrit l'état de notre système. Son énergie est un polynôme pair d'ordre 4 en δ dont le coefficient d'ordre 2 s'annule et change de signe pour une valeur critique $\epsilon_0 = \epsilon_{cr}$ de la déformation imposée à la poutre. Il est intéressant de remarquer que la déformation critique est indépendante des propriétés élastiques du matériau constituant la poutre et dépend seulement de la géométrie de sa section droite et du carré de son élancement.

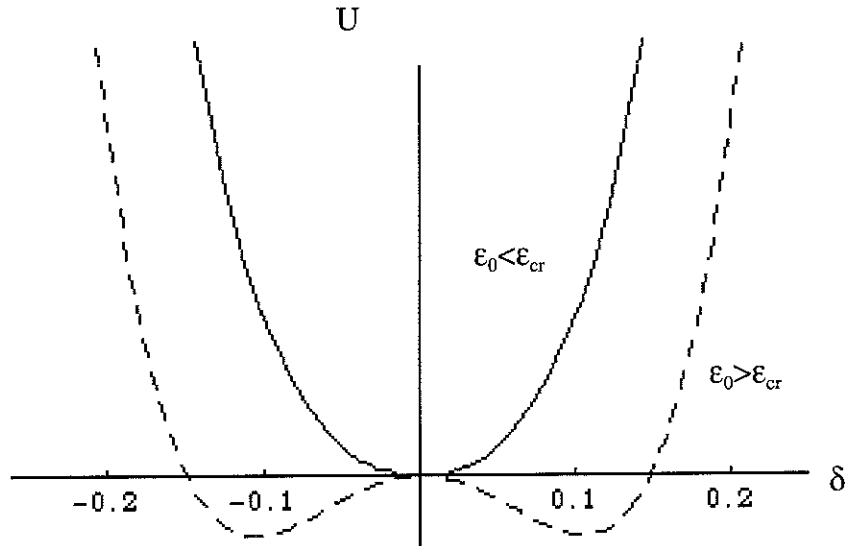


Fig. IV-5

Cette situation correspond selon l'approche de Landau [Ref. IV-9] au développement de l'énergie au 4^{ème} ordre en fonction du paramètre d'ordre au voisinage du point critique pour des systèmes présentant une transition de phase du second ordre. Dans notre cas le paramètre de contrôle ϵ_0 joue le rôle de la température et δ joue le rôle du paramètre d'ordre.

Ainsi, lorsque $\epsilon_0 \leq \epsilon_{cr}$ on va avoir un seul minimum en $\delta=0$ pour l'énergie U en fonction de δ . Dans ce cas, la poutre reste rectiligne.

Et lorsque $\epsilon_0 \geq \epsilon_{cr}$ on va avoir deux minimums en

$$\delta = \pm \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{8}{3} \sqrt{(\eta - 1)} \quad (\text{Eq. IV-22})$$

pour l'énergie U . Cette fois-ci, la poutre présente une flèche non nulle. Il y a deux positions non rectilignes stables pour la déformée de la ligne moyenne. La forme rectiligne est alors une position d'équilibre instable. Il y a flambement élastique de la poutre.

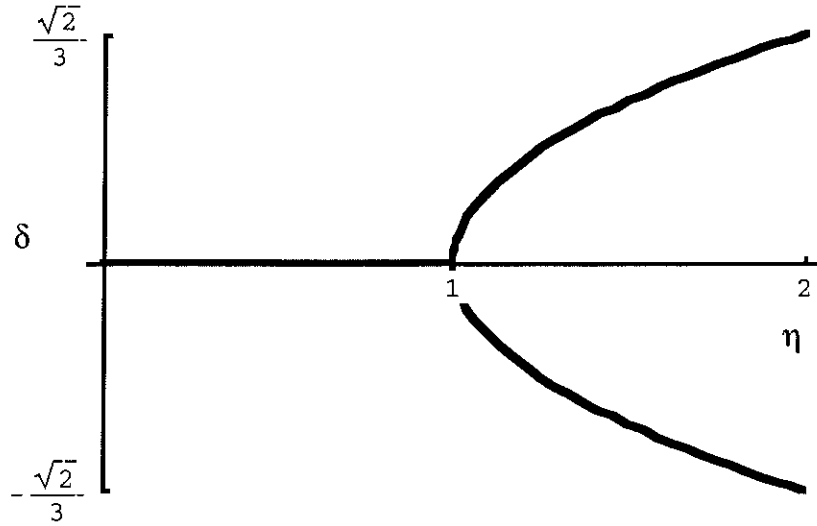


Fig. IV-6

La raideur K_{flx} en flexion de la poutre avant le flambement est donnée par la courbure de l'énergie autour de la position d'équilibre de la poutre $A=0$:

$$K_{\text{flx}} = \frac{d^2 U}{dA^2} \propto (1 - \eta)$$

K_{flx} s'annule donc lorsque $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_{\text{cr}}$ comme on l'a déjà fait remarquer dans la section précédente pour le cas du flambement des poutres sous charge axiale constante.

Juste avant le flambement, lorsque $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\text{cr}}$, la poutre est rectiligne. L'élongation de la fibre neutre vaut donc alors ε_{cr} et l'effort exercé en A et B par les encastremets sur les extrémités de la poutre vaut donc :

$$P = K\varepsilon_{\text{cr}} = \frac{4C\pi^2}{l^2}$$

On retrouve bien la valeur de l'effort (Eq. IV-10) donné pour le flambement de la poutre encastree au chapitre précédent.

IV.2.3. Relation entre contrainte et déformation planaires à la surface d'une poutre proche du flambement.

On a vu qu' au voisinage du premier seuil de flambement , la déformée de la poutre en réponse à une excitation quelconque est toujours décrite par le profil correspondant à ce mode de flambement principal, c'est à dire (voir Eq. IV-11) :

$$v(x) = A (1 - \cos 2\pi x/l) \quad (\text{Eq. IV-23})$$

On va donc admettre que si la poutre est excitée via la magnétostriction d'une couche magnétique déposée à sa surface , la déformée induite dans la poutre au voisinage du seuil de flambement sera de toutes façons de la forme (Eq. IV-23).

On remarque que ce profil se caractérise par une partie à courbure approximativement constante centrée sur le milieu de la poutre et dont la longueur totale est notée l_1 . On suppose que c'est dans cette zone que la couche magnétique sera déposée. Il résulte par ailleurs de la formule (Eq. IV-13) donnant l'allongement de la poutre associé à une déviation transverse que dans cette même zone à courbure constante , l'allongement est pratiquement nul.

La déformation de surface se réduit donc à celle associée à la courbure , c'est à dire

$$S = 1/2 \ e \ d^2v/dx^2 = (2\pi^2/l^2) \ e \ A \quad (\text{Eq. IV-24})$$

où e est l'épaisseur de la poutre.

L'expression (Eq. IV-19) de l'énergie élastique d'une poutre d'épaisseur e et de longueur l correspondant au mode de flambement principal s'écrit par ailleurs :

$$U = (4\pi^4 C/l^3 - \pi^2 K \epsilon_0/l) A^2 + 3/4 (\pi^4 K/l^3) A^4 \quad (\text{Eq. IV-25})$$

avec $C = E L e^3/12$, et $K = E L e$

Si hT est la contrainte planaire associée à la déformation en surface S il vient pour une variation dA de l'amplitude de la déformée :

$$L l_1 h \ T \ dS = 2(4\pi^4 C/l^3 - \pi^2 K \epsilon_0/l) A \ dA + 3 (\pi^4 K/l^3) A^3 \ dA$$

Dans cette équation , le membre de gauche représente le travail de la contrainte de surface $T \times h$

(intégrée sur la zone où elle sera effectivement appliquée par la couche active d'épaisseur h) et le membre de droite, la variation correspondante d'énergie élastique dans la poutre. En

utilisant la relation (Eq. IV-24) inversée, ainsi que les expressions (Eq. IV-17) il vient après quelques manipulations :

$$T = (EI^3 / \pi^2 h e l_1) [(\epsilon_{cr} - \epsilon_0) S + (3/32 \pi^2) (l/e)^2 S^3] \quad (\text{Eq. IV-26})$$

où

$$\epsilon_{cr} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{e}{l} \right)^2 \text{ est la déformation critique de flambement.}$$

Il est clair qu'à cette relation d'état, correspond l'énergie élastique

$$U = L (EI^3 / \pi^2 e) [1/2 (\epsilon_{cr} - \epsilon_0) S^2 + 1/4 (3/32 \pi^2) (l/e)^2 S^4]$$

On peut déjà noter que le terme quadratique en S s'annule et change de signe pour $\epsilon_0 = \epsilon_{cr}$ c'est à dire au seuil de flambement.

Mais il nous faut écrire l'énergie totale du bilame en ajoutant l'énergie de la couche magnétique. Contentons nous ici d'écrire la seule partie élastique:

$$U_{el} = l_1 L h (1/2 \alpha S^2) + L (EI^3 / \pi^2 e) [1/2 (\epsilon_{cr} - \epsilon_0) S^2 + 1/4 (3/32 \pi^2) (l/e)^2 S^4] \quad (\text{Eq. IV-27})$$

On voit que la densité volumique d'énergie élastique (ramenée au volume de la couche) prend la forme:

$$\begin{aligned} f_{el} &= 1/2 \alpha S^2 + E l^3 / (\pi^2 e l_1 h) [1/2 (\epsilon_{cr} - \epsilon_0) S^2 + 1/4 (3/32 \pi^2) (l/e)^2 S^4] \\ &= 1/2 S^2 [\alpha + E l^3 / (\pi^2 e l_1 h) (\epsilon_{cr} - \epsilon_0)] + (3/128 \pi^4) E (l^5 / e^3 l_1 h) S^4 \end{aligned} \quad (\text{Eq. IV-28})$$

On retrouve donc bien la même forme de densité d'énergie élastique que dans l'expression (Eq. IV-3) avec le coefficient A_1 du terme quadratique qui s'annule pour :

$$(\epsilon_{cr} - \epsilon_0) = -\alpha - E (\pi^2 e l_1 h) / l^3, \text{ soit encore, compte tenu de l'expression de } \epsilon_{cr} :$$

$$\epsilon_0 = \epsilon_{cr} [1 + 3 (\alpha/E) (h/e) (l_1/l)] \quad (\text{Eq. IV-29})$$

Ce qui montre un décalage pas inattendu du seuil de flambement effectif produit par la couche

IV.3. Conclusion.

Dans cette section, nous avons montré qu'il était en principe possible d'induire dans un bilame magnétostrictif une transition de phase du second ordre de nature élastique avec le résultat souhaité que la réponse piézomagnétique diverge à la transition. Un autre résultat intéressant est que dans la phase bistable, on peut commuter les deux états par un champ magnétique . Ces propriétés reposent sur le phénomène de flambement des poutres dans lesquelles on impose une déformation longitudinale. Dans la suite de ce chapitre, nous allons donc présenter différents dispositifs qui nous ont permis d'étudier le flambement à déformation imposée de poutres en silicium. Ces dispositifs vont nous montrer la nécessité de prendre en compte les défauts de la poutre pour décrire correctement son comportement au voisinage du seuil de flambement.

Chapitre V. Etude pratique du flambement élastique des poutres : Rôle des défauts.

Chapitre V. Etude pratique du flambement élastique des poutres : Rôle des défauts.

Ce chapitre est consacré à l'étude des moyens pratiques de réaliser et de caractériser le flambement des poutres . Trois méthodes de réalisation sont mises en œuvre dont deux pourraient être a priori directement utilisables comme méthodes de fabrication des microactionneurs.

Pour vérifier que la raideur en flexion peut, en pratique, effectivement s'annuler et changer de signe sous l'action d'une déformation de compression longitudinale , on est amené à étudier la résonance de flexion des poutres. On trouve en fait que la raideur ne s'annule pas, puisque dans le meilleur des cas on observe seulement une réduction d'un facteur 8 de cette raideur en flexion.

Ces résultats nous conduisent à développer un modèle " non idéal " tenant compte du fait que le système comporte différents défauts (flèche initiale , moments non nuls à l'encastrement etc..).

Une partie du chapitre est consacrée aux oscillations non linéaires des poutres au voisinage du seuil de flambement théorique. On met en évidence trois comportements typiques , que l'on explique théoriquement , et qui permettent de vérifier commodément si une structure donnée est au dessous ou au dessus du seuil de flambement théorique.

Au cours de ce travail, nous n'avons pas pu étudier, comme il était prévu à l'origine, le bilame magnétostrictif complet au seuil de flambement. Nous pensons néanmoins que la présente étude - qui était de toute manière incontournable- pourra servir de base à de futurs travaux sur cette question.

V.1. Montage de principe : contrôle de la déformation longitudinale d'une poutre épaisse.

V.1.1. Introduction.

Le but du dispositif présenté dans cette section est d'étudier l'évolution de la rigidité en flexion d'une poutre encastree en fonction de la déformation ϵ imposée le long de son axe entre les deux points d'encastrement de ses extrémités. Cela doit permettre de vérifier les idées dégagées par les considérations simples de la section précédente.

On choisit une poutre en silicium car les structures déformables utilisées dans les microsystèmes sont en silicium. On peut se procurer des wafers en silicium monocristallin orientés selon l'axe cristallographique (100) d'une épaisseur allant généralement de 100 micromètres à 1mm. Un autre avantage apporté par ces wafers est qu'ils ont une excellente planéité, qualité très utile pour l'étude du flambement des poutres. La Poutre est découpée dans un wafer de 100 micromètres d'épaisseur à l'aide d'une pointe diamant selon les plans de clivage du Silicium mono cristallin qui correspondent aux directions (110).

Dans un premier paragraphe, nous examinons le dimensionnement et le fonctionnement du dispositif. A l'aide de celui-ci, nous pouvons mesurer l'évolution de la fréquence de résonance du premier mode de vibration transversal de la poutre en fonction de ϵ . Ensuite, nous présentons un modèle simple qui relie cette fréquence de résonance à la rigidité en flexion de la poutre. Dans un troisième paragraphe, la comparaison avec l'expérience montre qu'il est nécessaire de tenir compte des défauts de la poutre pour interpréter correctement les résultats.

V.1.2. Description du dispositif.

Pour imposer l'espacement des deux extrémités A et B de la poutre (Fig. IV-4), on colle la poutre sur une structure déformable beaucoup plus rigide qu'elle. La colle utilisée est de la colle cyanoacrylate commerciale Loctite type 401. La structure choisie est un anneau de section carré en acier inoxydable (Fig. V-3). Si on allonge l'anneau selon la direction z à l'aide d'une force de traction P, alors, il y a raccourcissement de δ du rayon de l'anneau selon la direction perpendiculaire x [Ref. V-1] avec :

$$2\delta \cong 1,644 \frac{PR^3}{Ea^4}$$

Relation dans laquelle:

Coté a de la section de l'anneau : 3 mm.

Rayon moyen R de l'anneau : 10,5 mm.

E module d'Young du matériaux constituant l'anneau.

P est la force de traction appliquée à l'anneau selon la direction z.

δ est le raccourcissement du rayon moyen de l'anneau selon la direction x.

En prenant le module D'Young E d'un acier inoxydable de base de 210 Gpa, on trouve :

$$2\delta \cong (1,12 \cdot 10^{-7})P$$

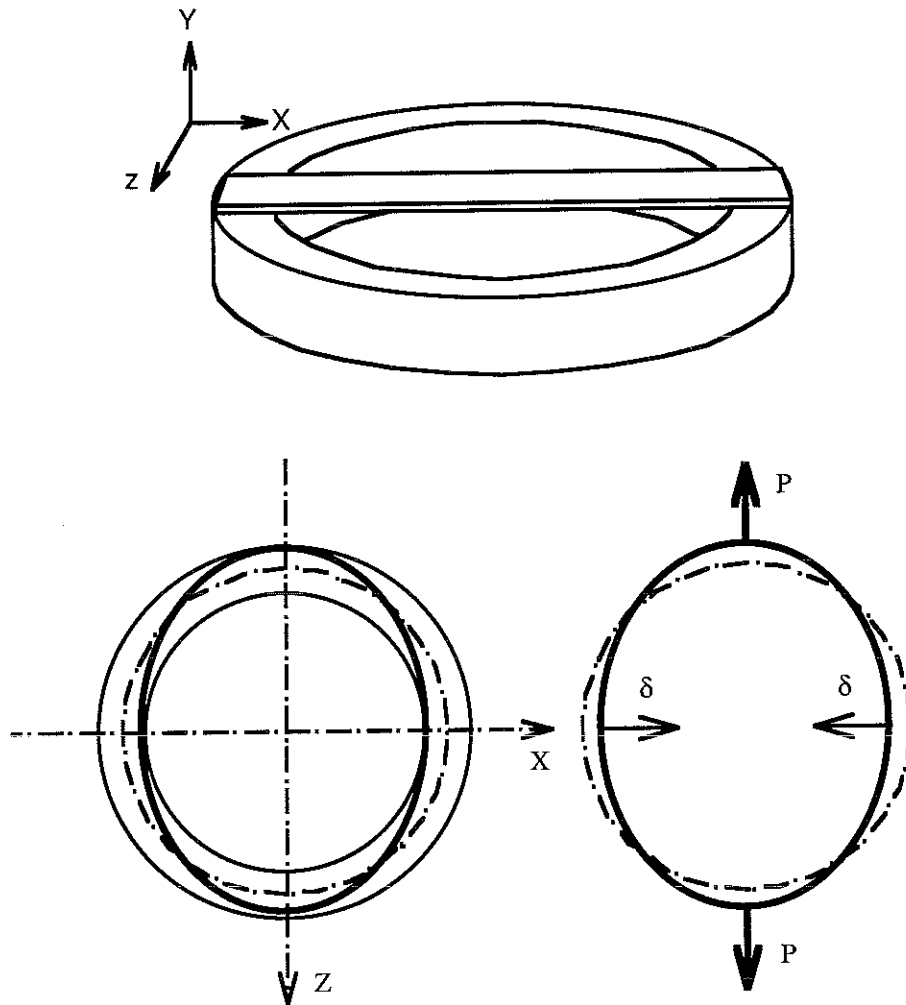


Fig. V-3

c'est à dire une raideur transverse (croisée) de $8,94 \cdot 10^{+6} \text{ Nm}^{-1}$.

La poutre est collée sur l'anneau comme indiqué sur la figure ci-dessus. Les axes cristallographiques (110) du silicium se retrouvent dans les directions x et z, l'axe y correspondant à la direction (100). Les dimensions de la poutre sont les suivantes :

Longueur effective l de la poutre: 18mm.

Epaisseur h de la poutre : 100 μm .

Largeur de la poutre : 1mm.

L'épaisseur du joint de colle entre la poutre et l'anneau est mesurée au microscope optique après polissage dans le plan (x,y) de l'encastrement d'un assemblage poutre sur anneau. On l'estime être comprise entre 5 et 10 μm . On va négliger son rôle dans la suite.

La raideur en compression de la poutre dans la direction x vaut :

$$E_{110} \frac{Lh}{I} = 0,93 \cdot 10^{+6} \text{ Nm}^{-1}$$

Ainsi, On va pouvoir par la suite considérer que la poutre est soumise à une déformation imposée par l'anneau.

En utilisant la relation (Eq. IV-21) donnant la déformation critique ϵ_{cr} pour ce cas et en utilisant les rigidités en flexion et en torsion (Eq. IV-17) données pour une poutre ou une plaque sollicitée en flexion pure, on a :

$$\epsilon_{cr} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \cong 1,015 \cdot 10^{-4}$$

c'est à dire qu'il faut imposer une déformation transverse à l'anneau de :

$$2\delta = l\epsilon_{cr} = 1,828 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 1,828 \text{ } \mu\text{m}$$

ce qui équivaut à une force de traction P dans la direction z de 16,32 N.

Pour effectuer la déformation souhaitée, (Fig. V-4, Fig. V-5, Fig. V-6), l'anneau est positionné entre deux mors sur lesquels est effectuée une traction à l'aide d'un ressort de raideur faible par rapport à la raideur effective de l'anneau. Finalement, la déformation imposée aux extrémités de la poutre est proportionnelle au nombre de tours effectués avec la molette de la crémaillère.

C'est la fréquence de résonance du premier mode de vibration transversal de la poutre qui va être mesurée grâce à ce dispositif. Elle est reliée de manière simple à la rigidité en flexion de la poutre comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant. On impose les vibrations transversales de la poutre à l'aide d'une force sinusoïdale d'origine électrostatique créée entre les armatures du condensateur formé par une électrode hémisphérique (Fig. V-4) et la poutre. Le châssis du dispositif de traction est relié à la masse. Ceci met la poutre au potentiel de la masse puisqu'elle est conductrice. La distance séparant la poutre de l'électrode n'est pas connue, mais elle est de quelques centaines de μm . Les déplacements transversaux de la poutre au niveau de l'électrode sont mesurés à l'aide d'un vibromètre optique MTI-2000. Il est nécessaire d'approcher la sonde de cet appareil à une distance de 50 μm du point dont on veut mesurer les déplacements. Ceci est fait à l'aide d'un système de translation micrométrique.

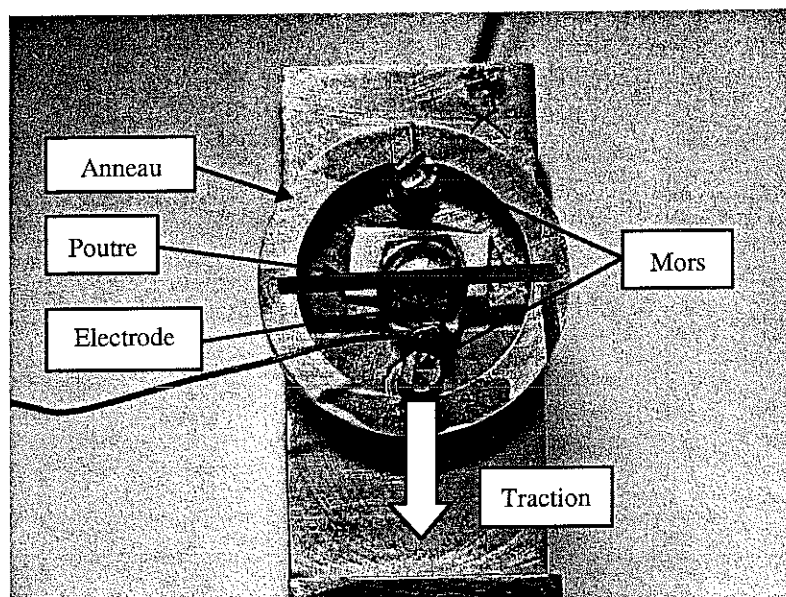


Fig. V-4

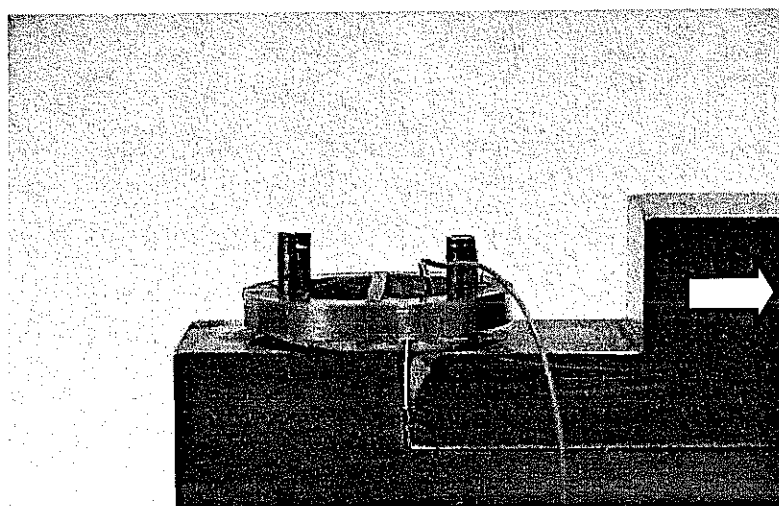


Fig. V-5

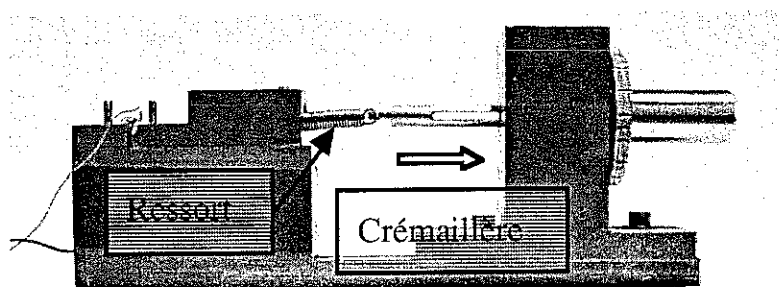


Fig. V-6

V.1.3. Modèle sans défauts.

La rigidité en flexion K_{flx} de la poutre est la dérivée seconde de l'énergie élastique (Eq. IV-19) de la Poutre par rapport aux écarts transversaux de la poutre à la position d'équilibre soit :

$$K_{\text{flx}} = \left. \frac{d^2 U}{dA^2} \right|_{A_{\text{eq}}} = \begin{cases} K_0(1 - \eta) & \text{si } \eta \leq 1 \\ K_0 2(\eta - 1) & \text{si } \eta \geq 1 \end{cases} \quad (\text{Eq. V-1})$$

avec $K_0 = 8\pi^4 \gamma \beta \left(\frac{r}{l} \right)^4$ Rigidité transversale de la poutre encastrée à déformation imposée ε nulle.

Ce qui donne pour les poutres plates de section rectangulaire que nous utilisons (Eq. IV-17)

$$K_0 = \frac{2E\pi^4}{3} \left(\frac{L}{h} \right) \left(\frac{h}{l} \right)^4 \quad (\text{Eq. V-2})$$

formule dans laquelle h est l'épaisseur de la poutre, L sa largeur et l sa longueur.

On rappelle que l'énergie U est déterminée pour des déformations statiques données par l'équation (Eq. IV-18). Pour les petits déplacements, l'évolution en fonction du temps de la position de la ligne moyenne de la poutre autour de sa position d'équilibre sera de la forme :

$$y(x,t) = b(t) \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{l} x\right) \right)$$

L'énergie potentielle d'origine élastique vaut alors :

$$U = \frac{1}{2} K_{\text{flx}} (b(t))^2$$

L'énergie cinétique totale T de la poutre vaut en négligeant l'énergie cinétique due à la rotation des sections :

$$T = \int_0^l \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{3}{4} (\rho l) (\dot{b}(t))^2$$

expression dans laquelle ρ est la masse linéique de la poutre et ρl la masse totale de la poutre. Ce système est équivalent pour les petits déplacements transversaux à un oscillateur harmonique de masse $\tilde{m} = \frac{3}{2} \rho l$, de raideur K_{flx} et de pulsation propre :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{K_{fx}}{\tilde{m}}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{K_0}{\tilde{m}}} \sqrt{1-\eta} & \text{si } \eta \leq 1 \\ \sqrt{\frac{K_0}{\tilde{m}}} \sqrt{2(\eta-1)} & \text{si } \eta \geq 1 \end{cases}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_0}{\tilde{m}}}$ pulsation propre de la poutre non précontrainte.

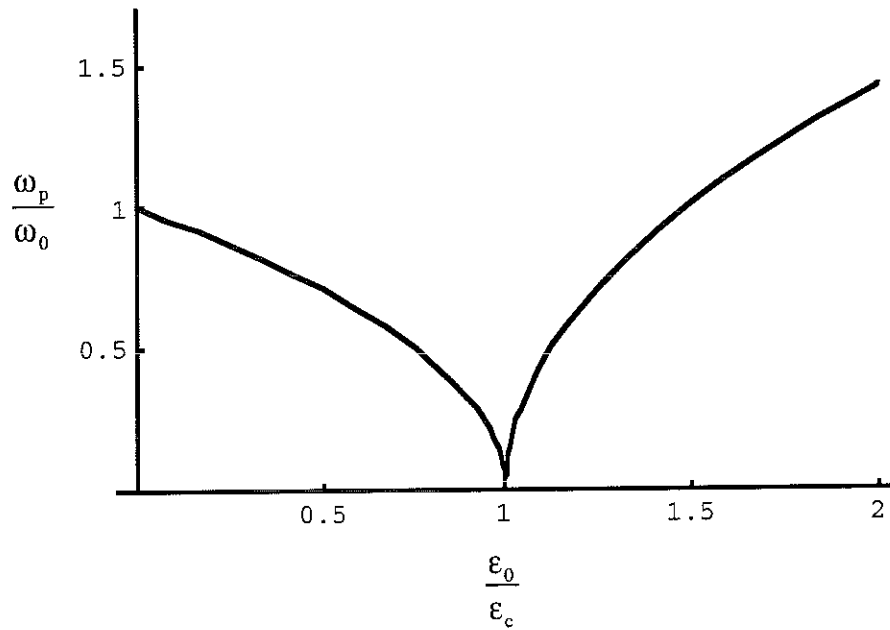


Fig. V-7

V.1.4. Résultats de l'expérience.

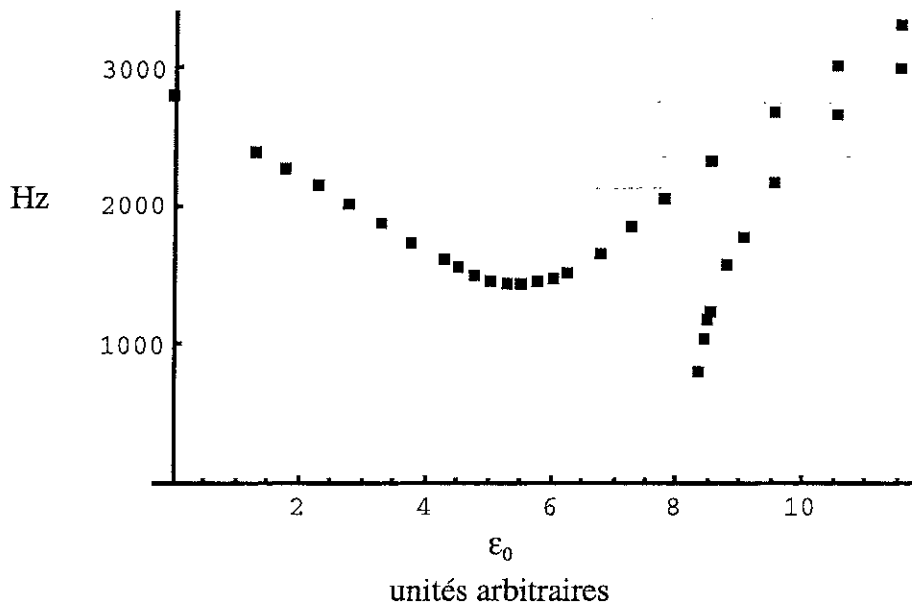


Fig. V-8

La figure ci dessus (Fig. V-8) montre l'évolution de la fréquence de résonance de la poutre en fonction de la déformation imposée ϵ_0 . Les abscisses correspondent au nombre de

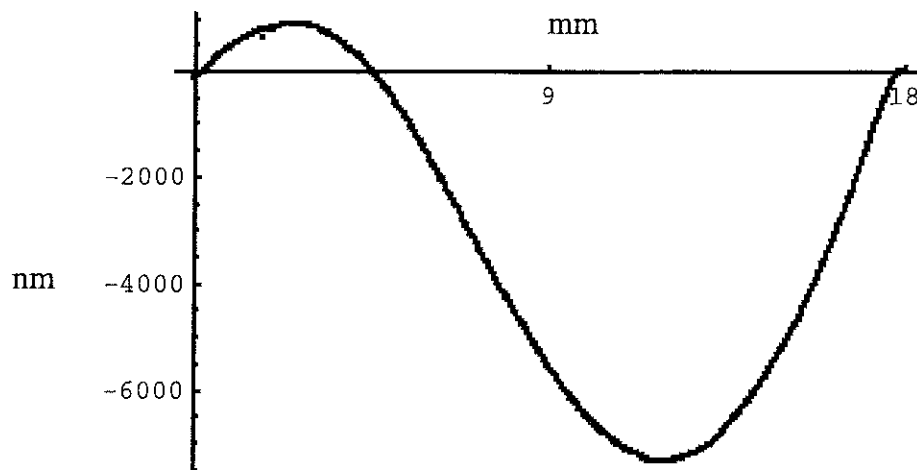


Fig. V-9

tours effectués avec la molette de la crémaillère (Fig. V-6). La courbe A représente la première courbe obtenue expérimentalement. Elle ne correspond pas à ce qui est attendu avec

un modèle simple de flambement de poutre (Fig. V-7). Pour interpréter ces résultats, il est nécessaire de prendre en compte les défauts présents dans la poutre. Ceux-ci ont été mesurés à l'aide d'un interféromètre de Michelson fonctionnant en lumière monochromatique laser (voir Annexe B)

La figure (Fig. V-9) montre la déformation statique initiale de la poutre résultant de son collage sur l'anneau de compression. La colle utilisée est très fluide ainsi le positionnement de la poutre sur l'anneau est délicat et demande d'appliquer une force de maintien assez importante (qq dizaines de grammes) aux encastrement pendant la prise de l'assemblage.

Les défauts ont pour conséquence de détruire la symétrie qui existe (Fig. IV-6) entre les deux déformations possibles pour la poutre après le seuil de flambement. Nous verrons cela en détail dans le prochain paragraphe. A cause des défauts, la poutre ne va plus seulement se déformer à partir du seuil de flambement, mais elle va se déformer de manière continue dès que l'on commencera à rapprocher les deux encastrement de la poutre. Au dessus du seuil de flambement, il existe deux positions stables. La première que l'on atteint de manière continue va être appelée déformation naturelle de flambement. La deuxième, ne peut être atteinte qu'en appliquant à la poutre une force transversale et n'existe qu'au dessus du seuil de flambement. Elle est appelée déformation non naturelle de flambement.

La courbe A correspond aux vibrations de la poutre associées à la forme naturelle de flambement.

La courbe B est obtenue en se plaçant au dessus du seuil de flambement. A l'aide d'une lame souple constituée par un copeau de bois, on fait basculer la poutre dans la deuxième position stable, non naturelle celle là. En faisant varier la déformation imposée à la poutre, on obtient les points de la courbe B. Lorsque la déformation imposée devient trop faible, cette position n'existe plus et la courbe B rejoint la courbe A.

V.1.5. Modèle avec défauts.

Dans le cas idéal de flambement d'une poutre parfaitement rectiligne on ne prend pas en compte deux types d'imperfections :

Les déformations initiales de la poutre libre. Ce sont les déformations de la ligne moyenne de la poutre qui existent avant son encastrement.

Les efforts et déformations dus aux imperfections des encastrement de la poutre.

La poutre est de longueur l . On peut donc la décrire par une fonction périodique de période $2l$. On va développer les déformations initiales v_0 de la poutre libre avec la série trigonométrique suivante :

$$v_0 = a_1^0 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \right) + a_2^0 \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \right) + b_1^0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + b_2^0 \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)$$

Les imperfections des encastremets de la poutre sont les suivants :

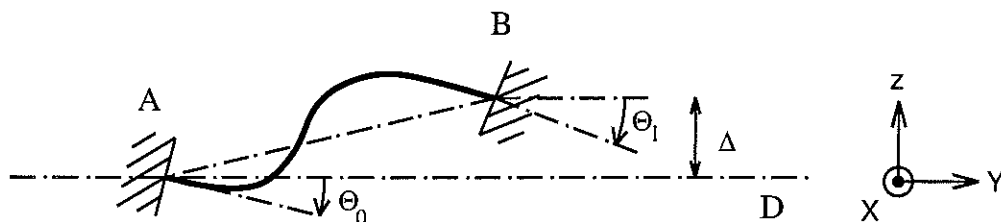


Fig. V-10

Δ est le décalage vertical entre les deux encastremets, Θ_0 et Θ_1 les angles imposés aux extrémités de la poutre par les encastremets.

D est la droite correspondant à la direction de déplacement des encastremets de la poutre servant à imposer la déformation longitudinale ε_0 . Dans la suite, ε_0 est comptée positivement pour un rapprochement des encastremets.

De la même manière, on va décrire les écarts de la poutre par rapport à sa ligne moyenne v_0 avec la série trigonométrique:

$$v = a_1 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \right) + a_2 \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \right) + b_1 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)$$

Il s'agit de la série trigonométrique minimum qui permet de tenir compte des angles Θ_0 et Θ_1 et du décalage vertical Δ . Les coefficients a_1 , b_1 et b_2 sont alors fixés par les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \Delta - a_1^0 \\ b_2 &= \frac{1}{4\pi} (\Theta_0 + \Theta_1) - b_2^0 \\ b_1 &= \frac{1}{2\pi} (\Theta_0 - \Theta_1) - b_1^0 \end{aligned} \quad (\text{Eq. V-3})$$

Dans notre description, a_2 est finalement le seul degré de liberté du système.

L'énergie élastique U de la poutre vaut alors :

$$U = U_{cpr} + U_{flx}$$

avec

$$U_{cpr} = \frac{K}{2} \int_0^l \left(-\epsilon_0 + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial(v+v_0)}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 \right) \right) dx$$

$$U_{flx} = \frac{C}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

on peut comparer ces expressions avec l'expression de l'énergie élastique dans le cas de la poutre rectiligne (Eq. IV-14, Eq. IV-15). L'énergie U est obligatoirement un polynôme de degré 4 en a_2 dont les coefficients dépendent de Δ , Θ_0 , Θ_1 , ϵ_0 et des déformations initiales de la poutre.

$$U = Cste + P_1 a_2 + P_2 a_2^2 + P_3 a_2^3 + P_4 a_2^4$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$U = Cste + 4\beta\gamma\pi^4 \frac{h^6}{l^3} \left(\left(\frac{3\alpha}{16\beta} \right) \delta^4 + \lambda \delta^3 + (1 + \mu - \eta) \delta^2 + (v - \sigma \cdot \eta) \delta \right) \quad (\text{Eq. V-4})$$

Avec :

$\delta = \frac{a_2}{h}$ Déplacement transversal réduit de la poutre. Il correspond à la demi flèche au milieu de la poutre par rapport à sa déformation après son encastrement.

$\eta = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{cr}}$ déformation longitudinale réduite.

$\epsilon_{cr} = 4\pi^2 \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{h}{l} \right)^2$ déplacement critique pour la poutre rectiligne sans défauts d'encastrement.

Les coefficients λ , μ , v et σ sont donnés en annexe (voir Annexe C). Ils dépendent seulement des défauts Δ , Θ_0 , Θ_1 , a_1^0 , a_2^0 , b_1^0 et b_2^0 . λ à l'ordre 1, μ à l'ordre 2, v à l'ordre 1 et à l'ordre 3 et σ à l'ordre 1.

On vérifie aisément que sans défauts, on retombe bien sur l'énergie élastique de la poutre parfaitement encastree (Eq. IV-19).

Le déplacement transversal δ correct minimise l'énergie U et est solution de $\frac{\partial U}{\partial \delta} = 0$ qui est une équation du troisième degré en δ . On peut résoudre cette équation en utilisant les formules de Cardano [Ref. V-2] pour les équations cubiques, mais on obtient alors de fonctions difficiles à manipuler. Il est préférable d'exprimer η en fonction de δ à partir de cette équation. Cela donne immédiatement:

$$\eta = \frac{\left(\frac{3}{4} \frac{\alpha}{\beta} \delta^3 + 3\lambda \delta^2 + 2(1+\mu)\delta + \nu \right)}{\sigma + 2\delta} \quad (\text{Eq. V-5})$$

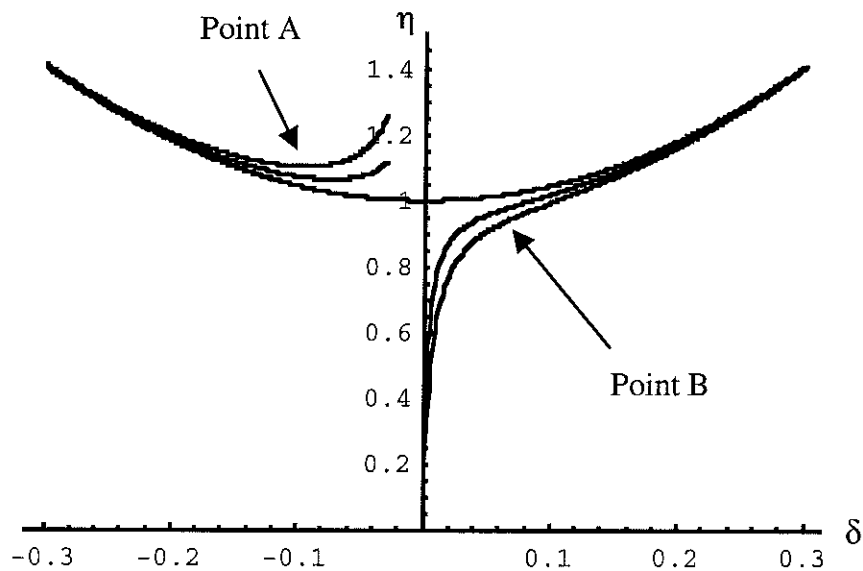


Fig. V-11

La figure ci dessus représente l'allure de $\eta(\delta)$ pour un défaut de type a_2^0 prenant les valeurs 0, 0.03 h et 0.06 h. La première courbe, une parabole, correspond au cas sans défauts. On constate que les défauts brisent la symétrie qui existe entre les deux positions de flambement pour une poutre parfaitement rectiligne. Lorsque des défauts existent, la courbe $\eta(\delta)$ possède deux branches dont une correspond (celle de droite ici) à la position naturellement stable de la poutre. Cette branche décrit l'évolution de la flèche réduite δ de la poutre lorsque par exemple on part d'un état sans déformation ε_0 imposée entre les deux extrémités de la poutre et que l'on fait varier ε_0 . C'est la seule valeur accessible pour δ sans action extérieure. Lorsque η dépasse une certaine valeur η_{cr} , il existe trois valeurs $\delta_1 \leq \delta_2 \leq \delta_3$ possibles pour δ .

L'une d'elle δ_3 pour notre exemple appartient à la branche décrivant la position naturellement stable de la poutre. δ_1 et δ_2 appartiennent à l'autre branche de la courbe $\eta(\delta)$. δ_3 correspond à un minimum de l'énergie U . δ_2 étant l'extremum de U le plus proche de δ_3 est obligatoirement un maximum pour l'énergie U et décrit une position d'équilibre instable. δ_1 est finalement la flèche correspondant à la deuxième position d'équilibre stable de la poutre.

Dans le cas idéal de la poutre rectiligne, $\eta_{cr}=1$. Il est intéressant de décrire quantitativement l'évolution de η_{cr} lorsque des défauts existent. Pour cela, on utilise la relation (Eq. V-5) donnant $\eta(\delta)$ et prenant en compte les défauts. η_{cr} est défini par le point A tel que $\frac{\partial \eta}{\partial \delta} = 0$, c'est à dire :

$$0 = \frac{3\alpha}{4\beta}u + \left(\frac{9\alpha\sigma}{16\beta} - \frac{3\lambda}{2} \right) - \frac{f(v, \mu, \lambda, \sigma)}{u^2} \quad (\text{Eq. V-6})$$

avec le changement de variables
$$\delta = -\left(\frac{\sigma}{2} + u \right)$$

et
$$f(v, \mu, \lambda, \sigma) = \frac{\sigma}{2} - \frac{v}{2} + \frac{\mu\sigma}{2} - \frac{3\lambda\sigma^2}{8} + \frac{3\alpha\sigma^3}{64\beta}$$

Les défauts sont considérés comme petits lorsque ils correspondent à des flèches petites devant h et des angles petits devant $\frac{h}{l}$ (voir Annexe C). On considère qu' au voisinage de la transition de flambement, c'est à dire lorsque $\eta \cong 1$, on a pour de petits défauts $1 \gg u \gg \lambda, \sigma, \mu, v$ ce qui signifie que les défauts produisent au voisinage de la transition de flambement une déformation devant laquelle ils sont eux même négligeables. Dans ces conditions, le deuxième terme de l'équation (Eq. V-6) peut être négligé et alors la solution de cette équation est :

$$u \cong \left(\frac{4\beta}{3\alpha} f(v, \mu, \lambda, \sigma) \right)^{\frac{1}{3}}$$

Cette relation nous donne la valeur de la flèche de la deuxième position stable de la poutre lorsque celle ci apparaît en η_{cr} . Une configuration donnée de défauts peut toujours être décrite par :

$$\lambda = \lambda_1 y, \quad \mu = \mu_2 y^2, \quad v = v_1 y + v_3 y^3, \quad \sigma = \sigma_1 y$$

ce qui implique :

$$f(v, \mu, \lambda, \sigma) = f_1 y^1 + f_3 y^3$$

relation dans laquelle y est un terme petit sans dimension caractérisant l'ampleur des défauts (y n'a ici rien à voir avec une coordonnée d'espace). Dans ces conditions, en A (Fig. V-11), on a à l'ordre le plus bas en y :

$$\delta \cong -\left(\frac{4\beta}{3\alpha} f_1\right)^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}} \quad (\text{Eq. V-7})$$

et

$$\eta_{cr} = 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{3\alpha}{4\beta} f_1^2\right)^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}} \quad (\text{Eq. V-8})$$

Pour la branche caractérisant le flambement de la poutre vers sa position naturelle d'équilibre stable, il existe un autre point caractéristique, le point B, point d'inflexion tel que $\frac{\partial^2 \eta}{\partial \delta^2} = 0$ et correspondant à une déformation imposée η_i . De la même manière que pour le point A, on obtient en B :

$$u = -\left(\frac{8\beta}{3\alpha} f(v, \mu, \lambda, \sigma)\right)^{\frac{1}{3}}$$

avec toujours $\delta = -\left(\frac{\sigma}{2} + u\right)$. Il s'agit ici par contre d'une solution exacte et non approchée.

d'où
$$\delta \cong \left(\frac{8\beta}{3\alpha} f_1\right)^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}}$$

et

$$\eta_i \cong 1 + \left(\frac{9\beta}{\alpha} f_1\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\lambda_1 - \frac{3\alpha}{8\beta} \sigma_1\right) \cdot y^{\frac{4}{3}} \quad (\text{Eq. V-9})$$

Examinons le comportement de la rigidité en flexion K_{fx} de la poutre. C'est la dérivée seconde de l'énergie (Eq. V-4) élastique de la Poutre par rapport aux écarts transversaux de la poutre à la position d'équilibre soit :

$$K_{\text{fix}} = \left. \frac{d^2 U}{da_2^2} \right|_{a_2 \text{ eq}} = \frac{K_0}{2} \left(\frac{9\alpha\delta^2}{4\beta} + 6\delta\lambda + 2(1-\eta) + \mu \right) \quad (\text{Eq. V-10})$$

δ et η étant reliés par l'équation (Eq. V-5).

Où $K_0 = 8\pi^4 \gamma \beta \left(\frac{h}{1} \right)^4$ est la rigidité transversale de la poutre parfaitement rectiligne encastrée à déformation imposée ε_0 nulle.

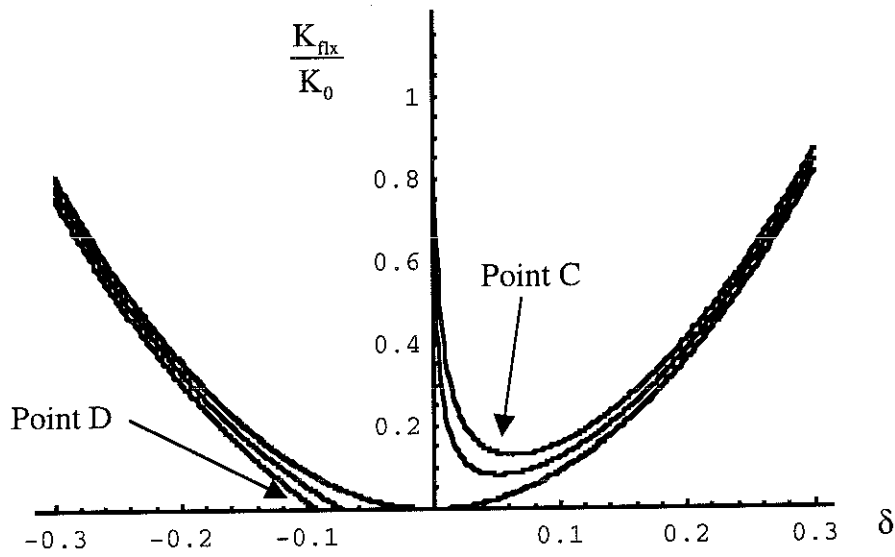


Fig. V-12

La figure Fig. V-12 représente l'allure de $\frac{K}{K_0}(\delta)$ pour un défaut de type a_2^0 prenant les valeurs 0, 0.03 h et 0.06 h. La première courbe (parabole) correspond au cas sans défauts. Dans ce cas, seule l'évolution de la rigidité en flexion après le seuil de flambement élastique est représentée car, avant celui-ci, δ est nul. Lorsque des défauts sont présents, la courbe possède deux branches distinctes. La première (celle de droite dans notre exemple) décrit l'évolution de la rigidité en flexion pour la déformation naturelle de flambement de la poutre définie précédemment. On constate que $\frac{K}{K_0}$ est proche de 1 lorsque la déformation imposée est nulle. Puis au fur et à mesure que la flèche grandit, $\frac{K}{K_0}$ décroît jusqu'à un minimum en C puis augmente à nouveau. Ce point C sera caractérisé en fonction des défauts dans la suite. La deuxième branche décrit l'évolution de la rigidité en flexion pour la déformation non naturelle

de flambement. Elle montre que au dessus du seuil de flambement dans la position stable non naturelle, $\frac{K}{K_0}$ décroît quand δ diminue c'est à dire lorsque on s'approche du flambement, pour atteindre une valeur nulle au point D qui correspond au seuil de flambement η_{cr} . On remarque en effet que :

$$K_{fx} = K_0(-u) \left(\frac{\partial \eta}{\partial \delta} \right) \text{ avec toujours } \delta = - \left(\frac{\sigma}{2} + u \right)$$

Or, on a vu précédemment que η_{cr} est défini par $\frac{\partial \eta}{\partial \delta} = 0$ donc au seuil de flambement, $K_{fx} = 0$ pour la position stable non naturelle.

De même, on remarque que $\frac{\partial K_{fx}}{\partial \eta} = \frac{K_0}{2} \left(\left(\frac{9\alpha}{2\beta} \delta + 6\lambda \right) \left(\frac{\partial \delta}{\partial \eta} \right) - 2 \right)$ On en déduit que en η_{cr} , pour la position stable non naturelle :

$$\frac{\partial K_{fx}}{\partial \eta} = +\infty.$$

Ainsi, au point correspondant à D (Fig. V-12) ou à A (Fig. V-11) la courbe possède une tangente verticale.

Intéressons nous au point C. Il est associé au minimum atteint par K_{fx} lorsque la poutre est dans un état correspondant à sa position naturelle de flambement. Il peut être déterminé en résolvant l'une ou l'autre des équations suivantes :

$$\frac{\partial K_{fx}}{\partial \eta} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial K_{fx}}{\partial \delta} = 0$$

Dans les deux cas, on aboutit à :

$$\frac{\partial \eta}{\partial \delta} = u \frac{\partial^2 \eta}{\partial \delta^2}$$

ceci nous donne :

$$\delta \cong \left(\frac{2\beta}{3\alpha} f_1 \right)^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}}$$

et on en déduit que pour la déformation de flambement de la poutre naturellement stable, la rigidité en flexion est minimum pour une précontrainte η_{min} donnée par la relation :

$$\eta_{min} \cong 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{3\alpha}{2\beta} f_1^2 \right)^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}} \quad (\text{Eq. V-11})$$

elle vaut alors :

$$K_{\min} \equiv K_0 \frac{3}{2} \left(\frac{3\alpha}{2\beta} f_1^2 \right)^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}} \quad (\text{Eq. V-12})$$

en $\eta_{\min}$, la courbure de la courbe $\frac{K_{\text{flex}}}{K_0}(\eta)$ est donnée par :

$$\frac{\partial^2 \left(\frac{K}{K_0} \right)}{\partial \eta^2} = \frac{4}{3} \left(\frac{3\alpha}{2\beta} f_1^2 \right)^{-\frac{1}{3}} \cdot y^{-\frac{2}{3}}$$

L'intérêt de ces expressions est qu'elles s'expriment facilement en fonction des défauts car :

$$f_1 \cdot y = \frac{{}^0a_2}{h} + \frac{{}^0b_1}{3h\pi} + \frac{1}{2h\pi^2} (\theta_0 - \theta_1) \quad (\text{Eq. V-13})$$

Cette expression nous permet de plus de déterminer les défauts dont le rôle est le plus important. Ce sont : $(\Theta_0 - \Theta_1)$, 0a_2 et 0b_1 .

V.1.6. Application du modèle aux résultats obtenus avec le montage de principe.

Le modèle développé précédemment nous a permis de prendre en compte les défauts de la poutre précontrainte. Les équations (Eq. V-8), (Eq. V-11), (Eq. V-12) décrivent complètement les points C et D qui sont indiqués sur la figure (Fig. V-13) ci dessous rappelant les résultats déjà présentés (Fig. V-8). La courbe présentée sur cette figure représente l'évolution de la rigidité en flexion de la poutre en silicium précontrainte par notre dispositif à crémaillère en fonction de la déformation ε_0 imposée entre les deux extrémités de la poutre. La valeur expérimentale de la rigidité en flexion de la poutre est ici déduite de la valeur mesurée de la fréquence de résonance du premier mode de vibration transversal de la poutre par la relation :

$$\frac{K_{\text{flex}}}{K_0} = \left(\frac{\omega_p}{\omega_0} \right)^2$$

Les valeurs de déformation imposée portées en abscisses sont proportionnelles à la déformation réellement imposée, mais le coefficient de proportionnalité n'est pas connu. Ces valeurs correspondent au nombre de tours effectués avec la molette de la crémaillère. Elles sont proportionnelles à la déformation réduite η imposée. Nous allons maintenant utiliser les coordonnées des points C et D pour déterminer la valeur de f_1 ainsi que les valeurs des déformations imposées (abscisse de la figure).

En C :

$$\frac{K_{fx}}{K_0} = 0,263$$

d'où des défauts caractérisés par : $f \cong 1,73 \cdot 10^{-2}$

on en déduit que l'on doit avoir : $\eta_{cr} \cong 1,209$ et $\eta_{min} \cong 1,131$

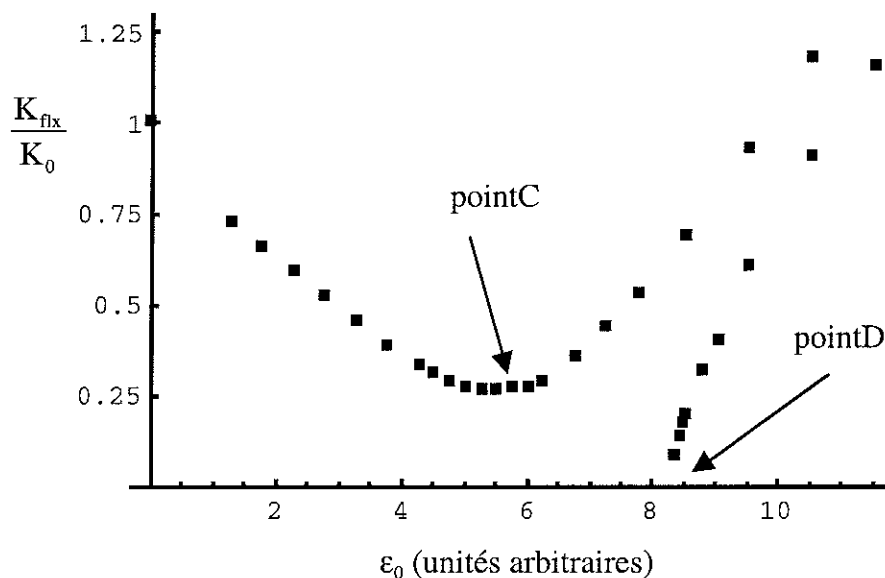


Fig. V-13

Le coefficient de proportionnalité entre les valeurs de l'axe des abscisses et η est déterminé à l'aide du point η_{cr} aisément identifiable expérimentalement. On n'utilise pas le point η_{min} car on ne peut pas le déterminer avec une précision assez bonne.

La figure suivante (Fig. V-14) montre l'évolution de la rigidité en flexion en fonction de la déformation η ainsi déterminée. Sur le même graphique, on a aussi tracé la courbe représentant l'évolution de $\frac{K}{K_0}$ en fonction de la solution exacte de l'équation (Eq. V-10) et

des défauts évalués à partir du rapport $\frac{K}{K_0}$ au point C. On constate un bon accord entre les deux courbes.

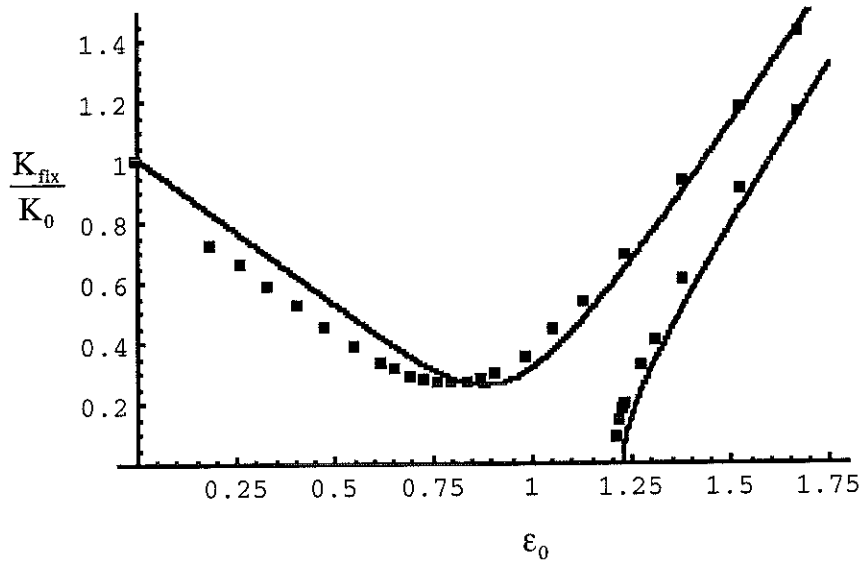


Fig. V-14

Les déformations initiales de la poutre (Fig. V-9) dans le dispositif sont nulles en regard des déformations engendrées par les défauts d'encastrement dus au collage sur l'anneau. Les seuls défauts pris en compte seront donc Θ_0 et Θ_1 car ce sont les deux seuls défauts qui interviennent au premier ordre dans les coefficients des expressions permettant la description du flambement (Eq. V-13).

La déformée de la poutre par rapport à sa ligne moyenne est donc décrite par :

$$v = a_2 \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \right) + b_1 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)$$

Lorsque l'anneau n'est pas précontraint par le montage, on a :

$$b_1 = -3.17 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$b_2 = -3.34 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

C'est à dire :

$$\Theta_0 = 6.14 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0.0352 \text{ deg}$$

$$\Theta_1 = 17.2 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0.0986 \text{ deg}$$

soit des défauts caractérisés de manière statique par :

$$f_s \cong -1,01 \cdot 10^{-2}$$

précédemment, par une caractérisation dynamique, on a trouvé :

$$f_d \cong -1,73 \cdot 10^{-2}$$

f intervient en fait à la puissance $2/3$ dans les différents points caractérisant la courbe. L'erreur entre les deux caractérisations des défauts est donc de :

$$\frac{\left| f_s^{\frac{2}{3}} - f_d^{\frac{2}{3}} \right|}{\left(\frac{f_s^{\frac{2}{3}} + f_d^{\frac{2}{3}}}{2} \right)} = 35,4\%$$

V.1.7. Conclusion.

Cette expérience destinée à vérifier la décroissance de la rigidité transversale en flexion d'une poutre encastree à ses deux extrémités lorsque l'on s'approche du seuil de flambement nous a permis d'établir un modèle prenant en compte les défauts de la poutre et permettant de décrire correctement leur influence sur le flambement de celle ci.

L'intérêt ce modèle est qu'il montre quels défauts sont les plus importants (Eq. V-13). Il s'agit bien entendu de ceux engendrant la plus grande flèche au centre de la poutre. Pour une géométrie donnée de défauts, si le nombre sans dimension « y » représente leur amplitude, alors, les points A, B, C, D caractéristiques de la transition de flambement correspondent à des déformations imposées réduites η qui évoluent en $y^{\frac{2}{3}}$ par rapport à 1. La valeur 1 correspond au seuil de flambement pour la poutre idéale rectiligne parfaitement encastree.

Le rôle important joué par les défauts et leur caractère non maîtrisé du au collage dans un montage hybride tel que celui étudié nous oblige à travailler dans la suite avec des poutres encastrees réalisées grâce aux techniques de micro usinage du silicium. Avec ces techniques, la poutre est obtenue directement encastree dans un cadre à partir d'un wafer de Silicium. On parle alors de poutre monolithique. Cette technique nous permet de réaliser des structures très minces.

L'expression établie dans notre modèle de l'énergie élastique de la poutre précontrainte comme un polynôme de degré 4 en fonction de la flèche transversale réduite δ va nous permettre dans la suite de ce chapitre de décrire les oscillations sinusoïdales transverses forcées de la poutre comme celles d'un oscillateur non linéaire dont le comportement est

décrit par des équations apparentées à l'équation de Duffing [Ref. V-3]. Ceci est très utile étant donné la très faible épaisseur des poutres monolithiques dont les oscillations transverse deviennent rapidement non linéaires.

V.2. Poutres monolithiques.

Cette partie présente la réalisation des poutres monolithiques encastrées utilisées pour les expériences décrites dans la suite de ce Chapitre. Ces expériences vont permettre d'étudier le flambement élastique des poutres encastrées en imposant une déformation à l'aide :

Dans un premier temps d'un dispositif utilisant une céramique piezo électrique.

Dans un deuxième temps, de dépôt de couches minces précontraintes sur la poutre.

V.2.1. Solution choisie.

La solution choisie utilise des tranches de 2'' de diamètre en silicium de 295 μm d'épaisseur orientés (100) nitrurés (couche mince de Si_3N_4) deux faces à 2000 Angströms. La fabrication des poutres comprend deux étapes. La première permet la fabrication d'une membrane carrée de 10 mm de côté. La deuxième étape consiste à libérer une poutre aux dimensions voulues dans cette membrane. Les échantillons fabriqués sont réalisés à partir de plaquettes de 25 * 15 mm de côté découpées dans les wafers. Les cotés de ces plaquettes sont orientés selon les axes cristallographiques $\langle 110 \rangle$. On distingue la face arrière de la plaquette, depuis laquelle est réalisée la membrane, de la face avant qui est gravée lors de la libération de la poutre dans la membrane.

V.2.2. Fabrication des membranes.

La technologie choisie pour fabriquer les membranes dans le substrat de Silicium est une technique classique de gravure humide du silicium [Ref. V-4]. Dans ce procédé, on immerge le substrat avec son masque dans une solution à 80% de KOH chauffée à 80°C. Cela permet d'obtenir des membranes carrées en silicium dont l'épaisseur est voisine de 10 μm .

Le silicium cristallin est attaqué par les bases fortes. Les plans (111), comportant une forte densité d'atomes, sont gravés beaucoup plus lentement (environ 100 fois moins vite) que les plans (100). On parle donc de gravure anisotrope humide. Cette technique permet de réaliser des attaques profondes avec une bonne maîtrise des dimensions latérales lorsque les contours du motif gravé, sont des lignes parallèles aux directions $\langle 110 \rangle$. Dans ces conditions, les flans des motifs gravés sont les plans (111) et ils font un angle de 54,74° avec le plan de l'échantillon (Fig. V-15).

Le Si_3N_4 recouvrant les deux faces du wafer n'est pas attaqué par la solution de KOH. On va donc s'en servir comme masque lors de la gravure humide anisotrope du silicium.

Les étapes de fabrication de la membrane sont les suivantes :

Nettoyage nitrique à chaud des plaquettes, suivi d'un rinçage abondant à l'eau D.I. et d'un dernier rinçage à l'éthanol. Séchage à l'azote.

Lithographie de la face arrière avec une résine standard de type Microdeposit S1818 selon le motif voulu pour définir la membrane.

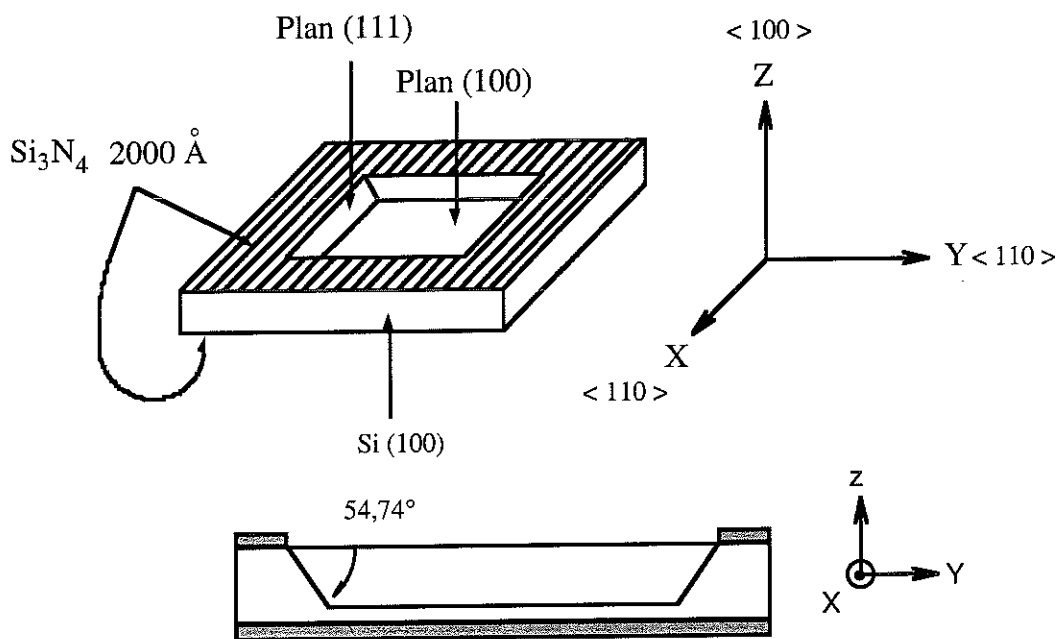
Gravure sélective RIE (Reactive Ion Etching) du Si_3N_4 non protégé par la résine.

Retrait de la résine à l'acétone, rinçage à l'éthanol.

Gravure KOH de la membrane (Fig. V-15). L'arrêt de la gravure est ici réalisé au moment voulu en fonction de la vitesse de gravure et de l'épaisseur de membrane souhaitée.

Rinçage abondant à l'eau DI, puis à l'éthanol.

Retrait du Si_3N_4 des deux faces de la plaquette par RIE.



Plaquette avec masque Si_3N_4 après gravure face arrière.

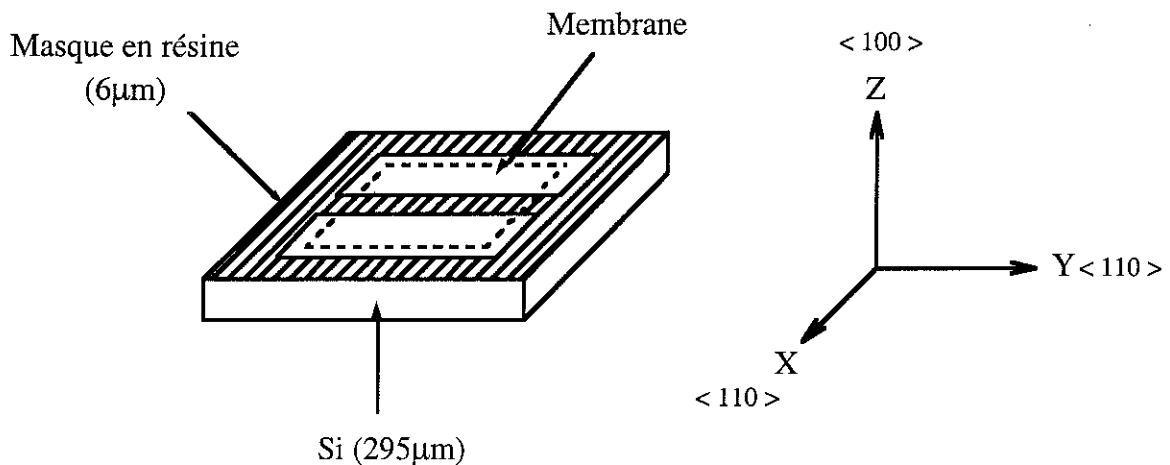
Fig. V-15

L'épaisseur finale de la membrane ainsi obtenue est mesurée de manière précise à l'aide d'un spectromètre infrarouge.

Toutes les membranes fabriquées pour l'élaboration des poutres sont des carrés de côté 10 mm parallèles aux directions cristallographiques <110> du silicium. Leur épaisseur va de 6µm à 25µm.

V.2.3. Dégagement des poutres.

Pour découper une poutre mince dans la membrane, on applique en face avant de la plaquette une couche de résine photosensible épaisse ($6\text{ }\mu\text{m}$) dans laquelle est dégagé un motif correspondant à la poutre que l'on veut graver (Fig. V-16). Ensuite, une gravure RIE sélective en face avant permet de graver la membrane en silicium sans attaquer la résine, libérant ainsi une poutre suspendue dans la membrane.



Plaquette avec membrane et masque en résine avant gravure face avant.

Fig. V-16

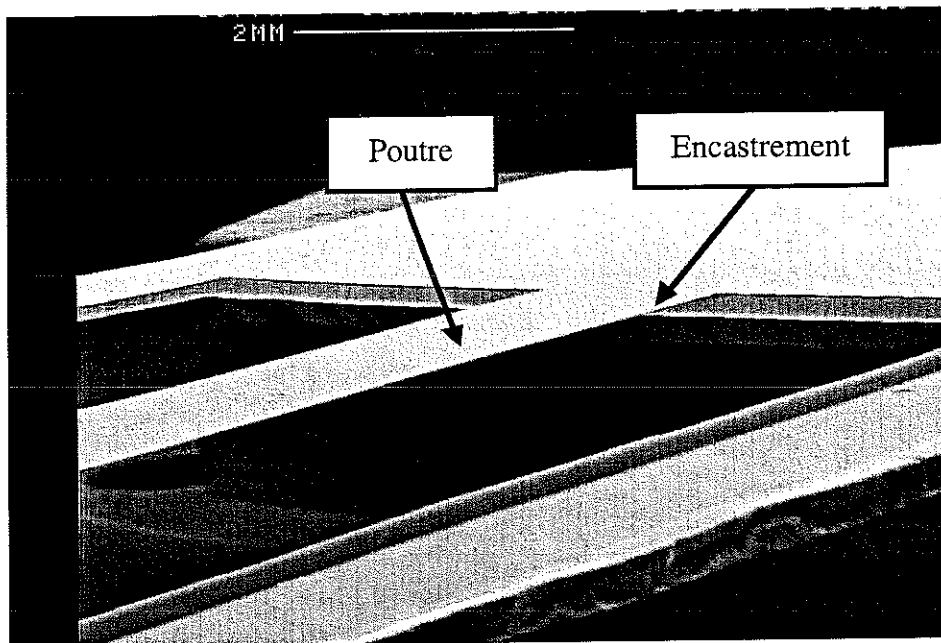
Etapas de la gravure face avant :

Lithographie face avant avec une résine épaisse (Microdéposit 45/62, épaisseur $6\mu\text{m}$)

Gravure sélective RIE du Silicium (Plasma SF_6). Arrêt de la gravure par contrôle visuel lorsque la totalité du silicium non protégé de la membrane à disparu.

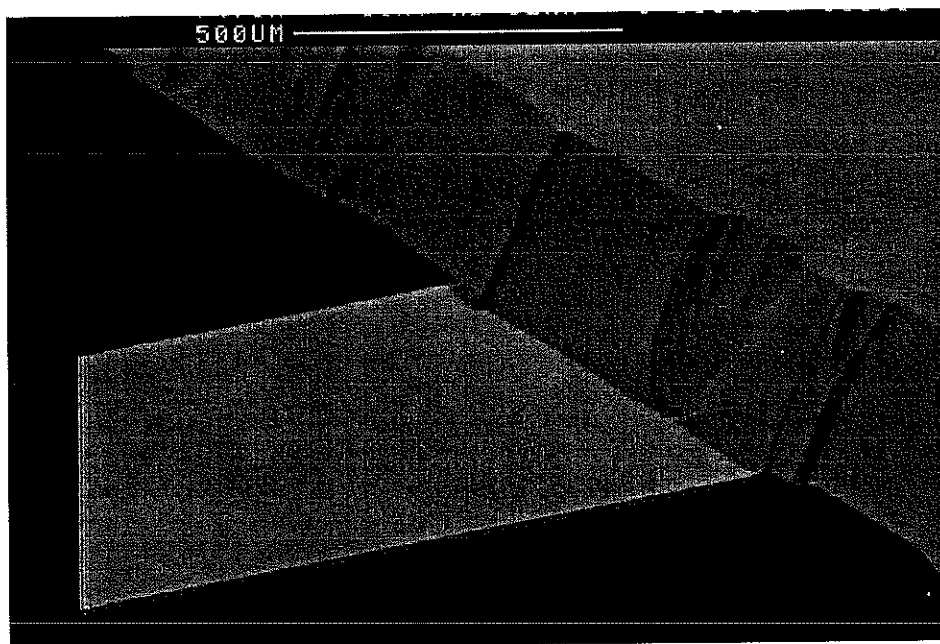
Retrait de la résine à l'acétone ou sous plasma oxygène si l'acétone ne suffit pas.

Rinçage à l'éthanol et séchage à l'azote.



Vue face avant d'une poutre monolithique

Fig. V-17

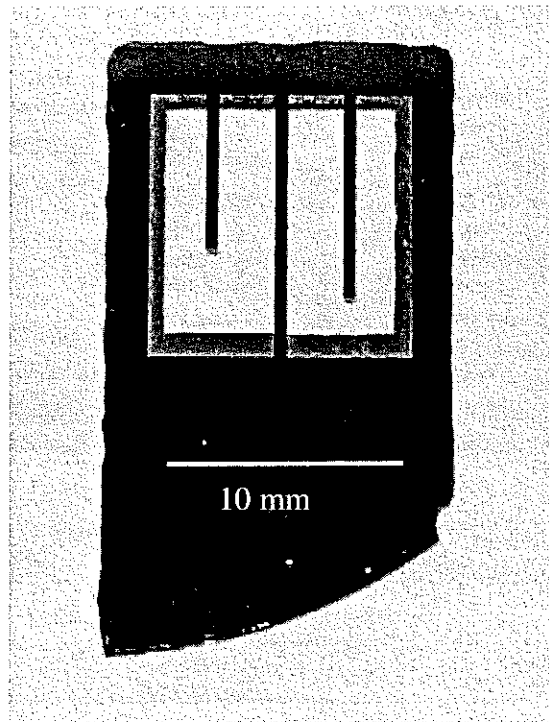


Vue face arrière de l'encastrement d'une poutre monolithique

Fig. V-18

Les figures (Fig. V-17) et (Fig. V-18) montrent des images prises au microscope à balayage électronique d'une poutre encastree à ses deux extrémités de $12,6\text{ }\mu\text{m}$ d'épaisseur et 2 mm de largeur réalisée à partir d'une membrane de $10*10\text{mm}$ de coté. La figure (Fig. V-19)

représente trois poutres de 500 μ m réalisées dans une membrane carrée de 10*10mm de côté et d'épaisseur 13,1 μ m.



Poutre monolithique encastrée accompagnée de deux poutres cantilever

Fig. V-19

V.2.4. Avantages et inconvénients des poutres monolithiques.

L'avantage de cette méthode est de permettre la fabrication de poutres possédant des encastrements de très bonne qualité, ce qui nous l'avons vu est très important d'autant plus que l'épaisseur h de la poutre est faible. L'importance du rôle joué par un défaut est en effet proportionnelle à $\frac{1}{h}$ (Eq. V-13).

La figure (Fig. V-20) montre le profil d'une poutre monolithique de 13 μ m d'épaisseur. Les deux traits verticaux présents sur le graphique montrent la position des encastrements de la poutre. Ce profil correspond à la déformation existant à la surface de la plaquette avant la fabrication de la poutre. Ce profil est celui de la face supérieure (face avant) de la poutre. Nous n'avons malheureusement pas accès au profil de la face inférieure de la poutre car la

gravure KOH dégrade trop l'aspect de surface du silicium. Il nous est donc impossible de connaître le profil moyen de la poutre qui peut par exemple dépendre de l'homogénéité de la gravure KOH.

On va donc supposer par la suite que une fois fabriquées, les poutres monolithiques en Silicium ne subissent pas à leurs extrémités de couples ou d'efforts qui correspondraient dans le modèle avec défauts développé dans ce chapitre à des défauts d'encastrement Δ , Θ_0 , Θ_1 différents de ceux imposés par la déformation naturelle de la poutre et donnés par a_1^0 , a_2^0 , b_1^0 et b_2^0 .

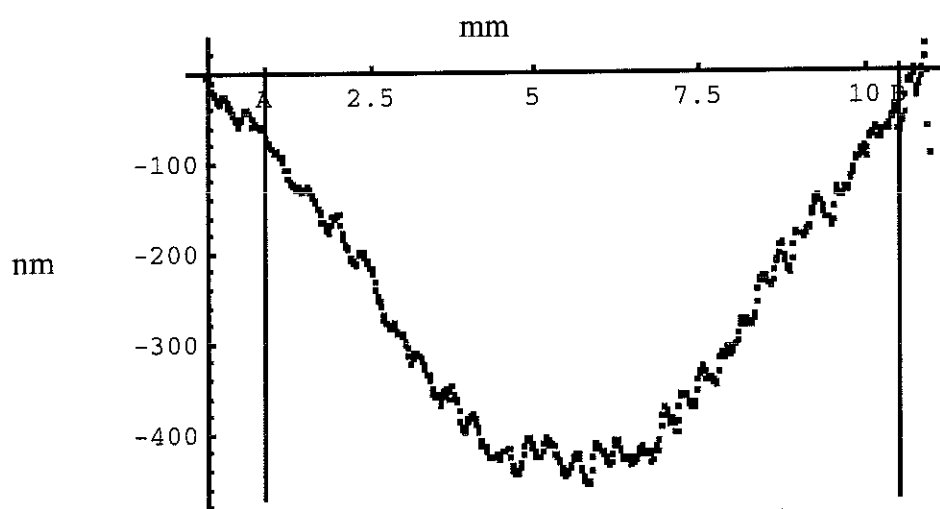


Fig. V-20

V.3. Montage hybride : précontrainte d'une poutre à l'aide d'une céramique piézoélectrique.

Le dispositif de précontrainte utilisé dans la section précédente permet de contrôler entre les encastremements d'une poutre des déplacements de l'ordre du dixième de micron . Le déplacement correspondant au seuil de flambement pour la poutre étudiée était de $1,828 \mu\text{m}$. Les poutres monolithiques dont la fabrication vient d'être décrite ont typiquement une épaisseur de $10 \mu\text{m}$ et une longueur de 10 mm . Avec ces dimensions, la déformation critique pour le flambement élastique vaut $\varepsilon_{cr} = 3,29 \cdot 10^{-6}$ ce qui correspond à un déplacement de $3,28 \text{ nm}$. Ces valeurs nous ont poussé à utiliser une céramique piézoélectrique (PZT) commandée en tension pour imposer les déplacements entre les deux encastremements de la poutre. On mesure avec ce montage la réponse transverse de la poutre à une force transversale sinusoïdale appliquée en son milieu.

V.3.1. Description du montage.

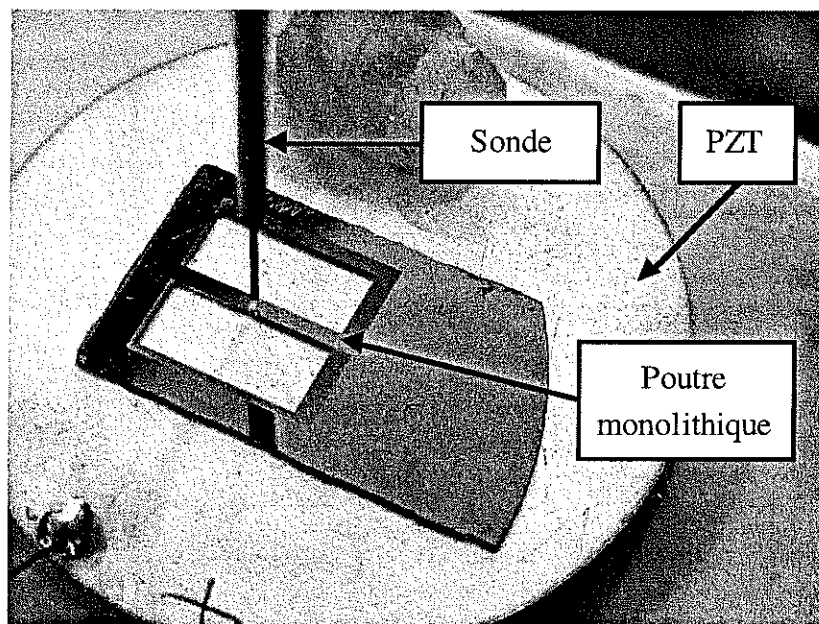


Fig. V-21

La poutre monolithique est encadrée à ses deux extrémités dans son cadre en silicium . Sa longueur est de $9,60 \text{ mm}$, son épaisseur de $10,45 \mu\text{m}$ et sa largeur de 1 mm . Le cadre est collé sur un disque en céramique piézoélectrique de type PZT-5H Morgan-Matrox de 30 mm de diamètre et de 3 mm d'épaisseur. La colle utilisée est la même que lors du collage de la poutre sur son anneau en inox, il s'agit d'une colle cyanoacrylate commerciale Loctite type 401 (Fig. V-21). Le disque est polarisé selon son épaisseur (Fig. V-22) dans la direction 3 (ou y pour la poutre). L'application d'une tension V_p positive ou négative selon l'axe 3 de

polarisation du disque permet une contraction ou une elongation isotrope dans le plan (1,2) du disque. Le cadre de la poutre est collé sur le disque. Il subira de ce fait cette elongation ou cette contraction. On peut de cette manière contrôler l'espacement des points d'encastrement A et B de la poutre de manière précise. Le coefficient de couplage $d_{3,1}$ entre le champ électrique imposé dans la direction 3 et la déformation résultant dans les direction 1 et 2 est de $-274 \cdot 10^{-12} \text{ mV}^{-1}$. Pour notre disque, cela correspond à vide à une déformation de $-9,16 \cdot 10^{-6}$ dans le plan (1,2) pour une tension V_p appliquée de 100V alors que la déformation critique est de $\epsilon_{cr} = 3,84 \cdot 10^{-6}$ pour notre poutre. Ceci confirme la possibilité d'atteindre la déformation critique avec ce système, puisque le disque en PZT supporte des tensions pouvant aller de -1000V à 1000V .

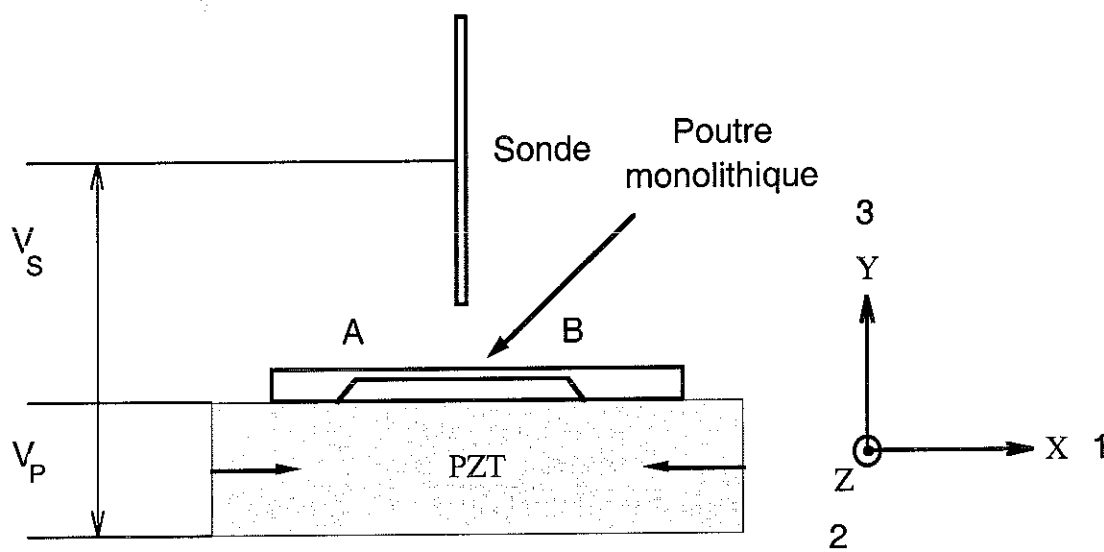


Fig. V-22

Regardons plus en détail le comportement du système en considérant un bilame constitué de notre disque en PZT surmonté d'une plaque de Silicium orienté (100) de $295 \mu\text{m}$ d'épaisseur.

Nous avons calculé le rayon de courbure de ce bilame pour une tension V_p de 100V. Il vaut 430 m ce qui correspond à une flèche de 29 nm sur une distance de 5 mm . (Il est inversement proportionnel à V_p).

La valeur de la déformation dans le plan de la plaque de Silicium varie de $-4,58 \cdot 10^{-6}$ à l'interface Silicium / PZT à $-3,90 \cdot 10^{-6}$ au niveau de la surface libre de la plaque

Si on considère grossièrement le comportement de notre système comme étant identique à celui du bilame, alors, il faudra appliquer une tension d'une centaine de volts au PZT pour créer une déformation capable d'amener la poutre au seuil de flambage. On va de plus

pouvoir considérer comme négligeables les défauts engendrés par la courbure du bilame PZT / cadre de la poutre car comme nous l'avons vu, ils correspondront à des défauts de l'ordre de la dizaine de nm .

Les déformations de notre disque ne sont pas asservies, cela nous le verrons posera des problèmes de dérive et d'hystérésis.

V.3.2. Résultats.

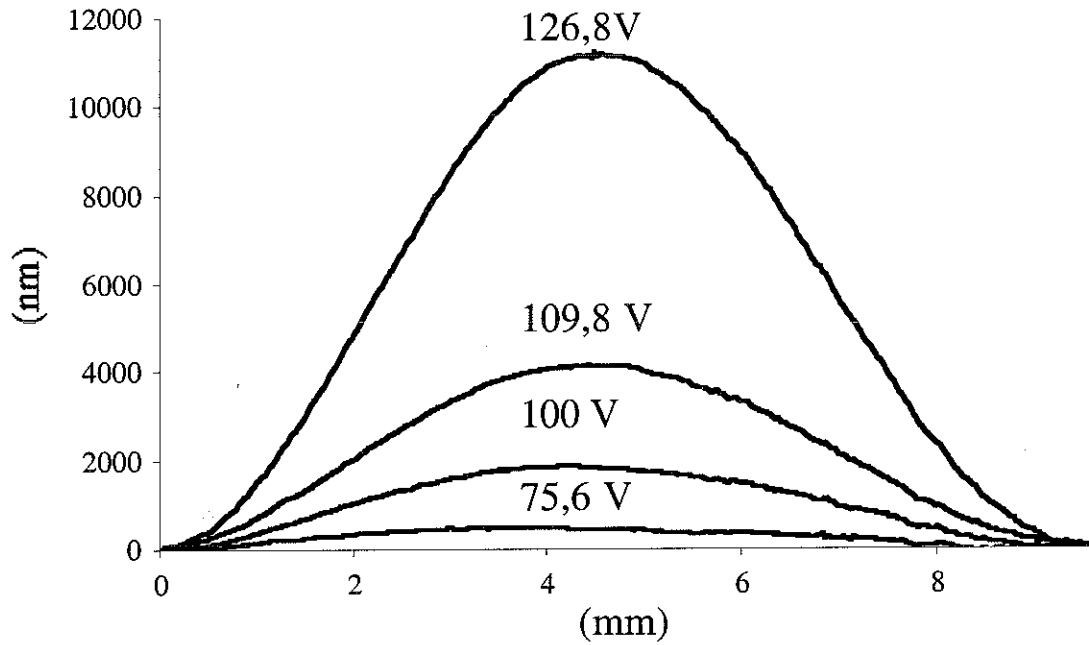
Déformation statique et évolution de la rigidité en flexion.

A l'aide de l'interféromètre de Michelson, on a fait l'acquisition du profil de la poutre entre ses deux encastres en fonction de la tension appliquée au PZT. On extrait ensuite de ces données les courbes correspondant à l'écart entre les profils de la poutre sous différentes tensions appliquées au PZT et le profil de la poutre juste après son collage sur le PZT. Ces courbes sont très bien décrites (Fig. V-23) par un profil correspondant au premier mode de flambement donné par :

$$v(x) = A(1 - \cos(\frac{2\pi}{l}x))$$

Le coefficient A est ensuite déterminé par un fit des différentes courbes par la méthode des moindres carrés. La figure (Fig. V-24) représente l'évolution du coefficient A ainsi déterminé en fonction de la tension appliquée aux bornes du PZT. La branche supérieure du graphique correspond à la déformation prise naturellement par la poutre lorsque l'on augmente le déplacement imposé entre les deux encastres de la poutre. La branche inférieure correspond à la déformation de la poutre existant seulement au dessus du seuil de flambement. Cette branche a été obtenue en faisant basculer manuellement la poutre depuis la position qu'elle prend naturellement lorsque l'on passe au dessus du seuil de flambement.

On mesure également avec ce montage la réponse transverse de la poutre à une force transversale sinusoïdale appliquée en son milieu. Cette force d'origine électrostatique est créée en appliquant une différence de potentiel sinusoïdale V_s entre la Sonde et la Poutre. Cela permet de déterminer l'évolution de la fréquence de résonance ω_p de la poutre en fonction de la tension appliquée au PZT, c'est à dire en fonction de la déformation imposée entre les deux extrémités de la poutre. On en déduit comme pour l'expérience menée avec le dispositif mécanique de précontrainte de la poutre collée sur son anneau l'évolution de la rigidité en flexion de la poutre en utilisant la relation :



*Ecart de la poutre à son profil initial pour différentes tensions appliquées au PZT.
(exemple de courbes expérimentales)*

Fig. V-23

$$\frac{K_{\text{flex}}}{K_0} = \left(\frac{\omega_p}{\omega_0} \right)^2$$

La figure (Fig. V-25) montre la courbe obtenue en prenant pour ω_0 la valeur de la fréquence de résonance mesurée expérimentalement sur la poutre après son collage sur le disque . Elle comporte une première partie correspondant à une décroissance de la rigidité en flexion de la poutre et une deuxième partie correspondant à une augmentation de celle ci. Dans ces deux parties, l'évolution de la rigidité en flexion est linéaire. La rigidité minimum atteint 12,5 % de la rigidité initiale de la poutre après son collage sur le PZT. Malheureusement, le collage sur le PZT provoque une mise sous tension de la poutre. De plus, après un cycle de tension appliquée au PZT, on ne retourne pas au même état de précontrainte pour la poutre puisque certaines fois, on se retrouve même au dessus du seuil de flambement à 0V. Le modèle idéal sans défauts de flambement des poutres est valable également pour des valeurs négatives de η . Il prévoit (Eq. V-1):

$$K_{\text{fix}} = \frac{d^2 U}{dA^2} \Big|_{\text{Acq}} = \begin{cases} K_0(1 - \eta) & \text{si } \eta \leq 1 \\ K_0 2(\eta - 1) & \text{si } \eta \geq 1 \end{cases}$$

Ce modèle donne donc un rapport 2 entre les pentes des droites décrivant l'évolution de K_{fix} après et avant le flambement. Expérimentalement, le rapport entre la pente des deux droites de la figure (Fig. V-25) est de 2,02, ce qui est en très bon accord avec le modèle.

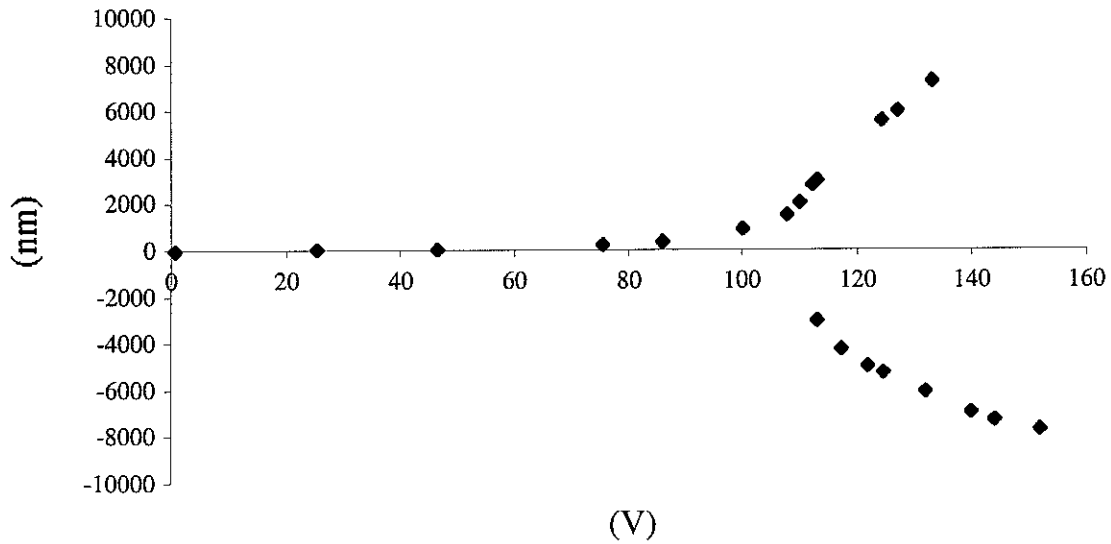


Fig. V-24

On peut également tirer une autre information importante des données présentées (Fig. V-24), il s'agit de la valeur de A sur la branche inférieure (position non naturelle) lorsque l'on arrive au seuil de flambement, c'est à dire lorsque la déformation correspondant à cette branche cesse d'exister. On mesure :

$$A = 2989 \text{ nm.}$$

Si on utilise le modèle développé pour décrire le flambement des poutres non idéales, on a d'après les relations (Eq. V-7) et (Eq. V-12).

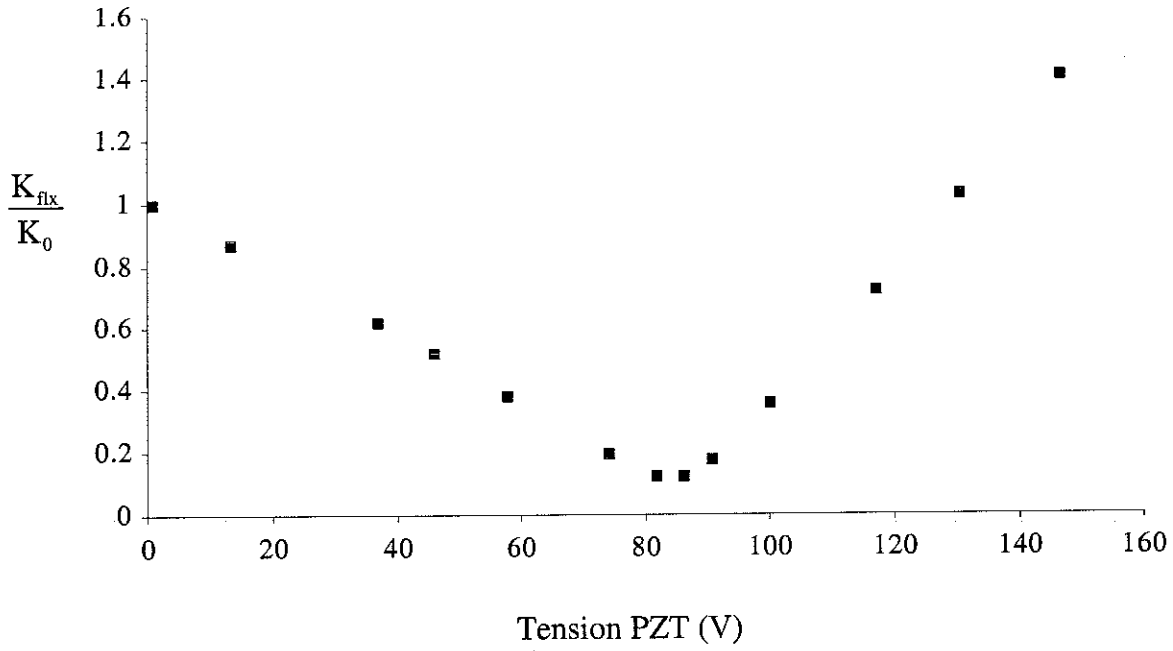


Fig. V-25

$$A \cong -\left(\frac{4\beta}{3\alpha}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot (f)^{\frac{1}{3}} h \propto \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}} h f^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{et } K_{\min} \cong K_0 \frac{3}{2} \left(\frac{3\alpha}{2\beta}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot f^{\frac{2}{3}} \quad \text{c'est à dire} \quad \omega_{\min} \cong \omega_0 \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{3\alpha}{2\beta}\right)^{\frac{1}{3}}} \cdot f^{\frac{1}{3}} \propto \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{l^2}\right) h f^{\frac{1}{3}}$$

d'où en éliminant f :

$$\frac{\omega_{\min}}{A} \cong \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{\left(\frac{16}{3} \pi^4 \frac{E}{\mu}\right)}}{l^2} \quad (\text{Eq. V-14})$$

l est on le rappelle la longueur de la poutre. C'est le seul paramètre géométrique dont dépend la relation. E est le module d'Young du matériau et μ sa masse volumique. Pour la poutre étudiée en Silicium, d'une longueur de 9,6 mm, avec $E_{110} = 1,69 \cdot 10^{11}$ Pa et $\mu = 2328 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, on obtient lorsque A est exprimé en nm et $f_{\min} = \frac{\omega_{\min}}{2\pi}$ en Hz :

$$\frac{f_{\min}}{A} \cong 0,305$$

Soit, comme

$$f_{\min} = 616 \text{ Hz} :$$

$$A = 2020 \text{ nm.}$$

Cette valeur théorique est comparable à la valeur de 2989 nm trouvée expérimentalement. Il est tout à fait logique qu'elle lui soit inférieure car sur la courbe $\delta(\eta)$, le point correspondant à cette valeur possède une tangente verticale et est de ce fait impossible à atteindre expérimentalement puisque c'est la déformation imposée η qui est le paramètre de contrôle.

En ce qui concerne la totalité de la courbe présente figure (Fig. V-24), le positionnement des deux branches de la courbe l'une par rapport à l'autre n'est pas juste, puisque entre l'acquisition des points qui leur correspondent, le PZT est soumis à des effets gênants de dérive et d'hystérésis. De plus, on ne connaît pas l'échelle des abscisses puisque la poutre peut être sous tension ou en compression lorsque la tension appliquée au PZT est de 0V. On ne fera donc pas de comparaison entre cette courbe et le modèle que nous avons développé. Une comparaison des déformations statiques de la poutre avec ce modèle sera faite correctement dans le chapitre traitant du flambement des poutres provoqué par le dépôt d'une couche mince précontrainte.

Ces effets n'ont pas été gênants pour l'étude des fréquences de résonance de la poutre en fonction de la tension appliquée au PZT puisque d'une part, ces mesures ont été effectuées en faisant varier la tension de contrôle du PZT de manière monotone et d'autre part parce que le rapport des deux pentes est indépendant de l'échelle des abscisses de la figure (Fig. V-24) et de l'état de tension de la poutre lorsque la tension appliquée au PZT est de 0V.

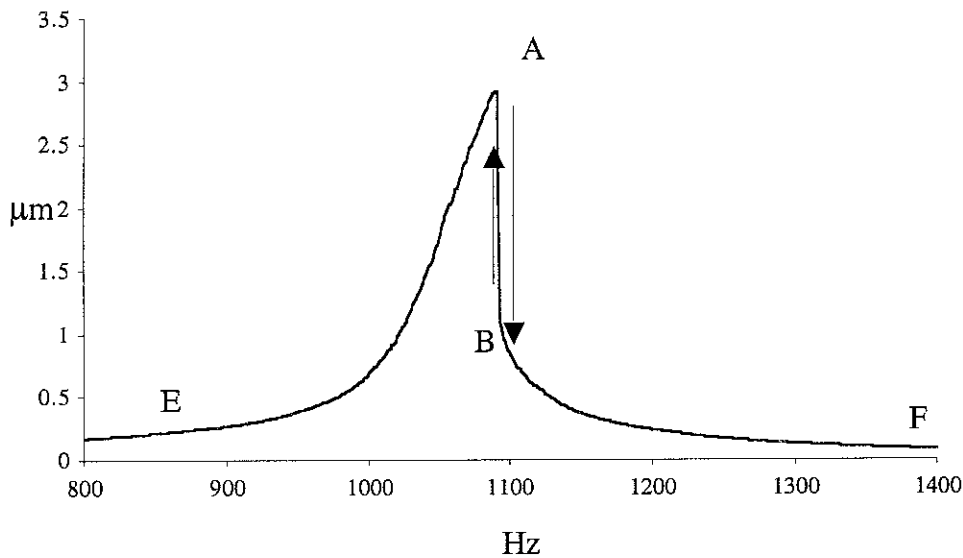
Oscillations non linéaires.

Le montage nous l'avons vu présente des problèmes d'hystérésis, de dérive et de reproductibilité. Cependant, on a pu identifier trois types de comportements pour les vibrations non linéaires de la poutre. Ces oscillations non linéaires de la poutre sont celles obtenues en appliquant à la poutre une stimulation transversale lorsque celle-ci est dans sa position naturellement stable. On ne s'est volontairement pas intéressé aux vibrations non linéaires de la poutre obtenues depuis la position non naturellement stable de la poutre. On appelle vibrations non linéaires de la poutre les vibrations dont l'amplitude est assez grande pour permettre à la poutre de se comporter comme un oscillateur non linéaire.

Le premier type de comportement, que l'on appelle type I (Fig. V-26), se rencontre avant le seuil de flambement élastique de la poutre et correspond à une déformation du pic de résonance vers les fréquences positives. On observe lorsque la déformation du pic est assez importante une diminution brutale de l'amplitude des oscillations au point A lorsque l'on augmente la fréquence d'excitation de la poutre depuis le point E et une augmentation brutale de l'amplitude des oscillations au point B lorsqu'on la diminue depuis le point F. Le point B est situé avant le point A mais pratiquement confondu avec lui pour cet exemple.

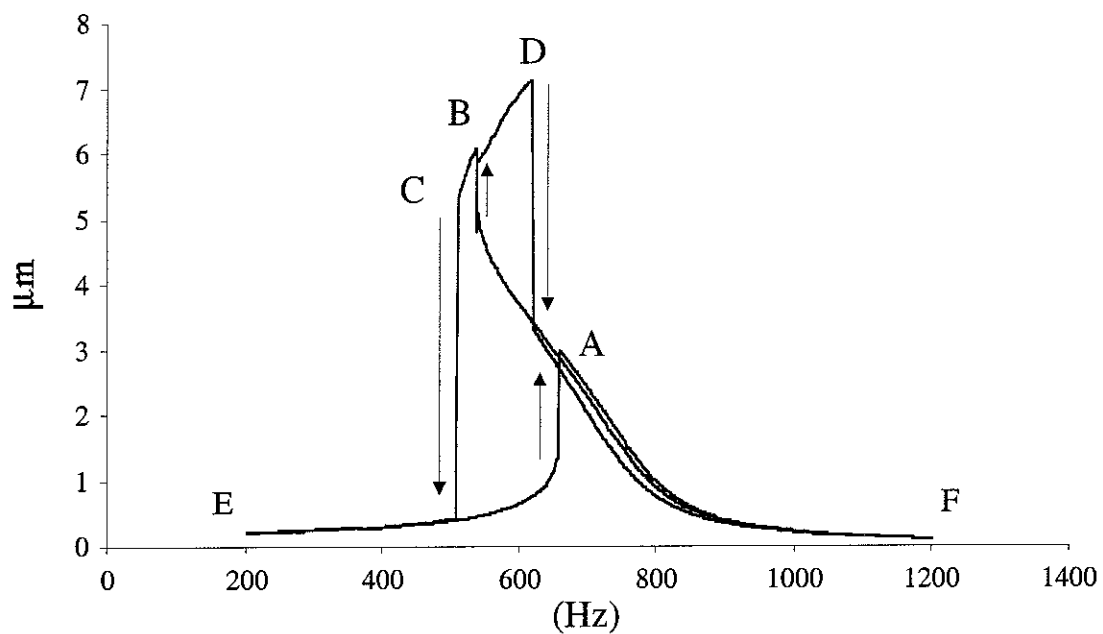
Le deuxième type de comportement, que l'on appelle type II (Fig. V-27), se rencontre autour du seuil de flambement élastique de la poutre et correspond à une structure complexe du pic de résonance. Cette structure de pic comprend quatre fréquences d'excitation correspondant à un saut d'amplitude (points A,B,C,D)

Le dernier type, de comportement, que l'on appelle type III (Fig. V-28), se rencontre après le seuil de flambement élastique de la poutre et correspond à une déformation du pic de résonance vers les fréquences négatives. On observe lorsque la déformation du pic est assez importante une augmentation brutale de l'amplitude des oscillations au point A lorsque l'on augmente la fréquence d'excitation de la poutre depuis le point E et une diminution brutale de l'amplitude des oscillations au point B lorsqu'on la diminue depuis le point F. Le point B est situé avant le point A.



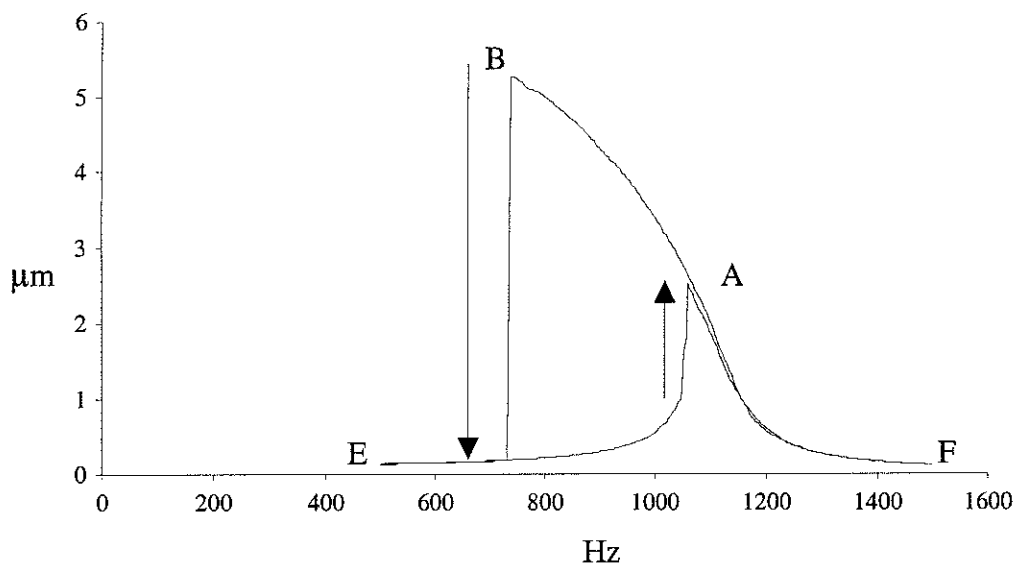
*Comportement de
type I*

Fig. V-26



*Comportement de
type II*

Fig. V-27



*Comportement de
type III*

Fig. V-28

V.3.3. Conclusion

Le montage hybride bien que fortement imparfait à cause du mauvais contrôle du PZT a permis de vérifier certains points des modèles établis pour décrire le flambement de poutres encastrées.

Il a également permis de caractériser différents types de comportements pour les oscillations non linéaires de la poutre. La prochaine section va permettre de développer un modèle capable de rendre compte de ces comportements. Nous l'appliquerons ensuite Au cas de la précontrainte des poutres monolithique par le dépôt d'un film mince de SiO_2 .

V.4. Oscillations non-linéaires des poutres précontraintes.

Le but de ce paragraphe est de présenter un modèle permettant de décrire les oscillations non linéaires observées lors des expériences effectuées avec le montage hybride. Ce modèle sera ensuite utilisé pour caractériser les poutres précontraintes par dépôt de SiO_2 . Les calculs sont présentés en annexe (Annexe D) . On se contentera ici de décrire les résultats.

V.4.1. Equation différentielle.

On a établi au cours des sections précédentes que dans le cas le plus général, l'énergie élastique de la poutre est donnée par la relation (Eq. V-4) :

$$U = \frac{K_0}{2} \left(\left(\frac{3\alpha}{16\beta} \right) \delta^4 + \lambda \delta^3 + (1 + \mu - \eta) \delta^2 + (v - \sigma \cdot \eta) \delta \right)$$

On rappelle que dans cette expression :

$\delta = \frac{a_2}{h}$ est le déplacement transverse réduit de la poutre et correspond au demi-écart de la poutre par rapport à sa ligne moyenne après encastrement.

η est le paramètre de contrôle du flambement. Lorsque le système ne présente pas de défauts (poutre rectiligne), le seuil de flambement élastique de la poutre a lieu pour $\eta=1$.

K_0 est la rigidité en flexion de la poutre.

Les coefficients λ , μ , v et σ sont donnés en annexe (Annexe C). Ils dépendent seulement des défauts de la poutre et de ses encastremets. λ à l'ordre 1, μ à l'ordre 2, v à l'ordre 1 et à l'ordre 3 et σ à l'ordre 1.

Avec cette description de la ligne moyenne de la poutre, le paramètre η étant fixé, les vibrations transversales de la poutre vont correspondre à une dépendance de δ avec le temps t

On peut donc décrire les déformations transverse de la poutre soumise à une force sinusoïdale par le système à un degré de liberté équivalent :

$$\tilde{m} \frac{d^2 \delta}{dt^2} = - \frac{\partial U}{\partial \delta} - B \frac{d\delta}{dt} + Q \cos(\omega t)$$

Dans cette relation, le coefficient B décrit l'amortissement de la poutre (frottement visqueux), le coefficient Q l'intensité de la force d'excitation et $-\frac{\partial U}{\partial \delta}$ la force de rappel et $\tilde{m}$ est la masse équivalente de la poutre.

Nous allons utiliser cette équation sous la forme :

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + p^2 \left(\left(\frac{3\alpha}{8\beta} \right) \delta^3 + \frac{3}{2} \lambda \delta^2 + (1 + \mu - \eta) \delta + \frac{1}{2} (v - \sigma \cdot \eta) \right) + b \frac{d\delta}{dt} - q \cos(\omega t) = 0$$

(Eq. V-15)

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur non linéaire. La pulsation $\omega_0 = p$ correspond à la pulsation propre des vibrations transversales de la poutre parfaite encastree à ses deux extrémités et non précontrainte. La force de rappel est un polynôme de degré 3 en δ . Lorsque ce polynôme ne comporte que des termes de degré 3 et 1, cette équation est connue sous le nom d'équation de Duffing. C'est le cas lorsque la poutre ne présente pas de défauts. On remarque que dans ce cas, au seuil de flambement, la force de rappel est en δ^3 et l'oscillateur est strictement non linéaire. Les méthodes classiques de perturbation pour la résolution des équations différentielles non linéaires ne s'appliquent donc pas au voisinage du seuil de flambement.

La littérature abondante concernant les oscillateurs non linéaires [Ref. V-5] , [Ref. V-6] nous apprend qu'ils peuvent avoir différents types de comportements :

Les oscillations δ peuvent avoir la même fréquence que la force d'excitation, on parle de synchronisation harmonique.

Les oscillations δ peuvent avoir une période multiple de celle de la force d'excitation, on parle de synchronisation subharmonique.

Les oscillations δ peuvent avoir une fréquence multiple de celle la force d'excitation, on parle de synchronisation superharmonique.

Le comportement de δ peut également fluctuer lentement entre ceux précédemment cités (phénomènes de battement) pour finalement devenir complètement chaotique [Ref. V-7]

Les facteurs qui à une pulsation ω d'excitation donnée sélectionnent l'un ou l'autre de ces comportements sont l'intensité q de la force d'entraînement et le coefficient d'amortissement

visqueux b. Lorsque l'amortissement visqueux n'est pas trop faible et que l'amplitude d'excitation n'est pas trop élevée, on se trouve souvent dans le cas de la synchronisation harmonique. C'est ce que nous avons observé expérimentalement avec nos poutres monolithiques d'une part avec le montage sur PZT présenté précédemment et d'autre part en précontrainant des poutres monolithiques par dépôt de SiO₂ comme nous le verrons plus loin.

Nous allons nous intéresser aux solutions de l'équation (Eq. V-15) dont la période est la même que celle de la force d'excitation. La forme approchée de ces solutions va être déterminée en utilisant la méthode de moyenne de Ritz [Ref. V-8].

Nous cherchons les solutions de notre système sous la forme :

$$\delta(t) = \delta_0 + \delta_1 \cos(\omega t + \phi)$$

On aboutit en appliquant la méthode de Ritz au système :

$$\left\{ \delta_1^2 \left(\frac{3}{2} \lambda + \frac{9\alpha}{8\beta} \delta_0 \right) = -2 \left(\left(\frac{3\alpha}{8\beta} \right) \delta_0^3 + \frac{3}{2} \lambda \delta_0^2 + (1 + \mu - \eta) \delta_0 + \frac{1}{2} (v - \sigma \cdot \eta) \right) \right. \quad (i)$$

$$\left\{ \left(\frac{\omega^2}{p^2} \delta_1 - \delta_1 \left(\left(\frac{9\alpha}{8\beta} \right) \delta_0^2 + 3\lambda \delta_0 + (1 + \mu - \eta) \right) - \frac{9\alpha}{32\beta} \delta_1^3 \right) \cos(\phi) + \delta_1 \frac{b\omega}{p^2} \sin(\phi) = -\frac{q}{p^2} \right. \quad (ii)$$

$$\left\{ \left(\frac{\omega^2}{p^2} \delta_1 - \delta_1 \left(\left(\frac{9\alpha}{8\beta} \right) \delta_0^2 + 3\lambda \delta_0 + (1 + \mu - \eta) \right) - \frac{9\alpha}{32\beta} \delta_1^3 \right) \sin(\phi) - \delta_1 \frac{b\omega}{p^2} \cos(\phi) = 0 \right. \quad (iii)$$

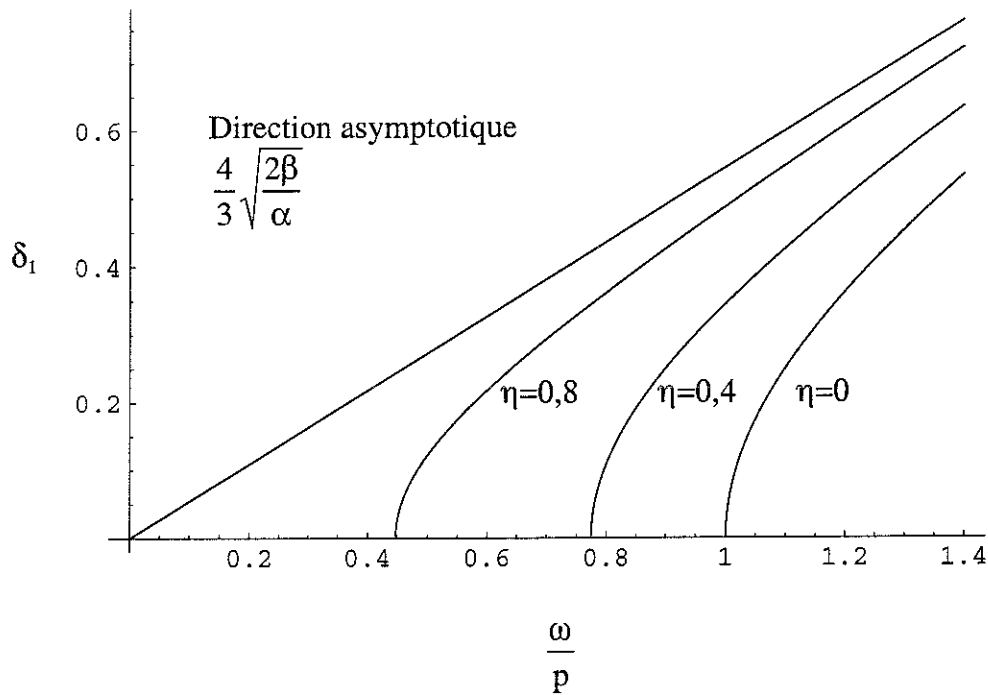
(Eq. V-16)

V.4.2. Allure des courbes de résonance.

Oscillations libres.

On appelle oscillations libres du système les oscillations non amorties à force d'excitation nulle ($b=0, q=0$). Pour ces oscillations libres on appelle squelette des oscillations la courbe reliant l'amplitude δ_1 des oscillations à leur pulsation propre ω .

La figure (Fig. V-29) montre la courbe reliant l'amplitude δ_1 des oscillations libres à leur pulsation propre ω dans les cas de la poutre sans défauts avant le seuil de flambement ($\eta < 1$).



Relation entre la pulsation des oscillations libres et leur amplitude avant le seuil de flambement ($\eta < 1$) pour le système sans défauts (effet ressort durcissant)

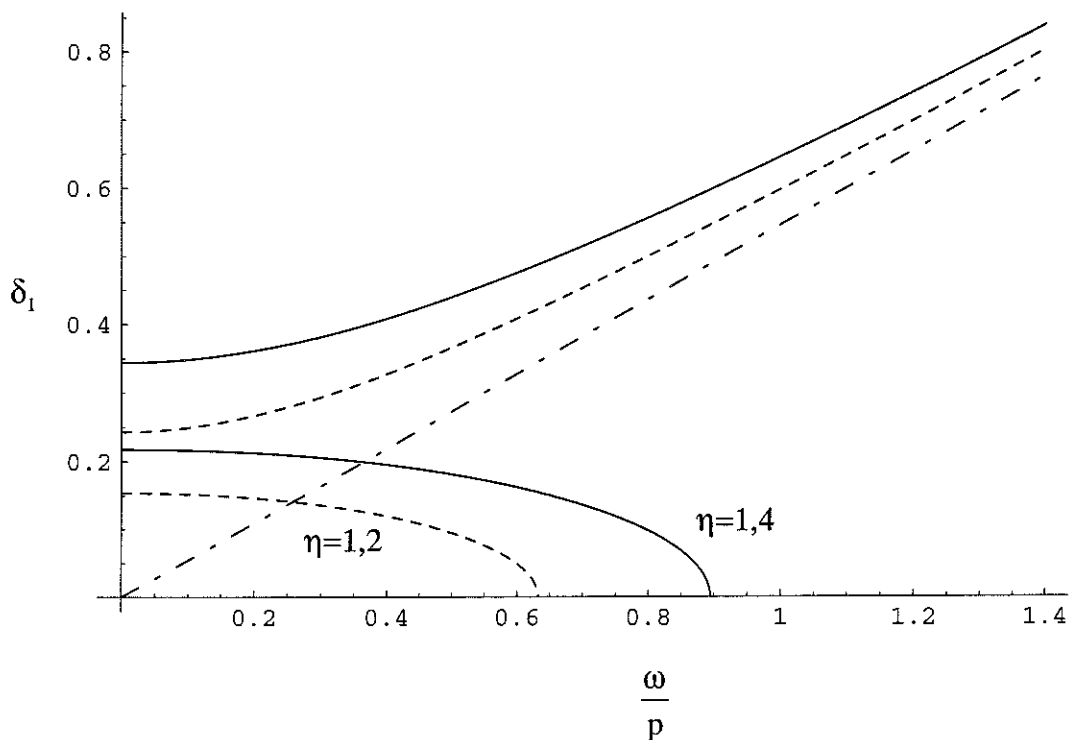
Fig. V-29

Une augmentation de l'amplitude des oscillations correspond alors à une augmentation de leur pulsation propre. Ce cas est le cas bien connu du ressort durcissant. Pour ces oscillations, la position moyenne de la poutre ne varie pas avec l'amplitude des oscillations.

La figure (Fig. V-30) montre la courbe reliant l'amplitude δ_1 des oscillations libres à leur pulsation propre ω dans les cas de la poutre sans défauts au dessus du seuil de flambement ($\eta > 1$). La courbe comprend ici deux branches.

La branche correspondant aux petites amplitudes décrit des oscillations centrées autour de l'une ou l'autre des positions stables de la poutre. Une augmentation de l'amplitude des oscillations correspond alors à une diminution de leur pulsation propre. Ce cas est le cas bien connu du ressort mollissant. Pour ces oscillations, la position moyenne de la poutre varie avec l'amplitude des oscillations (voir Annexe D).

La branche correspondant aux plus grandes amplitudes décrit des oscillations centrées autour des deux positions stables de la poutre. Une augmentation de l'amplitude des oscillations correspond alors à une augmentation de leur pulsation propre. On retrouve le cas bien connu du ressort durcissant. Pour ces oscillations, la position moyenne de la poutre ne varie pas avec l'amplitude des oscillations.



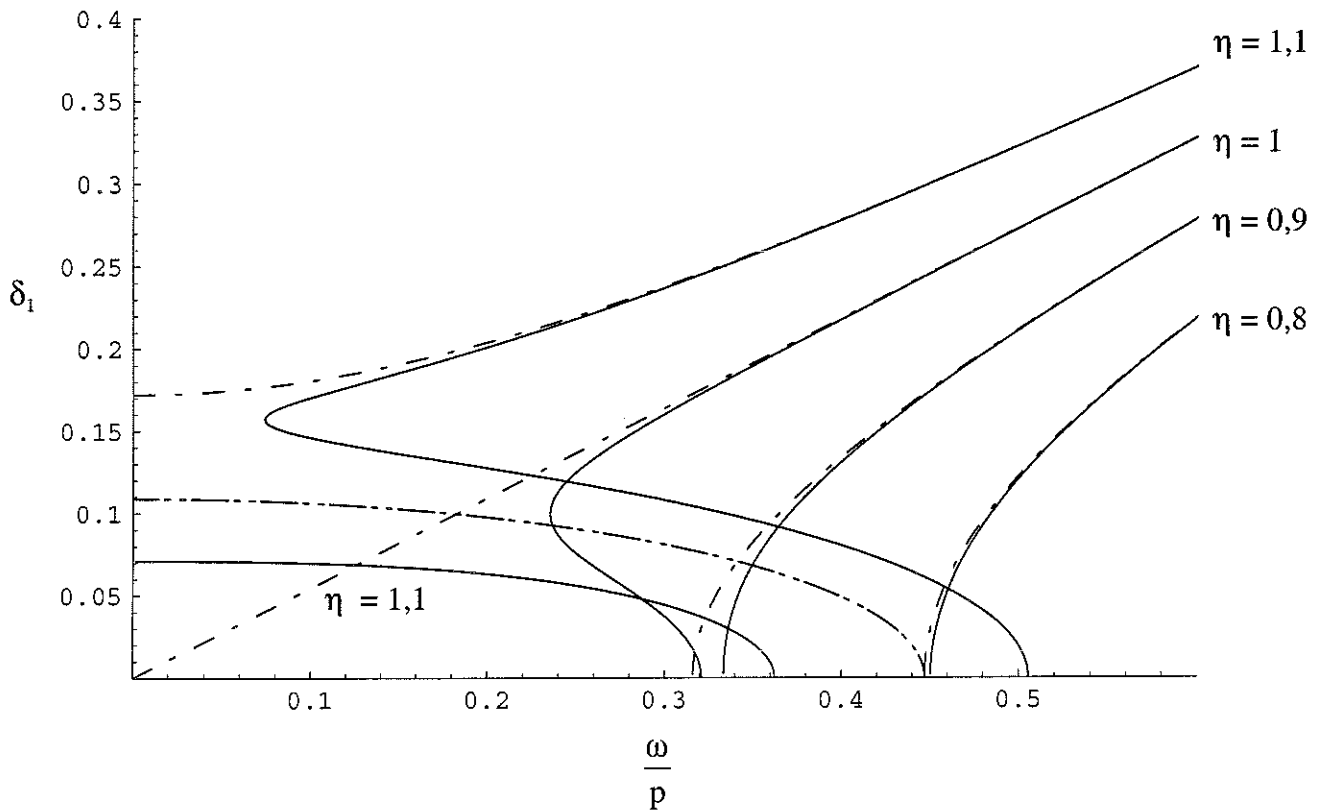
*Relation entre la pulsation des oscillations libres et leur amplitude après le seuil de flambement ($\eta > 1$) pour le système sans défauts.
(effet ressort mollissant pour les trajectoires correspondant aux petites amplitudes)*

Fig. V-30

La figure (Fig. V-31) montre la courbe reliant l'amplitude δ_1 des oscillations libres à leur pulsation propre ω dans les cas de la poutre avec défauts pour 4 valeurs représentatives de η . Pour chacune des valeurs de η , on a également tracé en pointillé la courbe correspondant au cas sans défauts.

Pour $\eta = 0,8$, avant le seuil de flambement, de la même manière que dans le cas de la poutre sans défauts, on observe un comportement typique de ressort durcissant. Le squelette reste proche du squelette du cas sans défaut. Les oscillations sont aux petites amplitudes centrées autour de la position naturellement stable de la poutre. On dira qu'elles sont issues de la position naturellement stable de la poutre.

Pour $\eta = 0,9$, avant le seuil de flambement, de la même manière que dans le cas de la poutre sans défauts, on observe un comportement typique de ressort durcissant. Mais le squelette commence à s'éloigner du cas idéal pour les petites amplitudes. Les oscillations sont issues de la position naturellement stable de la poutre.



Relation entre la pulsation des oscillations libres et leur amplitude.

Comparaison du cas idéal (trait pointillé mixte) et du cas avec défaut de la ligne moyenne de $\bar{a}_2 = 0,003h$ (trait continu), h étant l'épaisseur de la poutre.

Fig. V-31

Pour $\eta = 1$, on est au seuil de flambement pour la poutre sans défauts. La poutre avec défauts n'a pas encore atteint son seuil de flambement. Le squelette des oscillations présente alors une double courbure. Les oscillations sont issues de la position naturellement stable de la poutre.

Pour $\eta = 1,1$, on est au dessus du seuil de flambement pour la poutre avec défauts. Le squelette des oscillations présente alors deux branches.

La première correspond à des oscillations qui aux petites amplitudes sont centrées autour de la position non naturelle d'équilibre de la poutre. Les oscillations sont issues de la position non naturellement stable de la poutre. On retrouve le cas du ressort mollissant.

La deuxième correspond à des oscillations qui aux petites amplitudes sont centrées autour de la position naturelle d'équilibre de la poutre. Les oscillations sont issues de la position

naturellement stable de la poutre. Le squelette des oscillations présente toujours une double courbure. Cette branche est la continuité du squelette existant avant le seuil de flambement.

Expérimentalement, ce sont les oscillations issues de la position naturellement stable de la poutre qui ont été étudiées. On va donc déterminer les valeurs de η pour lesquelles la courbe décrivant les oscillations libres issues de la position naturellement stable présente une double courbure.

La valeur η_2 de η à laquelle apparaît la double courbure est donnée par :

$$\eta_2 \cong 1 - \frac{9}{2} \left(\frac{3\alpha}{100\beta} \right)^{\frac{1}{3}} f_1^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} \quad (\text{Eq. V-17})$$

Dans cette relation comme dans les suivantes, f_1 est la fonction dépendant seulement de la géométrie des défauts définie par la relation (Eq. V-13) et y est un terme petit et sans dimension caractérisant l'ampleur des défauts.

La valeur η_3 de η à laquelle le squelette des oscillations libres issues de la position naturellement stable de poutre coupe l'axe des ordonnées est donnée par :

$$\eta_3 \cong 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{15\alpha}{4\beta} \right)^{\frac{1}{3}} f_1^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} \quad (\text{Eq. V-18})$$

Précédemment, on avait trouvé (Eq. V-11) et (Eq. V-8) :

$$\begin{aligned} \eta_{\min} &\cong 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{3\alpha}{2\beta} \right)^{\frac{1}{3}} f_1^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} \\ \eta_{\text{cr}} &= 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{3\alpha}{4\beta} f_1^2 \right)^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

On rappelle que $\eta_{\min}$ est la valeur de η à laquelle la rigidité en flexion de la poutre dans sa position naturellement stable est minimum. η_{cr} est la valeur de η correspondant au seuil de flambement.

On déduit de ces calculs que quels que soient la géométrie de la poutre, les matériaux la constituant et les défauts présents:

$$\eta_2 \leq \eta_{\min} \leq 1 \leq \eta_{\text{cr}} \leq \eta_3$$

et

$$\frac{1 - \eta_3}{1 - \eta_{\text{cr}}} \cong (5)^{\frac{1}{3}} \cong 1,71 \quad (\text{Eq. V-19})$$

$$\frac{1 - \eta_2}{1 - \eta_{\min}} \cong 3\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}} \cong 1,63 \quad (\text{Eq. V-20})$$

$$\frac{1 - \eta_{\min}}{1 - \eta_{\text{cr}}} \cong -\frac{1}{2}(2)^{\frac{1}{3}} \cong 0,63 \quad (\text{Eq. V-21})$$

L'intervalle $]\eta_2; \eta_3[$ correspond donc à l'existence d'une double courbure pour le squelette des oscillations issues de la position naturellement stable de la poutre. C'est dans cet intervalle que les variations de la position moyenne de la poutre avec les oscillations sont les plus importantes.

Les défauts choisis pour l'exemple de la figure (Fig. V-31) correspondent à un défaut de la ligne moyenne de $a_2 = 0,003h$, h étant l'épaisseur de la poutre ils correspondent aux valeurs caractéristiques de η suivantes:

$$\eta_2 = 0,933, \eta_{\min} = 0,959, \eta_{\text{cr}} = 1,064, \eta_3 = 1,111.$$

Oscillations Forcées amorties.

La ligne médiane de la courbe de résonance reliant l'amplitude des oscillations à la pulsation de la force d'excitation est le squelette des oscillations. On comprend ainsi toute l'importance de ce squelette car c'est lui qui va donner au pic de résonance son allure.

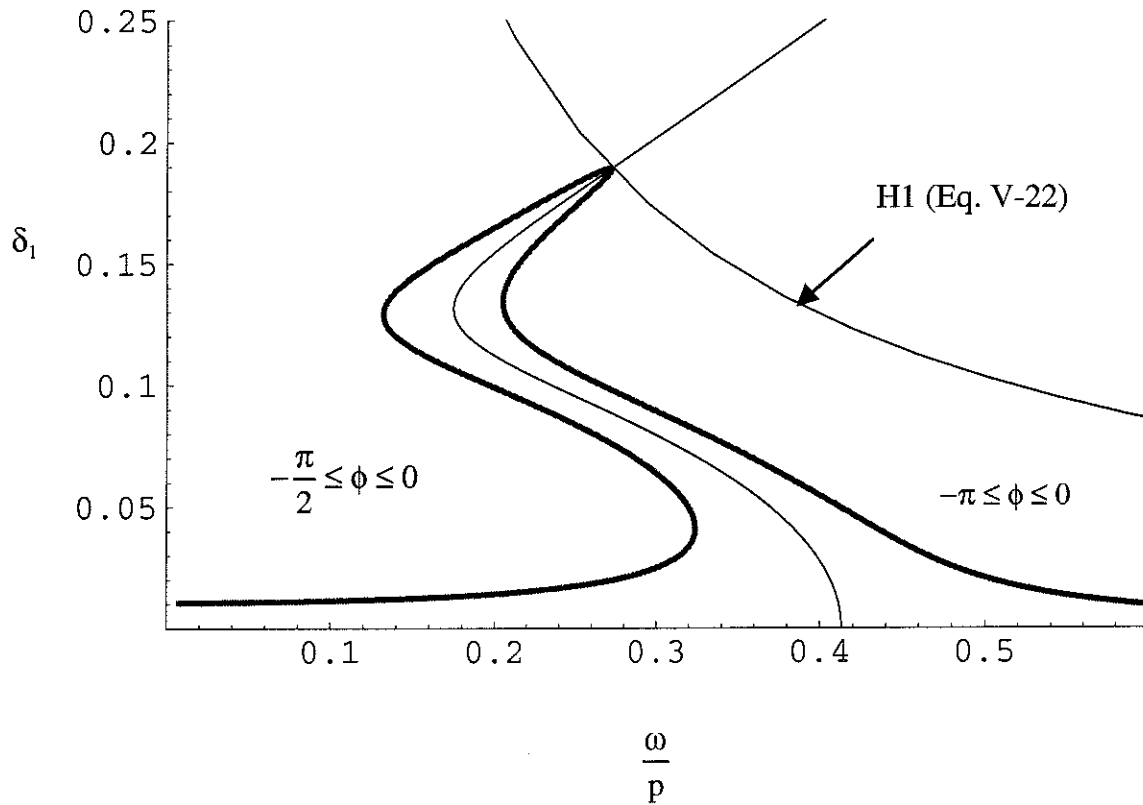
La partie de la courbe de résonance située à gauche du squelette correspond à des déphasages ϕ tels que $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq 0$.

La partie de la courbe de résonance située à droite du squelette correspond à des déphasages ϕ tels que $-\pi \leq \phi \leq -\frac{\pi}{2}$.

La courbe de résonance est située dans le secteur délimité par les axes des abscisses et des ordonnées et par l'hyperbole H1 d'équation :

$$\frac{\omega}{p} \delta_1 = \left(\frac{q}{p^2} \right) \left(\frac{p}{b} \right) \quad (\text{Eq. V-22})$$

De plus elle passe par l'intersection du squelette et de l'hyperbole H1. En ce point, $\phi = \frac{\pi}{2}$.



Oscillations forcées amorties (trait épais) avec défaut de la ligne moyenne de $a_0 = 0,003h$, h étant l'épaisseur de la poutre. $\eta=1,05$, $\frac{q}{p^2} = 0,0018$, $\frac{b}{p^2} = 0,035$. On a également tracé le squelette de ces oscillations.

Fig. V-32

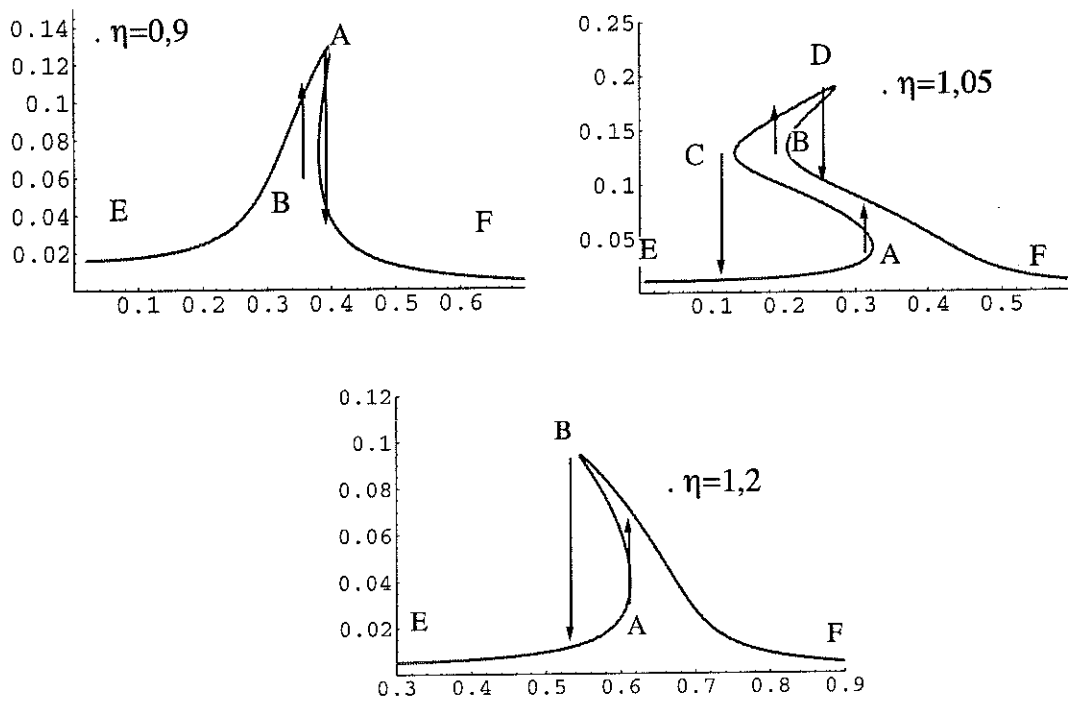
La figure (Fig. V-32) montre un exemple obtenu à partir des équations (Eq. V-16) (voir Annexe D). Les défauts sont les mêmes que pour l'exemple de la figure (Fig. V-31).

La figure (Fig. V-33) montre trois courbes de résonance correspondant à des oscillations forcées de la poutre issues de sa position d'équilibre naturel.

La première pour $\eta = 0,9 < \eta_2$ correspond au comportement de type I que nous avons identifié. Les points A et B correspondent à des sauts d'amplitude car la branche reliant les points A et B est une branche instable.

On peut comprendre cela très simplement d'après [Ref. V-9]. En effet, Pour des fréquences d'excitation comprises entre celles des points A et B, Il existe dans l'espace des phase $(\delta, \dot{\delta})$

de notre système trois trajectoires limites qui correspondent aux trois valeurs possibles de δ_1 . Ces trois trajectoires sont nécessairement imbriquées les unes dans les autres puisqu'elles se confondent deux à deux en A et en B. Or, topologiquement, deux cycles limites stables sont nécessairement séparés par un cycle limite instable. La branche reliant les points A et B est donc nécessairement instable. Si le pic de résonance est trop large et pas assez haut (forte excitation et fort amortissement), les sauts peuvent ne pas exister.



Courbes de résonance théoriques avec défaut de la ligne moyenne de $a_2^0 = 0,003h$ (trait continu), h étant l'épaisseur de la poutre. $\frac{q}{p^2} = 0,0018$, $\frac{b}{p^2} = 0,035$.

En abscisses, on représente la pulsation réduite $\frac{\omega}{p}$ et en ordonnée l'amplitude δ_1 des oscillations.

Fig. V-33

La deuxième pour $\eta_2 < \eta = 1,05 < \eta_3$ correspond au comportement de type II que nous avons identifié. De la même manière que pour la première courbe, les points A, B, C et D correspondent à des sauts d'amplitude. Il est évident que le comportement complexe de type II est dû à la double courbure du squelette des oscillations.

On remarquera cependant que pour $\eta_2 < \eta < \eta_3$ un comportement de type II n'est pas obligatoire. L'intervalle $[\eta_2, \eta_3]$ définit seulement les valeurs de η pour lesquelles on va

pouvoir observer un comportement de type II. En effet, la double courbure du squelette des oscillations peut être masquée par un pic de résonance trop large ou pas assez haut.

La troisième pour $\eta_3 < \eta = 1,2$ correspond au comportement de type III que nous avons identifié. Les points A et B correspondent à des sauts d'amplitude.

V.4.3. Conclusion.

Le modèle développé permet d'expliquer les trois types de comportements révélés par le montage hybride. On a pu également quantifier le rôle joué par les défauts à l'aide des mêmes paramètres (la fonction f) que ceux utilisés pour décrire la déformation statique de flambement et l'évolution de la rigidité en flexion de la poutre à l'approche du seuil de flambement. Ces résultats vont être utilisés pour analyser le comportement des poutres monolithiques précontraintes par dépôt de SiO_2 .

précontraintes par dépôt de SiO_2 .

acnée à l'étude du flambement des poutres monolithiques précontraintes
mince de SiO_2 par sputtering RF.

remier temps réadapter le modèle développé pour décrire le flambement
tion imposée par le rapprochement des deux points d'encastrement au
ntrôlé par le dépôt d'une couche mince contrainte sur la poutre.

quel est le paramètre de contrôle du flambement dans ce cas.
terons les résultats obtenus expérimentalement sur les poutres
ous avons fabriquées.

e du Flambement des poutres par dépôt d'une couche mince ainte.

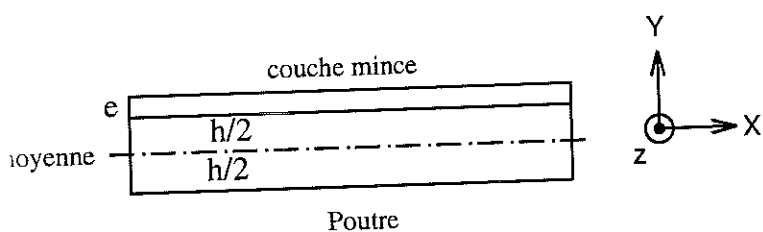


Fig. V-34

aisseur h et d'une longueur l est encastree à ses deux extrémités comme
V-10). On dépose sur cette poutre une couche mince d'épaisseur $e \ll h$.
castrement A et B de la poutre restent fixes.

our le modèle précédent de décrire les déformations naturelles v_0 de la
poutre par la série trigonométrique suivante :

$$v_0(x) = a_2 \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \right) + b_1 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)$$

écarts de la poutre par rapport à sa ligne moyenne v_0 par la série

$$v = a_1 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \right) + a_2 \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \right) + b_1 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)$$

Dans notre description, a_2 est le seul degré de liberté du système, les autres paramètres étant fixés par les conditions aux limites.

L'énergie élastique U_p de la poutre vaut alors :

$$U_p = U_{cpr} + U_{flx}$$

avec

$$U_{cpr} = \frac{K}{2} \int_0^l \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial v + v_0}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 \right) \right) dx$$

$$U_{flx} = \frac{C}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

La déformation dans la direction x à la surface de la poutre vaut :

$$\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial v + v_0}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

On suppose que le film mince déposé sur la poutre est comprimé. On Appelle S_0 la déformation dans la direction x de l'interface poutre / film qui minimise l'énergie élastique du film . (S_0 positive correspond à une compression du film). Alors, l'énergie élastique du film s'exprime (à une constante près) comme :

$$U_f = \frac{K_f}{2} \int_0^l \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial v + v_0}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 \right) - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - S_0 \right)^2 dx$$

L'énergie élastique du système est donc

$$U = U_p + U_f$$

Après calcul, si on considère $\frac{K_f}{K} \ll 1$, cette énergie se met exactement sous la même forme que dans le cas de la précontrainte d'une poutre encastree contrôlée par le déplacement des encastrements :

$$U = C_{ste} + 4\beta\gamma\pi^4 \frac{h^6}{l^3} \left(\left(\frac{3\alpha}{16\beta} \right) \delta^4 + \lambda\delta^3 + (1 + \mu - \eta)\delta^2 + (\nu - \sigma \cdot \eta)\delta \right) \quad (\text{Eq. V-23})$$

Dans cette expression :

$\delta = \frac{a_2}{h}$ est le (demi) déplacement transversal réduit de la poutre.

$$\eta = \frac{S_0 K_f}{C} \left(\frac{l^2}{4\pi^2} \right) \quad (\text{Eq. V-24})$$

est le paramètre de contrôle du flambement de notre système. Il n'est pas toujours proportionnel à l'épaisseur de film déposé. En effet, dans la pratique le produit $K_f S_0$ n'est pas toujours une fonction linéaire de l'épaisseur du matériau déposé comme film mince.

Les coefficients λ , μ , ν et σ sont les mêmes que pour le modèle de flambement à déformation imposée. Ils dépendent seulement des défauts Δ , Θ_0 , Θ_1 , a_1^0 , a_2^0 , b_1^0 et b_2^0 . λ à l'ordre 1, μ à l'ordre 2, ν à l'ordre 1 et à l'ordre 3 et σ à l'ordre 1.

L'équation (Eq. V-23) implique que la déformation naturelle que prendra la poutre au cours du flambement est indépendante de la face de la poutre (face supérieure ou face inférieure) sur laquelle est déposée la couche mince. C'est à dire que sans défauts, avec ce modèle, après le seuil de flambement, les deux positions possibles $\delta < 0$ et $\delta > 0$ sont équivalentes. Ce résultat est en accord avec ceux obtenus avec le modèle développé dans [Ref. IV-7]. Il n'a rien d'étonnant car le coefficient a_2 est le seul degré de liberté du système. Il correspond aux déformations en $\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \right)$ de la poutre et pour une valeur absolue donnée de a_2 , cette déformation correspond à la même énergie élastique du film que a_2 soit positif ou négatif.

Ce sont donc les défauts de la poutre qui vont imposer le sens dans lequel se produira sa déformation naturelle de flambement.

V.5.2. Mesure de η .

Dans le cas qui nous intéresse, la poutre encastree est comme nous l'avons déjà dit une plaque de section rectangulaire d'épaisseur h et de largeur L .

K_f et C dépendent tous deux de la largeur L de la poutre. La relation (Eq. IV-17) se met sous la forme :

$$C = (E \frac{L}{12h})h^4 = \beta^* L h^3$$

de la même manière, pour un dépôt donné, $K_f \propto L$

ce que l'on va noter sous la forme : $K_f = k_f L$

$$\text{d'où : } \eta = \frac{S_0 k_f}{\beta^* h^3} \left(\frac{l^2}{4\pi^2} \right) \quad (\text{Eq. V-25})$$

C'est le produit $k_f S_0$ dont l'unité est le Nm^{-1} qui caractérise la précontrainte du film sur son substrat. Connaissant la géométrie de la poutre, il va nous donner la valeur du paramètre de contrôle du flambement η .

Considérons une poutre libre sur laquelle est déposée une couche mince identique à celle déposée sur la poutre encastree. Le système est alors invariant par translation le long de la poutre. Les contraintes sur toute section droite de la poutre perpendiculaire à sa ligne moyenne seront donc indépendantes de leur position le long de celle-ci. La courbure de la poutre va de ce fait être constante le long de sa ligne moyenne. Son équation aura donc la forme :

$$v = \frac{1}{2} a x^2$$

Les considérations précédentes ne permettent pas de dire que la ligne moyenne de la poutre sera sa ligne neutre. On va noter ϵ_0 l'élongation de la ligne moyenne de la poutre.

L'énergie élastique par unité de longueur de notre système va donc s'écrire avec la définition de S_0 donnée au paragraphe précédent :

$$W = \frac{1}{2} C \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{2} K (\epsilon_0)^2 + \frac{1}{2} K_f \left(-\frac{h}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \epsilon_0 - S_0 \right)^2$$

Ce qui donne :

$$W = \frac{1}{2} C (a)^2 + \frac{1}{2} K (\epsilon_0)^2 + \frac{1}{2} K_f \left(-\frac{h}{2} a + \epsilon_0 - S_0 \right)^2$$

Pour déterminer a et ϵ_0 on va minimiser W par rapport à ces deux paramètres .

On aboutit en considérant que K_f est petit devant K à :

$$a \cong -\frac{hK_f S_0}{2C} \quad \text{et} \quad \varepsilon_0 \cong \frac{K_f}{K} S_0 \quad (\text{Eq. V-26})$$

Expérimentalement, on peut mesurer le rayon de courbure R d'une poutre libre sur laquelle est déposée une couche mince à l'aide de notre interféromètre. On a donc accès au paramètre a car $R = -\frac{1}{a}$.

Dans le cas où la poutre libre est une plaque de section rectangulaire d'épaisseur h^* et de largeur L^* .

$$a \cong -\frac{hK_f S_0}{2C} \cong -\frac{k_f S_0}{2\beta^* h^{*2}}$$

Lorsqu'on va déposer un film mince pour précontraindre les poutres monolithiques que nous avons fabriquées, on va le déposer également sur une poutre PL encastrée à une seule extrémité (Fig. V-35). La mesure du rayon de courbure de PL va ainsi nous donner accès au produit $k_f S_0$. On connaîtra alors la valeur du paramètre η contrôlant le flambement élastique de notre poutre encastrée.

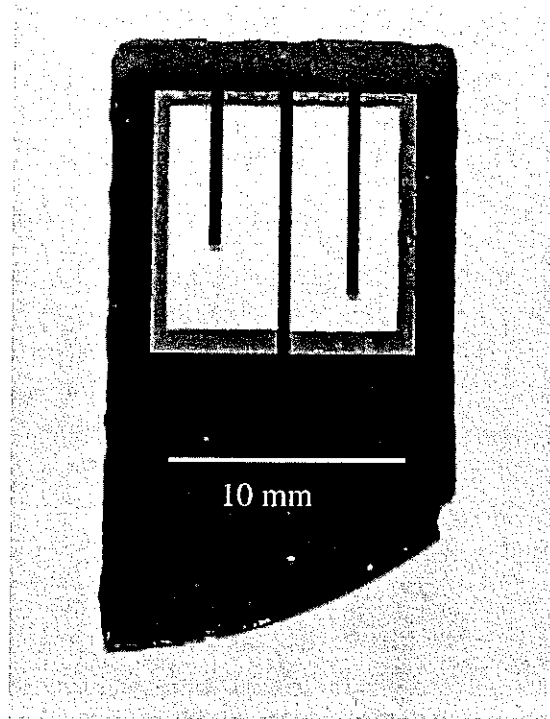
Les équations (Eq. V-26) nous permettent de calculer la position de la fibre neutre de la poutre libre avec notre modèle. L'élongation d'une fibre de la poutre située à la cote y est :

$$\varepsilon = ya + \varepsilon_0$$

on en déduit que

$$y_{\text{neutre}} = -\frac{\varepsilon_0}{a} = -\frac{2C}{Kh}$$

Dans le cas des poutres monolithique que nous utilisons pour nos expériences, et qui sont plus proches de plaques minces que des poutres, on trouve $\frac{y_{\text{neutre}}}{h} = -\frac{1}{6}$ en supposant que la présence de la couche mince ne modifie pas beaucoup les valeurs de K et C et en utilisant les valeurs de K et C données par les équations (Eq. IV-17). Ce résultat est bien compatible avec la position du feuillet neutre dans les plaque recouvertes d'un film précontraint [Ref. V-10] ($y = 0$ sur la ligne moyenne).



Poutre monolithique encastrée entourée de ses deux poutres libres (PL) de mesure de contrainte de la couche mince déposée.

Fig. V-35

V.5.3. Précontrainte du SiO₂ déposé en couche mince sur du Si.

Sur des poutres libres en silicium de 100 μm d'épaisseur, on a déposé par pulvérisation ionique RF (Radio Fréquence) des couches minces de SiO₂ de différentes épaisseur afin de connaître l'évolution de la contrainte dans les couches, ou plus exactement du produit $k_f S_0$ avec le temps de dépôt. Le dépôt est effectué sous un plasma d'argon à $2 \cdot 10^{-2}$ mbar avec une puissance RF de 50 W et Le résultat obtenu est présenté sur la figure (Fig. V-36).

Le SiO₂ est bien en compression. Il est évident que le produit $k_f S_0$ n'évolue pas de manière linéaire avec le temps de dépôt donc avec l'épaisseur du film déposé (dans l'hypothèse d'un taux de dépôt constant). On ne pourra donc pas relier η à un paramètre simple tel que celui du temps de dépôt. Ceci justifie la nécessité après chaque dépôt de mesurer le rayon de courbure qu'il provoque sur une poutre libre. C'est le seul moyen de connaître η .

La valeur maximum de $8,06 \text{ Nm}^{-1}$ obtenue pour $k_f S_0$ correspond pour une poutre encastrée de 10mm de long et de 10 μm d'épaisseur à $\eta = 1.45$. Pour cette valeur, l'épaisseur du film déposé est de 65nm (avec un taux de dépôt de 13 nm/min). La rigidité du SiO₂ étant similaire à celle du Si on va pouvoir négliger K_f devant K et utiliser les résultats établis sur le flambement des poutres.

Comme on l'a vu avec notre modèle, s'il est juste, on peut indifféremment déposer la couche mince de SiO₂ sur la face supérieure ou sur la face inférieure de la poutre, ce qui permet alors d'atteindre une valeur de η proche de 3.

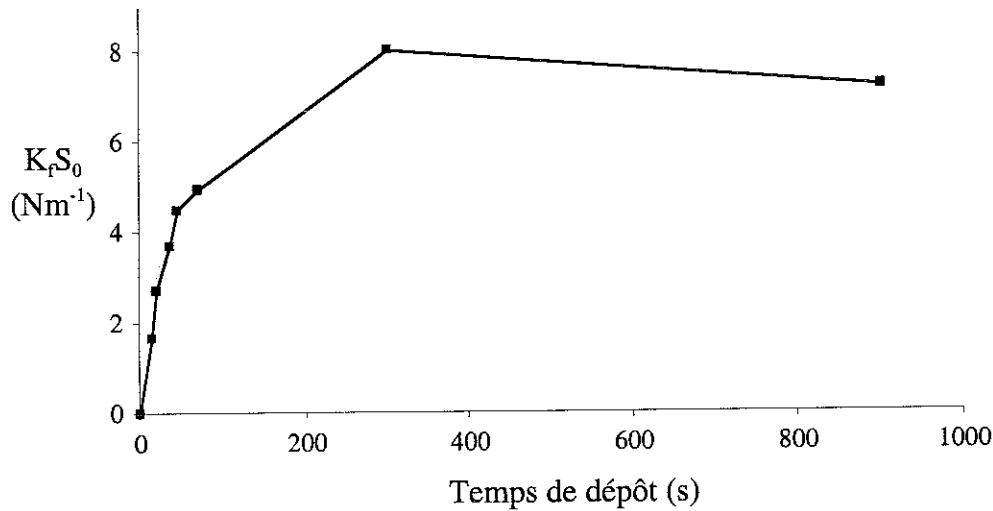


Fig. V-36

V.5.4. Résultats expérimentaux.

Nature des échantillons.

On dispose d'un échantillon similaire à celui de la figure (Fig. V-35). La poutre encastrée fait 9.6 mm de long, 0.5 mm de large et 13 μ m d'épaisseur. Les deux poutres libres ont la même épaisseur, la même largeur et une longueur de 5.8mm et 7.8 mm.

On dépose successivement plusieurs couches de SiO₂ sur cet échantillon. Chaque couche correspond à une valeur du paramètre η déduite de la mesure du rayon de courbure des poutres libres.

Etude de la rigidité en flexion : détermination des défauts de la poutre et des valeurs caractéristiques de η .

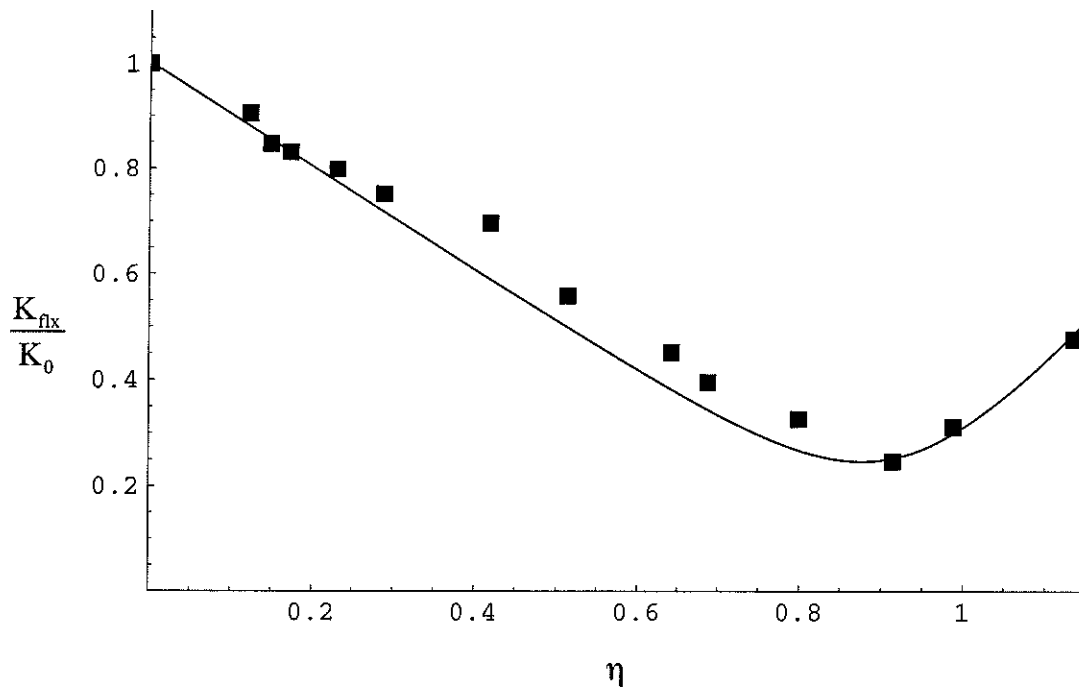


Fig. V-37

La valeur expérimentale de la rigidité en flexion de la poutre est comme lors des expériences précédentes déduite de la valeur mesurée de la fréquence de résonance du premier mode de vibration transversal de la poutre par la relation :

$$\frac{K_{fx}}{K_0} = \left(\frac{\omega_p}{\omega_0} \right)^2$$

La valeur minimale obtenue pour $\frac{K_{fx}}{K_0}$ est:

$$\frac{K_{min}}{K_0} = 0,245$$

On en déduit d'après la relation (Eq. V-12) la caractérisation suivante des défauts de la poutre:

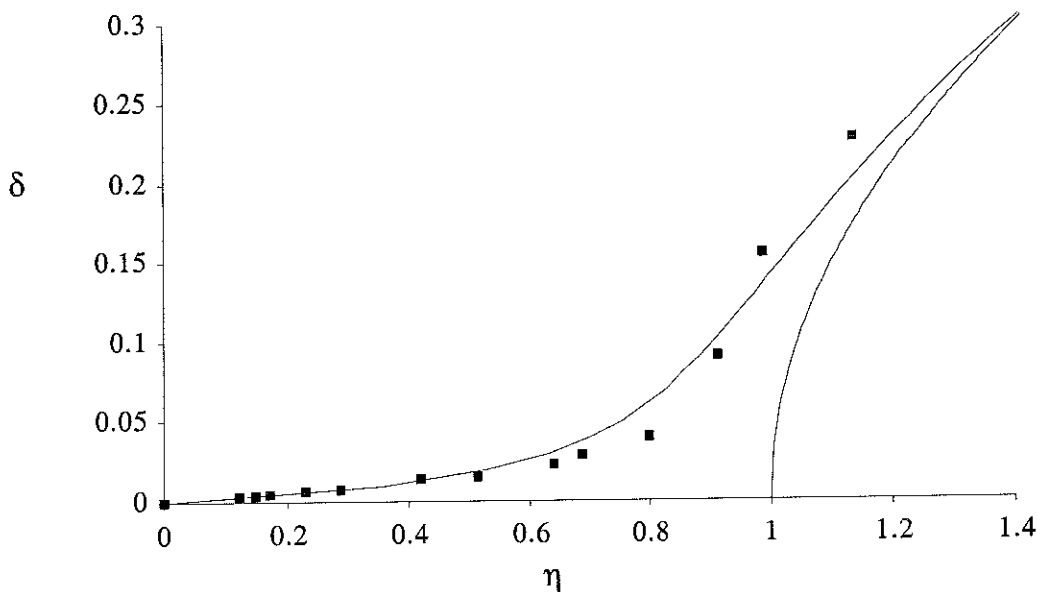
$$f \cong 1,56 \cdot 10^{-2}$$

Et d'après les relations (Eq. V-19) à (Eq. V-21) :

$$\eta_2 \cong 0,80 \quad \eta_{min} \cong 0,88 \quad \eta_{cr} \cong 1,20 \quad \eta_3 \cong 1,33$$

La figure (Fig. V-37) montre l'évolution de $\frac{K_{fx}}{K_0}$ avec η obtenue expérimentalement et la compare avec le résultat donné par les équations (Eq. V-5) et (Eq. V-10) et un défaut a_2^0 de la ligne moyenne de la poutre correspondant à la valeur de f déterminée expérimentalement. On choisit comme défaut seulement une déformation de la ligne moyenne de la poutre et pas des défauts d'encastrement qui correspondent à des moments fléchissants aux extrémités de la poutre.

Déformation statique de la poutre.



*déformation statique de la poutre.
(position naturellement stable)*

Comparaison avec le modèle dans le cas idéal et dans le cas avec défauts.

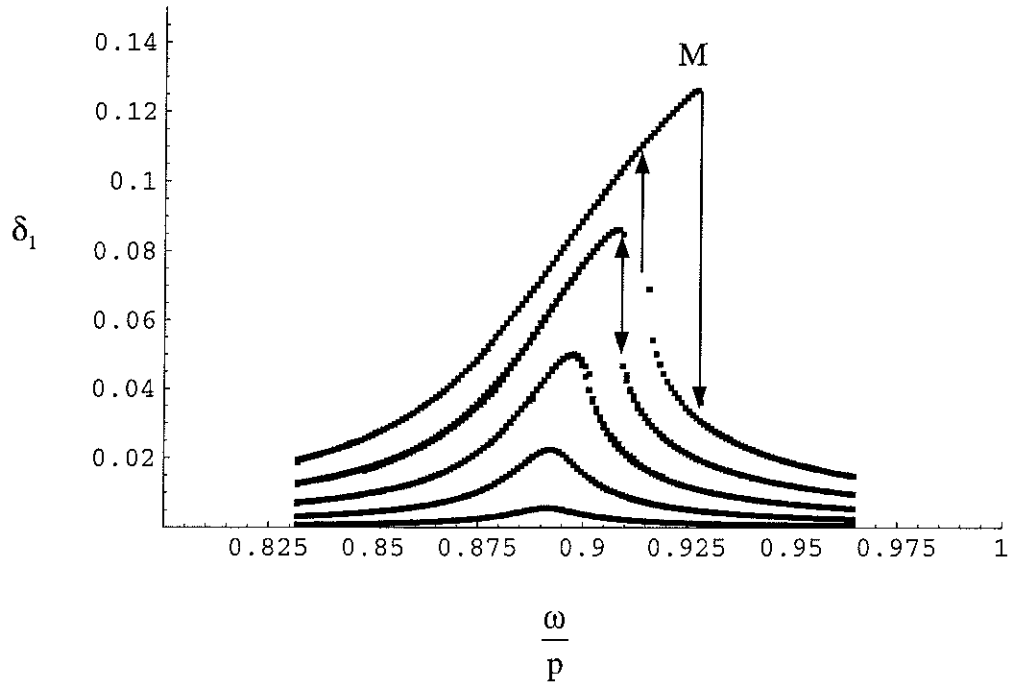
Fig. V-38

A l'aide de l'interféromètre de Michelson, on a mesuré l'écart du profil de la poutre après chaque dépôt à son profil avant tout dépôt. Il correspond bien à une forme égale au premier mode de flambement donné par :

$$v(x) = A(1 - \cos(\frac{2\pi}{l}x))$$

La figure (Fig. V-38) montre l'évolution expérimentale de $\delta = \frac{A}{h}$ avec η . Comme précédemment, le résultat expérimental est comparé avec le cas correspondant à l'équation (Eq. V-5)

Oscillations non linéaires.



*Courbe de résonance expérimentale obtenu pour $\eta=0,23$.
(Type I)*

Fig. V-39

Acquisition des courbes de résonance.

Nous étudions maintenant les oscillations non linéaires de la poutre . Pour chaque valeur de η , on fait l'acquisition des courbes de résonance de la poutre correspondant à cinq valeurs q_n de la force d'excitation (voir figure Fig. V-39). Ces valeurs correspondent à cinq valeurs de V_s vérifiant :

$$V_s = n \cdot V_0 \quad n = \{1, \dots, 5\}$$

On à donc, la force électrostatique croissant comme le carré de l'amplitude de la tension:

$$q_n = n^2 \cdot q_0 \quad n = \{1, \dots, 5\} \quad (\text{Eq. V-27})$$

L'acquisition de ces courbes de résonance correspond pour chaque valeur de q_n à une montée en fréquence suivie d'une descente en fréquence afin de mieux faire ressortir les phénomènes d'hystérésis. Par conséquent, les courbes de type II seront identifiables, mais ne seront pas complètement parcourues car elles demandent un contrôle du paramètre ω plus complexe qu'un simple aller et retour. La valeur de q_0 est sensiblement identique pour chaque valeur de η .

Détermination du frottement visqueux b et de l'intensité d'excitation q .

La valeur de b est déterminée simplement à partir de la pente $\frac{d\phi}{d\omega}$ de la courbe $\phi(\omega)$ en $\phi = -\frac{\pi}{2}$ pour les petites oscillations ($n=1$) de la poutre non précontrainte qui sont alors très bien décrites en première approximation par un oscillateur linéaire.

Dans ce cas, on a la relation classique [Ref. V-11]:

$$\frac{b}{2} \frac{d\phi}{d\omega} \bigg|_{-\frac{\pi}{2}} = 1$$

Qui donne pour notre poutre l'amortissement réduit :

$$\frac{b}{p} = 1,40 \cdot 10^{-2} \quad (\text{Eq. V-28})$$

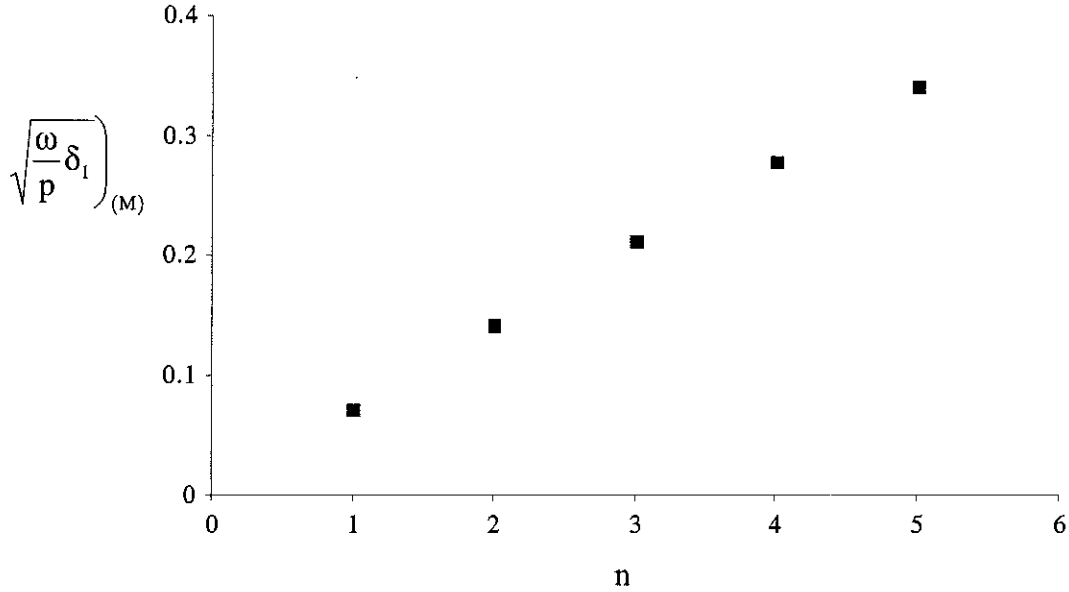
Expérimentalement, on ne peut pas prévoir directement la valeur de q_0 car la géométrie de la tête de la sonde formant l'électrode est complexe et est mal connue. Par contre, soit M le point de tangence de la courbe de résonance et de l'hyperbole H1 d'équation (Eq. V-22):

$$\frac{\omega}{p} \delta_1 = \left(\frac{q}{p^2} \right) \left(\frac{p}{b} \right)$$

M se détermine aisément en traçant la courbe $\frac{\omega}{p} \delta_1$ en fonction de $\frac{\omega}{p}$. Il correspond au maximum de cette courbe.

Pour chaque courbe, on en déduira à l'aide des coordonnées de M et des relations (Eq. V-22) et (Eq. V-28) la valeur de la force d'excitation réduite $\frac{q_n}{p^2}$. On vérifie également que pour une valeur donnée de η , on a la relation (déduite de Eq. V-22 et Eq. V-27):

$$\sqrt{\frac{\omega}{p} \delta_1} \Big|_{(M)} = n \cdot \sqrt{\left(\frac{q_0}{p^2}\right) \left(\frac{p}{b}\right)} \quad (\text{Eq. V-29})$$



Vérification de la relation (Eq. V-29) pour $\eta=0,23$.

Fig. V-40

La figure (Fig. V-40) permet de vérifier la relation (Eq. V-29) pour $\eta=0,23$. Pour toutes les autres valeurs de η , la relation est vérifiée de la même manière. La valeur trouvée pour le coefficient directeur de la droite donc la valeur de $\frac{q_0}{p^2}$ est identique pour chaque valeur de η .

Il vaut : $\frac{q_0}{p^2} \cong 6,56 \cdot 10^{-5}$

Les valeurs ainsi déterminées pour l'intensité élémentaire d'excitation réduite $\frac{q_0}{p^2}$ et pour l'amortissement réduit $\frac{b}{p}$ seront dans la suite utilisées pour comparer les courbes de résonance expérimentales et celles données par le modèle et les équations (Eq. V-16).

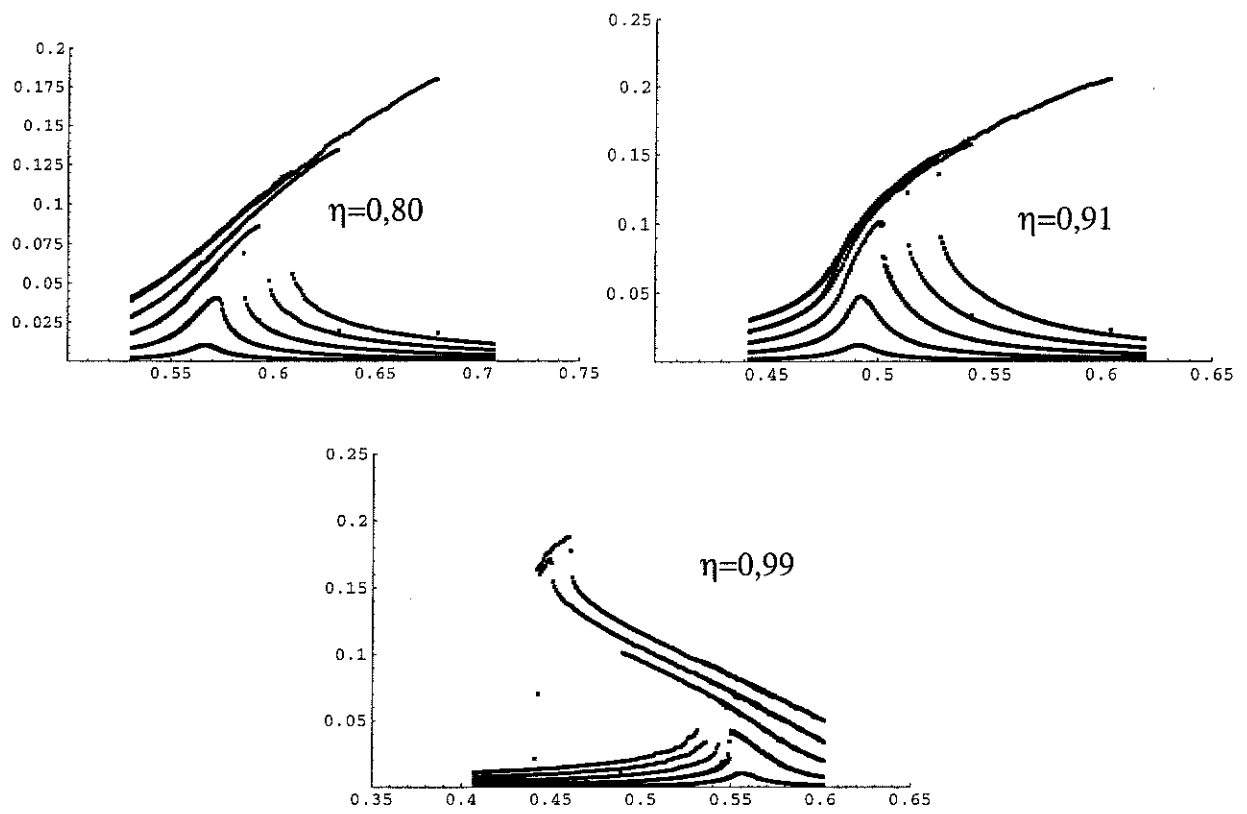
Pics de résonance des oscillations non linéaires.

On a précédemment établi pour notre système que $\eta_2 \cong 0,80$. Expérimentalement, on observe un comportement de type II seulement à partir de $\eta=0,99$. Il n'y a pas de contradiction car η_2 caractérise l'existence d'une double courbure pour le squelette. Cette double courbure n'implique pas comme nous l'avons vu obligatoirement un comportement de type II. Elle correspond seulement à une condition nécessaire à ce comportement. En effet, si l'intensité

d'excitation q est trop forte, cette double courbure ne transparaîtra pas sur la courbe de résonance.

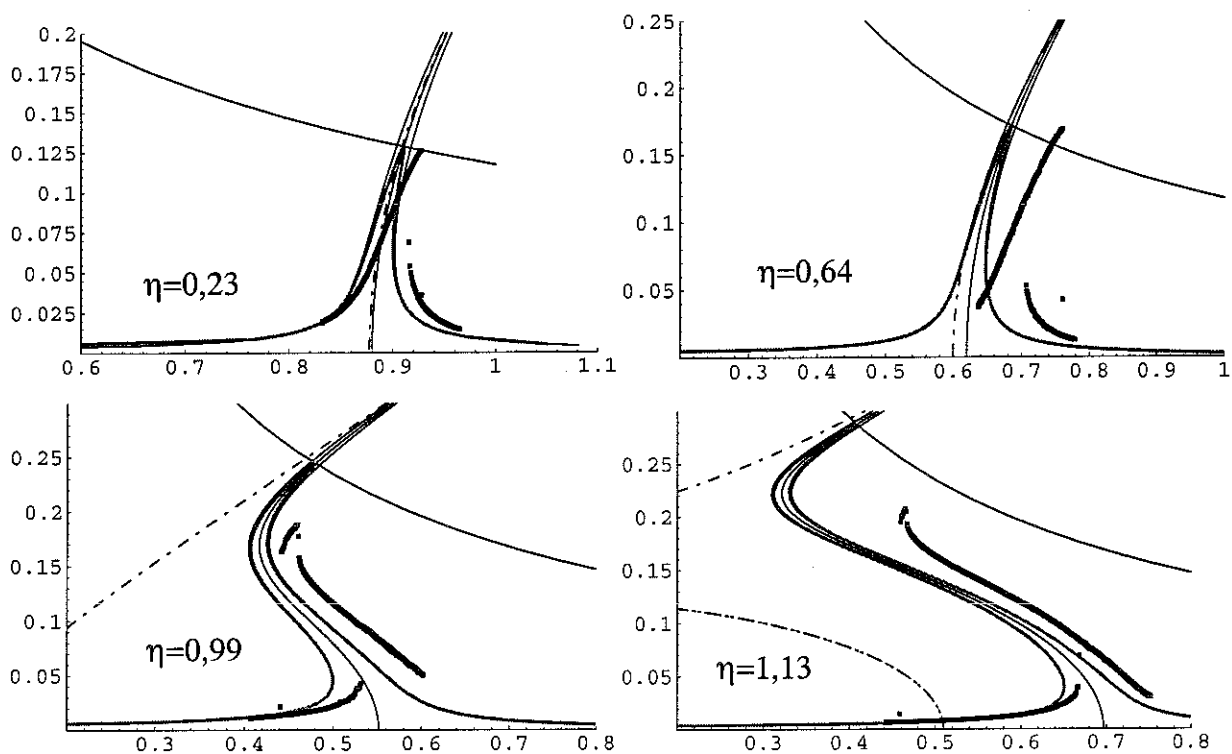
Pour les valeurs de η de 0,80, 0,91 et 0,99 les figures (Fig. V-41) montrent la transition entre un comportement de type I et un comportement de type II.

Les figures (Fig. V-42) montrent une comparaison entre les résultats obtenus avec notre modèle et les résultats expérimentaux. L'accord entre les deux est satisfaisant.



Pour chaque courbe, l'axe des abscisses correspond à $\frac{\omega}{p}$ et celui des ordonnées à δ_1 .

Fig. V-41



Courbes de résonance expérimentales obtenues pour différentes valeurs représentatives de η . Comparaison avec le modèle développé. On a également tracé le squelette du cas idéal sans défauts en pointillé mixte. L'hyperbole H1 est également présente.

Les courbes de type II n'atteignent pas l'hyperbole H1 car leur acquisition correspond seulement à un allé et retour en fréquence. Elle ne peuvent pas être parcourues entièrement de cette manière.

Pour chaque courbe, l'axe des abscisses correspond à $\frac{\omega}{p}$ et celui des ordonnées à δ_1 .

Fig. V-42

V.5.5. Conclusion

Nous avons réussi à amener près du flambage et de manière satisfaisante des poutres monolithiques par dépôt de SiO_2 . Nous avons pu diminuer la raideur en flexion de ces poutres d'un facteur 4 seulement. Ceci nous rappelle encore une fois l'importance du rôle joué par les défauts.

Le modèle utilisé pour décrire la déformation statique et la rigidité en flexion des poutres s'est révélé satisfaisant. Cette section permet de valider une méthode de fabrication de poutres précontraintes utilisant uniquement des techniques compatibles avec la micro électronique. La validation du modèle que nous avons développé pour décrire les oscillations non linéaires des poutres montre la possibilité de les utiliser pour caractériser leur état de précontrainte et leurs défauts.

Chapitre VI. Conclusion générale.

Chapitre VI. Conclusion générale.

L'association d'une couche mince magnétostrictive et d'un substrat non magnétique, par exemple en silicium, constitue un moyen simple de réaliser des microactionneurs commandés par un champ magnétique.

Une telle structure présente sur son homologue piézoélectrique un certain nombre d'avantages liés à la fois à la nature des matériaux utilisés et à leurs propriétés spécifiques.

En effet les matériaux magnétostrictifs sont des alliages métalliques qui se déposent facilement en couches minces par des méthodes douces (pulvérisation ionique à température voisine de l'ambiante). Les matériaux piézoélectriques sont des composés isolants (généralement des oxydes) qui exigent des conditions de dépôt plus contraignantes .

Les couches minces piézoélectriques sont obtenues presque nécessairement avec une symétrie de révolution autour de la normale au substrat et le champ électrique d'excitation ne peut leur être facilement appliqué que selon leur épaisseur. Il en résulte que les seules déformations que l'on peut générer dans un bilame piézoélectrique, sont des elongations isotropes dans le plan de la couche et donc une courbure simple du bilame.

En revanche, la symétrie d'une couche mince aimantée dans son plan conduit à la possibilité de générer des déformations anisotropes et donc à la fois des courbures et des torsions du bilame.

Un autre avantage de la solution magnétique est la possibilité d'exciter à distance (sans contact) des actionneurs, par ailleurs passifs, par un enroulement de commande non intégré au dispositif.

Une telle propriété pourrait être mise en œuvre par exemple dans certaines applications médicales.

En revanche un inconvénient sérieux de la solution magnétique est la dépense permanente de puissance qui est associée au maintien du champ de commande. Cet inconvénient n'existe pas dans le cas de l'actionneur piézoélectrique.

Le problème primordial des actionneurs magnétostrictifs est donc la réduction des champs de commande.

Cela peut être obtenu tout d'abord en agissant sur le matériau lui même.

Les matériaux intéressants pour les microactionneurs sont les alliages à magnétostriction géante qui se caractérisent malheureusement par une anisotropie magnétique relativement importante. C'est cette anisotropie que l'on mesure par un paramètre noté H_A , et appelé champ d'anisotropie, qui conditionne la valeur du champ de commande dans les conceptions classiques de dispositifs mettant en œuvre les couches minces à magnétostriction isotrope et anisotropie uniaxiale .

L' anisotropie d'un alliage donné est contrôlable dans une certaine mesure par les conditions de dépôt où par des traitements de recuit sous champ.

Mais dans le meilleur des cas H_A reste de l'ordre de plusieurs centaines d'œrsteds, une valeur prohibitive dans de nombreuses applications.

Au cours de ce travail nous avons exploré différentes possibilités de réduire le champ de commande de microactionneurs magnétostrictifs en travaillant sur la structure de l'actionneur plutôt que sur le matériau lui même.

Un actionneur magnétostrictif est dans sa configuration la plus simple un système à deux degrés de liberté , l'un magnétique , l'autre élastique.

Les deux principes que nous avons étudiés dans le but de réduire le champ de commande consistent à créer une instabilité dans le système de manière à annuler soit la raideur magnétique soit la raideur élastique.

Pour annuler la raideur magnétique, on a mis à profit la possibilité de créer dans une couche à anisotropie uniaxiale une situation d'aimantation instable en polarisant le matériau par un champ statique perpendiculaire à l'axe facile.

Cette solution a pu être validée de façon assez complète par l'expérience. Des facteurs de réduction de champ de commande d'un facteur 10 à 100 ont pû être mis en évidence.

On a aussi démontré la possibilité de faire travailler l'actionneur en mode bistable avec des champs seuils très faibles (dizaine d'œersteds).

Le seul inconvénient de cette solution est la nécessaire présence d'un petit aimant permanent pour créer le champ de polarisation.

Pour annuler la raideur élastique on a cherché à mettre en œuvre le phénomène bien connu de flambement des poutres. La raideur pertinente est alors la raideur en flexion que l'on peut en principe annuler et rendre négative en appliquant sur la poutre une contrainte de compression longitudinale.

Cette solution a été analysée en détail sur le plan théorique.

Nous n'avons pas en revanche réussi à valider cette solution sur le plan expérimental, à cause des difficultés pratiques que nous avons rencontrées dans la réalisation de poutres précontraintes sans défauts. En effet la présence presque inévitable de moments parasites , de défauts de planéité des poutres , de flèche résiduelle etc.. fait qu'on n'obtient pas l'annulation de la raideur en flexion . Nous avons en fait consacré toute notre étude expérimentale à l'étude du flambement de poutres et micropoutres en silicium afin d'élucider le rôle des différents défauts.

Toutes les propriétés observées aussi bien statiques que dynamiques (en régime linéaire et en régime non linéaire) ont pû être interprétées par le modèle de poutre non idéale développé dans la partie théorique.

L'intérêt de ces résultats est de permettre l'identifications des défauts les plus gênants et donc de servir de guide pour les éventuels futurs efforts technologiques.

Nous demeurons convaincus que cette solution élastique présente un gros intérêt car elle évite le recours à un aimant de polarisation.

La solution magnétique présente l'avantage d'être immédiatement applicable. Deux exemples concrets d'application peuvent être brièvement décrits ici.

Le premier concerne le microrelais . En mettant en œuvre la couche d'alliage étudiée ici (qui n'est pas la plus performante) dans un bilame fonctionnant en torsion on pourrait réaliser différents types de micro relais monostables ou bistables. Dans ces dispositifs , l'enroulement de commande pourrait prendre la forme d'une nappe de conducteur . En fait il s'agit d'une

bobine planaire dont on exploite la composante tangentielle de champ. La bobine planaire éventuellement déposée sur un substrat séparé serait bien entendu intégrée au dispositif par exemple par une technique d'hybridation . Un calcul grossier montre qu'un courant de l'ordre de l'ampère pourrait être commuté avec une puissance de commande de l'ordre de la dizaine où de quelques dizaines de milliwatts .

Un deuxième exemple est celui du microdéflecteur optique.

Il a été récemment démontré qu'un simple bilame magnétostrictif pouvait constituer un déflecteur optique à deux degrés de liberté grâce à l'utilisation simultanée de la torsion et de la flexion de la poutre. Le dispositif ne peut être actuellement utilisé qu'en mode résonant si on veut notamment conserver des puissances de commande raisonnables . La mise en œuvre de l'instabilité magnétique permettrait de faire travailler le déflecteur en régime quasi statique avec une puissance de commande du même ordre que dans le dispositif résonant . En revanche le fonctionnement en déflecteur à deux degrés de liberté ne resterait possible qu'au prix d'une complexification de la structure.

Bibliographie.

Références I.

- [Ref. I-I] N. Tiercelin, V. Preobrazhensky, P. Pernod, H. Le Gall, J. Ben Youssef, Sub-harmonic excitation of planar magneto-mechanical system by means of giant magnetostrictive thin films, Journal of Magnetic Materials, vol 210, p 302-308 (2000).

Références II.

- [Ref. II-1] N.H.Duc, K. Mackay, J. Betz and D. Givord, Giant magnetostriction in amorphous $(\text{Tb}_{1-x}\text{Dy}_x)(\text{Fe}_{0.45}\text{Co}_{0.55})_y$ films, J. Appl. Phys. 79 (2), pp 973-977, (1996).
- [Ref. II-2] B.D. Cullity, Introduction to magnetic materials, Addison-Wesley Publishing Company, p251, (1972).
- [Ref. II-3] A. E. H. Love, A treatise on the mathematical theory of elasticity, Fourth edition, New York Dover Publications, p48.
- [Ref. II-4] S. P. Timoshenko Théorie de la stabilité élastique, Dunod, pp 320-323, (1966).
- [Ref. II-5] E. du Trémolet de Lacheisserie, J.C. Peuzin, Magnetostriction and internal stresses in thin films : the cantilever method revisited, J. Magn. Magn. Mater. 136 (1994) 189-196

Références III.

- [Ref. III-1] E.C. Stoner, E.P. Wohlfarth, A Mechanism of Magnetic Hysteresis in Heterogeneous Alloys, Phil. Trans. Roy. Soc. A 240, 599-642 (1948).
- [Ref. III-2] J. Betz, Magnetostriction géante de couches minces et microactionneurs magnétostrictifs pour les technologies intégrées.

Références IV.

- [Ref. IV-1] L. Euler, Additamentum, « De curvis elasticis » dans « Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes », Lausanne, 1744.
- [Ref. IV-2] S.P. Timoshenko, Théorie de la stabilité élastique, Dunod Paris, p46, 1966.
- [Ref. IV-3] S.P. Timoshenko, Théorie de la stabilité élastique, Dunod Paris, p3, 1966.
- [Ref. IV-4] S.P. Timoshenko, Théorie de la stabilité élastique, Dunod Paris, p77, 1966.
- [Ref. IV-5] Oeuvres de Lagrange, vol. 2, pp. 125, 170, Gauthier-Villards, Paris 1868.
- [Ref. IV-6] W. Fang and J.A. Wickert, Post buckling of micromachined beams, J. Micromech. Microeng. 4 (1994) 116-22.

- [Ref. IV-7] O. Paul and H. Baltes, Mechanical behavior and sound generation efficiency of prestressed, elastically clamped and thermomechanically driven thin film sandwiches, J.Micromech.Microeng. 9 (1999) 19-29.
- [Ref. IV-8] S.P. Timoshenko, Théorie de la stabilité élastique, Dunod Paris, p319, 1966.
- [Ref. IV-9] L.Landau, E.Lifchitz, Physique statistique, 4^{ème} édition, Mir-Ellipses, CH. XIV, § 14 3, p495, 1994.

Références V.

- [Ref. V-1] S. Timoshenko, Résistance des matériaux, tome 2, Dunod Paris, p72, 1968.
- [Ref. V-2] John W. Harris, Horst Stocker, Handbook of Mathematics and Computational Science, Springer, pp 44, 45.
- [Ref. V-3] R.E. Mickens, An Introduction to Nonlinear Oscillations, Cambridge University Press, p145, (1981).
- [Ref. V-4] A. Permuy, Capteurs microélectroniques, Techniques de l'ingénieur, Traité électronique, E 2 315, (1996).
- [Ref. V-5] R.E.Mickens, An introduction to Nonlinear Oscillations, Cambridge University Press, §5, 1981.
- [Ref. V-6] P.Glendinning, Stability, instability and Chaos : an introduction to the theory of nonlinear differential equations, Cambridge University Press, §5-7, 1994.
- [Ref. V-7] J.N.Elgin, D.Forster and S.Sarkar, Mechanism for Chaos in the Duffing equation, Physics Letters, 94A, p195 (1983).
- [Ref. V-8] S.Timoshenko, D.H.Young, W.Weaver Jr, Vibrations problèmes in engineering, Fourth Edition, John Wiley and Sons, §2.3 p175, 1974.
- [Ref. V-9] R. Abraham and C. Shaw, Dynamics : The geometry of behavior / Part I, Aerial Press, Inc, p 143.
- [Ref. V-10] E. du Trémolet de Lacheisserie, J.C. Peuzin, Magnétostriction and internal stresses in thin films : the cantilever method revisited, J.Magn. Magn. Mater. 136 (1994) 189-196.
- [Ref. V-11] J. Plusquellec, Vibrations, Techniques de l'ingénieur, Traité mécanique A 410a p19, (1996).

Annexe A. Propriétés mécaniques du Silicium.

Nous donnons dans cette annexe d'après [Ref. A-1] les propriétés mécaniques du Silicium monocristallin.

Coefficients élastiques. Les axes principaux sont les axes (100).

$$C_{11}=164,8 \text{ GPa}$$

$$C_{12}=63,5 \text{ GPa}$$

$$C_{44}=79,0 \text{ GPa}$$

Ils correspondent aux valeurs suivantes pour le module d'Young E et le coefficient de poisson dans les directions (100) et (110).

$$E_{100}=130,19 \text{ GPa}$$

$$\nu_{100}=0,278$$

$$E_{110}=169,16 \text{ GPa}$$

$$\nu_{110}=0,037$$

Bibliographie.

[Ref. A-1] A. Permuy, Capteurs microélectroniques, Techniques de l'ingénieur, E 2 315.

Annexe B. Interféromètre.

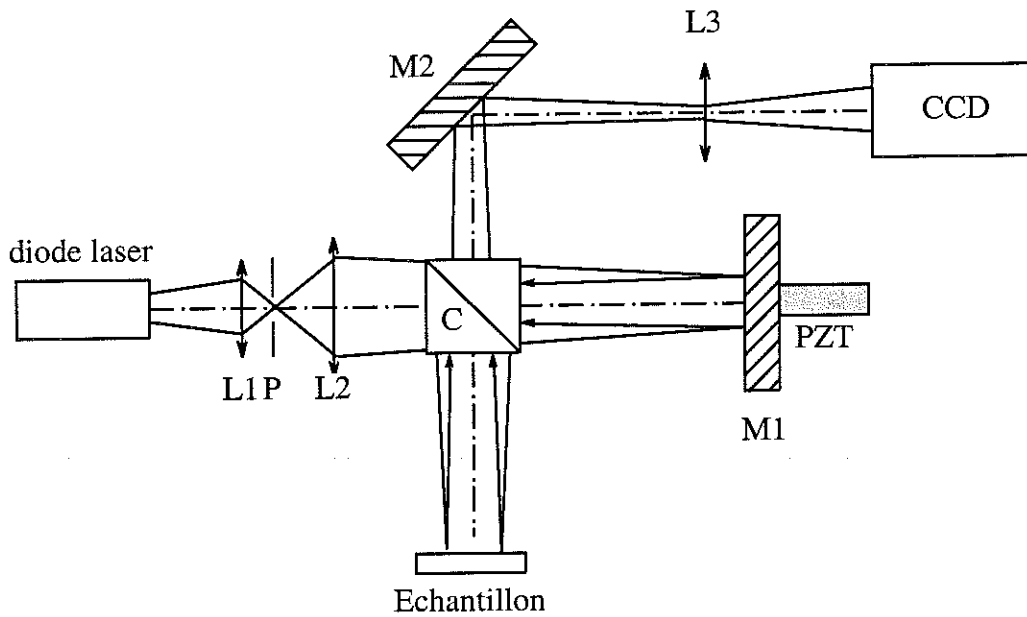


Fig. B-1

Nous décrivons ici brièvement l'interféromètre de Michelson (Fig. F-1) que nous avons construit et que nous utilisons pour mesurer le profil des poutres étudiées au cours de ce travail.

Un faisceau laser de longueur d'onde $\lambda = 690 \text{ nm}$ est émis par une diode laser.

Ce faisceau passe dans un système constitué des deux lentilles L1 et L2 ainsi que d'un trou 'Pin hole' P de 20 microns de diamètre. Ce premier dispositif optique permet de contrôler la divergence du faisceau et de lui donner un profil gaussien. Le profil gaussien permet d'éclairer l'échantillon de manière relativement homogène.

Le faisceau arrive ensuite sur un cube séparateur C qui le divise en deux faisceaux F1 et F2. Le faisceau F1 éclaire l'échantillon réfléchissant (une poutre précontrainte en silicium par exemple) dans son intégralité et le faisceau F2 éclaire le miroir de référence M1.

Les deux faisceaux réfléchis F1 et F2 sont alors dirigés vers le capteur CCD via le cube C, le miroir M2 et la lentille L3.

La Lentille L3 est réglée telle façon que l'image de l'échantillon par L3 soit située sur le CCD. La figure d'interférence que l'on va observer avec la caméra va donc correspondre à des interférences dites localisées dans le plan de l'échantillon.

Le miroir M2 orientable avec précision est destiné d'une part à faire passer le faisceau lumineux au centre de la lentille L3 et d'autre part à positionner correctement l'image de l'échantillon formée par L3 sur le capteur CCD.

A l'aide d'un échantillon étalon de référence (Plat de référence commercial pour interféromètre, plat à $\lambda/12$ de marque Newport), on peut en déplaçant le miroir M1 régler l'interféromètre pour que le chemin optique entre M1 et le capteur CCD soit le même que entre le plan moyen l'échantillon et le capteur CCD. Ceci est nécessaire pour mesurer le profil absolu d'un échantillon car on utilise l'interféromètre avec un faisceau de lumière non parallèle.

La réflectivité de l'échantillon et de M1 n'est pas la même. Les deux faisceaux F1 et F2 n'ont donc pas même intensité après réflexion.

De plus, les deux faisceaux F1 et F2 n'interfèrent pas complètement. En effet le faisceau issu de la diode laser est polarisé linéairement. A chaque passage par le cube C, le faisceaux F1 et F2 subissent des réflexions qui ne sont pas identiques. Ils ne sont donc plus polarisés dans la même direction et seulement une fraction des faisceaux F1 et F2 va interférer. L'intensité I en un point de coordonnées (x,y) de l'image obtenue avec le capteur CCD (interférogramme) va donc avoir la forme très générale:

$$I(x,y) = I_t(x,y) \left(1 + f(x,y) \cos(\varphi(x,y) + \Delta) \right) \quad (\text{Eq. F-1})$$

I_t est l'intensité moyenne, f la visibilité des franges, $(\varphi + \Delta)$ est modulo 2π le déphasage correspondant à la différence de chemin optique entre le miroir M1 et le capteur CCD et entre l'échantillon et le capteur CCD (Fig. F-2).

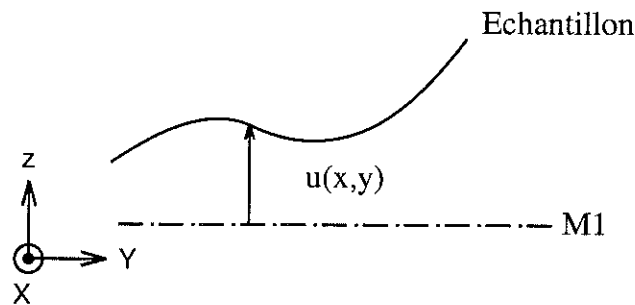


Fig. B-2

A l'aide d'un PZT (Fig. B-1), on peut déplacer le miroir de référence le long de l'axe optique. Cela est pris en compte par le terme indépendant de (x,y) Δ dans la différence de marche. Le terme en φ correspond à une constante près à l'écart du profil de l'échantillon au plan du miroir M1 (voir Eq. B-2)

$$\varphi(x,y) = \frac{2}{\lambda} u(x,y) \quad (\text{Eq. B-2})$$

Les figures d'interférence ont l'allure donnée figure (Fig. F-3). Si on peut remonter à partir des franges d'interférence de cette figure au déphasage φ de l'équation (Eq. B-1), on aura accès grâce à l'équation (Eq. F-2) au profil $u(x,y)$ de notre échantillon.

La littérature [Ref. B-1], [Ref. B-2], [Ref. B-3] nous apprend la méthode la plus couramment utilisée pour retrouver φ consiste dans sa version la plus simple à utiliser deux figures d'interférence obtenues l'une pour une valeur de Δ égale à 0, l'autre pour une valeur de Δ égale à $\pi/2$. En effectuant alors des opérations sur les pixels de ces deux images, on peut remonter au déphasage φ . Cette méthode est connue sous le nom anglais de "phase shifting interferometry".

Le désavantage de cette méthode est qu'elle nécessite d'utiliser un PZT asservi en déplacement ou alors plus de deux images et des algorithmes complexes et difficiles à implanter destinés à retrouver le déphasage Δ créé avec le PZT.

La méthode que nous avons employé est beaucoup plus simple. Elle se déroule comme suit :

On remarque tout d'abord que si l'on fait la moyenne de plusieurs images lorsque Δ varie, on a (les franges disparaissent) :

$$\langle I(x,y) \rangle = I_t(x,y)$$

On soustrait alors cette image à une image normale de figure d'interférence. L'intensité I^* d'un point de coordonnées (x,y) de l'image obtenue est alors donnée par :

$$I^*(x,y) = g(x,y) \cos(\varphi(x,y) + \Delta)$$

Pour étudier les poutres précontraintes, nous n'avons pas besoin de déterminer φ sur toute l'image de la figure d'interférence. Il suffit pour connaître le profil de la ligne moyenne de la poutre de déterminer le déphasage φ sur la ligne reliant les deux extrémités de la poutre et située au milieu de celle ci. Si u est la coordonnée repérant un pixel le long de cette ligne, on a :

$$I^*(u) = g(u) \cos(\varphi(u))$$

dans la mesure où φ varie rapidement devant g , la transformée de Hilbert de ce signal $I^*(u)$ nous donne le signal complexe $S(u)$:

$$S(u) = A(u) \exp(i\varphi(u))$$

Dont on extrait facilement $\varphi(u)$. Cette méthode est classique en géophysique [Ref. B-4].

Le profil $U(u)$ de la poutre est alors égal à $\varphi(u)$ modulo 2π . Visuellement, lorsque Δ varie, on repère la présence éventuelle de maximums du profil sur la figure d'interférence. On peut alors reconstruire U depuis φ à l'aide d'un algorithme dit de dépliement de phase.

Bibliographie.

- [Ref. B-1] K.Kinnstaetter and al., Accuracy of phase shifting interferometry, Applied Optics ,Vol 27, no. 24 , p 5082-5089 (1988)
- [Ref. B-2] A. Dobroiu and al., Self calibrating algorithm for three-sample phase-shift interferometry by contrast levelling, Meas. Sci. Technol. 9 (1998) p744-750.
- [Ref. B-3]] A. Dobroiu and al., Statistiical self calibrating algorithm for three-sample phase-shift interferometry, Meas. Sci. Technol. 8 (1997) p738-745.
- [Ref. B-4] M. T. Taner and al., Complex seismic trace analysis, Geophysics, Vol 44, no. 6 p 1041-1063 (1979).

Annexe C. Poutre encastrée : Rôle des défauts.

Cette annexe donne l'expression des coefficients λ , μ , ν et σ caractéristiques des défauts d'encastrement de la poutre et des imperfections de sa ligne moyenne.

On rappelle que l'énergie élastique d'une poutre encastrée à ses deux extrémités de longueur l et d'épaisseur h est :

$$U = \frac{K_0}{2} \left(\left(\frac{3\alpha}{16\beta} \right) \delta^4 + \lambda \delta^3 + (1 + \mu - \eta) \delta^2 + (\nu - \sigma \cdot \eta) \delta \right)$$

avec :

$$K_0 = 8\beta\gamma\pi^4 \frac{h^6}{l^3} \text{ rigidité en flexion de la poutre sans défauts encastrée à ses deux extrémités.}$$

α et β sont des coefficients sans dimension caractéristiques de la raideur en flexion C et en allongement K de la poutre () :

$$K = \alpha\gamma h^2 \quad \text{et} \quad C = \beta\gamma h^4$$

Le rapport α/β valant 12 dans le cas des poutres à section rectangulaire ou des plaques minces. γ étant le module de rigidité élastique du matériau constituant la poutre. h est

$$\lambda =$$

$$\frac{16 l \alpha \theta_0}{35 h \pi^2 \beta} - \frac{16 l \alpha \theta_1}{35 h \pi^2 \beta} + \frac{3 \alpha \bar{a}_2^0}{4 h \beta}$$

$$\mu =$$

$$\begin{aligned} & \frac{3 \alpha \Delta^2}{64 h^2 \beta} - \frac{2 l \alpha \Delta \theta_0}{35 h^2 \pi^2 \beta} + \frac{9 l^2 \alpha \theta_0^2}{128 h^2 \pi^2 \beta} - \frac{2 l \alpha \Delta \theta_1}{35 h^2 \pi^2 \beta} - \frac{3 l^2 \alpha \theta_0 \theta_1}{64 h^2 \pi^2 \beta} + \frac{9 l^2 \alpha \theta_1^2}{128 h^2 \pi^2 \beta} - \frac{\alpha \bar{a}_1^0}{16 h^2 \beta} + \\ & \frac{48 l \alpha \theta_0 \bar{a}_2^0}{35 h^2 \pi^2 \beta} - \frac{48 l \alpha \theta_1 \bar{a}_2^0}{35 h^2 \pi^2 \beta} + \frac{3 \alpha \bar{a}_2^0}{4 h^2 \beta} - \frac{32 \alpha \bar{a}_2^0 \bar{b}_1}{35 h^2 \pi \beta} - \frac{\alpha \bar{b}_1^0}{16 h^2 \beta} + \frac{16 \alpha \bar{a}_1^0 \bar{b}_2}{105 h^2 \pi \beta} - \frac{\alpha \bar{b}_2^0}{8 h^2 \beta} \end{aligned}$$

$v =$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \frac{\theta_0}{h \pi^2} + \frac{1}{20} \frac{\alpha \Delta^2 \theta_0}{h^3 \pi^2 \beta} + \frac{9}{140} \frac{1^3 \alpha \theta_0^3}{h^3 \pi^4 \beta} - \frac{1}{3} \frac{\theta_1}{h \pi^2} - \frac{1}{20} \frac{\alpha \Delta^2 \theta_1}{h^3 \pi^2 \beta} - \frac{1^3 \alpha \theta_0^2 \theta_1}{28 h^3 \pi^4 \beta} + \frac{1^3 \alpha \theta_0 \theta_1^2}{28 h^3 \pi^4 \beta} - \\ & \frac{9}{140} \frac{1^3 \alpha \theta_1^3}{h^3 \pi^4 \beta} - \frac{1}{15} \frac{\alpha \theta_0 \overset{0}{a}_1^2}{h^3 \pi^2 \beta} + \frac{1}{15} \frac{\alpha \theta_1 \overset{0}{a}_1^2}{h^3 \pi^2 \beta} + \frac{3}{32} \frac{\alpha \Delta^2 \overset{0}{a}_2}{h^3 \beta} - \frac{4}{35} \frac{1 \alpha \Delta \theta_0 \overset{0}{a}_2}{h^3 \pi^2 \beta} + \frac{9}{64} \frac{1^2 \alpha \theta_0^2 \overset{0}{a}_2}{h^3 \pi^2 \beta} - \\ & \frac{4}{35} \frac{1 \alpha \Delta \theta_1 \overset{0}{a}_2}{h^3 \pi^2 \beta} - \frac{3}{32} \frac{1^2 \alpha \theta_0 \theta_1 \overset{0}{a}_2}{h^3 \pi^2 \beta} + \frac{9}{64} \frac{1^2 \alpha \theta_1^2 \overset{0}{a}_2}{h^3 \pi^2 \beta} - \frac{\alpha \Delta \overset{0}{a}_1 \overset{0}{a}_2}{8 h^3 \beta} + \frac{8}{105} \frac{1 \alpha \theta_0 \overset{0}{a}_1 \overset{0}{a}_2}{h^3 \pi^2 \beta} + \frac{8}{105} \frac{1 \alpha \theta_1 \overset{0}{a}_1 \overset{0}{a}_2}{h^3 \pi^2 \beta} - \\ & \frac{\alpha \overset{0}{a}_1 \overset{0}{a}_2}{8 h^3 \beta} + \frac{32}{35} \frac{1 \alpha \theta_0 \overset{0}{a}_2^2}{h^3 \pi^2 \beta} - \frac{32}{35} \frac{1 \alpha \theta_1 \overset{0}{a}_2^2}{h^3 \pi^2 \beta} - \frac{2 \overset{0}{b}_1}{3 h \pi} - \frac{2 \alpha \Delta \overset{0}{a}_1 \overset{0}{b}_1}{15 h^3 \pi \beta} - \frac{1 \alpha \theta_0 \overset{0}{a}_2 \overset{0}{b}_1}{8 h^3 \pi \beta} + \frac{1 \alpha \theta_1 \overset{0}{a}_2 \overset{0}{b}_1}{8 h^3 \pi \beta} - \\ & \frac{64}{35} \frac{\alpha \overset{0}{a}_2^2 \overset{0}{b}_1}{h^3 \pi \beta} - \frac{1}{10} \frac{\alpha \theta_0 \overset{0}{b}_1^2}{h^3 \pi^2 \beta} + \frac{1}{10} \frac{\alpha \theta_1 \overset{0}{b}_1^2}{h^3 \pi^2 \beta} - \frac{\alpha \overset{0}{a}_2 \overset{0}{b}_1^2}{8 h^3 \beta} + \frac{16}{105} \frac{\alpha \Delta \overset{0}{a}_2 \overset{0}{b}_2}{h^3 \pi \beta} - \frac{1}{8} \frac{\alpha \theta_0 \overset{0}{a}_2 \overset{0}{b}_2}{h^3 \pi \beta} - \frac{1}{8} \frac{\alpha \theta_1 \overset{0}{a}_2 \overset{0}{b}_2}{h^3 \pi \beta} + \\ & \frac{32}{105} \frac{\alpha \overset{0}{a}_1 \overset{0}{a}_2 \overset{0}{b}_2}{h^3 \pi \beta} - \frac{22}{105} \frac{1 \alpha \theta_0 \overset{0}{b}_1 \overset{0}{b}_2}{h^3 \pi^2 \beta} - \frac{22}{105} \frac{1 \alpha \theta_1 \overset{0}{b}_1 \overset{0}{b}_2}{h^3 \pi^2 \beta} - \frac{22}{105} \frac{1 \alpha \theta_0 \overset{0}{b}_2^2}{h^3 \pi^2 \beta} + \frac{22}{105} \frac{1 \alpha \theta_1 \overset{0}{b}_2^2}{h^3 \pi^2 \beta} - \frac{\alpha \overset{0}{a}_2 \overset{0}{b}_2^2}{4 h^3 \beta} \end{aligned}$$

$\sigma =$

$$\frac{4}{3} \frac{1 \theta_0}{h \pi^2} - \frac{4}{3} \frac{1 \theta_1}{h \pi^2} + \frac{2 \overset{0}{a}_2}{h}$$

On constate qu'ils dépendent seulement des défauts Δ , θ_0 , θ_1 , $\overset{0}{a}_1$, $\overset{0}{a}_2$, $\overset{0}{b}_1$ et $\overset{0}{b}_2$.

λ à l'ordre 1, μ à l'ordre 2, v à l'ordre 1 et à l'ordre 3 et σ à l'ordre 1.

On remarque également que les défauts peuvent être considérés comme petits lorsque les flèches Δ , $\overset{0}{a}_1$, $\overset{0}{a}_2$, $\overset{0}{b}_1$ et $\overset{0}{b}_2$ sont petites devant l'épaisseur h de la poutre et les angles θ_0 , θ_1 , petits devant h/l .

Annexe D. Oscillations non-linéaires des poutres précontraintes.

Le but de cette annexe est de détailler les calculs permettant d'aboutir aux résultats présentés dans le chapitre V.

Equation différentielle.

On a établi au cours des sections précédentes que dans le cas le plus général, si on décrit les écarts de la poutre encastrée à ses deux extrémités par rapport à sa ligne moyenne v_0 par la série trigonométrique:

$$v = a_1 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \right) + a_2 \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \right) + b_1 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)$$

Alors, le seul degré de liberté de la poutre est $\delta = \frac{a_2}{h}$, les coefficients a_1 , b_1 , et b_2 étant fixés par les conditions aux limites. (On rappelle que δ correspond à la demi flèche associée au premier mode de flambement).

L'énergie élastique est alors donnée par la relation:

$$U = \frac{K_0}{2} \left(\left(\frac{3\alpha}{16\beta} \right) \delta^4 + \lambda \delta^3 + (1 + \mu - \eta) \delta^2 + (v - \sigma \cdot \eta) \delta \right)$$

On rappelle que dans cette expression :

η est le paramètre de contrôle de notre système. Lorsque le système ne présente pas de défauts (poutre rectiligne), le seuil de flambement élastique de la poutre a lieu pour $\eta=1$.

Les coefficients λ , μ , v et σ sont donnés en annexe (Annexe C). Ils dépendent seulement des défauts Δ , Θ_0 , Θ_1 , a_1^0 , a_2^0 , b_1^0 et b_2^0 de la poutre et de ses encastresments. λ à l'ordre 1, μ à l'ordre 2, v à l'ordre 1 et à l'ordre 3 et σ à l'ordre 1.

Avec cette description de la ligne moyenne de la poutre, le paramètre η étant fixé, les vibrations transversales de la poutre vont correspondre à une dépendance de δ avec le temps t . Les écarts de la poutre encastrée à ses deux extrémités par rapport à sa ligne moyenne vont donc être décrits par :

$$v(x,t) = a_2(t) \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \right)$$

L'énergie cinétique totale T de la poutre vaut alors en négligeant l'énergie cinétique due à la rotation des sections :

$$T = \int_0^l \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{3}{4} (\rho l) \left(\frac{da_2(t)}{dt} \right)^2 = \frac{3}{4} (\rho l) h^2 \left(\frac{d\delta(t)}{dt} \right)^2$$

Dans cette relation, ρ est la masse linéique de la poutre.

Ceci correspond à une masse réduite $\tilde{m} = \frac{3}{2} \rho l h^2$ lorsque le degré de liberté utilisé pour décrire le système est δ .

On peut donc décrire les déformations transverse de la poutre soumise à une force sinusoïdale par le système à un degré de liberté équivalent :

$$\tilde{m} \frac{d^2 \delta}{dt^2} = - \frac{\partial U}{\partial \delta} - B \frac{d\delta}{dt} + Q \cos(\omega t)$$

Dans cette relation, le coefficient B décrit l'amortissement de la poutre (frottement visqueux), le coefficient Q l'intensité de la force d'excitation et $-\frac{\partial U}{\partial \delta}$ la force de rappel. Nous allons étudier cette équation sous la forme :

$$\frac{d^2 \delta}{dt^2} + p^2 \left(\left(\frac{3\alpha}{8\beta} \right) \delta^3 + \frac{3}{2} \lambda \delta^2 + (1 + \mu - \eta) \delta + \frac{1}{2} (v - \sigma \cdot \eta) \right) + b \frac{d\delta}{dt} - q \cos(\omega t) = 0$$

(Eq. D-1)

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur non linéaire. La pulsation $\omega_0 = p$ correspond à la pulsation propre des vibrations transversales de la poutre parfaite encastree à ses deux extrémités et non précontrainte. La force de rappel est un polynôme de degré 3 en δ . Lorsque ce polynôme ne comporte que des termes de degré 3 et 1, cette équation est connue sous le nom d'équation de Duffing. C'est le cas lorsque la poutre ne présente pas de défauts. On remarque que dans ce cas, au seuil de flambement, la force de rappel est en δ^3 et l'oscillateur est strictement non linéaire.

La littérature abondante concernant les oscillateurs non linéaires [Eq. IV-14], [Eq. IV-15] nous apprend qu'ils peuvent avoir différents types de comportements :

Les oscillations δ peuvent avoir la même fréquence que la force d'excitation, on parle de synchronisation harmonique.

Les oscillations δ peuvent avoir une période multiple de celle de la force d'excitation, on parle de synchronisation subharmonique.

Les oscillations δ peuvent avoir une fréquence multiple de celle la force d'excitation, on parle de synchronisation superharmonique.

Le comportement de δ peut également fluctuer lentement entre ceux précédemment cités (phénomènes de battement) pour finalement devenir complètement chaotique [Eq. IV-16]

Les facteurs qui à une pulsation ω d'excitation donnée sélectionnent l'un ou l'autre de ces comportements sont l'intensité q de la force d'entraînement et le coefficient d'amortissement visqueux b . Lorsque l'amortissement visqueux n'est pas trop faible et que l'amplitude d'excitation n'est pas trop élevée, on se trouve souvent dans le cas de la synchronisation harmonique. C'est ce que nous avons observé expérimentalement avec nos poutres monolithiques d'une part avec le montage sur PZT et d'autre part en précontraignant des poutres monolithiques par dépôt de SiO_2 .

Nous allons nous intéresser aux solutions de l'équation (Eq. D-1) dont la période est la même que celle de la force d'excitation. La forme approchée de ces solutions va être déterminée en utilisant la méthode de moyenne de Ritz [Eq. IV-17].

Application de la méthode de Ritz.

L'équation (Eq. D-1) peut être considérée comme une équation d'équilibre dynamique dans laquelle la force de rappel non linéaire s'équilibre avec les forces correspondant à la force d'inertie, à la force de frottement visqueux et à la force d'excitation. Notons F la somme des ces forces. Cette équation correspond donc à :

$$F(\ddot{\delta}, \dot{\delta}, \delta, t) = 0.$$

Le théorème des travaux virtuels dit que quel que soit le petit déplacement virtuel $\Delta\delta$ imaginé, on a :

$$F(\ddot{\delta}, \dot{\delta}, \delta, t) \cdot \Delta\delta = 0$$

La méthode de Ritz consiste à Choisir une forme approchée pour la fonction δ exprimée sous la forme d'une série.

$$\delta(t) = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(t)$$

Les fonctions $\phi_i(t)$ sont fixées. Les coefficients a_i (constants) sont alors déterminés de manière à annuler le travail virtuel sur une période.

Les déplacements virtuels possibles pour δ ont la forme : $\Delta\delta(t) = \sum_{i=1}^n (\Delta a_i) \phi_i(t).$

Ce qui donne : $\oint F \sum_{i=1}^n (\Delta a_i) \phi_i(t) = 0$

D'où on déduit le système de n équations à n inconnues :

$$\oint F(\ddot{\delta}, \dot{\delta}, \delta, t) \phi_i(t) = 0 \quad (1 \leq i \leq n)$$

qui permet la détermination des coefficients $a_1, \dots, a_n$.

Nous cherchons les solutions de notre système sous la forme :

$$\delta(t) = \delta_0 + \delta_1 \cos(\omega t + \phi)$$

Les 3 fonctions $\phi_i(t)$ choisies sont donc :
$$\begin{cases} \phi_0 = 1 \\ \phi_1 = \cos(\omega t) \\ \phi_2 = \sin(\omega t) \end{cases}$$

On aboutit en appliquant la méthode de Ritz au système :

$$\delta_1^2 \left(\frac{3}{2} \lambda + \frac{9\alpha}{8\beta} \delta_0 \right) = -2 \left(\left(\frac{3\alpha}{8\beta} \right) \delta_0^3 + \frac{3}{2} \lambda \delta_0^2 + (1 + \mu - \eta) \delta_0 + \frac{1}{2} (v - \sigma \cdot \eta) \right) \quad (i)$$

$$\left\{ \left(\frac{\omega^2}{p^2} \delta_1 - \delta_1 \left(\left(\frac{9\alpha}{8\beta} \right) \delta_0^2 + 3\lambda \delta_0 + (1 + \mu - \eta) \right) - \frac{9\alpha}{32\beta} \delta_1^3 \right) \cos(\phi) + \delta_1 \frac{b\omega}{p^2} \sin(\phi) = -\frac{q}{p^2} \right. \quad (ii)$$

$$\left. \left(\left(\frac{\omega^2}{p^2} \delta_1 - \delta_1 \left(\left(\frac{9\alpha}{8\beta} \right) \delta_0^2 + 3\lambda \delta_0 + (1 + \mu - \eta) \right) - \frac{9\alpha}{32\beta} \delta_1^3 \right) \sin(\phi) - \delta_1 \frac{b\omega}{p^2} \cos(\phi) = 0 \right. \quad (iii)$$

(Eq. D-2)

Le coefficient δ_0 va permettre d'une part de décrire le flambement statique de la poutre, c'est à dire l'évolution de la déformation de la fibre moyenne de la poutre en fonction de η . D'autre part, il va permettre de prendre en compte l'évolution de la position moyenne de la poutre en fonction de l'amplitude des vibrations donc en fonction de la fréquence de la force d'excitation. L'équation (i) relie en effet δ_0 et δ_1 . Ce paramètre était donc nécessaire pour décrire δ . Le déphasage ϕ a quant à lui été introduit pour prendre en compte la force d'excitation et l'amortissement visqueux.

L'étude de la stabilité des solutions harmoniques obtenues à l'aide de la méthode de Ritz peut être faite dans le cas des petites amplitudes à l'aide des équations de la théorie de la synchronisation [Ref. D-1] pour les systèmes faiblement non linéaires. Nous ne ferons pas cette étude.

Oscillations du système sans défauts.

Oscillations libres du système sans défauts.

Les équations (Eq. D-2) deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1^2 \left(\frac{9\alpha}{8\beta} \delta_0 \right) = -2 \left(\left(\frac{3\alpha}{8\beta} \right) \delta_0^3 + (1-\eta) \delta_0 \right) \quad (i) \\ \frac{\omega^2}{p^2} = \left(\left(\frac{9\alpha}{8\beta} \right) \delta_0^2 + (1-\eta) \right) + \frac{9\alpha}{32\beta} \delta_1^2 \quad (ii) \end{array} \right.$$

ϕ n'a ici aucune réalité car la référence de phase, c'est à dire la force imposée, n'existe pas.

On va distinguer deux cas.

Premier cas : $\delta_0 = 0$

La relation liant la pulsation propre à l'amplitude des oscillations est alors :

$$\delta_1^2 \left(\frac{9\alpha}{8\beta} \right) = -2(1-\eta) \quad (\text{Eq. D-3})$$

Cette équation est celle d'une hyperbole. Voir figure.

Deuxième cas : $\delta_0 \neq 0$

Ce cas n'existe que si $\eta > 1$ c'est à dire au dessus du seuil de flambement.

$$\frac{\omega^2}{p^2} + \frac{45\alpha}{32\beta} \delta_1^2 = 2(\eta - 1) \quad (\text{Eq. D-4})$$

Cette équation est celle d'un arc d'ellipse. Voir figure (Fig. D-1).

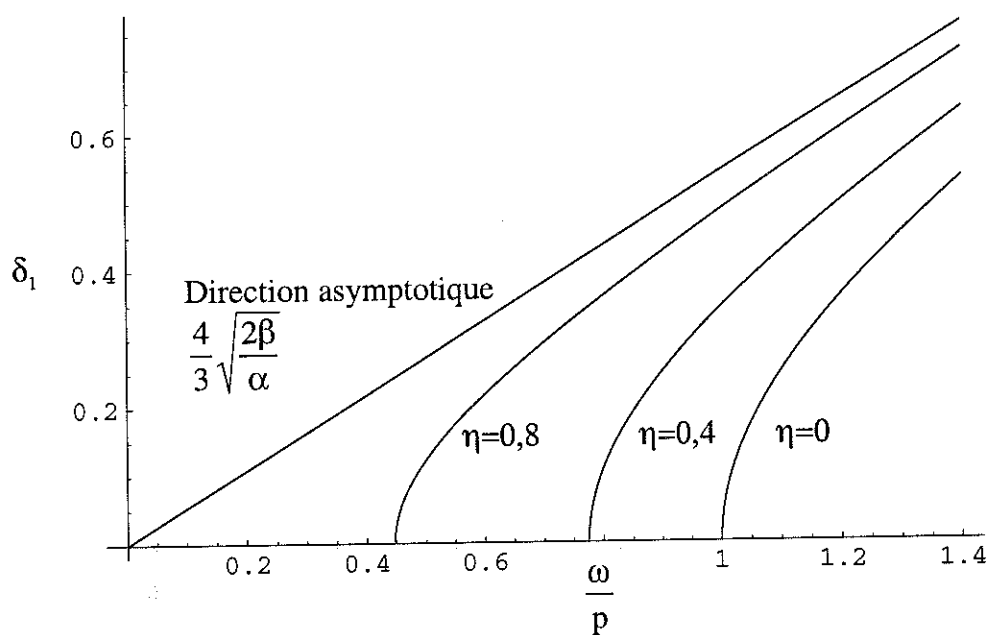
En dessous du seuil de flambement ($\eta < 1$) le premier cas correspond au cas bien connu du ressort durcissant. Hardening Spring selon la terminologie anglo-saxonne. Il correspond dans le cas des oscillations libres du système à une augmentation de la fréquence des oscillations avec leur amplitude.

Au dessus du seuil de flambement ($\eta > 1$), ce cas correspond à des oscillations libres centrées sur la position instable rectiligne de la poutre ($\delta_0 = 0$) et d'amplitude supérieure aux deux positions d'équilibre stable de la poutre.

Le deuxième cas, n'existant qu'au dessus du seuil de flambement correspond au cas du ressort mollissant. Softening Spring selon la terminologie anglo-saxonne. Il correspond dans le cas des oscillations libres du système à une diminution de la fréquence des oscillations avec leur amplitude. Il s'accompagne dans notre cas d'une évolution de la position moyenne avec l'amplitude des oscillations (donc avec leur fréquence) selon la relation :

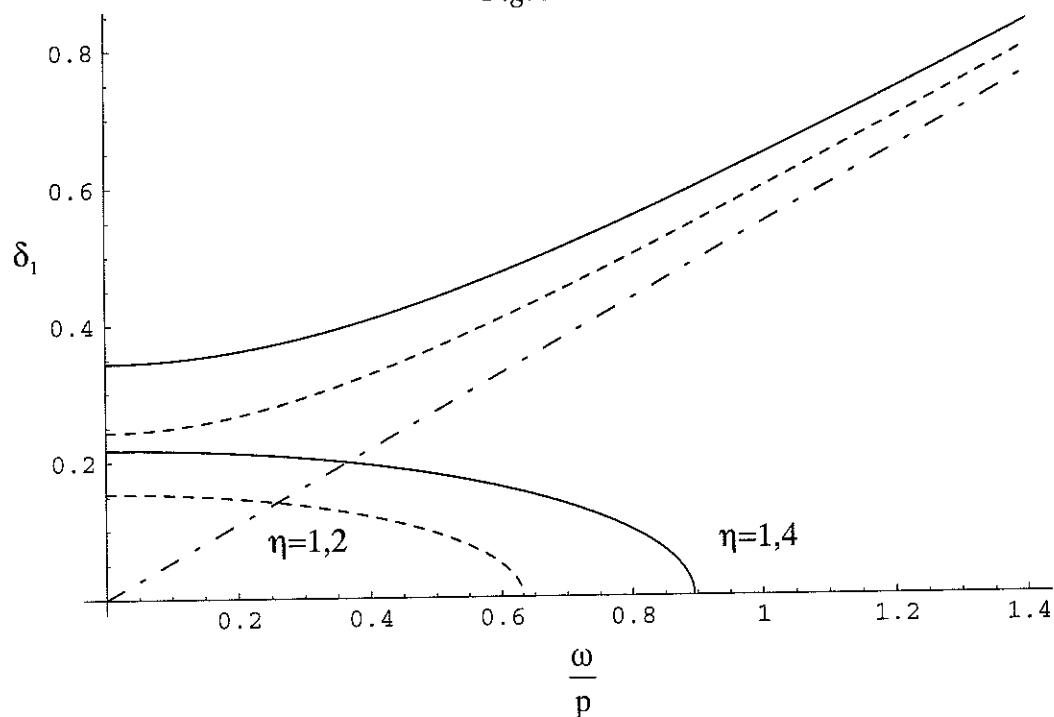
$$\delta_1^2 = \frac{16\beta}{9\alpha}(\eta - 1) - \frac{2}{3}\delta_0^2 \quad (\text{Eq. D-5})$$

On retrouve avec cette équation, lorsque l'amplitude δ_1 des oscillations est nulle, la formule reliant la déformation imposée η à la flèche apparaissant spontanément au dessus du seuil de flambement (Eq. IV-22). La position moyenne de la poutre se rapproche de la position d'équilibre instable.



Relation entre la pulsation des oscillations libres et leur amplitude avant le seuil de flambement ($\eta < 1$) pour le système sans défauts(effet ressort durcissant)

Fig. D-1



*Relation entre la pulsation des oscillations libres et leur amplitude après le seuil de flambement ($\eta > 1$) pour le système sans défauts.
(effet ressort mollissant pour les trajectoires correspondant aux petites amplitudes)*

Fig. D-2

Oscillations libres du système avec défauts.

Les équations (Eq. D-2) deviennent :

$$\begin{cases} \delta_1^2 \left(\frac{3}{2} \lambda + \frac{9\alpha}{8\beta} \delta_0 \right) = -2 \left(\left(\frac{3\alpha}{8\beta} \right) \delta_0^3 + \frac{3}{2} \lambda \delta_0^2 + (1 + \mu - \eta) \delta_0 + \frac{1}{2} (\nu - \sigma \cdot \eta) \right) & (i) \\ \left(\frac{\omega^2}{p^2} \delta_1 = \delta_1 \left(\left(\frac{9\alpha}{8\beta} \right) \delta_0^2 + 3\lambda \delta_0 + (1 + \mu - \eta) \right) + \frac{9\alpha}{32\beta} \delta_1^3 \right) & (ii) \end{cases}$$

(Eq. D-6)

Nous allons exprimer à l'aide de ces équations δ_1^2 et $\left(\frac{\omega}{p} \right)^2$ en fonction de $\delta_{0R} = \delta_0 - \frac{4\beta}{3\alpha} \lambda$.

On obtient :

$$\begin{cases} \delta_1^2 = -\frac{2}{3} \delta_{0R}^2 + \frac{16\beta}{9\alpha} \left(\frac{2\beta}{\alpha} \lambda^2 - (1 + \mu - \eta) \right) + \frac{32\beta}{9\alpha} \frac{g}{\delta_{0R}} & (j) \\ \frac{\omega^2}{p^2} = \frac{15\alpha}{16\beta} \delta_{0R}^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha} \lambda^2 - (1 + \mu - \eta) \right) + \frac{g}{\delta_{0R}} & (jj) \end{cases} \quad (\text{Eq. D-7})$$

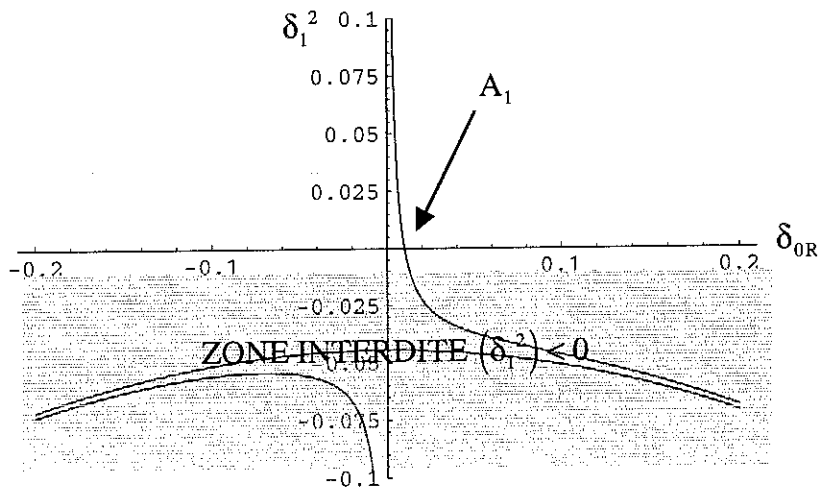
avec
$$g = \left(\frac{3\alpha}{2\beta} - \frac{\sigma}{4} \right) (1 - \eta) + \frac{\sigma}{4} - \frac{\nu}{4} + \frac{2\beta}{3\alpha} \lambda \mu - \frac{8\beta^2}{9\alpha^2} \lambda^3$$

Le cas sans défauts correspond à une évolution parabolique de δ_1^2 et $\left(\frac{\omega}{p} \right)^2$ avec δ_{0R} . Les défauts ont pour effet de modifier ces courbes avec un terme en $\frac{1}{\delta_{0R}}$. Ceci est illustré par les

figures (Fig. D-3) (Fig. D-4) et (Fig. D-5) (Fig. D-6) qui permettent de comparer les cas sans défauts et avec défaut avant et après le seuil de flambement. Ces courbes sont intéressantes car elles permettent d'étudier simplement le comportement des oscillations libres de la poutre. Elles correspondent respectivement à des cas situés en dessous et au dessus du seuil de flambement.

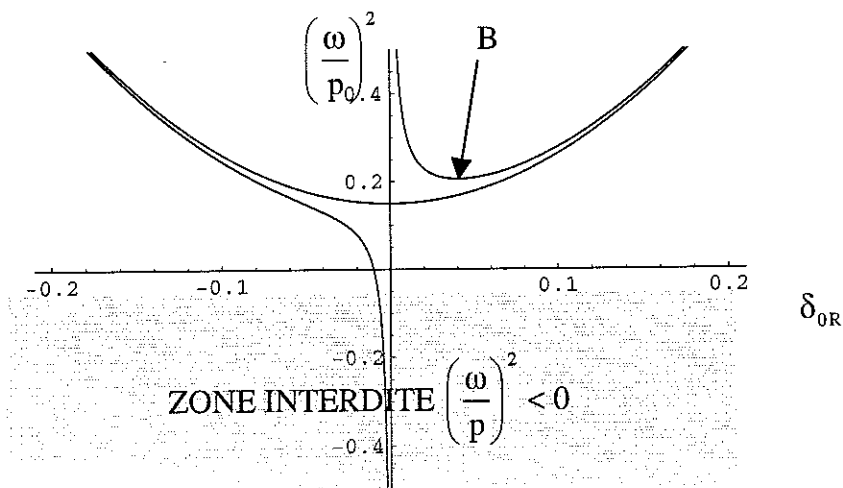
On remarque tout d'abord que ces deux courbes possèdent deux branches distinctes correspondant à $\delta_{0R} > 0$ et $\delta_{0R} < 0$

Etude de la branche décrivant les oscillations libres de la poutre issues de la position naturellement stable de la poutre.



$\eta=0,7$ Cas sans défaut et cas avec défaut de la ligne moyenne de $a_0 = 0,003h$

Fig. D-3



$\eta=0,7$ Cas sans défaut et cas avec défaut de la ligne moyenne de $a_0 = 0,003h$

Fig. D-4

Avant le seuil de flambement, il y a une seule position stable pour la poutre. Elle correspond au point A_1 sur la courbe de la Fig. D-3. La branche de la courbe à laquelle appartient ce point va permettre de décrire les oscillations libres de la poutre que l'on dira issues de la position naturellement stable de la poutre. En effet, pour des oscillations d'amplitude suffisamment petites, la poutre décrit dans l'espace des phases $(\delta, \dot{\delta})$ des trajectoires fermées autour de cette position naturellement stable.

Lors des oscillations libres de la poutre, une augmentation de δ_1^2 correspond pour cette branche obligatoirement à une diminution de δ_{0R} . A quelle évolution cela correspond il pour $\left(\frac{\omega}{p}\right)^2$?

La courbe décrivant l'évolution de $\left(\frac{\omega}{p}\right)^2$ avec δ_{0R} est représentée figure (Fig. D-4). La branche correspondant aux oscillations issues de la position naturellement stable de la poutre possède toujours un minimum au point B. On distingue alors trois cas.

$$\underline{1^{er} \text{ cas}} : |\delta_{0R}(A_1)| < |\delta_{0R}(B)|$$

Une diminution de δ_{0R} correspond à une augmentation de $\left(\frac{\omega}{p}\right)^2$. δ_1 est alors une fonction croissante de $\frac{\omega}{p}$. Ceci correspond au cas du ressort durcissant vu précédemment.

$$\underline{2^{ème} \text{ cas}} : |\delta_{0R}(A_1)| > |\delta_{0R}(B)|$$

Une diminution de δ_{0R} correspond à une diminution de $\left(\frac{\omega}{p}\right)^2$ puis à une augmentation de $\left(\frac{\omega}{p}\right)^2$. $\left(\frac{\omega}{p}\right)^2$ est alors une fonction croissante de δ_1^2 . L'évolution de $\left(\frac{\omega}{p}\right)^2$ n'est plus monotone avec δ_1^2 mais est d'abord décroissante puis ensuite croissante lorsque δ_1^2 augmente.

$$\underline{3^{ème} \text{ cas}} : \left(\frac{\omega}{p}\right)^2 < 0 \text{ au point B.}$$

L'évolution de $\left(\frac{\omega}{p}\right)^2$ avec δ_1^2 présente alors une branche décroissante jusqu'à fréquence nulle. Cette branche est assimilable au cas du ressort mollissant vu précédemment. Une autre branche distincte, est croissante avec δ_1^2 .

On va maintenant déterminer pour quelles valeurs de η apparaissent les cas 2 et 3.

Le point B est défini par $\frac{\partial}{\partial \delta_{0R}} \left(\left(\frac{\omega}{p} \right)^2 \right) = 0$, c'est à dire

$$(\delta_{0R})^3 = \frac{8\beta}{15\alpha} g. \quad (\text{Eq. D-8})$$

Le cas 2 apparaît lorsque les points B et A_1 correspondent à la même abscisse. On obtient en utilisant les relations (Eq. D-7 (j)) et (Eq. D-8) :

$$\eta_2 = 1 - \frac{9}{2} \left(\frac{15\alpha}{\beta} \right)^{\frac{1}{3}} g^{\frac{2}{3}} - \frac{2\beta}{\alpha} \lambda^2 + \mu \quad (\text{Eq. D-9})$$

Pour une configuration donnée de défauts, on peut toujours les décrire par :

$$\lambda = \lambda_1 y, \quad \mu = \mu_2 y^2, \quad v = v_1 y + v_3 y^3, \quad \sigma = \sigma_1 y$$

relation dans laquelle y est un terme petit sans dimension caractérisant l'ampleur des défauts.

On rappelle que $g = \left(\frac{3\alpha}{2\beta} - \frac{\sigma}{4} \right) (1 - \eta) + \frac{\sigma}{4} - \frac{v}{4} + \frac{2\beta}{3\alpha} \lambda \mu - \frac{8\beta^2}{9\alpha^2} \lambda^3$

Ainsi, g est quelle que soit la valeur de η une expression d'ordre au moins 1 en y . On en déduit en utilisant l'équation (Eq. D-9) que dans ce cas, $\eta - 1 = m y^{\frac{2}{3}} + o(y^{\frac{2}{3}})$. Cela signifie que η n'intervient pas dans les termes d'ordre le plus bas en y de g .

D'où : $g = g_1 y + O(y^{\frac{3}{5}})$ avec $g_1 = \frac{\sigma_1}{4} - \frac{v_1}{4} = \frac{1}{2} f_1$

et $\eta_2 \cong 1 - \frac{9}{2} \left(\frac{3\alpha}{25\beta} \right)^{\frac{1}{3}} g_1^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} = 1 - \frac{9}{2} \left(\frac{3\alpha}{100\beta} \right)^{\frac{1}{3}} f_1^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} \quad (\text{Eq. D-10})$

Dans ces relations f_1 est le coefficient intervenant dans les expressions de $\eta_{\min}$ et η_{cr} que l'on rappelle ici.

$$\eta_{cr} = 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{3\alpha}{4\beta} f_1^2 \right)^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}} \quad (\text{Eq. D-11})$$

$$\text{et} \quad \eta_{min} \equiv 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{3\alpha}{2\beta} f_1^2 \right)^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}} \quad (\text{Eq. D-12})$$

De la même manière, le cas 3 apparaît lorsque les points B et A₁ correspondent à la même abscisse. On obtient en utilisant les relations Eq. D-8 et Eq. D-7 (jj) et avec les mêmes approximations :

$$\eta_3 \equiv 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{15\alpha}{\beta} \right)^{\frac{1}{3}} g_1^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} = 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{15\alpha}{4\beta} \right)^{\frac{1}{3}} f_1^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} \quad (\text{Eq. D-13})$$

On déduit de ces calculs que quels que soient la géométrie de la poutre, les matériaux la constituant et les défauts présents:

$$\eta_2 \leq \eta_{min} \leq 1 \leq \eta_{cr} \leq \eta_3$$

et

$$\frac{1 - \eta_3}{1 - \eta_{cr}} \equiv (5)^{\frac{1}{3}} \equiv 1,71 \quad (\text{Eq. D-14})$$

$$\frac{1 - \eta_2}{1 - \eta_{min}} \equiv 3 \left(\frac{2}{5} \right)^{\frac{2}{3}} \equiv 1,63 \quad (\text{Eq. D-15})$$

$$\frac{1 - \eta_{min}}{1 - \eta_{cr}} \equiv -\frac{1}{2} (2)^{\frac{1}{3}} \equiv 0,63 \quad (\text{Eq. D-16})$$

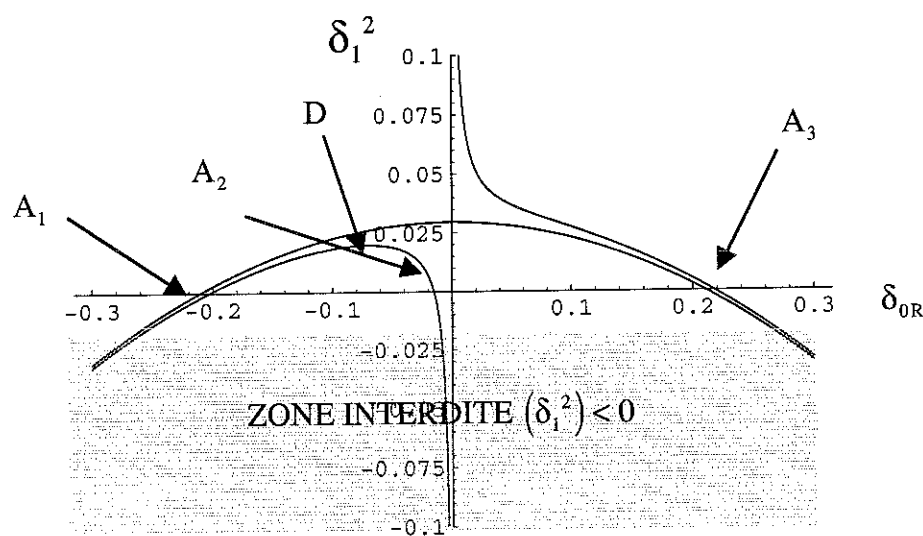
L'intervalle $]\eta_2; \eta_3[$ correspond donc à l'existence d'un minimum de la courbe représentant l'évolution de $\frac{\omega}{p}$ avec δ_1 . Le lieu de ces minimums lorsque η parcourt l'intervalle $]\eta_2; \eta_3[$ est déterminé à partir des équations (Eq. D-7) et obéit à la relation :

$$\delta_1^2 + \frac{32\beta}{9\alpha} \left(\frac{\omega}{p} \right)^2 = 64 \left(\frac{\beta g}{15\alpha} \right)^{\frac{2}{3}} \equiv 64 \left(\frac{\beta}{30\alpha} \right)^{\frac{2}{3}} f_1^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} \quad (\text{Eq. D-17})$$

qui correspond à une ellipse.

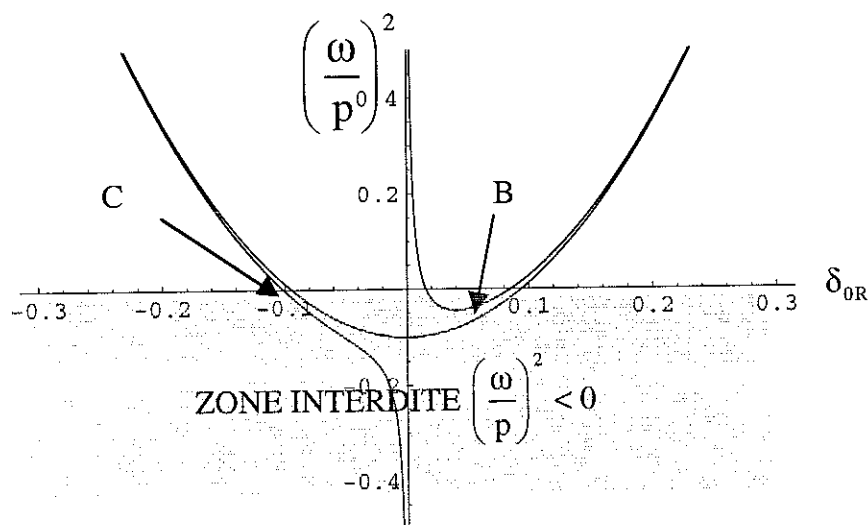
Etude de la branche décrivant les oscillations libres de la poutre issues de la position non naturellement stable de la poutre.

Les figures (Fig. D-5) et (Fig. D-6) correspondent à un cas situé au dessus du seuil de flambement. La courbe représentant δ_1^2 coupe l'axe des abscisses en trois points A_1 , A_2 et A_3 . Les deux points A_1 et A_3 correspondent aux deux déformations statiques stables possibles pour la poutre. Le point A_2 correspond à une position d'équilibre instable pour la poutre. Le point A_3 n'existe que au dessus du seuil de flambement. On dira de lui qu'il correspond à une position non naturellement stables de la poutre. Pour des oscillations d'amplitude suffisamment petite, la poutre décrit dans l'espace des phases $(\delta, \dot{\delta})$ des trajectoires fermées autour de cette position non naturellement stable.



$\eta=1,2$ Cas sans défaut et cas avec défaut de la ligne moyenne de $\overset{0}{a}_2 = 0,003h$

Fig. D-5

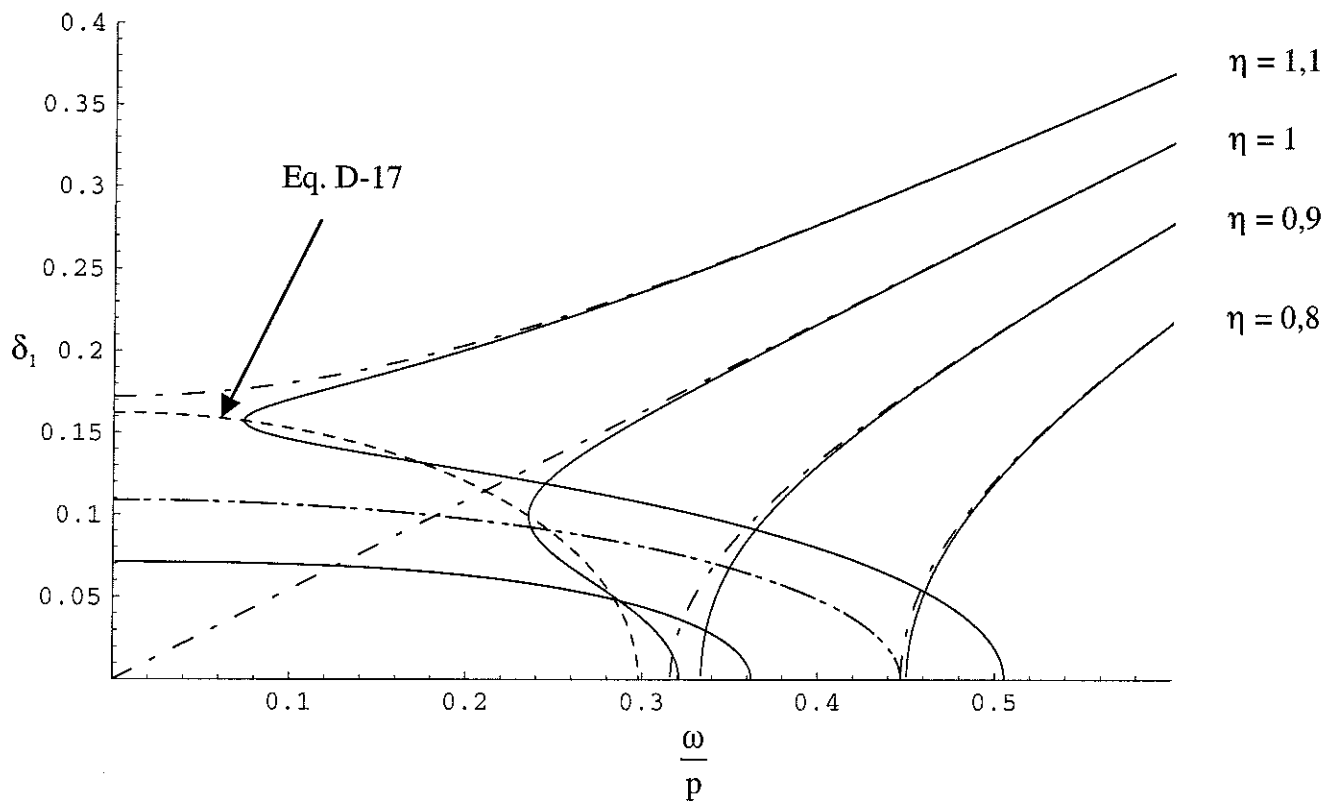


$\eta=1,2$ Cas sans défaut et cas avec défaut de la ligne moyenne de $\overset{0}{a}_2 = 0,003h$

Fig. D-6

La branche à laquelle appartient ce point va donc permettre de décrire les oscillations libres de la poutre que l'on dira issues de la position non naturellement stable de la poutre.

Si on part de la position A_3 , on constate de la même manière que précédemment qu'une augmentation de δ_1^2 implique une diminution de $\left(\frac{\omega}{p}\right)^2$. On retrouve le cas du ressort mollissant. Ceci est vrai tant que l'on ne franchit pas le point D.



Relation entre la pulsation des oscillations libres et leur amplitude.

Comparaison du cas idéal (trait pointillé mixte) et du cas avec défaut de la ligne moyenne de $a_2 = 0,003h$ (trait continu), h étant l'épaisseur de la poutre.

Fig. D-7

On n'étudiera pas plus en détail les oscillations issues de cette branche car expérimentalement, ce sont les oscillations de la poutre issues de la position naturellement stable de la poutre qui sont étudiées dans ce travail.

Tracé direct des courbes $\delta_1\left(\frac{\omega}{p}\right)$.

Les équations (Eq. D-7) considérées comme équations paramétriques des points correspondant au couple $\left(\frac{\omega}{p}, \delta_1\right)$ permettent de tracer directement les courbes liant l'amplitude à la pulsation des oscillations propres. Cela est fait (Fig. D-7) et permet de comparer le cas idéal et le cas avec défauts et de vérifier les considérations simples faites précédemment sur le rôle des défauts.

Les défauts choisis pour l'exemple de la figure (Fig. D-7) correspondent à un défaut de la ligne moyenne de $a_2^0 = 0,003h$, h étant l'épaisseur de la poutre ils correspondent en employant les relations Eq. D-9, Eq. D-10, Eq. D-11 et Eq. D-12 aux valeurs caractéristiques de η suivantes:

$$\eta_2 = 0,933, \eta_{\min} = 0,959, \eta_{cr} = 1,064, \eta_3 = 1,111.$$

Oscillations forcées non amorties.

On s'intéresse maintenant aux oscillations forcées non amorties du système avec défauts

Les équations (Eq. D-2) deviennent :

$$\delta_1^2 \left(\frac{3}{2} \lambda + \frac{9\alpha}{8\beta} \delta_0 \right) = -2 \left(\left(\frac{3\alpha}{8\beta} \right) \delta_0^3 + \frac{3}{2} \lambda \delta_0^2 + (1 + \mu - \eta) \delta_0 + \frac{1}{2} (v - \sigma \cdot \eta) \right) \quad (i)$$

$$\left\{ \frac{\omega^2}{p^2} \delta_1 - \delta_1 \left(\left(\frac{9\alpha}{8\beta} \right) \delta_0^2 + 3\lambda \delta_0 + (1 + \mu - \eta) \right) + \frac{9\alpha}{32\beta} \delta_1^3 \right\} \cos(\phi) = -\frac{q}{p^2} \quad (ii)$$

$$\left\{ \frac{\omega^2}{p^2} \delta_1 - \delta_1 \left(\left(\frac{9\alpha}{8\beta} \right) \delta_0^2 + 3\lambda \delta_0 + (1 + \mu - \eta) \right) + \frac{9\alpha}{32\beta} \delta_1^3 \right\} \sin(\phi) = 0 \quad (iii)$$

Si on combine (ii) $\sin(\phi)$ – (iii) $\cos(\phi)$ on obtient : $\sin(\phi) = 0$

C'est à dire: $\phi = 0$ ou π .

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \delta_1^2 \left(\frac{3}{2} \lambda + \frac{9\alpha}{8\beta} \delta_0 \right) = -2 \left(\left(\frac{3\alpha}{8\beta} \right) \delta_0^3 + \frac{3}{2} \lambda \delta_0^2 + (1 + \mu - \eta) \delta_0 + \frac{1}{2} (\nu - \sigma \cdot \eta) \right) & (i) \\ \frac{\omega^2}{p^2} \delta_1 = \delta_1 \left(\left(\frac{9\alpha}{8\beta} \right) \delta_0^2 + 3\lambda \delta_0 + (1 + \mu - \eta) \right) + \frac{9\alpha}{32\beta} \delta_1^3 - \zeta \frac{q}{p^2} & (ii) \end{cases}$$

(Eq. D-18)

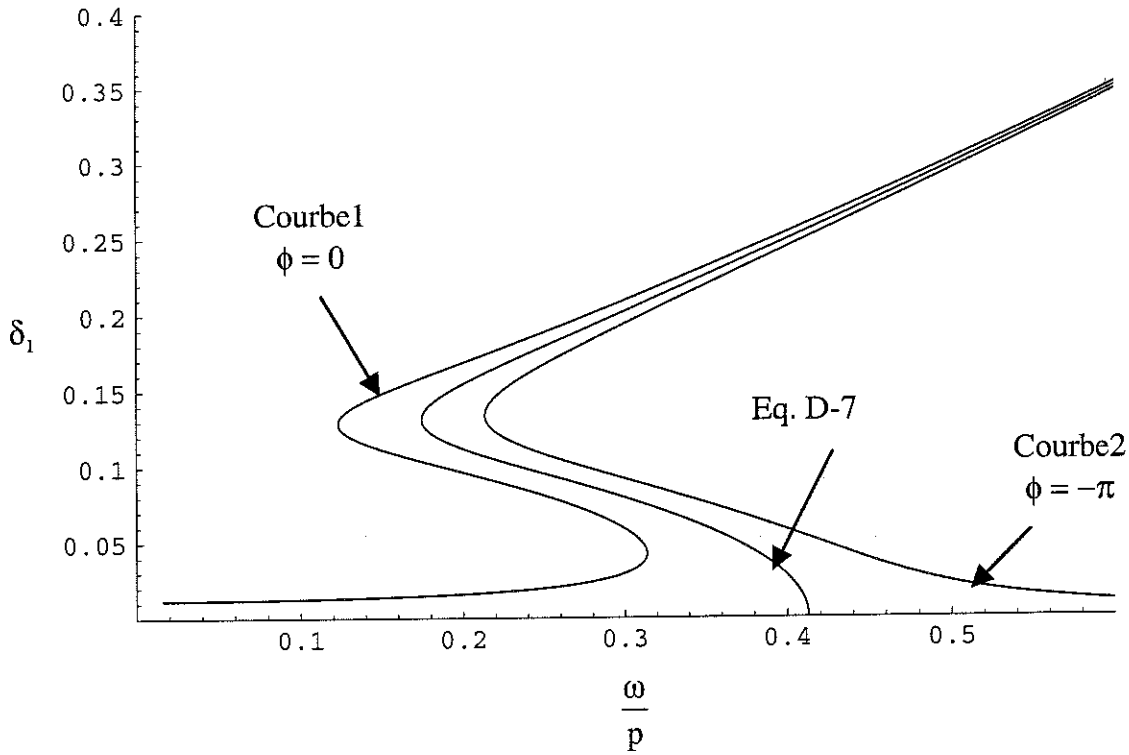
Le cas $\phi = 0$ ou π étant pris en compte par $\zeta = \mp 1$.

On constate que les relations liant δ_0 et δ_1^2 sont les mêmes que dans le cas du système libre. Regardons maintenant ce qui se passe à une amplitude d'oscillation δ_1 donnée. Nous allons comparer la pulsation ω_i imposée par la force d'excitation et correspondant à cette amplitude à la pulsation propre ω_p des oscillations libres correspondant à cette amplitude δ_1 . Elles sont données par les équations (Eq. D-6) et (Eq. D-18). On obtient :

$$\left(\frac{\omega_i}{p} \right)^2 - \left(\frac{\omega_p}{p} \right)^2 = -\zeta \frac{q}{p^2 \delta_1}$$

Cela signifie que la courbe $\delta_1 \left(\frac{\omega}{p} \right)$ décrivant les oscillations libres et correspondant aux équations (Eq. D-7) va se dédoubler en deux courbes. Pour cette raison, on va appeler cette courbe le squelette des oscillations forcées. La première (courbe1) décalée vers les pulsations négatives correspond à des oscillations en phase avec la force d'excitation. La deuxième (courbe2) décalée vers les pulsations positives correspond à des oscillations en opposition de phase avec la force d'excitation. Si $\frac{q}{p^2} \ll \delta_1$ les deux courbes auront la même allure que le squelette (sauf aux petites amplitudes). Dans la pratique, on est proche de ce cas car $\frac{q}{p^2}$ correspond à la demi flèche créée à fréquence nulle sur la poutre non précontrainte.

Ceci est illustré figure (Fig. D-8).



Oscillations forcées non amorties avec défaut de la ligne moyenne de $a_0 = 0,003h$, h étant l'épaisseur de la poutre. $\eta=1,05$. On a également tracé le squelette de ces oscillations

Fig. D-8

Oscillations forcées amorties.

On s'intéresse ici aux oscillations forcées amorties du système avec défauts

Les équations (Eq. D-2) restent inchangées :

$$\delta_1^2 \left(\frac{9\alpha}{8\beta} \delta_0 \right) = -2 \left(\left(\frac{3\alpha}{8\beta} \right) \delta_0^3 + (1-\eta)\delta_0 \right) \quad (i)$$

$$\left(\frac{\omega^2}{p^2} \delta_1 - \delta_1 \left(\left(\frac{9\alpha}{8\beta} \right) \delta_0^2 + (1-\eta) \right) + \frac{9\alpha}{32\beta} \delta_1^3 \right) \cos(\phi) + \delta_1 \frac{b\omega}{p^2} \sin(\phi) = -\frac{q}{p^2} \quad (ii)$$

$$\left(\frac{\omega^2}{p^2} \delta_1 - \delta_1 \left(\left(\frac{9\alpha}{8\beta} \right) \delta_0^2 + (1-\eta) \right) + \frac{9\alpha}{32\beta} \delta_1^3 \right) \cos(\phi) - \delta_1 \frac{b\omega}{p^2} \sin(\phi) = 0 \quad (iii)$$

On constate que les relations liant δ_0 et δ_1^2 sont les mêmes que dans le cas du système libre. Regardons maintenant ce qui se passe à une amplitude d'oscillation δ_1 donnée. Nous allons comparer la pulsation ω_1 imposée par la force d'excitation et correspondant à cette amplitude

à la pulsation propre ω_p des oscillations libres correspondant à cette amplitude δ_1 . Elles sont données par les équations (Eq. D-7) et (Eq. D-18). On obtient :

$$\left(\left(\frac{\omega_i}{p} \right)^2 - \left(\frac{\omega_p}{p} \right)^2 \right) \cos(\phi) = -\frac{b\omega_i}{p^2} \sin(\phi) - \frac{q}{p^2 \delta_1} \quad (\text{Eq. D-19})$$

$$\left(\left(\frac{\omega_i}{p} \right)^2 - \left(\frac{\omega_p}{p} \right)^2 \right) \sin(\phi) = \frac{b\omega_i}{p^2} \cos(\phi) \quad (\text{Eq. D-20})$$

On en déduit :

$$\left(\left(\frac{\omega_i}{p} \right)^2 - \left(\frac{\omega_p}{p} \right)^2 \right) = -\frac{q}{p^2 \delta_1} \cos(\phi) \quad (\text{Eq. D-21})$$

$$\omega_i = -\frac{q}{b\delta_1} \sin(\phi) \quad (\text{Eq. D-22})$$

De (Eq. D-22) on déduit immédiatement que $-\pi \leq \phi \leq 0$ ce qui est logique dans l'étude d'un phénomène d'oscillations forcées.

On déduit de (Eq. D-21) que pour une amplitude δ_1 des oscillations données, il existe deux pulsations possibles pour la force d'excitation :

La première est située entre le squelette et la courbe correspondant aux oscillations non amorties en phase avec l'excitation (courbe1). Dans ce cas, $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq 0$.

La Deuxième est située entre le squelette et la courbe correspondant aux oscillations non amorties en opposition de phase avec l'excitation (courbe2). Dans ce cas, $-\pi \leq \phi \leq -\frac{\pi}{2}$.

La courbe de $\delta_1 \left(\frac{\omega}{p} \right)$ va donc être comprise entre les deux courbes décrivant les oscillations forcées non amorties.

En combinant les équations (Eq. D-19) et (Eq. D-20), on obtient :

$$\left(\left(\frac{\omega_i}{p} \right)^2 - \left(\frac{\omega_p}{p} \right)^2 \right)^2 + \left(\frac{b}{p} \right)^2 \left(\frac{\omega_i}{p} \right)^2 = \left(\frac{q}{p^2 \delta_1} \right)^2 \quad (\text{Eq. D-23})$$

Considérons la famille d'hyperboles définie par $H_c : \left\{ \frac{\omega}{p} \delta_1 = c \left(\frac{q}{p^2} \right) \left(\frac{p}{b} \right) \right\}$ ($c \geq 0$)

Recherchons maintenant les intersections de la courbe $\delta_1 \left(\frac{\omega_i}{p} \right)$ avec l'hyperbole H_c (c fixé):

L'équation Eq. D-23 devient :

$$\delta_1^2 \left(\left(\frac{\omega_i}{p} \right)^2 - \left(\frac{\omega_p}{p} \right)^2 \right)^2 + (c^2 - 1) \left(\frac{q}{p^2 \delta_1} \right)^2 = 0 \quad (\text{Eq. D-24})$$

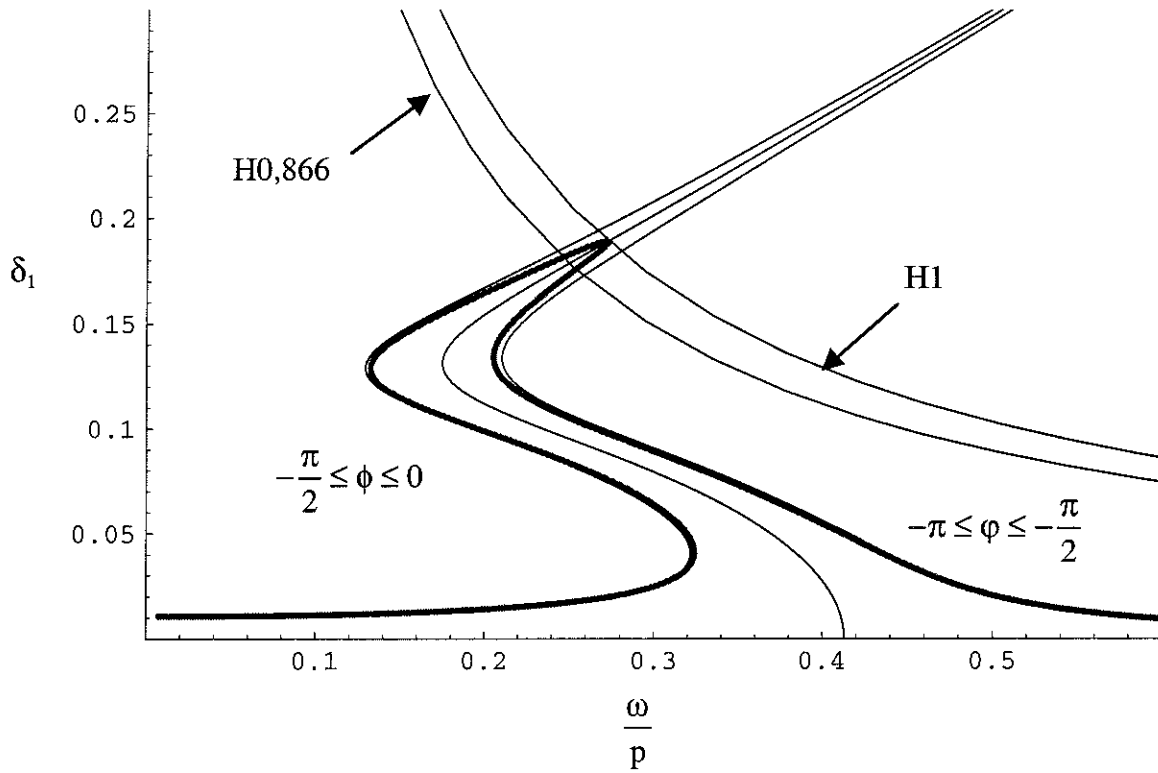
D'où : $0 \leq c \leq 1$

La courbe $\delta_1 \left(\frac{\omega_i}{p} \right)$ est donc situé dans le secteur délimité par les axes des abscisses et des ordonnées et par l'hyperbole H_1 d'équation :

$$\frac{\omega}{p} \delta_1 = \left(\frac{q}{p^2} \right) \left(\frac{p}{b} \right) \quad (\text{Eq. D-25})$$

Les points définis par l'intersection de $\delta_1 \left(\frac{\omega_i}{p} \right)$ et de l'hyperbole H_c sont également ceux de l'intersection de l'hyperbole H_c avec les deux courbes représentant les oscillations forcées non amorties pour une intensité d'excitation de $\sqrt{(1-c^2)} \cdot q$, l'équation (Eq. D-24) est en effet identique à l'équation (Eq. D-21) prise avec $b=0$ et une intensité d'excitation de $\sqrt{(1-c^2)} \cdot q$.

On en déduit que plus on s'éloigne de l'hyperbole H_1 , plus la courbe $\delta_1 \left(\frac{\omega_i}{p} \right)$ décrivant les oscillations forcées amorties est proche de celle décrivant les oscillations forcées non amorties et plus la phase ϕ est proche de 0 ou $-\pi$.



Oscillations forcées amorties (trait épais) avec défaut de la ligne moyenne de $a_0 = 0,003h$, h étant l'épaisseur de la poutre. $\eta=1,05$, $\frac{q}{p^2} = 0,0018$, $\frac{b}{p^2} = 0,035$. On a également tracé le squelette de ces oscillations ainsi que les oscillations non amorties correspondantes.

Fig. D-9

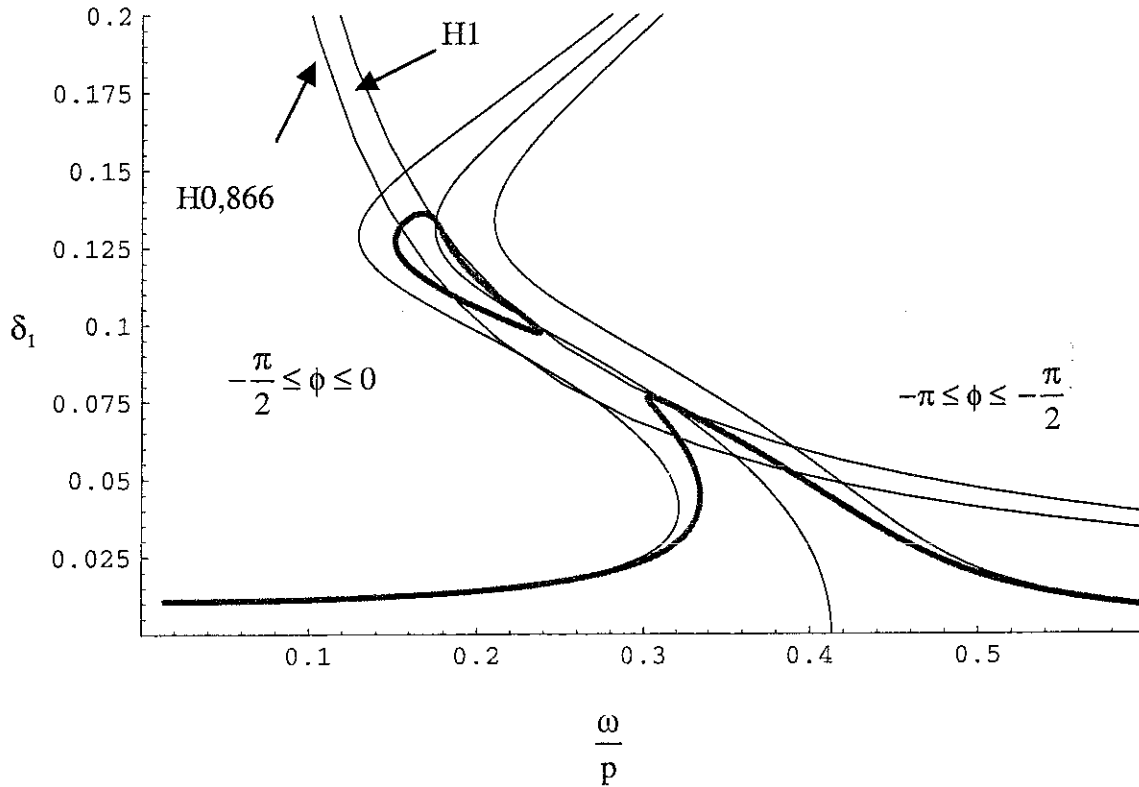
En effet, soit un point appartenant à l'intersection de H_c et de la courbe $\delta_1\left(\frac{\omega_i}{p}\right)$, alors, si on appelle ω_p et ω_n les abscisses des points ayant la même ordonnée que lui sur le squelette et sur la courbe décrivant les oscillations forcées non amorties située du même côté que lui du squelette, alors :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_p - \omega_i}{\omega_p - \omega_n} = 1 - \sqrt{1 - c^2}$$

$$\text{Par exemple, } \Delta\omega = \frac{1}{2} \Leftrightarrow c = 0,866.$$

Les considérations précédentes permettent de déduire facilement la réponse du système forcé amorti à partir de la courbe des oscillations libres (squelette). La figure (Fig. D-9) illustre ces

considérations semi-quantitatives sur l'allure de la courbe. La courbe a été tracée de manière paramétrique à l'aide des équations (Eq. D-23) et (Eq. D-2) (i).



Oscillations forcées amorties (trait épais) avec défaut de la ligne moyenne de $a_2^0 = 0,003h$, h étant l'épaisseur de la poutre. $\eta=1,05$, $\frac{q}{p^2} = 0,0018$, $\frac{b}{p^2} = 0,077$. On a également tracé le squelette de ces oscillations ainsi que les oscillations non amorties correspondantes.

Fig. D-10

On déduit également des considérations précédentes que si H1 coupe le squelette en plusieurs points, alors, la courbe $\delta_1\left(\frac{\omega_i}{p}\right)$ possèdera plusieurs parties non connectées car les intersections de H1 avec le squelette correspondent à une jonction des parties de la courbe situées de chaque coté du squelette. Ceci est illustré par la figure (Fig. D-10).

Bibliographie.

- [Ref. D-1] J.Haag, R.Chaleat, Problèmes de théorie générale des oscillations et de chronométrie, Gauthier-Villards éditeur, §14, (1953).

Résumé

Le bilame magnétostrictif est une structure élastique de base que l'on peut utiliser pour fabriquer des microactionneurs. Cette structure simple est constituée d'une membrane ou poutre en silicium recouverte d'une couche mince magnétostrictive. Nous étudions deux méthodes permettant d'améliorer ses performances.

La première méthode consiste à annuler la raideur magnétique du bilame en mettant à profit la possibilité de créer dans une couche à anisotropie uniaxiale une configuration d'aimantation instable en polarisant le matériau par un champ statique perpendiculaire à l'axe facile. Cette idée est étudiée et vérifiée expérimentalement dans les chapitre II et III.

La deuxième méthode consiste à annuler la raideur élastique du système en utilisant le phénomène bien connu de flambement élastique des poutres. Nous développons cette idée dans le chapitre IV. Dans le chapitre V nous menons à bien une étude analytique et expérimentale du flambement élastique des poutres encastées basée sur l'étude de trois dispositifs expérimentaux.

Abstract

The magnetostrictive bimorph is a basic elastic structure that can be used in microsystems. This simple structure is built with a silicon beam or membrane covered by a magnetostrictive thin film. We explore two routes aimed at improving its performance.

The first one consists in suppressing the magnetic stiffness of the bimorph. This is achieved exploiting the possibility to create a state of magnetic instability in a film with uniaxial anisotropy by polarising the film with a magnetic field applied in a direction perpendicular to the easy axis. This idea is studied both theoretically and experimentally in chapters II and III.

The second route consists of suppressing the elastic stiffness of the system using the well known elastic buckling of beams. We develop this idea in chapter IV. In chapter V we deal with an analytic and experimental study of the elastic buckling of clamped beams based on the study of three experimental devices.

Mots clés

Matériaux magnétostrictifs
Poutre encastée
Oscillations non-linéaires

Microsystèmes
Instabilité magnétique

Bilame magnétostrictif
Flambement élastique

Keywords

Magnetostrictive materials
Clamped beam
Nonlinear Oscillations

Microsystems
Magnetic instability

Magnetostrictive bimorph
Elastic buckling

