

THESE

présentée par

Yin-Yu WANG

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

de

**L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE,
TECHNOLOGIQUE ET MEDICALE
DE GRENOBLE**

Sujet

Réseaux supraconducteurs :
Température critique et état mixte

Soutenue le 23 juin 1987 devant la commission d'examen :

Président

G. Toulouse

Examineurs

J. Lajzerowicz

J. José

R. Rammai

J. Chaussy

B. Pannetier

REMERCIEMENTS

Le travail présenté dans cette thèse a été effectué au Centre de Recherches sur les Très Basses Températures de Grenoble. Je remercie Monsieur D. Thoulouze qui m'a accueilli au laboratoire et Monsieur J. Flouquet, actuel directeur du CRTBT, qui m'a permis de terminer la thèse dans les meilleures conditions.

J'exprime mes remerciements à Monsieur G. Toulouse, Directeur de Recherche à l'Ecole Normale Supérieure, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury, ainsi que Messieurs J. Lajzerowicz, J. José, R. Rammal, J. Chaussy et B. Pannetier qui ont bien voulu faire partie de la commission d'examen.

Je tiens à adresser tous mes remerciements à Monsieur B. Pannetier pour m'avoir proposé un sujet intéressant. Je lui garde une reconnaissance toute particulière pour avoir suivi, jour après jour, les progrès de ce travail. Son enthousiasme et son amitié m'ont été très précieux, tant dans la direction de mes travaux que dans la mise au point de ce mémoire.

J'exprime également mes remerciements à Monsieur R. Rammal pour sa disponibilité et sa direction fructueuse sur la partie théorique de cette thèse et pour m'avoir fait découvrir toutes les richesses théoriques de la physique de ces systèmes modèles.

Je tiens aussi à remercier Monsieur J. Chaussy pour m'avoir fait partager son expérience professionnelle, pour m'avoir communiqué le goût de l'approche expérimentale et son savoir dans les techniques de mesures fines.

Ce travail a été effectué dans une agréable atmosphère grâce aux précieux conseils que m'ont prodigués J. Odin, A. Sulpice et P. Gandit.

Je remercie tout le personnel, chercheurs et techniciens du laboratoire qui m'a toujours témoigné un grand dévouement. Je citerai, en oubliant de nombreuses personnes, Monsieur P. Brosse-Marion et B. Picot pour la cryogenie, Monsieur B. Waksman pour

l'informatique, Monsieur J. Geneste pour l'élaboration des échantillons, Messieurs J. L. Bret et J. P. Faure pour l'électronique et Mademoiselle P. Amiot pour la chimie.

La préparation des échantillons submicroniques a été effectuée en collaboration avec le CNET. Je suis heureux de pouvoir témoigner ma reconnaissance à Monsieur P. Valeille et Madame A. Tissier pour leur participation à la réalisation des masques.

Je remercie enfin ma femme G. Chen-Wang qui a assuré avec patience et rapidité la frappe de ce mémoire.

S O M M A I R E

<u>INTRODUCTION</u>	1
Références	6
<u>CHAPITRE I. La détermination de la ligne de transition</u>	9
I.0. Rappel du formalisme d'Alexander	12
I.1. Réseau carré	18
I.2. Réseau fractal	22
I.2.1. Réseau fractal triangulaire — tamis de Sierpinski	22
I.2.2. Réseau fractal carré	27
I.3. Réseau quasipériodique	34
I.3.1. Construction d'une chaîne quasipériodique unidimensionnelle	34
I.3.2. Le spectre de l'échelle quasipériodique	38
Références	43
<u>CHAPITRE II. Présentation des équipements et techniques expérimentales</u>	45
II.1. Le Cryostat à hélium 3.	48
II.1.1. Le calorimètre	50
II.1.2. Le principe et la procédure de fonctionnement	50
II.1.3. Le porte-échantillon	52
II.1.4. La bobine du champ	54

II.2. Organigramme de manipulation	55
II.2.1. Mesure de la résistance par pont 4 fils	57
II.2.2. Régulation et stabilisation de la température	59
II.3. Mesure des caractéristiques courant-tension et du courant critique	60
II.4. La réalisation des échantillons	66
II.4.1. Photolithographie	67
II.4.2. Lithographie électronique	71
II.4.3. Formation des contacts avec le réseau	71
Références	72
 <u>CHAPITRE III. Résultats expérimentaux sur divers reseaux supraconducteurs</u>	
III.1. Les réseaux fractals	76
III.1.1. Tamis de Sierpinski	79
III.1.2. Réseau Fractal Carré	85
III.2. Echelle quasipériodique	90
Références	95
III.A. Annexe : <i>First Observation of the Universal Periodic Corrections to Scaling: Magnetoresistance of Normal-Metal Self-Similar Networks</i>	97
 <u>CHAPITRE IV. L'état mixte de réseaux supraconducteurs</u>	
IV.1. Etat mixte d'un réseau supraconducteur	106
IV.2. Déterminations de β_A, du paramètre	

d'ordre et des courants diamagnétiques	
pour un réseau carré	113
IV.2.1. Minimisation de β_A	113
IV.2.2. Les distributions des courants diamagnétiques pour un réseau carré	119
IV.3. Bandes sur le spectre d'Hofstadter	123
IV.3.1. limite de $\gamma = 0$	124
IV.3.2. γ rationel quelconque	125
IV.3.3. Vérification par l'expérience de Gandit	132
Références	134
IV.A. Annexe : <i>Finite Width Effect on the Upper Critical Field H_{c2} of Superconducting Networks</i>	135
IV.B. Annexe	141
IV.C. Annexe : <i>Thermodynamical Manifestation of Berry's Topological Phase : Magnetization of superconducting networks</i>	145
 <u>CHAPITRE V.</u> Descriptions des supercourants et des courants critiques dans les réseaux supraconducteurs	 157
V.1. L'état mixte en présence d'un courant de transport non-nul	160
V.1.1. L'équation d'Alexander en présence de courants extérieurs	161
V.1.2. Etat mixte d'un réseau carré en présence d'un courant extérieur	165

V.2. Les courants critiques des réseaux supraconducteurs	170
V.2.1. Définition du courant critique au champ moyen	170
V.2.2. courant critique d'un réseau carré	174
V.3. Résultats expérimentaux sur les courants critiques	180
Références	190
V.A. Annexe	191
<u>CONCLUSION</u>	195

INTRODUCTION

Aujourd'hui il est bien connu que notre univers matériel est basé sur des particules élémentaires, comme les mathématiques sont basées sur les nombres entiers. Il paraît évident que des phénomènes physiques révèlent des comportements quantifiés aux échelles de ces particules. Bien que H. Minskovski ait dit : "la première source de toute la mathématique est le nombre entier", les différents effets de quantification ont été découverts seulement au début de XX^{ème} siècle.

En 1913, Bohr a proposé comme postulat que certaines intégrales, associées aux électrons sur leurs orbites autour du noyau atomique, devaient avoir une valeur entière. Cette affirmation devenait compréhensible dix ans plus tard comme étant un phénomène d'interférence de l'onde matérielle nouvellement découverte : essentiellement, cela signifie que la longueur du chemin parcouru par l'électron est divisible par sa longueur d'onde.

Après la découverte du supraconducteur et l'établissement de la théorie phénoménologique de Ginzburg-Landau, la quantification de Bohr-Sommerfeld appliquée à un circuit le long d'un supraconducteur avec trous, conduit à la quantification du fluxoïd. L'observation originale de cet effet sur des cylindres creux par Little et Parks^[1] en 1962 fut l'une des premières mises en évidence de la quantification du flux magnétique dans les supraconducteurs.

Au début des années 80, dans le but de modéliser les propriétés de matériaux composites, l'étude théorique des réseaux de filaments supraconducteurs s'est développée très rapidement. Le point crucial était le diamagnétisme associé aux boucles fermées dans des mélanges isolant-supraconducteur. Deutscher et al.^[2] ont étudié expérimentalement le champ critique supérieur des supraconducteurs réguliers qui est décrit par le modèle de percolation. De Gennes^[3] a étudié les solutions des équations de Ginzburg-Landau linéarisées sur une boucle avec bras et l'effet d'une distribution de boucles. Dès 1982, le problème du réseau supraconducteur était parfaitement posé. La physique de ces systèmes s'est révélée par la suite d'une très grande richesse

puisqu'ils constituent l'un des systèmes modèles les plus purs pour l'étude de phénomènes fondamentaux comme les effets de commensurabilité, de frustration[4], ou les niveaux de Landau[5] dans de différentes structures : simples boucles[3,6,7], réseaux réguliers infinis[5,8-11], réseau fractal[8,12], et structures désordonnées[8,13].

Dans divers laboratoires d'Europe et des Etats-unis, de nombreuses tentatives avaient été faites, depuis cinq ans, sur des microstructures supraconductrices. C'est au Centre de recherche sur les très basses températures (CRTBT) de Grenoble que Pannetier et al. ont réussi l'expérience décisive. Ils ont pu mettre en évidence, de manière directe, l'effet de la frustration dans des systèmes de réseaux à deux dimensions faits de filaments supraconducteurs formant un grillage carré ou en nid d'abeille au pas de l'ordre du micron.

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à deux aspects nouveaux de ce problème. D'une part nous avons étendu l'étude de la ligne de transition supraconductrice à des réseaux ordonnés formant de nouvelles structures non périodiques -- réseaux fractals et quasipériodiques -- fabriqués par lithographie électronique. D'autre part nous avons tenté de répondre à quelques questions soulevées par la ligne de transition singulière observée dans les réseaux périodiques : comment s'organise le paramètre d'ordre dans l'état mixte supraconducteur au dessous de T_c ? Les fonctions thermodynamiques du réseau (aimantation, énergie libre ...) présentent-elles également des singularités aux flux rationnels? Que deviennent les règles de quantification de Bohr-Sommerfeld dans un réseau étendu?

Cette thèse comporte cinq chapitres :

Le premier chapitre est la base de la thèse qui donne des propriétés essentielles des réseaux supraconducteurs en champ magnétique transverse décrit par les équations de Ginzburg-Landau et le formalisme de de Gennes-Alexander. Nous présentons le calcul

de la ligne de transition supraconductrice pour différentes géométries de réseaux, dans le but de les comparer avec les résultats expérimentaux donnés dans le troisième chapitre.

Dans le deuxième chapitre nous décrivons les équipements et des techniques expérimentales ainsi que les méthodes de fabrication des échantillons.

Dans le troisième chapitre nous présentons des résultats expérimentaux sur divers réseaux supraconducteurs (tamis et tapis de Sierpinski, réseau quasipériodique unidimensionnel).

Le quatrième chapitre est une extension théorique du chapitre I où l'on a étudié la ligne de transition supraconductrice de différents réseaux. Nous déterminons les configurations spatiales du paramètre d'ordre ainsi que la distribution des supercourants induits, en tenant compte du terme non linéaire dans l'équation de Ginzburg-Landau, par la méthode de perturbation. Le paramètre d'Abrikosov qui caractérise l'uniformité de la fonction d'onde peut aussi être défini dans un réseau supraconducteur et permet de calculer l'énergie libre, d'où se déduisent toutes les quantités thermodynamiques.

Dans le dernier chapitre, nous donnons également quelques résultats préliminaires sur l'état mixte du réseau supraconducteur en présence d'un courant extérieur. Le courant critique au-dessus duquel cet état n'existe plus est obtenu pour quelques cas simples (boucle, réseau carré). Quelques mesures préliminaires de ce courant ont été effectuées sur un réseau carré.

REFERENCES

- [1] W. A. Little et R. D. Parks, Phys. Rev. Lett. 9, 9 (1962)
 R. D. Parks et W. A. Little, Phys. Rev. 133, A 97 (1964)
 R. P. Groff et R. D. Parks, Phys. Rev. 176, 567 (1968)
- [2] G. Deutscher, I. Grave et S. Alexander,
 Phys. Rev. Lett. 48, 1497 (1982)
 O. Entin-Wohlman, A. Kapitulnik et Y. Shapira,
 Phys. Rev. B 24, 6464 (1981)
- [3] P. G. de Gennes, C. R. Acad. Sci. B 292, 279 (1981)
 P. G. de Gennes, C. R. Acad. Sci. Ser. B 292, 9 (1981)
- [4] G. Toulouse, Commun. Phys. (G B) 2, 115 (1977)
- [5] D. F. Hofstadter, Phys. Rev. B 14, 2239 (1976)
- [6] H. J. Fink, A. Lopez et R. Maynard, Phys. Rev. B 26, 5237 (1982)
- [7] J. Riess, J. Phys. Lett. (Paris), 43, L-277 (1982)
- [8] S. Alexander, Phys. Rev. B 27, 1541 (1983)
 S. Alexander et E. Halevi, J. Phys. (Paris), 44, 805 (1983)
- [9] R. Rammal, T. C. Lubensky et G. Toulouse,
 Phys. Rev. B 27, 2820 (1983)
- [10] R. Rammal, J. Phys. (Paris), 46, 1345 (1985)
- [11] J. Simonin, D. Rodriques et A. Lopez,
 Phys. Rev. Lett. 49, 944 (1982)
 R. Young, Phys. Rev. B 31, 4294 (1985)
- [12] R. Rammal, G. Toulouse, Phys. Rev. Lett. 49, 1194 (1982)
- [13] R. Rammal, T. C. Lubensky et G. Toulouse,
 J. Phys. Lett. (Paris) 44, L-65 (1983)
- [14] B. Pannetier, J. Chaussy et R. Rammal,
 J. Phys. Lett. (Paris) 44, L-853 (1983)

B. Pannetier, J. Chaussy, R. Rammal, et J. C. Villegier,
Phys. Rev. Lett. 53, 1845 (1984)

CHAPITRE 1. La détermination de la ligne de transition des réseaux supraconducteurs

1.0. Rappel du formalisme d'Alexander

1.1. Réseau carré

1.2. Réseau fractal

1.2.1. Réseau fractal triangulaire — tamis de
Sierpinski

1.2.2. Réseau fractal carré

1.3. Réseau quasipériodique

1.3.1. Construction d'une chaîne quasipériodique
unidimensionnelle

1.3.2. Le spectre de l'échelle quasipériodique

Références

Ce chapitre est la base de la thèse qui donne des propriétés essentielles des réseaux supraconducteurs en champ magnétique transverse décrit par les équations de Ginzburg-Landau dans le but de les comparer avec les résultats expérimentaux donnés dans le troisième chapitre. Le formalisme de de Gennes-Alexander[2,3] déduit des équations de Ginzburg-Landau sur un réseau bi-dimensionnel est rappelé. Les différents types de réseaux traités sont les suivants :

- Réseau périodique : Réseau carré infini
- Réseau fractal : triangulaire (tamis de Sierpinski) et carré
- Réseau quasipériodique uni-dimensionnel : échelle formé de deux types de rectangle a et b, dont le rapport de surface est irrationnel, assemblés dans un ordre quasipériodique.

Pour chacun de ces réseaux nous présentons le calcul de la ligne de transition supraconductrice.

1.0. Rappel du formalisme de de Gennes-Alexander

La partie théorique de la thèse est basée sur la théorie Ginzburg-Landau. Nous utilisons le formalisme de de Gennes-Alexander[2,3] qui vient de l'équation de Ginzburg-Landau linéarisée et obtenons le paramètre d'ordre avec une amplitude arbitraire. Pour la fixer, nous tenons compte du terme non linéaire par la méthode de perturbation.

L'énergie libre d'un supraconducteur à température T en champ magnétique $\mathbf{h}$ a été proposée par Ginzburg et Landau (1950) et s'écrit[1] :

$$F_s = F_n + \langle \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| (-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A}) \Psi \right|^2 + \frac{\hbar^2}{8\pi} \rangle \quad (1.0.1)$$

où $\mathbf{h} = \nabla \times \mathbf{A}$ est le potentiel vecteur; F_s et F_n sont les énergies libres dans les états supra et normal, respectivement; $\Psi = |\Psi| e^{i\varphi}$ est le paramètre d'ordre qui a le comportement d'une fonction d'onde pour une particule ayant une charge $2e$ et masse m^* et sera donc parfois désigné sous le nom de fonction d'onde; $\langle \rangle$ représente la moyenne prise sur le volume supraconducteur; β est une constante et α dépend de la température :

$$\alpha = - \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{1}{\xi^2} \quad (1.0.2)$$

avec la longueur de cohérence :

$$\xi \equiv \xi(T) = \xi(0) \left[1 - \frac{T}{T_0} \right]^{-1/2} \quad (1.0.3)$$

où $T_0 \equiv T_c(0)$ est la température critique en champ nul. La minimisation de l'Eq 1.0.1 vis à vis du paramètre d'ordre Ψ et du champ magnétique $\mathbf{h}$ donne les deux équations célèbres de Ginzburg-Landau[1] :

$$\frac{\hbar^2}{2m^*} \left[\left(-i \nabla - \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{1}{\xi^2} \right] \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi = 0 \quad (1.0.4)$$

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{h} = -\frac{e\hbar}{m^*} \left[\Psi^* \left(i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right) \Psi + \text{c.c.} \right] \quad (1.0.5a)$$

ou
$$\mathbf{J} = \frac{2e\hbar}{m^*} \Psi_0^2 \left(\nabla \varphi - \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right) \quad (1.0.5b)$$

avec la condition aux bornes

$$\left(-i \nabla - \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right) \Psi \Big|_n = 0 \quad (1.0.6)$$

Maintenant le paramètre $1/\xi^2$ dans l'Eq 1.0.4 joue un rôle de valeur propre ou d'énergie et perd le sens de longueur de cohérence. Nous l'appelons donc $1/\xi_e^2$ (ou simplement E comme dans le chapitre IV) qui dépend du champ magnétique appliqué. Ce que nous voulons chercher dans ce chapitre c'est son minimum $1/\xi_c^2 = \min\{1/\xi_e^2\}$ (appelé le bord du spectre) qui donne la température critique $T_c(H)$:

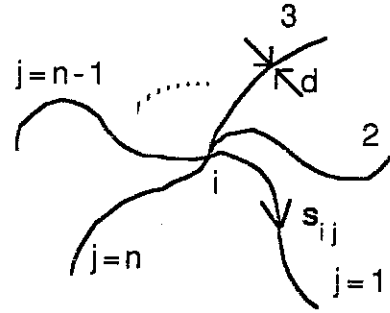
$$T_c(H) = T_0 \left[1 - \frac{\xi^2(0)}{\xi_c^2(H)} \right] \quad (1.0.7)$$

au dessus de laquelle $1/\xi^2 < 1/\xi_c^2$ et il n'existe donc plus d'état supraconducteur.

De Gennes[2] a pour la première fois appliqué les équations de Ginzburg-Landau linéarisées 1.0.4 - 1.0.6 sur un circuit fermé (anneau) pourvu d'un "bras" latéral ouvert, en présence d'un champ extérieur H , et trouvé une solution générale dont les constantes d'intégration sont déterminées par les paramètres d'ordre aux nœuds. Alexander[3] a développé ce modèle pour un réseau quelconque de filaments supraconducteurs uni-dimensionnels et obtenu un ensemble d'équations linéaires, similaire aux équations du réseau électrique, concernant les paramètres d'ordre aux nœuds.

Fink et al.[4] ont généralisés ces équations au cas où des courants sont injectés aux nœuds, dont nous aurons besoin dans le dernier chapitre. Maintenant nous rapellons ce formalisme de de Gennes-Alexander.

Fig. I.0.1 Un réseau
bidimensionnel (le diamètre $d \ll \xi$)



Considérons un réseau bidimensionnel de filaments supraconducteurs Fig.I.0.1 de diamètre d . Si $d \ll \xi$, le paramètre d'ordre est uniforme dans le sens transverse, et les équations se réduisent à une seule dimension. Près de la température critique T_c , $|\Psi|$ devient petit et le terme non-linéaire est négligeable. dans ces conditions, les équations I.0.4 - I.0.6 deviennent

$$\left(-i \frac{\partial}{\partial s_{ij}} - \frac{2\pi}{\Phi_0} A_{||} \right)^2 \Psi(s_{ij}) = \frac{1}{\xi_e^2} \Psi(s_{ij}) \quad (I.0.8)$$

$$J = \frac{e\hbar}{m^*} \Psi^*(s) \left(-i \frac{\partial}{\partial s} - \frac{2\pi}{\Phi_0} A_{||} \right) \Psi(s) + \text{c.c.} \quad (I.0.9)$$

$$\sum_j \left(-i \frac{\partial}{\partial s_{ij}} - \frac{2\pi}{\Phi_0} A_{||} \right) \Psi(s_{ij}) \Big|_{s_{ij}=0} = 0 \quad (I.0.10)$$

où $A_{||} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{s}_{ij}$ est le composant parallele le long du filament et s_{ij} est la coordonnées le long du filament ij . l'Eq I.0.8 a pour solution générale

$$\Psi(s_{ij}) = C_1 \exp i \left(\gamma_{is} + \frac{s_{ij}}{\xi_e} \right) + C_2 \exp i \left(\gamma_{is} - \frac{s_{ij}}{\xi_e} \right) \quad (I.0.11)$$

avec

$$\gamma_{is} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_i^s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_i^s A_{||} ds \quad (I.0.12)$$

C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration. Avec les conditions aux bornes

$$\begin{cases} \Psi(s_{ij}) |_{s_{ij}=0} = \Psi_i \\ \Psi(s_{ij}) |_{s_{ij}=l_{ij}} = \Psi_j \end{cases} \quad (I.0.13)$$

où

$$l_{ij} = \int_i^j ds_{ij}$$

est la longueur du filament ij , les deux constantes A et B sont déterminées et la fonction d'onde le long du filament ij devient

$$\Psi(s_{ij}) = \frac{\exp(i\gamma_{is})}{\sin(l_{ij}/\xi_e)} \left[\Psi_i \sin \frac{l_{ij} - s_{ij}}{\xi_e} + \Psi_j \exp(-i\gamma_{ij}) \sin \frac{s_{ij}}{\xi_e} \right] \quad (I.0.14)$$

où

$$\gamma_{ij} = \gamma_{is} \Big|_{s=l_{ij}} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_i^j A_{||} ds_{ij} \quad (I.0.15)$$

La deuxième équation de Ginzburg-Landau (I.0.9) donne le supercourant circulant le long du filament ij

$$J_{ij} = \frac{2e\hbar}{m^*} \frac{1}{\xi \sin(l_{ij}/\xi_e)} \Im m \left[\Psi_i^* \Psi_j \exp(-i\gamma_{ij}) \right] \quad (I.0.16)$$

qui ne dépend pas de la coordonnée s_{ij} comme attendu. Ici l'opérateur $\tilde{\mathcal{M}}$ représente la partie imaginaire.

En reportant l'Eq 1.0.16 dans l'Eq 1.0.11, nous avons finalement l'équation donnée pour la première fois par Alexander[3]

$$\sum_j \left[-\Psi_i \cot \frac{l_{ij}}{\xi_e} + \Psi_j \frac{\exp(-i\gamma_{ij})}{\sin(l_{ij}/\xi_e)} \right] = 0 \quad (1.0.17)$$

Le succès du formalisme de de Gennes-Alexander est que l'équation différentielle est transformée en une équation qui ne concerne que les paramètres d'ordre sur les nœuds et qui est évidemment beaucoup plus facile à résoudre. Ce formalisme est à l'origine de nombreux travaux théoriques développés en 1982-1983 sur divers types de micro-réseaux[2-7].

Dès maintenant, nous appliquons les équations générales d'Alexander discutées auparavant aux réseaux divers que nous sommes arrivés à réaliser expérimentalement et trouvons des résultats qui pourront être comparés avec les expériences dans le chapitre III et qui seront utiles dans les autres chapitres.

I.1. Réseau carré

Le réseau carré est peut être le plus simple parmi les réseaux réguliers, infinis et périodiques. Pour cette raison il est déjà beaucoup étudié et de nombreux résultats ont été obtenus par des groupes différents[7-11]. Nous allons rappeler ces résultats pour notre nécessité dans les autres chapitres.

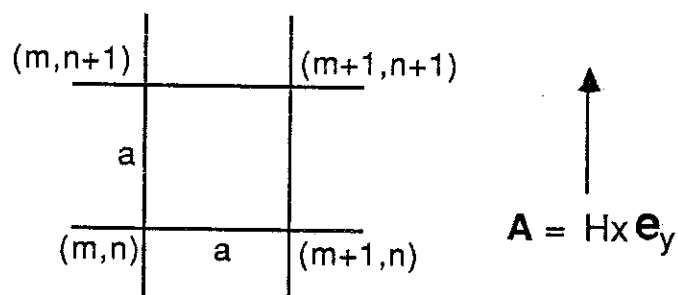


Fig. I.1.1 Le réseau carré bidimensionnel dont la constante est a .

Considérons le réseau carré infini dont le pas est a (fig.I.1.1). Soit Φ le flux magnétique à travers une cellule carré, $\Phi = a^2 H$ et $\gamma = 2\pi\Phi/\Phi_0$

Choisissons une jauge

$$\mathbf{A} = Hx \mathbf{e}_y$$

et donc la fonction d'onde est assimilée à une onde plane dans la direction de y : $\Psi_{m,n} = \Psi_m e^{ink}$. Nous prenons la notation $\Psi_m = f_m \Psi_0$ avec

$$\frac{1}{N} \sum_m |f_m|^2 = 1$$

L'Eq. I.0.17 réduit à l'équation de Harper

$$f_{m-1} + f_{m+1} + [2 \cos(k-my) - \varepsilon] f_m = 0 \quad (I.1.1)$$

où ε est la valeur propre, $\varepsilon = 4\cos(a/\xi_e(T))$.

L'équation I.1.1 est équivalente à l'équation de Shrödinger pour l'électron de Bloch en liaison forte sous champ magnétique[9]. Au champ rationnel, (i.e. $\Phi/\Phi_0 = p/q$, p, q sont entiers, premiers entre eux). Cette équation est invariante sous une translation $m \rightarrow m+q$. En conséquence l'ensemble de q équations est suffisant pour décrire le paramètre d'ordre à n'importe quel point à l'intérieur de la supercellule contenant $q \times q$ cellules élémentaires et les paramètres d'ordre aux nœuds équivalents par translations doivent être égaux à une phase près : $f_{m+q} = f_m e^{i\alpha}$. La solution non triviale demande le déterminant nul:

$$\Delta_q = \det \begin{bmatrix} a_0 & 1 & 0 & & 0 & e^{-i\alpha} \\ 1 & a_1 & 1 & & 0 & \\ 0 & 1 & a_2 & & & \\ & & & & & \\ 0 & & & & a_{q-2} & 1 \\ e^{i\alpha} & 0 & & & 1 & a_{q-1} \end{bmatrix} = 0 \quad (I.1.2)$$

où $a_m = 2\cos(k-my) - \epsilon$

Avec la propriété périodique sur k , l'Eq I.1.2 s'écrit

$$\Delta_q = (-1)^q [P_q(\epsilon) - 2\cos\alpha - 2\cos qk] = 0 \quad (I.1.3)$$

où $P_q(\epsilon)$ est un polynome de ϵ à l'ordre q , $P_q(\epsilon) = \epsilon^q + \dots$

L'ensemble des solutions de l'Eq I.1.3 à chaque point rationnel forme le diagramme bien connu d'Hofstadter[9] (fig I.1.2). Les valeurs propres maximales ϵ_0 correspondent aux ξ_0 maximaux ξ_c qui donnent la température critique

$$\begin{aligned} T_c &= T_0 [1 - \xi^2(0)/\xi_c^2] \\ &= T_0 \{1 - [(\xi(0)/a) \arccos(\epsilon/4)]^2\} \end{aligned} \quad (I.1.4)$$

Cette formule a été parfaitement confirmée par l'expérience de Pannetier et al.[11] (fig.I.1.3) dans laquelle l'échantillon

contenait 3,000,000 de cellules dont le pas était $6\mu\text{m}$ et le diamètre de fils $2\mu\text{m}$.

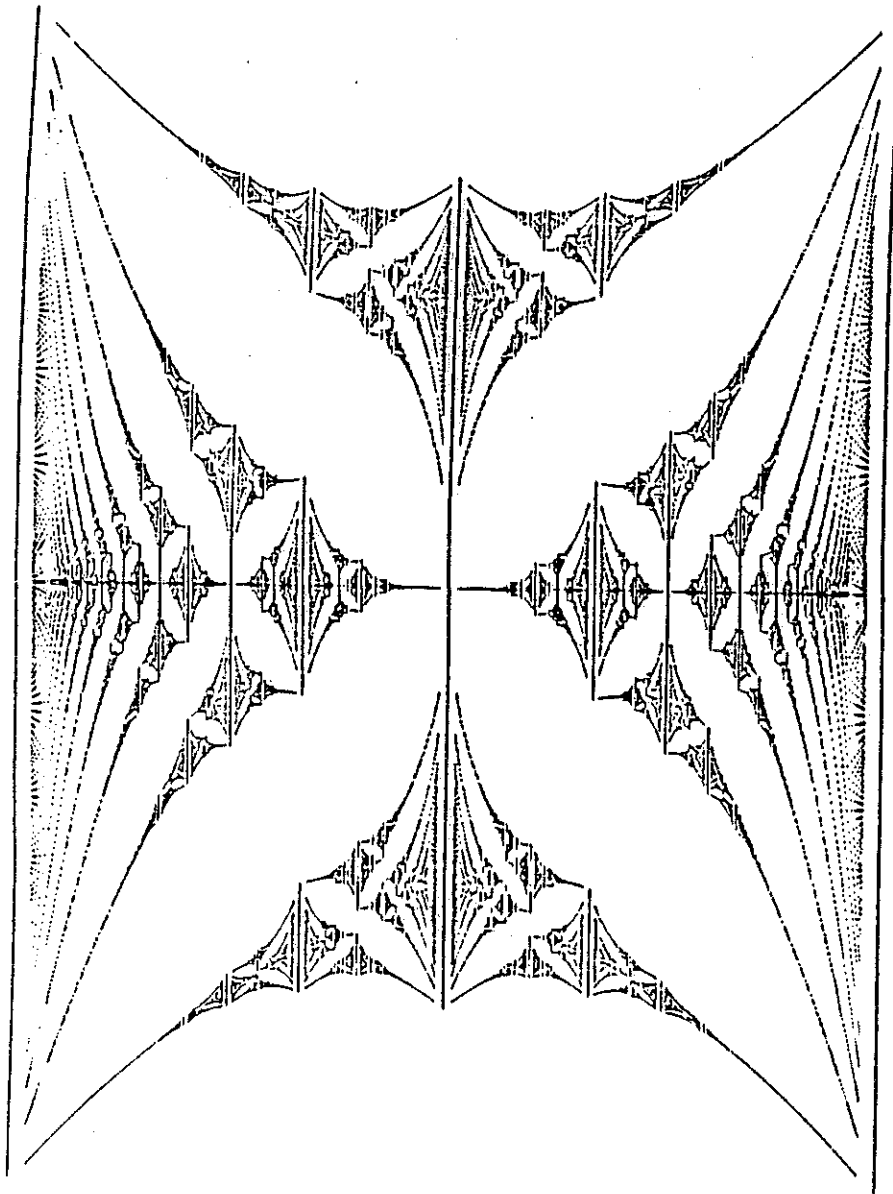


Fig. I.1.2 Niveaux de Landau (échelle verticale) d'un réseau carré sous champ magnétique (échelle horizontale -- flux réduit Φ/Φ_0).

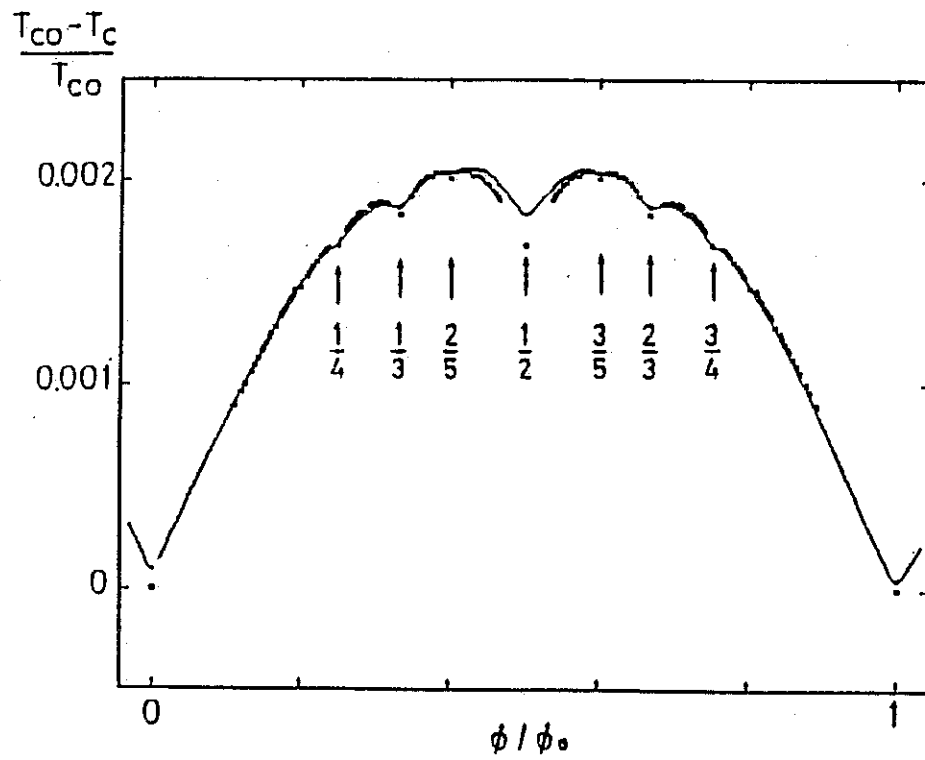


Fig. 1.1.3 La comparaison de la température critique du réseau carré entre la mesure de Pannetier et al.^[11] (ligne solide) et théorie (point).

1.2. Réseau fractal

Dans beaucoup de problèmes physiques la propriété d'échelle joue un rôle important et la structure self-similaire apparaît comme un modèle idéal pour une élucidation simple et transparente de concept d'échelle. Nous allons en étudier deux qui sont les plus simples et typiques dans cette partie.

1.2.1. Réseau fractal triangulaire — tamis de Sierpinski

La structure fractale la plus connue est le tamis de Sierpinski pour lequel le groupe de renormalisation s'applique de façon exacte. Le spectre de l'équation de Schrödinger en modèle de liaison-forte a été largement étudié^[3,12-15] et est équivalent à celui de l'équation de Ginzburg-Landau linéarisée. Nous reprenons ici le calcul et nous nous concentrons sur le bord du spectre, qui nous donne la température de transition d'un supraconducteur en forme de tamis, pour une comparaison avec nos résultats expérimentaux.

L'unité élémentaire de la structure est un triangle équilatéral (étage 0) avec trois liens qui connectent les centres des côtés (étage 1). Trois triangles identiques sont utilisés pour construire l'étage 2 et ainsi de suite (fig.1.2.1). Dans chaque pas d'itération la taille de triangle est doublée tandis que sa masse (longueurs totales de filament) est triplée, sa dimension fractal est donc $\bar{d} = \log 3 / \log 2$.

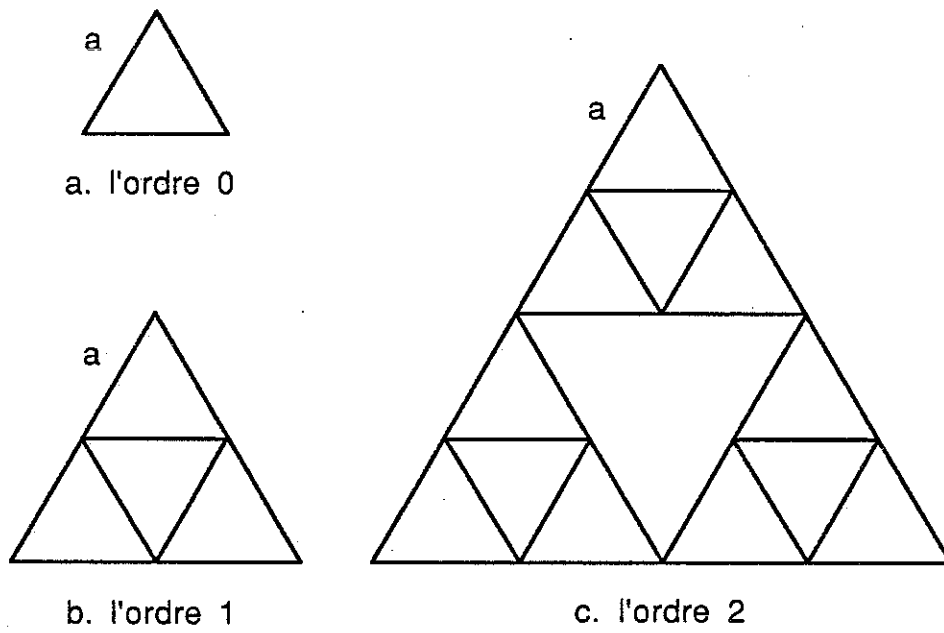


Fig. 1.2.1 La structure du tamis de Sierpinski d'ordre 0, 1 et 2. a est la longueur élémentaire.

Nous allons résoudre l'Eq 1.0.17 sur le tamis d'ordre N . Si $N = 0$, l'équation est triviale qui peut être écrite sous forme de matrice :

$$\mathcal{C}_0 \Psi_0 = 0 \quad (1.2.1)$$

où

$$\mathcal{C}_0 = \begin{pmatrix} z_0 & \eta_{12}^0 & \eta_{13}^0 \\ \eta_{21}^0 & z_0 & \eta_{23}^0 \\ \eta_{31}^0 & \eta_{32}^0 & z_0 \end{pmatrix} \quad (1.2.2)$$

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} \psi_1^0 \\ \psi_2^0 \\ \psi_3^0 \end{pmatrix} \quad (1.2.3)$$

et $z_0 = z \equiv \cos a/\xi_0$, $\eta_{ij} = \exp(i\gamma_{ij})$ et on garde la même définition de γ_{ij} comme l'Eq 1.0.9. Nous déduisons de l'Eq 1.2.1

$$4z_0^3 - 3z_0 = \cos(\gamma_0) \quad (1.2.4)$$

où $\gamma_0 = \gamma \equiv 2\pi\Phi/\Phi_0$ et Φ est le flux à travers le triangle élémentaire, comme auparavant.

Lorsque N est grand, il est difficile d'écrire l'Eq 1.0.17 sur tous les nœuds. L'idée brillante d'Alexander est de trouver l'équation ne concernant que les paramètres d'ordre sur les sommets à chaque étage n en éliminant ceux sur les centre de côtés, ce qui sera écrit comme

$$P_{n+1} \mathcal{C}_{n+1} \Psi_{n+1} = F_{n+1} \quad (1.2.5)$$

où F_{n+1} décrit le terme non-nul dû aux autres nœuds relevant dans l'étage suivant et P_{n+1} est un facteur numérique. En imposant que $\mathcal{C}_{n+1}$ garde la même forme que l'Eq 1.2.2, on déduit les équations de récurrence qui ont été obtenues par Alexander[3] :

$$\eta_{ij}^{n+1} = \exp(i\gamma_{ij}^{n+1}) = \exp[i(\gamma_{ik}^n + \gamma_{kj}^n - \varphi_n)] \quad (1.2.6)$$

$$\gamma_{n+1} = 3\gamma_n + \gamma'_n - 3\varphi_n \quad (1.2.7)$$

$$\gamma'_{n+1} = 3(\gamma_n + \gamma'_n) - 2(4^n)\gamma_0 - \gamma_{n+1} \quad (1.2.8)$$

$$z_{n+1} = (z_n - a_n)/|b_n| \quad (1.2.9)$$

$$P_{n+1} = P_n |b_n| / \Delta_n \quad (1.2.10)$$

où $\gamma_n = 2\pi\Phi_n/\Phi_0 = \gamma_{12}^n + \gamma_{23}^n + \gamma_{31}^n$ et Φ_n est le flux renormalisé à travers chaque triangle des coins à l'étage n , γ'_n est défini similairement pour le triangle du centre. Remarquons que $\gamma_{n+1} \neq 3\gamma_n + \gamma'_n$ et la différence $3\varphi_n$ est donc la contribution du supercourant. Initialement, on a

$$\gamma_0 = \gamma'_0 = 2\pi\Phi/\Phi_0 = \pi\sqrt{3}a^2H/2\Phi_0 \quad (1.2.11)$$

Les Δ_n, a_n et b_n sont définis par

$$\Delta_n = 64z_n^3 - 12z_n - 2\cos(\gamma) \quad (1.2.12)$$

$$a_n = 16z_n^2 - 1 + 4z_n\cos(\gamma_n) + \cos(\gamma_n + \gamma'_n) \quad (1.2.13)$$

$$\begin{aligned} b_n &= |b_n|\exp(-i\varphi_n) \\ &= 16z_n^2 - 1 + 4z_n[2\exp(-i\gamma_n) + \exp(-i(2\gamma_n + \gamma'_n))] \end{aligned}$$

$$+ [\exp(-2i\gamma_n) + 2\exp(-i(\gamma_n + \gamma'_n))] \quad (1.2.14)$$

Il est important de souligner que la ressemblance entre $\mathcal{E}_{n+1}$ et $\mathcal{E}_n$ ne se trouve que pour les structures où le groupe renormalisation n'est exact. Nous verrons le cas contraire dans la section suivante. La récurrence se répète jusqu'à l'étage N où $E_N = 0$ et donc un tamis fini d'ordre N peut être renormalisé à un triangle simple dont l'équation propre s'écrit exactement comme l'Eq 1.2.4

$$4z_N^3 - 3z_N = \cos(\gamma_N) \quad (1.2.15)$$

Notons que pour calculer la valeur propre on ignore les facteurs de phase η_{ij}^n et on n'a besoin que les flux normalisés invariants de jauge γ_n et z_n qui sont deux fonctions de z_0 et H reliés par les Eqs 1.2.7-1.2.14. Etant donné un champ H, l'Eq 1.2.15 peut être résolue pour $z_0 = \cos a/\xi_0$ et le maximum de z_0 donne la température de transition d'un supraconducteur formé en tamis d'ordre N

$$T_c(H) = T_c(0) \left[1 - \left(\frac{\xi(0)}{a} \right)^2 \arccos^2(z_0(H)) \right] \quad (1.2.16)$$

Nous rappelons la propriété importante donnée par Rammal^[13], qui permet d'obtenir le spectre d'un tamis d'ordre infini :

(i) symétrie de translation

$$z(\Phi/\Phi_0 + k) = z(\Phi/\Phi_0)$$

(ii) symétrie de réflexion par rapport à la droite $\Phi/\Phi_0 = 1/2$

$$z(1 - \Phi/\Phi_0) = z(\Phi/\Phi_0)$$

(iii) symétrie de rotation par rapport à point $(\Phi/\Phi_0 = 1/4, z=0)$

$$z(1/2 - \Phi/\Phi_0) = -z(\Phi/\Phi_0)$$

(iv) propriété nichante ("nesting")

Les valeurs propres qui, dans le spectre d'étage n, correspondent au champ $\Phi/\Phi_0 = k/2(4^n)$, où k est un entier allant 0 à 4^n , resteront dans tous les spectres d'étages plus élevés.

A partir de ces propriétés nous concluons qu'il suffit de calculer les points $z(\Phi/\Phi_0 = k/2(4^N))$ dans la partie $0 \leq \Phi/\Phi_0 \leq 1/2$, $0 \leq z \leq 1$ du spectre pour avoir le spectre de tamis infini. En limitant $N = 4$ nous aurons déjà 256 points, ce qui est suffisant pour tracer une belle courbe. La borne supérieure du spectre ainsi obtenue est montrée sur la figure 1.2.2 et sera comparée à l'expérience dans le chapitre III. Le spectre complet est donné dans la référence [15] par Bellissard et Rammal.

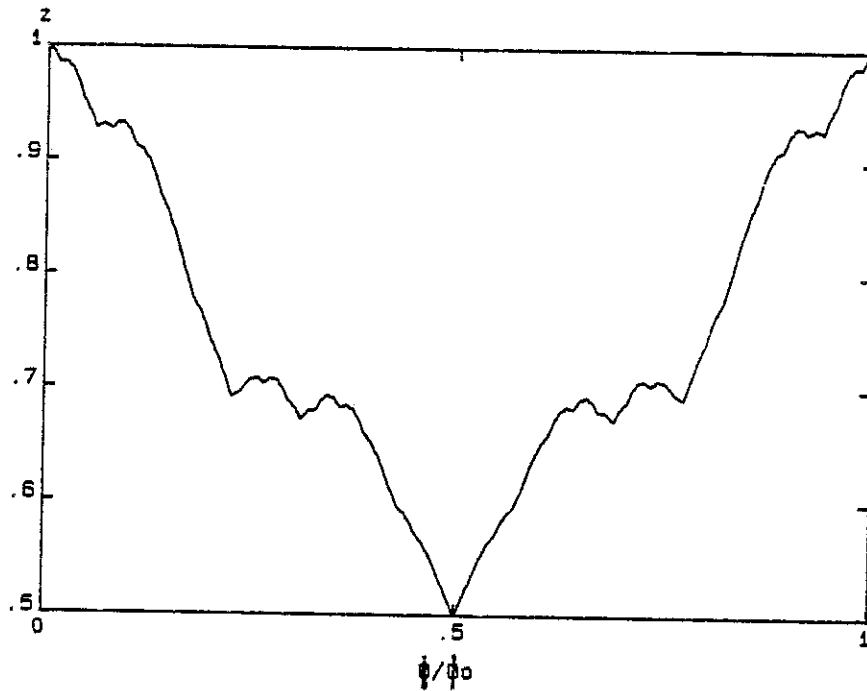


Fig. 1.2.2 Le bord du spectre du tamis de Sierpinski.

Elle montre la propriété d'échelle à faible champ (voir la figure 3 dans la référence [15]). Dans le diagramme $T_c(H)$ mesuré cette propriété est également retrouvée. Au voisinage de l'origine ($\Phi/\Phi_0 = 0$, $z = 1$), la borne peut s'estimer à

$$1 - z \approx \text{const.} (\Phi/\Phi_0)^\sigma \quad (1.2.17)$$

où l'exposant $\sigma = \bar{d}/\tilde{d} = \ln 5 / \ln 4 \approx 1.161$ et $\tilde{d} = 2 \cdot \ln 3 / \ln 5$ est la dimension spectrale.

1.2.2 Réseau fractal carré

La structure du réseau fractal carré, aussi appelé tapis, est analogue à celle de tamis. A chaque étage il est construit par neuf carrés dont les quatre coins et le centre sont équivalents au tapis d'étage inférieur et les quatre restants sont vides. Initialement, le tapis d'ordre 0 est un carré et celui d'ordre 1 est formé de carrés rangés trois par trois (la Fig. 1.2.3).

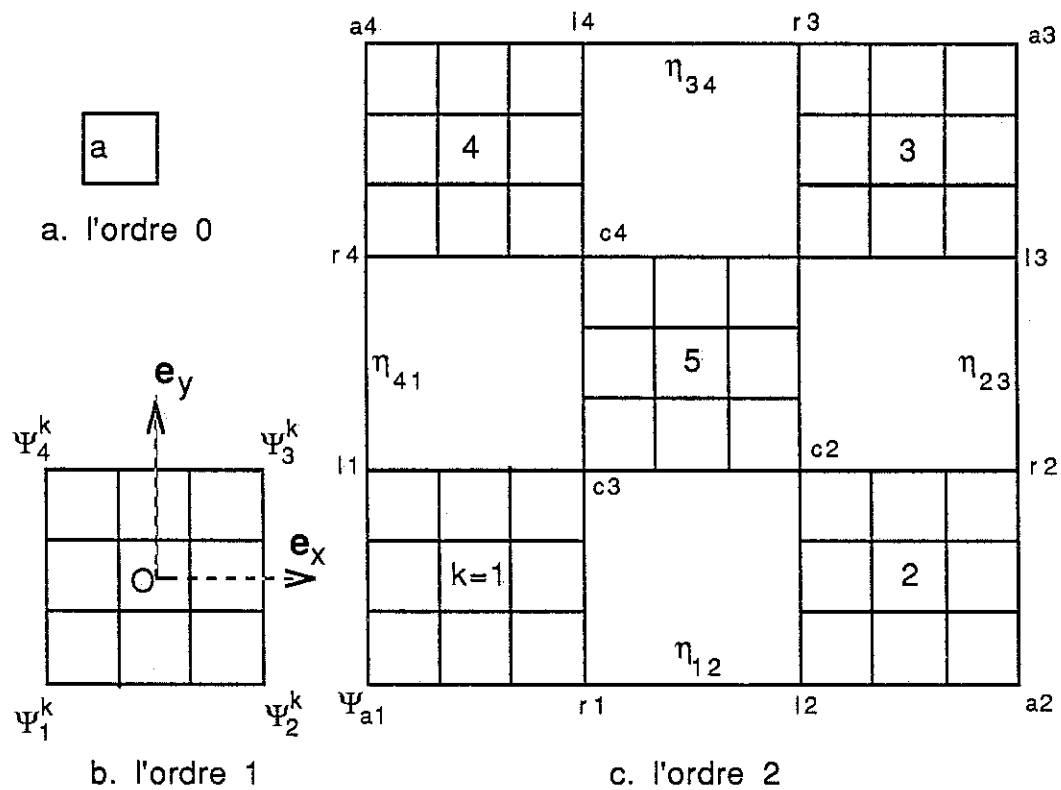


Fig. 1.2.3 La structure du tapis de Sierpinski d'ordre 0, 1 et 2. a est la longueur élémentaire.

Commençons par le calcul des valeurs propres du tapis d'ordre 0 qui se donne simplement par l'équation

$$\cos 4a/\xi_e \equiv 8z^4 - 8z^2 + 1 = \cos(\gamma) \quad (1.2.18)$$

où $z \equiv \cos a/\xi_e$ et $\gamma \equiv 2\pi\Phi/\Phi_0$ comme d'habitude. Le spectre $z(\Phi/\Phi_0)$ est donc une fonction cosinus (la Fig. 1.2.4).

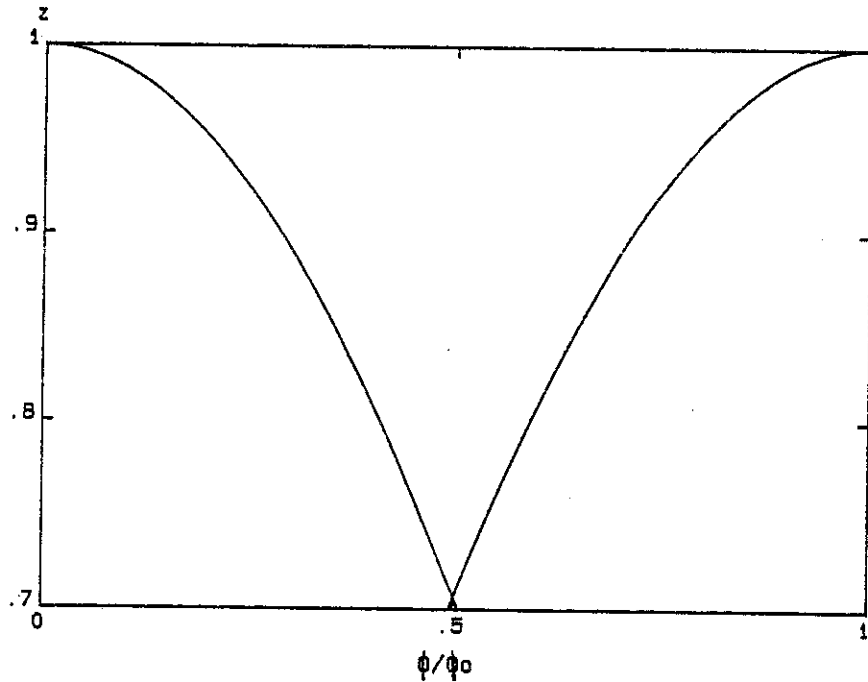


Fig. 1.2.4 Le bord du spectre du tapis de Sierpinski d'ordre 0.

Le tapis d'ordre 1 possède 16 nœuds et son équation propre s'écrit

$$\Delta(z, \gamma) = 0 \quad (1.2.19)$$

où Δ est un déterminant de 16×16 . Choisissons les coordonnées cartésiennes comme sur la figure 1.2.3b et la jauge symétrique

$$\mathbf{A} = 1/2 H (x \mathbf{e}_y - y \mathbf{e}_x) \quad (1.2.20)$$

L'invariance par rotation de la structure de $\pi/2$ nous permet de décomposer le déterminant Δ :

$$\Delta = \Delta_1^+ \cdot \Delta_1^- \cdot \Delta_2^+ \cdot \Delta_2^- \quad (1.2.21)$$

avec $\Delta_1^\pm = 72z^4 \pm 36z^3 \cos \gamma - 44z^2$

$$\pm 4z [2\cos 9\gamma + \cos 5\gamma - 4\cos \gamma] + 4\cos \gamma \cdot \cos 9\gamma - 2\cos 4\gamma + 2 \quad (1.2.22a)$$

$$\Delta_2^\pm = 72z^4 \pm 36z^3 \cdot \sin \gamma - 44z^2$$

$$\pm 4z [2\sin 9\gamma + \sin 5\gamma - 4\sin \gamma] + 4\sin \gamma \cdot \sin 9\gamma - 2\cos 4\gamma + 2 \quad (1.2.22b)$$

L'Eq 1.2.19 demande que l'un des quatres déterminants soit nul. Pour un champ donné nous en choisissons un dont la racine est maximum ce qui correspond à la borne supérieure du spectre. La méthode de Newton est utilisée pour trouver les racines des déterminants Δ et les résultats sont tracés sur la figure 1.2.5.

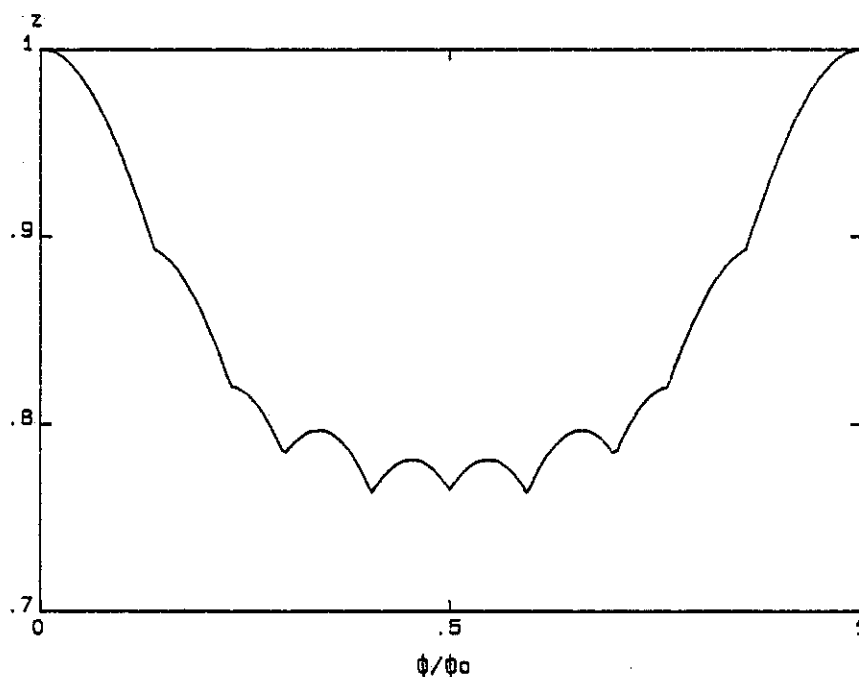


Fig. 1.2.5 Le bord du spectre du tapis de Sierpiski d'ordre 1.

A l'ordre suivant, afin d'aller plus loin la matrice est de dimension énorme (84 X 84 pour ordre 2, par exemple), et il est favorable de suivre la procédure de renormalisation. Supposons qu'à l'étage n nous ayons :

$$\mathcal{C}_n^k \Psi_n^k = F_n \quad k = 1, 2, \dots, 5 \quad (1.2.23)$$

où $\mathcal{C}_n = (t_{ij}^k)_{4 \times 4}$ est une matrice 4 X 4, F_n décrit les termes relevant, le vecteur

$$\Psi_n^k = \begin{bmatrix} \Psi_1^k \\ \Psi_2^k \\ \Psi_3^k \\ \Psi_4^k \end{bmatrix} \quad (1.2.24)$$

dont les composants sont des paramètres d'ordres numérotés selon la figure 1.2.3b, et k indique les positions des tapis d'ordre n dans celui d'ordre n+1 comme marqué sur la figure 1.2.3c.

Il faut que l'Eq 1.2.23 vérifie pour n+1

$$\mathcal{E}_{n+1}^k \Psi_{n+1}^k = \mathbf{F}_{n+1} \quad k = 1, 2, \dots, 5 \quad (1.2.25)$$

et nous cherchons l'expression de $\mathcal{E}_{n+1}$. Pour cela, nous regroupons les 16 paramètres d'ordres relevant en 4 vecteurs de dimension 4 en posant :

$$\Psi_a = (\Psi_{ai}) = (\Psi_i^1) \quad (1.2.26a)$$

$$\Psi_c = (\Psi_{ci}) = (\Psi_{i+2}^1) \quad (1.2.26b)$$

$$\Psi_r = (\Psi_{ri}) = (\Psi_{i+1}^1) \quad (1.2.26c)$$

$$\Psi_l = (\Psi_{li}) = (\Psi_{i-1}^1) \quad (1.2.26d)$$

Les cinq équations 1.2.23 se récrivent sous la forme d'une supermatrice

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_m & \mathcal{P} & \mathcal{N}_r & \mathcal{N}_l \\ \mathcal{P}^* & \mathcal{A} & \mathcal{M}_r & \mathcal{M}_l \\ \mathcal{N}_r^* & \mathcal{M}_r^* & \mathcal{E}_r & \mathcal{V} \\ \mathcal{N}_l^* & \mathcal{M}_l^* & \mathcal{V}^* & \mathcal{E}_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_c \\ \Psi_r \\ \Psi_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{n+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.27)$$

dont les éléments sont des matrices 4 X 4 :

$$\mathcal{E}_m = (t^m_{ij}), \quad t^m_{ij} = t^i_{ij} \delta_{ij} \quad (1.2.28)$$

$$\mathcal{E}_r = (t^r_{ij}), \quad t^r_{ij} = (t^i_{i+1, i+1} - z_n) \delta_{ij} \quad (1.2.29)$$

$$\mathcal{C}_I = (t_{ij}^I), \quad t_{ij}^I = (t_{i-1, i-1}^I - z_n) \delta_{ij} \quad (1.2.30)$$

$$\mathcal{S} = (s_{ij}), \quad s_{ij} = t_{i+2, i}^I \delta_{ij} \quad (1.2.31)$$

$$\mathcal{N}_r = (n_{ij}^r), \quad n_{ij}^r = t_{i, i+1}^I \delta_{ij} \quad (1.2.32)$$

$$\mathcal{N}_I = (n_{ij}^I), \quad n_{ij}^I = t_{i, i-1}^I \delta_{ij} \quad (1.2.33)$$

$$\mathcal{M}_r = (m_{ij}^r), \quad m_{ij}^r = t_{i+2, i+1}^I \delta_{ij} \quad (1.2.34)$$

$$\mathcal{M}_I = (m_{ij}^I), \quad m_{ij}^I = t_{i-2, i-1}^I \delta_{ij} \quad (1.2.35)$$

$$\mathcal{V} = (u_{ij}), \quad u_{ij} = t_{i+1, i-1}^I \delta_{ij} + \eta^n_{i,j} \delta_{i,j+1} \quad (1.2.36)$$

$$\mathcal{A} = (a_{ij}), \quad a_{ij} = t_{i+2, i+2}^I \delta_{ij} + t_{i,j}^5 \quad (1.2.37)$$

$$z_n = \text{ctg} \frac{3^{n+1} \cdot a}{\xi} \sin \frac{3^n \cdot a}{\xi} \quad (1.2.38)$$

$$\eta'^n_{ij} = \eta^n_{ij} \sin \frac{3^n \cdot a}{\xi} / \sin \frac{3^{n+1} \cdot a}{\xi} \quad (1.2.39)$$

Lorsque l'on résout l'Eq 1.2.27 pour Ψ_α en respectant la non-commutativité entre les éléments, nous trouvons bien l'Eq 1.2.25 avec

$$\mathcal{C}_{n+1} = \mathcal{D}_a - \mathcal{L} \mathcal{D}_c^{-1} \mathcal{L}^+ \quad (1.2.40)$$

$$\text{où } \mathcal{D}_a = \mathcal{C}_m + \mathcal{N}_r \mathcal{E}_r \mathcal{N}_r^* + \mathcal{N}_I \mathcal{E}_I \mathcal{N}_I^* + \mathcal{N}_r \mathcal{F}_I \mathcal{N}_I^* + \mathcal{N}_I \mathcal{F}_r \mathcal{N}_r^* \quad (1.2.41)$$

$$\mathcal{D}_c = \mathcal{A} + \mathcal{M}_r \mathcal{E}_r \mathcal{M}_r^* + \mathcal{M}_I \mathcal{E}_I \mathcal{M}_I^* + \mathcal{M}_r \mathcal{F}_I \mathcal{M}_I^* + \mathcal{M}_I \mathcal{F}_r \mathcal{M}_r^* \quad (1.2.42)$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{S} + \mathcal{N}_r \mathcal{E}_r \mathcal{M}_r^* + \mathcal{N}_I \mathcal{E}_I \mathcal{M}_I^* + \mathcal{N}_r \mathcal{F}_I \mathcal{M}_I^* + \mathcal{N}_I \mathcal{F}_r \mathcal{M}_r^* \quad (1.2.43)$$

$$\text{et } \mathcal{E}_r = (\mathcal{V} \mathcal{C}_I^{-1} \mathcal{V}^+ - \mathcal{C}_r)^{-1} \quad (1.2.44)$$

$$\mathcal{E}_I = (\mathcal{V} \mathcal{C}_r^{-1} \mathcal{V}^+ - \mathcal{C}_I)^{-1} \quad (1.2.45)$$

$$\mathcal{F}_r = (\mathcal{C}_r \mathcal{V}^+ - \mathcal{C}_I - \mathcal{V})^{-1} \quad (1.2.46)$$

$$\mathcal{F}_I = (\mathcal{C}_I \mathcal{V}^{-1} \mathcal{C}_r - \mathcal{V}^+)^{-1} \quad (1.2.47)$$

Continuons cette procédure récursive jusqu'à $n+1 = N$ (l'ordre du tapis fini) où $\mathbf{F}_N = \mathbf{0}$. La solution non-triviale demande

$$\Delta_N = \det(\mathcal{C}_N) = 0 \quad (1.2.48)$$

Le déterminant est une fonction calculable de z et γ , décrit par les équations récursives 1.2.28 - 47, et donc l'Eq 1.2.46 peut être résolue pour z à chaque γ donné. Il n'existe pas d'équation itérative simple analogue au cas du tapis de Sierpinski, parce que, d'une

part, il n'est pas possible de décomposer le $\mathcal{C}_n$ comme $P_n \mathcal{C}_n'$ où $\mathcal{C}_n'$ est une matrice dont les éléments non-diagonaux sont de norme 1. Autrement dit, les éléments non-diagonaux de $\mathcal{C}_n$ n'ont pas une norme constante. Nous voyons cela simplement par le fait que à l'ordre 0,

$$|t^0_{i,i+1}| = 1, \quad t^0_{i,i+2} = 0$$

En revanche, à l'ordre suivant, le calcul montre que $|t^n_{i,i+2}|$ n'est égal ni $|t^n_{i,i+1}|$ ni zéro, ce qui signifie qu'une nouvelle interaction s'introduit entre les deux nœuds opposés diagonalement et que le groupe de renormalisation n'est pas exact. D'autre part, on n'arrive pas à exprimer les $\mathcal{C}_{n+1}$ en fonction uniquement des flux normalisés comme pour le tapis — ils dépendent de toutes les phases individuelles de chaque filament. Ceci résulte de l'absence de renormalisation exacte. En conséquence, le calcul du spectre du tapis est beaucoup plus difficile que celui du tapis. Pour cette raison nous nous limitons à l'ordre 2 qui se compare assez bien au résultat expérimentaux.

Nous portons sur la figure 1.2.6 le diagramme (z, γ) dans les intervalles $(0, 1/2)$ et $(0, 1/18)$. La propriété d'échelle est observée. En revanche, aucune estimation simple comme l'Eq 1.2.17 n'est obtenue.

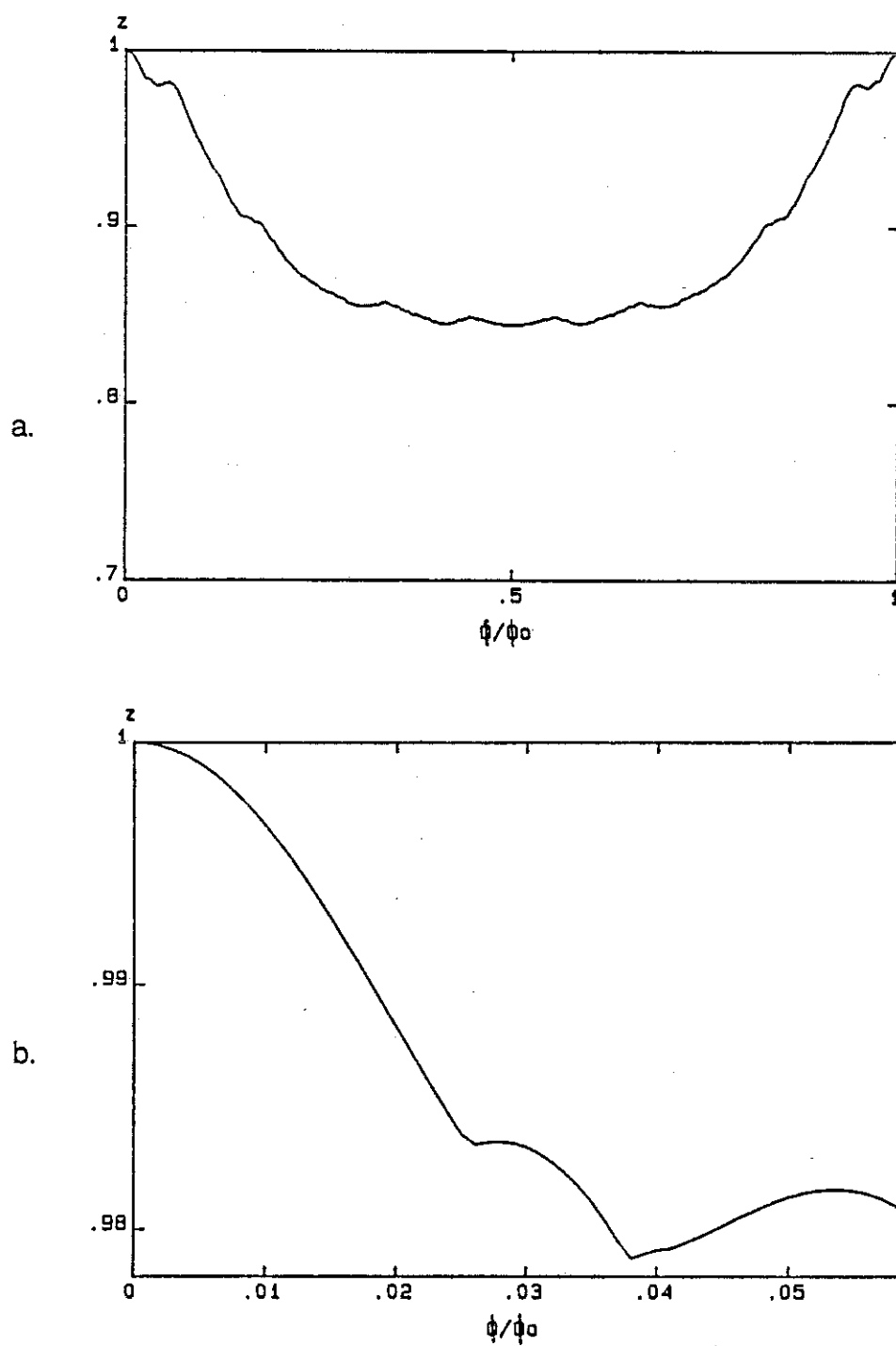


Fig. 1.2.6 a. Le bord du spectre du tapis de Sierpinski d'ordre 2.
 b. L'agrandissement de a. pour $\Phi/\Phi_0 \in [0, 0.59]$.

I.3. Réseau quasipériodique

Récemment, un grand intérêt s'est concentré sur les structures dites quasipériodiques, ou quasicristaux qui se distinguent à la fois des structures périodiques et des structures désordonnées. Dans les phénomènes de quantification du flux, le spectre du réseau quasipériodique doit présenter une grande différence par rapport à celui des réseaux périodiques. D'autre part, le quasicristal est une structure hautement ordonnée, nous espérons donc considérablement plus de structures dans son spectre que pour des réseaux désordonnés.

I.3.1. Construction d'une chaîne quasipériodique unidimensionnelle

L'une des méthodes pour construire le quasicristal est la méthode de projection, qui convient à toute dimension. Nous rappelons d'abord son application la plus simple : la construction de chaîne quasipériodique, donné explicitement dans les références[16-18].

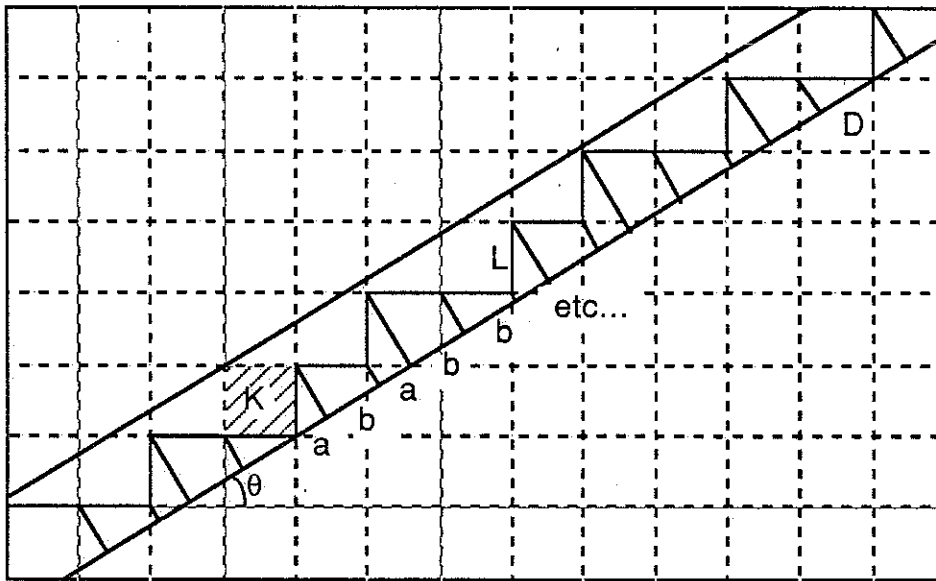


Fig. I.3.1 La méthode de Katz et Duneau pour paver l'espace de façon non périodique — exemple à une dimension.

Considérons, dans un plan à deux dimensions, quadrillé par un réseau régulier de points (figure I.3.1), une droite D passant par l'origine et ayant une pente $k = \tan \theta$. Commençons par former une bande en translatant le carré-type K du plan, le long de la droite D . La bande ainsi obtenue isole une ligne brisée L qui relie tous les points du réseau contenus à l'intérieur de la bande. La projection de cette ligne brisée sur la droite D fournit un pavage avec deux segments a et b dont les longueurs sont généralement différentes :

$$l_a = l \sin \theta \quad (I.3.1)$$

et $l_b = l \cos \theta \quad (I.3.2)$

Ce pavage peut être représenté par une chaîne de "mot" : $aba... .$ Il est évident que si k est un nombre rationnel, $k = p/q$, p et q sont premiers entre eux, la chaîne se répète avec une période $p + q$. En revanche, lorsque k est irrationnel, la chaîne n'est pas périodique — on ne trouvera jamais des "sous-chaînes" identiques de longueur finie par translation; mais elle est tout à fait régulière : elle peut se construire selon la règle^[18] suivante :

$$M_n = \begin{cases} (M_{n-1})^{r_n} (M_{n-2}) & n = \text{pair} \\ (M_{n-2}) (M_{n-1})^{r_n} & n = \text{impair} \end{cases} \quad (1.3.3)$$

et initialement, $M_0 = "a"$

$M_1 = "b"$

où M_n est une chaîne de "mot" contenant L_n caractères, $(M_n)^r$ signifie la répétition r fois des chaînes M_n et les r_n sont des composants de l'expression de fraction continue de pente k :

$$k = r_0 + \frac{1}{r_1 + \frac{1}{r_2 + \dots}} = [r_0, r_1, r_2, \dots] \quad (1.3.4)$$

Nous voyons facilement que la longueur de la chaîne M_n

$$L_n = p_n + q_n \quad (1.3.5)$$

où p_n et q_n sont respectivement le numérateur et le dénominateur de la fraction approximante de k :

$$k_n = \frac{p_n}{q_n} = r_0 + \frac{1}{r_1 + \frac{1}{r_2 + \dots}} \quad (1.3.6)$$

Quand $n \rightarrow \infty$, M_n est la chaîne quasipériodique recherchée. Notons que la chaîne périodique peut être comprise comme un cas particulier dans cette règle : dans ce cas, $k = p/q$ est exprimé par une fraction continue finie,

$$k = [r_0, r_1, r_2, \dots, r_N]$$

et donc la chaîne est construite par une simple répétition de la chaîne principale M_N de longueur $L_N = p + q$.

Sur la figure I.3.1 la pente k est choisie égale à l'inverse du nombre d'or

$$k = \tau^{-1} \equiv (\sqrt{5} - 1)/2$$

qui présente un grand avantage puisque son développement en fraction continue est le plus simple parmi tous les nombres irrationnels :

$$\tau = [1, 1, \dots] \text{ et } \tau^{-1} = [0, 1, 1, \dots] \quad (I.3.7)$$

Et la chaîne quasipériodique correspondant au nombre d'or est construite simplement par la règle suivant

$$M_n = M_{n-1}M_{n-2} \quad n = \text{pair} \quad (I.3.8a)$$

$$M_n = M_{n-2}M_{n-1} \quad n = \text{impair} \quad (I.3.8b)$$

Les huit premières chaînes se donnent ici :

$$\begin{aligned} M_0 &= "a" \\ M_1 &= "b" \\ M_2 &= "ba" \\ M_3 &= "bba" \\ M_4 &= "bbaba" \\ M_5 &= "bbabbaba" \\ M_6 &= "bbabbababbaba" \\ M_7 &= "bbabbababbababbaba" \end{aligned} \quad (I.3.9)$$

Nous mentionnons quelques propriétés des chaînes ainsi obtenus :

(i) Les nombres des "a" et "b" contenus dans la chaîne finie M_n ne sont rien d'autre que la séquence de Fibonacci $\{F_n\}$:

$$Na_n = F_{n-1} \quad \text{pour } n \geq 1 \quad (I.3.10a)$$

$$Nb_n = F_n \quad (I.3.10b)$$

Cette propriété est facile à voir par la définition de la séquence de Fibonacci

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (I.3.11)$$

avec $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$

ou donné par la formule de A. de Moivre[19] :

$$F_n = [\tau^n - (-\tau)^{-n}] / \sqrt{5} \quad (1.3.12)$$

Les premiers nombres de Fibonacci sont

$$\{F_n\} = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots, n = 0, 1, \dots, 11, \dots$$

(ii) Les longueurs L_n des chaînes M_n sont aussi égales aux nombres de Fibonacci

$$L_n = F_{n+1} \quad (1.3.13)$$

C'est une conséquence simple de (i).

(iii) Le rapport des nombres de "b" et "a" contenus dans la chaîne finie M_n est

$$\tau_n = F_n / F_{n-1} \quad (1.3.14)$$

Elle est aussi une déduction de (i). Lorsque $n \rightarrow \infty$, le rapport tend vers le nombre d'or τ .

Le fait important est que si on change les règles 1.3.8 par une seule (1.3.8a ou 1.3.8b), on trouvera deux chaînes, dont l'une est l'inverse de l'autre. Elles diffèrent à longueur finie de celles de 1.3.9, mais possèdent toutes les propriétés des chaînes quasipériodiques :

$$M_n = \text{"babbabab..."} \quad \text{selon 1.3.8a}$$

$$M_n = \text{"...bababbab"} \quad \text{selon 1.3.8b}$$

A longueur infinie, elles sont identiques à la chaîne standard par l'opération de translation ou réflexion.

1.3.2. Le spectre de l'échelle quasipériodique

Ce que nous cherchons dans cette section est le spectre de l'échelle, dite quasipériodique, formée de deux rectangles, a et b, avec le rapport de surface τ , arrangés selon la chaîne quasipériodique (la Fig. 1.3.2).

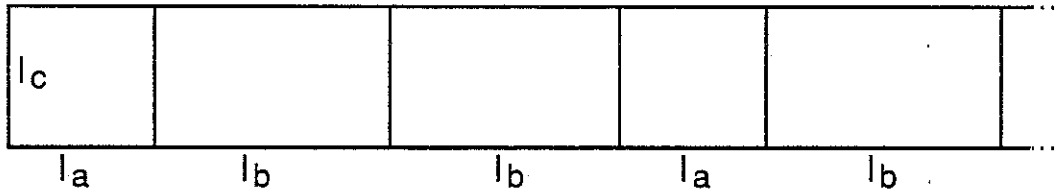
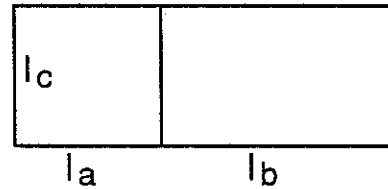


Fig. I.3.2 Echelle quasipériodique.

Il est compréhensible que le spectre de l'échelle quasipériodique infinie ne peut pas être obtenu rigoureusement. Nous sommes obligés de suivre un chemin approximatif qui approche progressivement de notre but.

Fig. I.3.3 Double boucles



L'idée naturelle est bien sûr de remplacer l'échelle infinie par une échelle finie dont les deux éléments a et b sont ordonnés selon la chaîne M_n obtenue dans la section précédente. Commençons par l'échelle finie la plus simple : un double rectangle avec surfaces différentes (la Fig. I.3.3). Le spectre $a/\xi_e(\gamma)$ est donné par la solution de l'équation propre

$$\Delta = 2\sin(\theta_a + \theta_b + \theta_c) - \sin\theta_a \sin\theta_b \sin\theta_c - 2\sin\theta_c \cos(\gamma_a + \gamma_b) - 2\sin\theta_a \cos\gamma_b - 2\sin\theta_b \cos\gamma_a \quad (I.3.15)$$

où $\theta_i = l_i/\xi_e$, $i = a, b, c$; $\gamma_i = 2\pi\Phi_i/\Phi_0 = 2\pi l_i l_c H/\Phi_0$, $i = a, b$.

Dans le cas trivial, où les deux rectangles sont identiques, le spectre ainsi calculé se montre sur la figure I.3.4 (pour $l_a = l_c$). Le comportement de la courbe illustre la quantification du fluxoïd : quand $\Phi = n\Phi_0$, $n =$ entier, l'énergie tombe à zéro puisque la quantification du flux est satisfaite simultanément dans les deux boucles et aucun supercourant ne circule le long des filaments.

Cela est aussi vrai pour deux rectangles avec des surfaces commensurables : $l_b/l_a = p/q$. Dans ce-cas-là l'énergie est nulle lorsque $\Phi = nq\Phi_0$ ou $H = nq\Phi_0/l_a l_c$ et il y a des nombres entiers de flux dans chaque boucle : $N_a = nq$ et $N_b = np$.

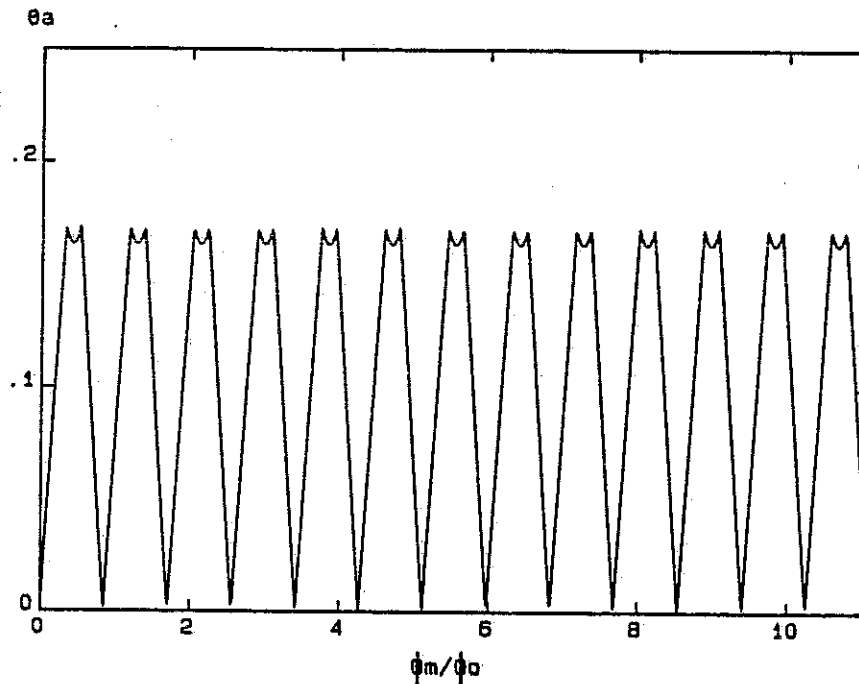


Fig. 1.3.4 Le spectre trivial de la double boucle (voir Fig. 1.3.3) où $l_a = l_b$.

La non-commensurabilité entre dans le système lorsque le rapport des deux surfaces, $k = l_b/l_a$, est irrationnel. Maintenant l'énergie du système n'est jamais nulle en présence du champ puisqu'il n'existe pas de configuration de flux satisfaisant la quantification pour toutes les boucles. Les valeurs particulières du champ qui remplacent $np\Phi_0$ sont les valeurs pour lesquelles l'énergie est minimale. Développons le nombre irrationnel k en fraction continue :

$$k = [r_1, r_2, \dots] \quad (1.3.16)$$

Nous avons les fractions approximatives

$$k_n = p_n/q_n = [r_1, r_2, \dots, r_n] \quad (1.3.17)$$

qui sont les plus proches de k parmi toutes les fractions dont le dénominateur $q \leq q_n$. Par conséquent, si on injecte q_n quanta de flux dans le rectangle a et p_n dans b , ceci requiert le champ appliqué

$$H \approx \frac{p_n + q_n}{l_a l_c (1 + k)} \Phi_0 \quad (I.3.18)$$

et les courants induits qui sont proportionnels à la différence entre fluxoid et flux,

$$\Phi_a - \Phi_a' = (k - p_n/q_n) q_n \Phi_0 / (1 + k) \text{ pour } a$$

$$\Phi_b - \Phi_b' = (p_n/q_n - k) q_n \Phi_0 / (1 + k) \text{ pour } b,$$

seront minimaux, ainsi que l'énergie. Donc l'Eq I.3.17 donne les positions de l'énergie minimale, ou, données par le flux à travers le rectangle a :

$$\Phi_a \approx (p_n + q_n) \Phi_0 / (1 + k) \quad (I.3.19)$$

Nous prenons un exemple simple, $k = \tau$, le nombre d'or, dont les fractions approximantes sont fournies par :

$$k_n = F_n / F_{n-1} \quad (I.3.20)$$

Le spectre calculé est montré sur la figure I.3.5. Les minimums ont lieu à $\Phi_a \approx (F_{n+1} + F_n) \Phi_0 / (1 + \tau) \approx F_n \Phi_0$.

Il a l'avantage à définir la surface moyenne

$$S_m = (S_a + \tau S_b) / (1 + \tau) = (3 - \tau) S_a \quad (I.3.21)$$

et ainsi le flux moyen

$$\Phi_m = (3 - \tau) \Phi_a \quad (I.3.22)$$

En utilisant la formule approximative de A. de Moivre (l'Eq. I.3.12) :

$$F_n = \tau^n / \sqrt{5} = \tau^{n-1} / (3 - \tau) \quad (I.3.23)$$

les positions de minimum sont données par $\Phi_m = \tau^{n-1} \Phi_0$

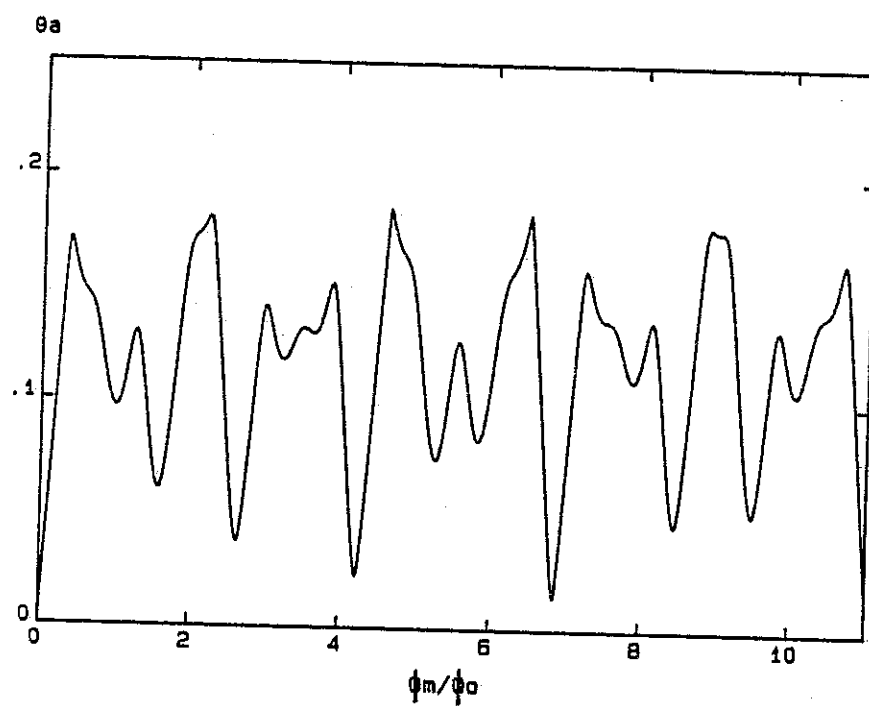


Fig. 1.3.5 Le spectre de double boucle (voir Fig. 1.3.3) avec $l_b = \tau l_a$.

REFERENCES

- [1] Par exemple, M. Tinkham, *Introsuction to superconductivity*, McGraw-Hill, New york, 1975
- [2] P. G. de Gennes, C. R. Acad. Sci. B 292, 279 (1981)
P. G. de Gennes, C. R. Acad. Sci. Ser. B 292, 9 (1981)
- [3] S. Alexander, Phys. Rev. B 27, 1541 (1983)
S. Alexander et E. Halevi, J. Phys. (Paris), 44, 805 (1983)
- [4] H. J. Fink, A. Lopez et R. Maynard, Phys. Rev. B 26, 5237 (1982)
- [5] J. Riess, J. Phys. Lett. (Paris), 43, L-277 (1982)
- [6] J. Simonin, D. Rodriques et A. lopez,
Phys. Rev. Lett. 49, 944 (1982)
R. Young, Phys. Rev. B 31, 4294 (1985)
- [7] R. Rammal, T. C. Lubensky et G. Toulouse,
Phys. Rev. B 27, 2820 (1983)
- [8] P.G. Harper, Proc. Phys. Soc. London Sect. A 68, 874 (1955).
- [9] D.R. Hofstadter, Phys. Rev. B14, 2239 (1976).
- [10] B. Pannetier, J. Chaussy, R. Rammal et J.C. Villegier,
Phys. Rev. Lett. 53, 1845 (1984).
- [11] B. Pannetier, J. Chaussy et R. Rammal,
Phys. Scripta. T13, 245 (1986)
- [12] R.Rammal, J.Phys. (Paris), 45, 191 (1984).
- [13] R.Rammal et G. Toulouse, Phys. Rev. Lett. 49, 1194 (1982).
- [14] J. M. Gordon, A. M. Goldman, J. Maps, J. Costello, R. Tiberio
et B. Whitehead, Phys. Rev. Lett. 56, 2280 (1986).
- [15] J-M. Ghez, Y.Y. Wang, R. Rammal, B. Pannetier et J. Bellissard,
à paraître.
- [16] R. K. P. Zia et W. J. Dallas, J. Phys. A18, L341 (1985).

- [17] V. Elser, Phys. Rev. B32, 4862 (1985).
- [18] J. M. Luck and D. Petritis, ?₁ 289 (1985).
- [19] M. R. Schroeder, *Number Theory in Science and Communication*

CHAPITRE II. Présentation des équipements et techniques expérimentales

II.1. Le Cryostat à hélium 3.

II.1.1. Le calorimètre

II.1.2. Le principe et la procédure de fonctionnement

II.1.3. Le porte-échantillon

II.1.4. La bobine du champ

II.2. Organigramme de manipulation

II.2.1. Mesure de la résistance par pont 4 fils

II.2.2 Régulation et stabilisation de la température

II.3. Mesure des caractéristiques courant-tension et du courant critique

II.4. La réalisation des échantillons

II.4.1. Photolithographie

II.4.2. Lithographie électronique

II.4.3. Formation des contacts avec le réseau

Références

La quantité que nous voulons mesurer essentiellement est la résistance des échantillons en fonction du champ magnétique ou de la température. Mais l'exigence d'équipement est stricte:

- haute stabilisation et résolution de la température, $\sim 10^{-6}$.
- bas champ résiduel, $< 10^{-3}$ Oe.
- basse température, 1 - 10 K.
- haute résolution de mesure de la résistance, 10^{-6} à courant faible (20 nA - 100 μ A).
- nombreux points pour un cycle de mesure, qui demande l'acquisition des données et le contrôle des paramètres automatiquement.

Les basses températures sont obtenues dans un cryostat à He^3 que nous allons présenter dans la première partie. La deuxième partie sera la présentation des instruments et des points techniques. Et, bien sûr, le chaînon le plus important est la fabrication des échantillons qui sera présentée à la fin de ce chapitre.

II.1. Le Cryostat à hélium 3.

La plupart de nos échantillons sont en aluminium dont la température critique est autour de 1.2 K. En présence d'un champ ou d'un courant fort il faut maintenir $T \sim 1\text{K}$ pour avoir l'état supraconducteur.

Par simple pompage sur un bain d'hélium, il est possible d'atteindre 1,2K avec un vide de 40 Pa (l'extrême de notre pompe), qui est, malheureusement, juste au-dessus de la température désirée. On ne peut pas aller plus bas dans un cryostat classique même avec un pompage plus puissant à cause du film superfluide qui monte le long des parois et se vaporise en un point au-dessus du bain. En revanche, des températures plus basses, de l'ordre de 0.3 K, peuvent être obtenues avec l'isotope 3 de l'hélium qui a une tension de vapeur beaucoup plus grande que l'isotope 4, à égalité de température.

Nous présentons sur la figure II.1.1 une vue d'ensemble du cryostat à He^3 (réalisé par J. Chaussy et P. Brosse). L'enceinte d'azote n'est pas représentée. Cette dernière a une capacité de 24 l et une autonomie de six jours. Le pointillé représente la paroi de l'enceinte d'hélium 4 comportant environ 15 l d'hélium liquide et d'une autonomie de cinq jours. Il y a 5 l de ^3He gazeux dans un circuit étanche comportant le réservoir, la boîte à ^3He , le condenseur, la pompe à charbon actif et les liaisons entre eux. Le calorimètre est entouré par une bobine qui crée le champ magnétique qu'il faut appliquer sur l'échantillon. Les différents fils et tubes descendant dans le calorimètre sont thermalisés dans l' ^4He à 4.2 K pour minimiser les apports de chaleur.

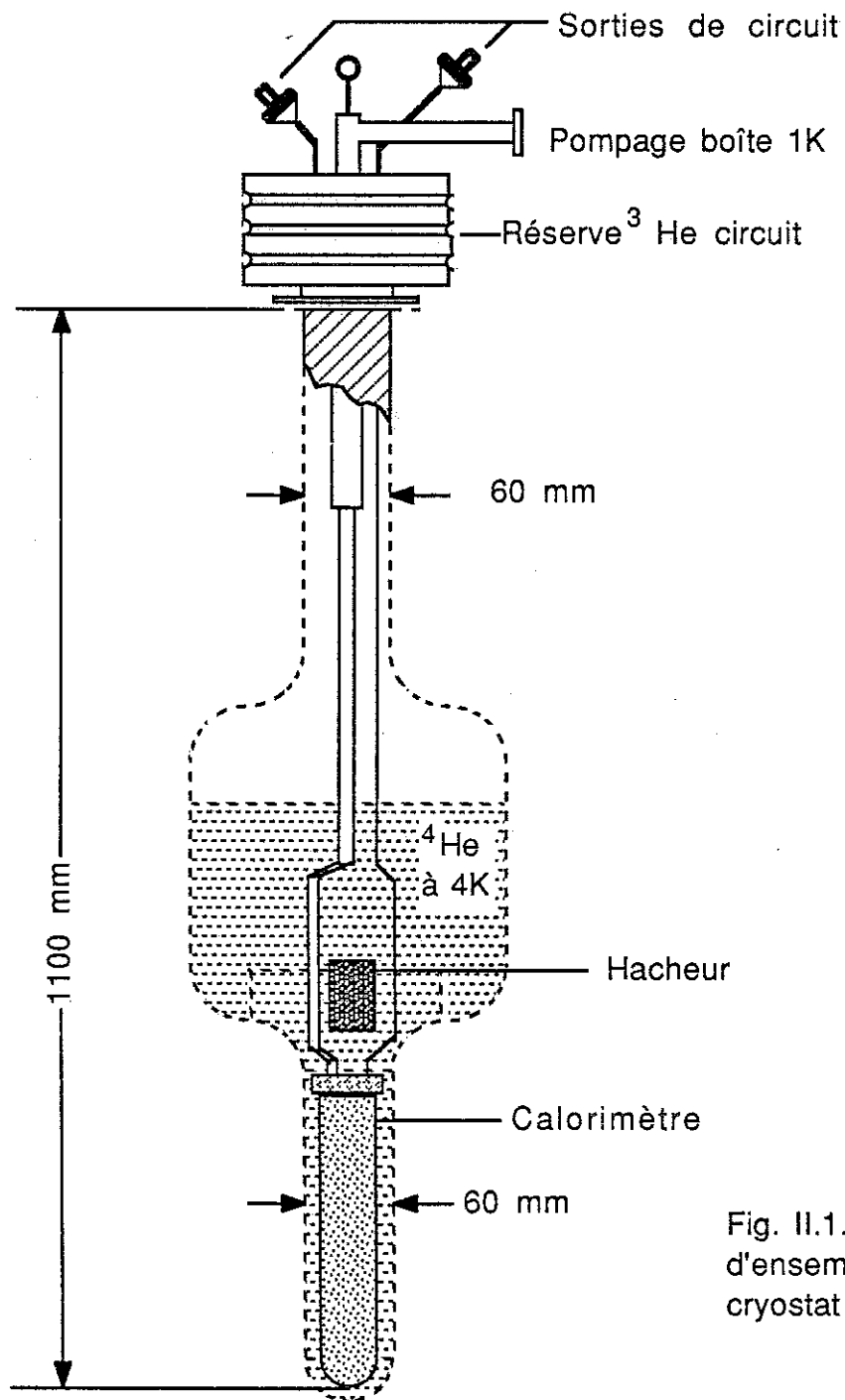


Fig. II.1.1 Vue d'ensemble du cryostat à ^3He .

II.1.1. Le calorimètre

La figure II.1.2 représente une coupe du calorimètre. Outre l'emplacement pour l'échantillon et le circuit d'hélium 3, nous avons la boîte à 1K alimentée en hélium à 4K par un tube fermé par une microvanne. On peut pomper sur cette boîte et abaisser ainsi sa température jusqu'à 1.2K. Un capillaire placé entre le bain d'hélium et la boîte à 1K permet une alimentation permanente de cette dernière. Autour d'elle se trouve la boîte de condensation de l'hélium 3. L'hélium 3 condensé remplira la boîte à He³. Cette dernière est une enceinte en cuivre de 7.7 cm³. La pompe au-dessus de la boîte à 1K est en fait une boîte de 45 cm³ contenant 19 gr de charbon actif. La liaison entre eux est un tube en inox de faible conduction thermique.

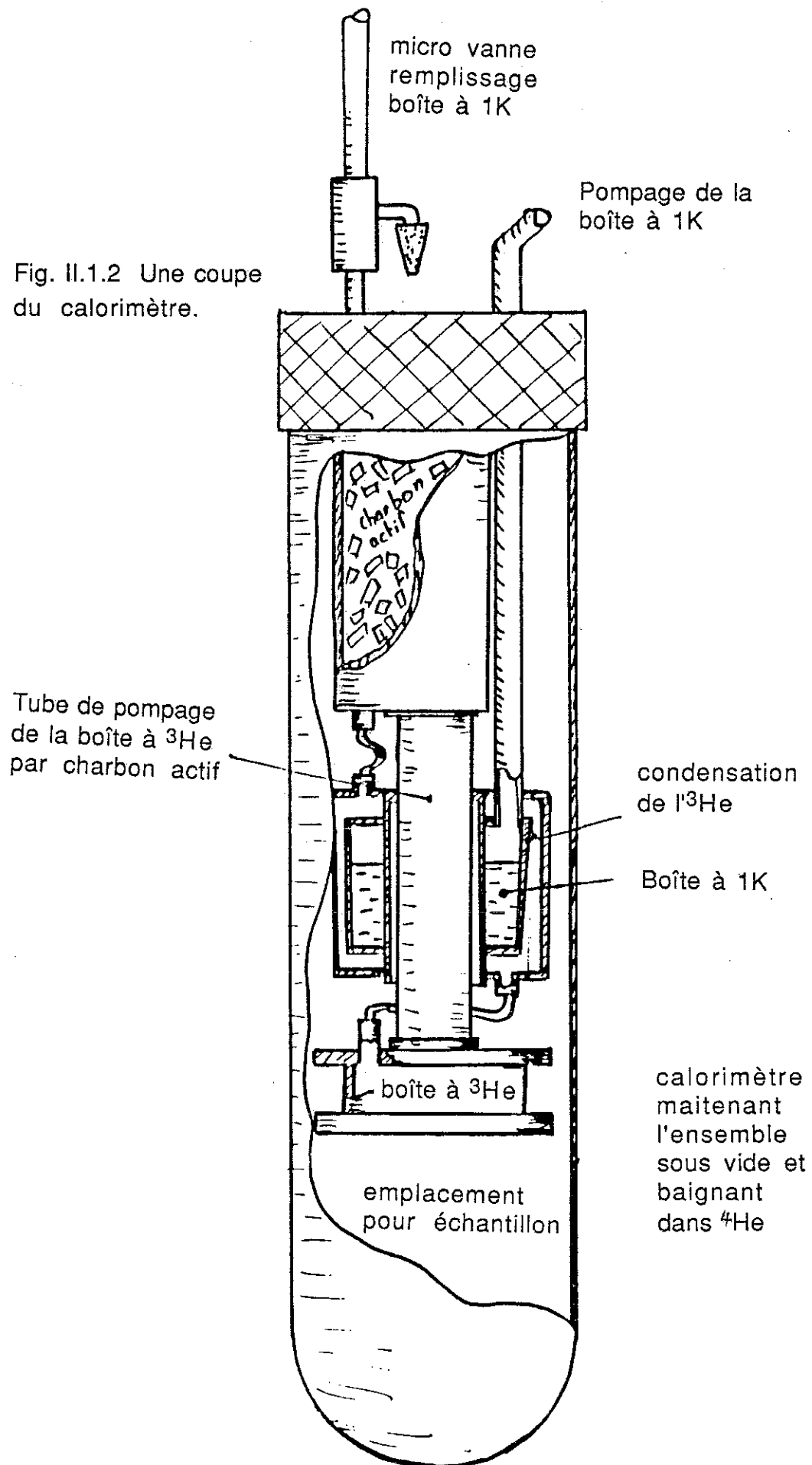
II.1.2. Le principe et la procédure de fonctionnement

En pompant sur la boîte à 1K, on baisse la température du calorimètre à 1.1K. Tout l'hélium 3 est absorbé par le charbon actif. On verra la pression d'hélium 3 descendre à quelque mbr. Maintenant on commence la procédure de condensation.

(1) Ouvrir la microvanne pendant 15 minutes afin de remplir la boîte à 1K.

(2) Fermer la microvanne pour éviter l'arrivée d'hélium 4 chaud. Ceci rend le pompage plus efficace. Chauffer le charbon actif par la résistance située dans la boîte à charbon pendant 5 minutes. L'hélium 3 est désorbé du charbon, se condense sur la paroi du condenseur refroidi par la boîte à 1K et finalement remplit la boîte He³.

Fig. II.1.2 Une coupe du calorimètre.



(3) Refaire (1) et (2) encore une fois pour accumuler le plus possible d' ^3He liquide. Le système est prêt à fonctionner.

Laisser refroidir le charbon, pour pomper l'hélium 3. En conséquence, sa pression descend et sa température d'équilibre s'abaisse. En réglant le courant passant sur la résistance de chauffage. On peut contrôler la température d'équilibre, de 0.3 K à 1 K. Pour avoir une température plus élevée et une régulation plus précise, on utilisera le deuxième chauffage installé près de l'échantillon (figure II.1.3).

Evidemment le système ne peut pas fonctionner continuellement puisqu'il n'y a pas de compensation permanente d'hélium 3 liquide. Il sera épuisé au bout de 4 à 17 heures selon la température de fonctionnement et on doit recommencer la procédure de condensation.

II.1.3. Le porte-échantillon

C'est une pièce de cuivre de 97 gr. fixée à la boîte à ^3He (figure II.1.3) par 3 tubes inox qui jouent encore une fois le rôle d'isolateur thermique. La seule liaison thermique avec la source froide est accomplie par un fil de cuivre dont la longueur et la section sont bien choisies pour que la conduction thermique soit $K = 0.17 \text{ mW/K}$. Comme la température de la boîte ^3He est réglée à 0.3 K et celle qu'on veut est 1.1 K, la puissance thermique de la source froide est donc environ 0.13 mW.

La deuxième résistance chauffante de 350 Ω , installée sur le porte-échantillon, fournit quelques centaine microwatts de puissance qui nous permet d'obtenir l'équilibre thermique sur une grande gamme de température (0.3 $\rightarrow$ 10 K). Pour avoir une bonne précision sur la mesure de la température, nous avons besoin de 2 thermomètres, de germanium (ou éventuellement de carbone) couvrant les gammes 0.3 $\rightarrow$ 1 K et 1 $\rightarrow$ 10 K.

Le porte-échantillon possède 2 étages pour pouvoir monter deux échantillons à la fois. La deuxième est fixée par 3 tiges de

cuivre. Sur chacune des deux surfaces est soudée une rondelle d'or pour avoir un bon contact thermique. La centre de la bobine coïncide avec le milieu de ces deux disques donc les deux échantillons installés subiront exactement le même champ magnétique.

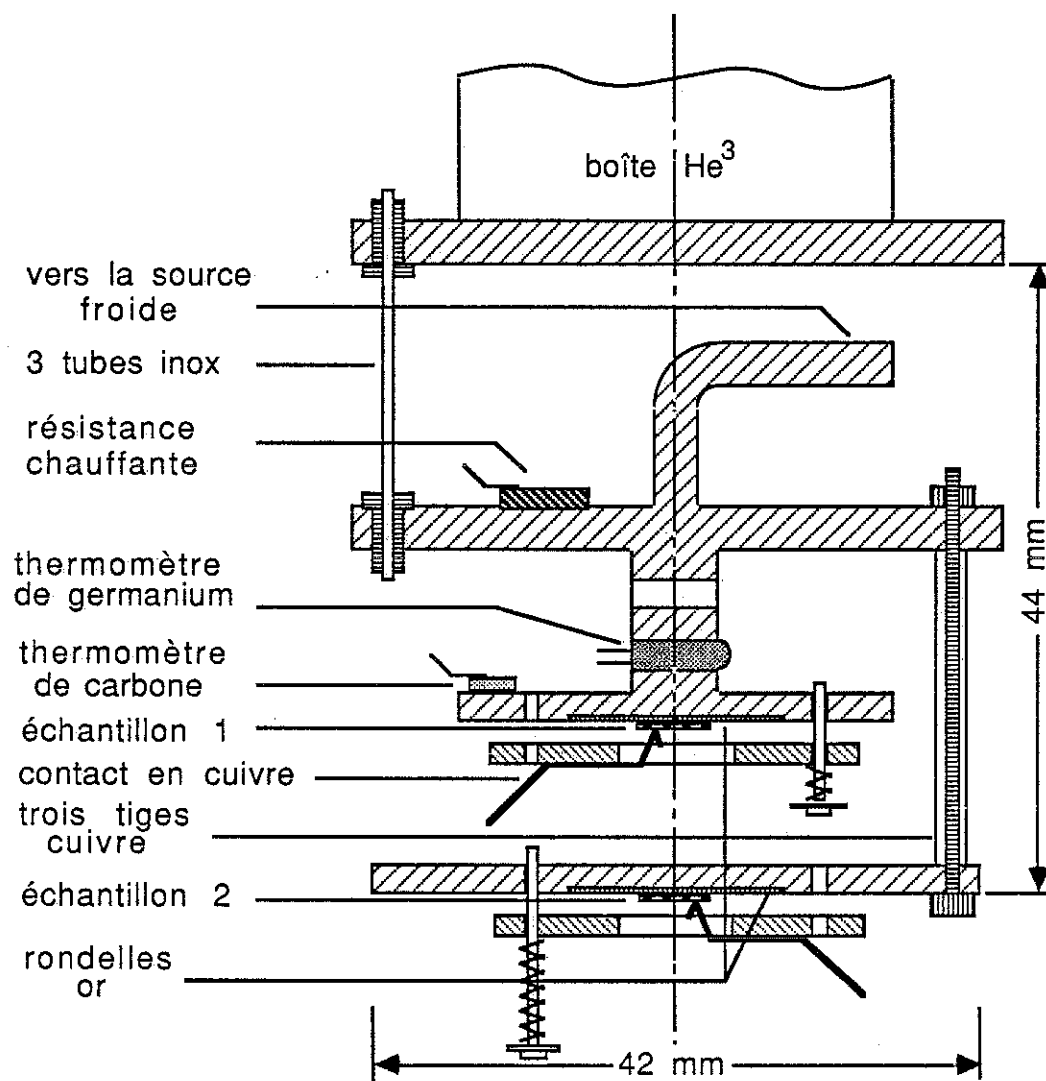


Fig. II.1.3 Le porte-échantillon

II.1.4. La bobine du champ

Elle est enroulée directement sur l'enceinte du calorimètre de diamètre 53 mm. Elle contient 3 parties, l'une couvre toute la longueur du calorimètre et les autres se placent aux deux extrémités du calorimètre (figure II.1.4) pour rendre le champ intérieur plus uniforme.

L'ensemble de ces trois parties constitue un enroulement de 2209 tours et a une constante $H/I = 164 \text{ Gs/A}$ à l'endroit où se trouve l'échantillon. L'homogénéité du champ est 0.13% sur un diamètre typique de 3 mm.

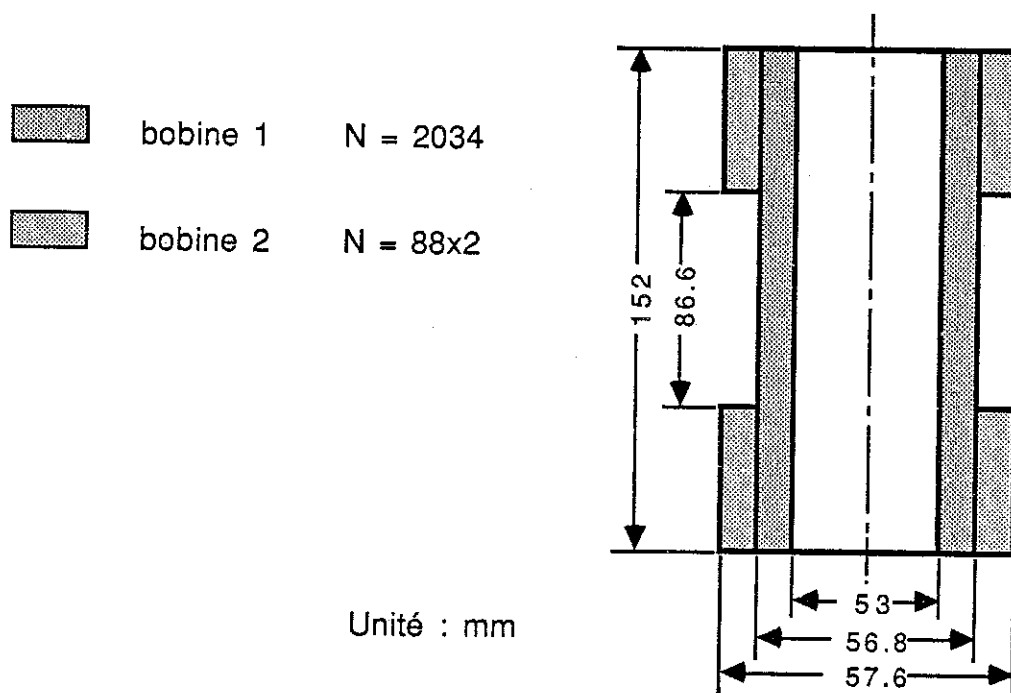


Fig. II.1.4 La bobine du champ

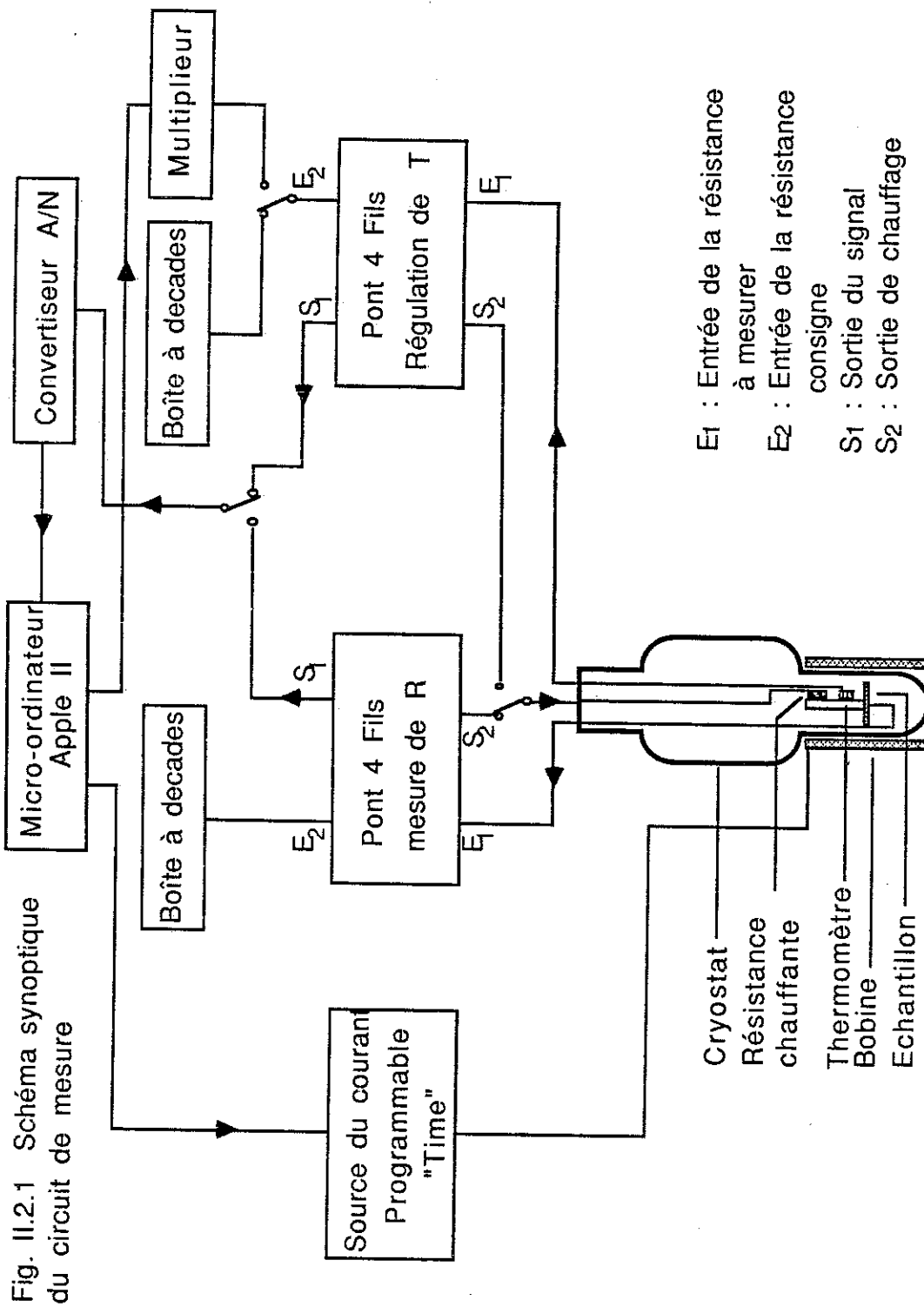
II.2. Organigramme de manipulation

Le schéma synoptique du circuit de mesure est représenté sur la figure II.2.1.

Les deux pont 4 fils mesurent respectivement la résistance du thermomètre situé dans la boîte à charbon actif, la résistance du thermomètre collé sur le porte-échantillon et la résistance de l'échantillon. Ils contrôlent également les courants passants dans les deux chauffages. Les valeurs mesurées (de la température ou de la résistance des échantillons) sont acquis par le micro-ordinateur.

La bobine de champ est alimentée soit par la source du courant manipulé à la main, soit par une source programmable "Time" (current calibrator 9818) contrôlée par micro-ordinateur (Apple II).

Un programme complet nous permet de mesurer automatiquement la résistance des échantillons en balayant le champ magnétique ou la température, ou bien de mesurer directement la température en maintenant la résistance des échantillons constante.



II.2.1. Mesure de la résistance par pont 4 fils

Aux basses températures, les différentes énergies dissipées dans le calorimètre doivent être très faibles et tous les courants y passant sont restreints à quelques micro-Ampères ou encore plus petits. Si on veut mesurer une résistance de quelques milli-Ohms, les signaux de tensions sont de l'ordre du nano-Volt, ce qui nécessite d'utiliser la technique de détection synchrone.

Le schéma synoptique d'un pont 4 fils (Barras Provence) est montré sur la figure II.2.2. La résistance à mesurer se raccorde sur le circuit du pont 4 fils. L'équilibrage du pont s'effectue sur un diviseur inductif à 6 décades ou un multiplieur programmable commandé par micro-ordinateur. La première sert à mesurer la résistance de la façon ordinaire: changer la valeur de la boîte à résistance jusqu'à ce que l'équilibrage soit obtenu, et noter cette valeur. L'autre façon convenant à la manipulation automatique est la suivante :

La tension de la sortie de la détection synchrone est proportionnelle à la différence entre la résistance à mesurer et la consigne. Ces signaux sont recueillis par un convertisseur A/N et envoyés au micro-ordinateur (Apple II) qui les stocke sur des fichiers. Après une calibration, nous pouvons récupérer les valeurs de résistances à partir des valeurs de tension. Le convertisseur a une résolution de 16 bits, soit 65536 niveaux, ainsi la précision relative est 0.0015%, qui est largement suffisante.

A l'aide du micro-ordinateur, nous pouvons effectuer les mesures jour et nuit. C'est nécessaire lorsqu'on doit moyenner les points en plusieurs passages pour diminuer le bruit.

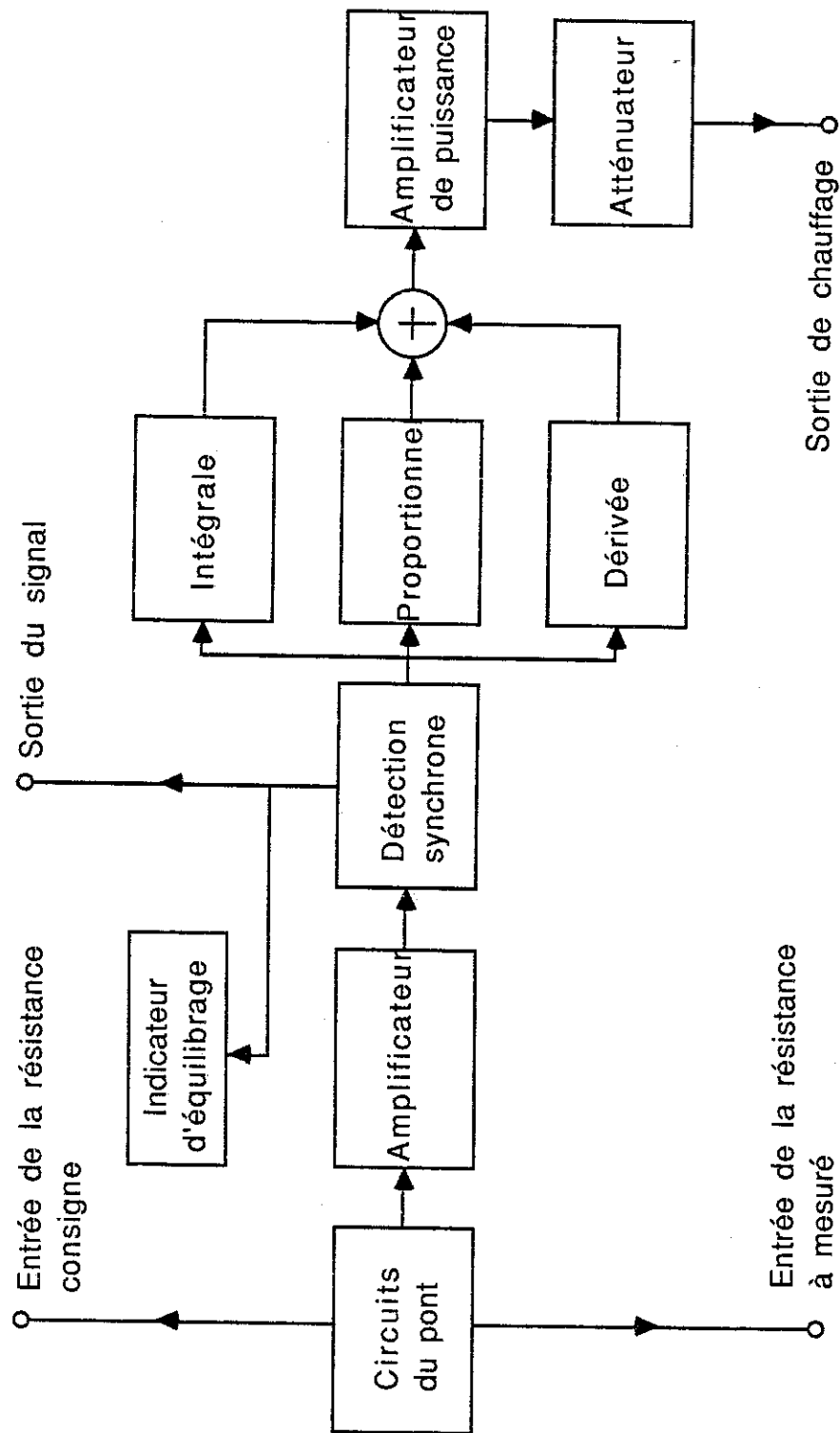


Fig. II.2.2 Le schéma synoptique du pont 4 fils du type P.I.D

II.2.2. Régulation et stabilisation de la température

Elles sont réalisées par la partie de contrôle du type P.I.D (i.e. proportionnelle, intégrale et dérivée) (figure II.2.2).

Le signal délivré par la détection synchrone contrôle la puissance de chauffage de manière à maintenir constante la résistance du thermomètre. Outre la régulation proportionnelle, il y a des correcteurs du type intégral et dérivée qui permettent une meilleure précision de la régulation et une réponse plus rapide. En réglant bien les paramètres des trois régulateurs, une précision de 0,1 mK de la température est facilement obtenue.

Si on remplace le thermomètre par l'échantillon. Comme précédemment, la régulation sera effectuée en maintenant constante la résistance des échantillons, et la température d'équilibre sera celle de la transition de l'échantillon, qui pourra être mesurée par un deuxième pont 4 fils.

II.3. Mesure des caractéristiques courant-tension et du courant critique

Rappelons que la mesure de la résistance par détection synchrone est effectuée en courant alternatif. Un signal alternatif est relativement facile à détecter et à amplifier tout en gardant un grand rapport signal/bruit. Par contre, les mesures de caractéristiques courant-tension et de courant critique, doivent être effectuées en courant continu. Pour cela nous avons utilisé un "picovoltmètre".

Le schéma fonctionnel du picovoltmètre est montré sur la figure II.3.1. Il se présente sous la forme de trois éléments :

- La cellule du hacheur qui se monte à l'intérieur du cryostat, dans l'hélium liquide.
- Le préamplificateur à sortie isolée qui se place près du cryostat.
- Le coffret principal contenant la plupart des circuits électroniques semblables à ceux d'un voltmètre numérique ordinaire et l'alimentation des diodes qui fournit aussi le signal de référence de la détection synchrone.

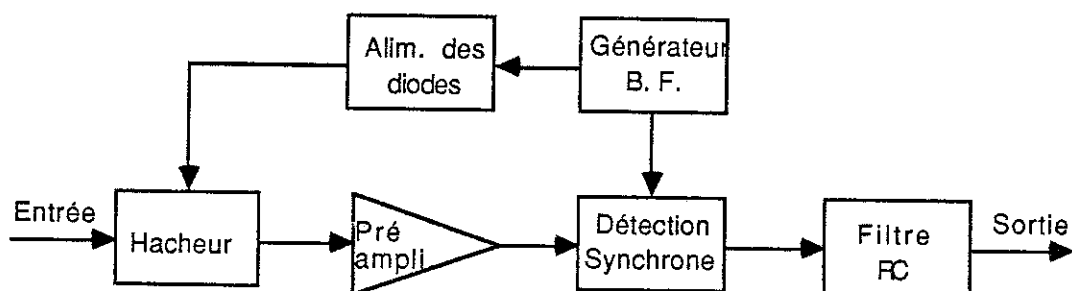


Fig. II.3.1 Schéma de bloc de l'Amplificateur à Hacheur

Le cœur du montage est un "hacheur" d'un type supraconducteur, réalisé par J. L. Bret. C'est une boîte en plomb. Il

possède une borne d'entrée et de sortie polarisés et deux bornes de contrôle. Le circuit de ce hacheur est gravé dans une couche mince supraconductrice (nitrure de niobium). Ce circuit se compose de quatre éléments résistants en pont (Fig. II.3.2) qui ont une résistance élevée à l'état normal. La transition de l'état supraconducteur à l'état normal est obtenue en chauffant les parties résistives par un rayonnement électromagnétique produit directement à l'intérieur de cryostat au moyen de deux diodes électroluminescentes placées devant le circuit de hacheur (Fig. II.3.3).

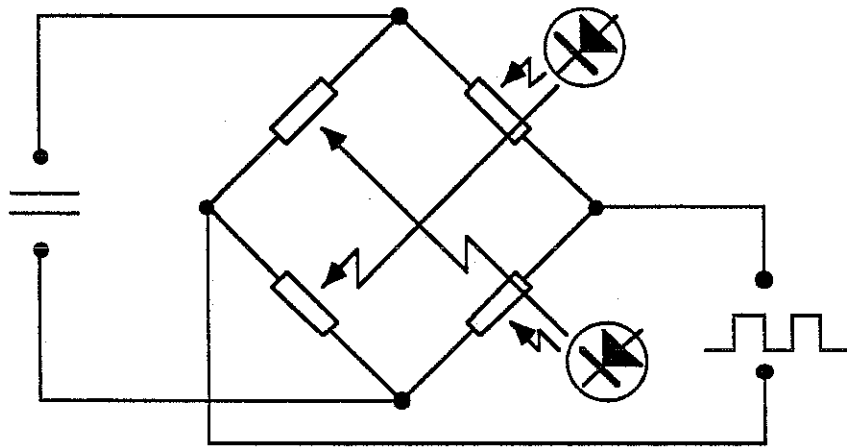


Fig. II.3.2 Circuit du Hacheur

Le schéma synoptique de notre montage est montré sur la figure II.3.4. La tension continue qui sort de l'échantillon est conduite par deux fils supraconducteurs au hacheur et se transforme en un signal alternatif de fréquence 32 Hz. Ce dernier passe par un câble co-axial dans la chaîne d'amplification suivie d'une détection synchrone, laquelle restitue une tension proportionnelle au signal d'entrée. L'alimentation des diodes est transmise aussi par deux cables co-axiaux immergés dans l'hélium liquide.

Le picovoltmètre est équipé d'une sortie analogique de tension ($-2 \rightarrow 2$ V) proportionnelle à la valeur mesurée. A l'aide

d'un convertisseur nous pouvons acquérir les données dans un micro-ordinateur comme pour la mesure de résistance. Le courant passant dans l'échantillon est fourni toujours par la source programmable "Time" (current calibrator 9818) contrôlée par micro-ordinateur (Apple II). Le programme permet la mesure automatique de la caractéristique courant-tension aux températures désirées.

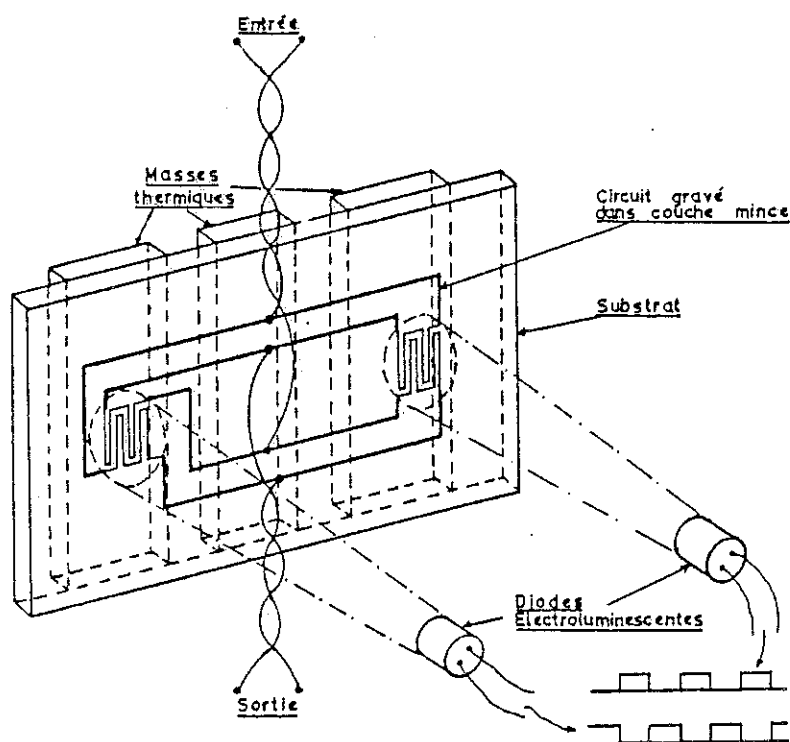


Fig. II.3.3 Principe du Hacheur

Le programme de mesure de courant critique est plus complexe. Après avoir choisir un seuil de tension V_s , le courant passant sur l'échantillon I est changé selon la tension détecté sur l'échantillon V_m , jusqu'à $V_m = V_s$, la valeur obtenue I est le courant critique I_c cherché. Le diagramme est illustré sur la figure II.3.5. Son principe est la procédure dichotomique. Initialement on donne un intervalle $[I_0, I_1]$ contenant I_c et le nombre d'itération N . Chaque valeur d'essai I_n calculée par dichotomie est envoyée sur

l'échantillon. Remarquons que les courants critiques mesurés en montant ou en descendant ne sont pas identiques (effet d'hystérésis). Nous prenons la première définition qui est la plus naturelle. Une subroutine est donc utilisée pour baisser le courant si $I_n < I_{n-1}$, et le faire remonter jusqu'à I_n . Le courant critique ainsi obtenu a une précision $(I_0 - I_1)/2^N$.

Les signaux typiques que nous avons mesurés sont de l'ordre de : $V_s \sim 0.1 \mu V$.

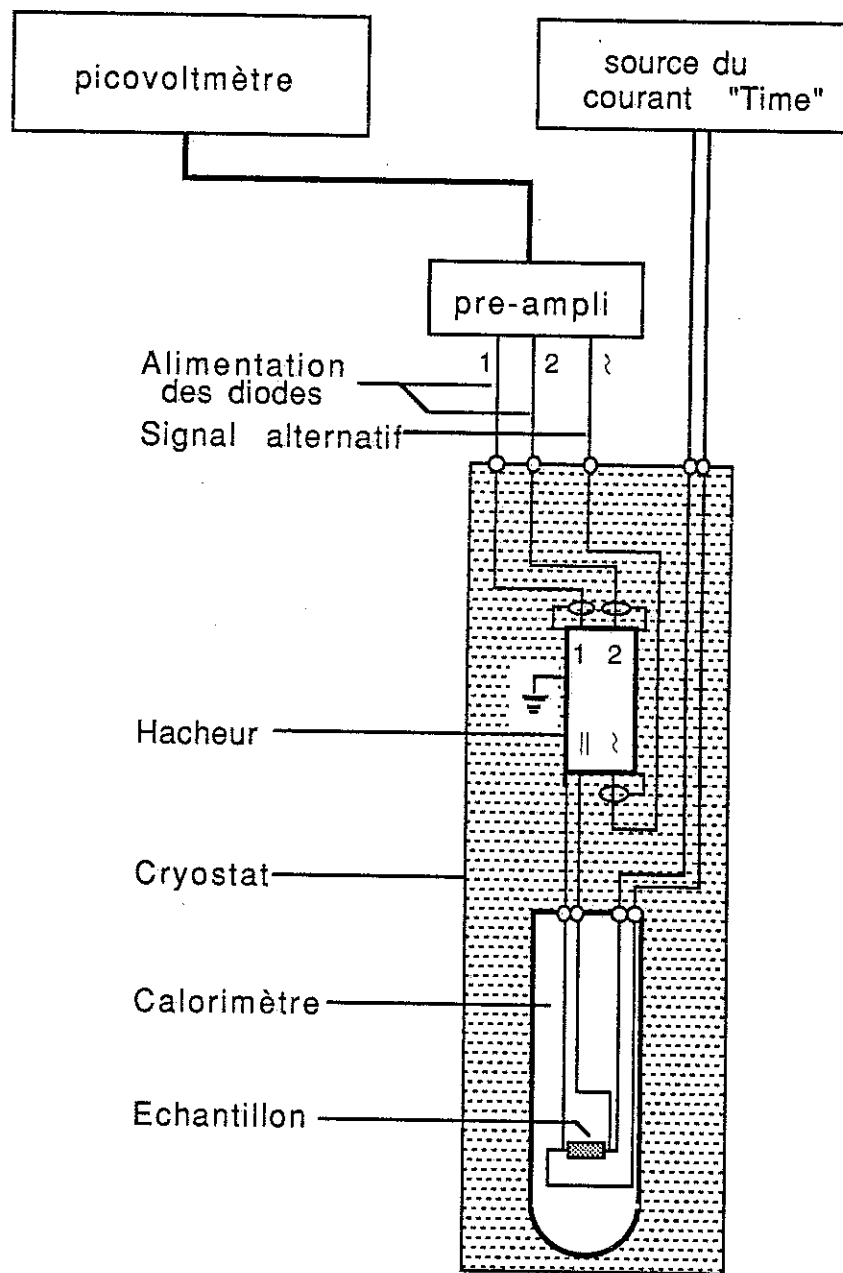


Fig. II.3.4 Schéma synoptique du montage à mesure courant critique

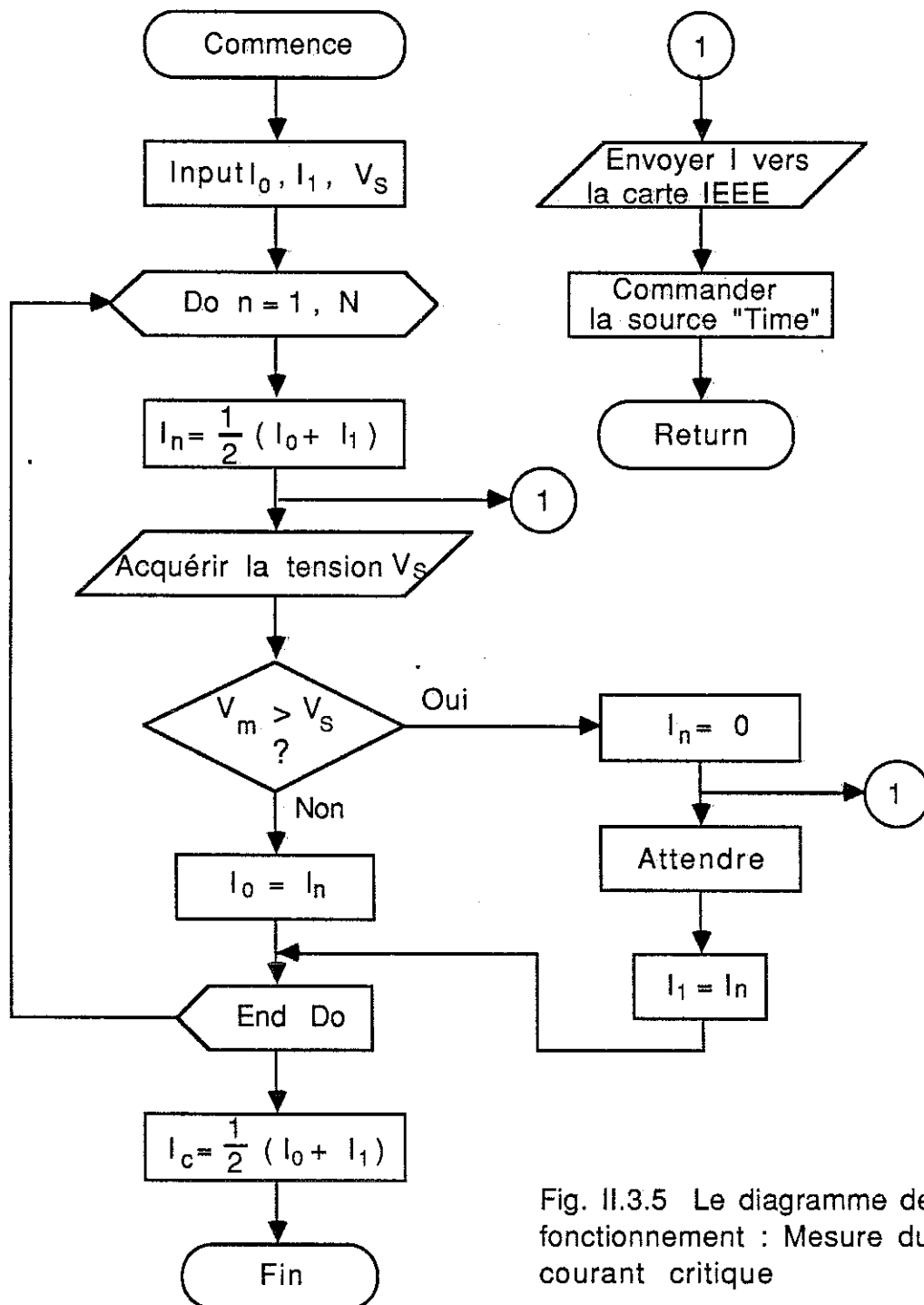


Fig. II.3.5 Le diagramme de fonctionnement : Mesure du courant critique

II.4. La réalisation des échantillons

Les échantillons ont été réalisés par la méthode de lithographie optique qui nécessite trois étapes distinctes :

- L'impression des réseaux sur la résine posée sur le substrat. C'est l'opération la plus importante qui détermine les caractéristiques de l'échantillon, surtout la largeur des fils. Trois méthodes ont été employées. Nous les décrivons par la suite.

- Le dépôt du métal sur le substrat ainsi préparé (lift-off).
- La formation des contacts avec le réseau.

Avant de commencer les descriptions détaillées, nous mentionnons la méthode la plus simple qui consiste à trouver un substrat ayant la structure voulue. Le premier réseau qui montrait l'effet de quantification de flux[1] a été réalisé par cette méthode. Le substrat en verre contient environ 30,000 boucles d'arête de $1.5 \mu\text{m}$, formées en nid d'abeilles (voir la figure II.4.1). Le métal (indium) est évaporé directement sur le substrat et adhère sur les arêtes ou traverse le substrat. Cette méthode est très limitée -- on trouve rarement le substrat voulu. De plus, le réseau n'est pas vraiment bi-dimensionnel parce que la couche métallique se prolonge un peu sur la paroi interne.

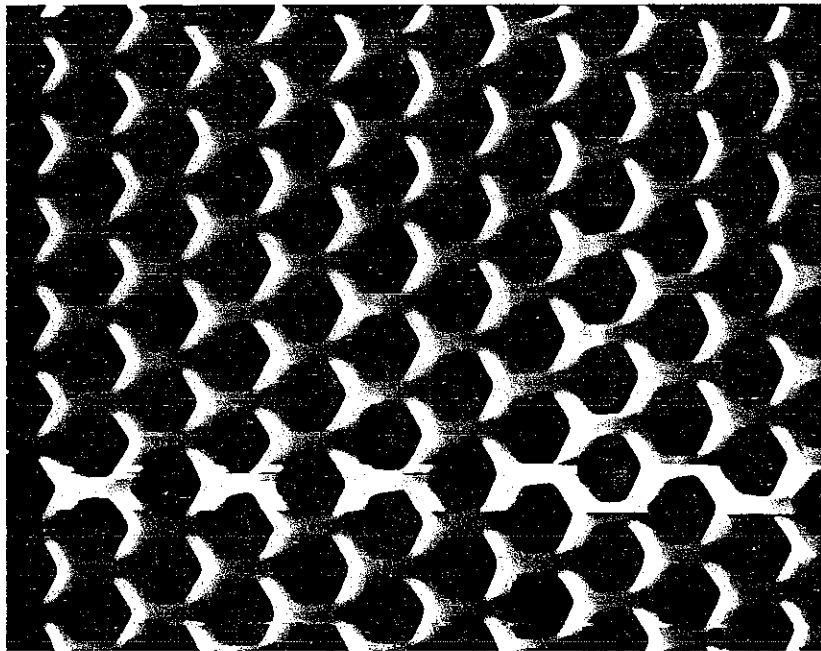


Fig. II.4.1 Photo du premier réseau en nid d'abeilles (diamètre intérieur $2\ \mu\text{m}$).

II.4.1. Photolithographie

La photolithographie est une méthode très répandue que l'on utilise pour l'impression des réseaux sur la résine. Cette dernière est une couche sensible aux faisceaux lumineux (1^{ère} méthode) ou électroniques (2^{ème} méthode).

Dans la première méthode, la résine "SHIPLEY 1350" photo sensible est employée. Sa région de sensibilité est au voisinage de $\lambda = 4000\ \text{\AA}$, donc toutes les préparations sont effectuées dans une chambre "orange", et la lumière de l'exposition se fait avec une lumière blanche. (Source de lumière SCHOTT KL 1500)

Le substrat est en silicium pur et bien nettoyé, coupé en $7 \times 7\ \text{mm}$. La résine diluée est déposée en fine couche avec la tournette (Headway Research. Inc Model EC101) à vitesse de 4000 tr/min pendant 30 secondes. La couche ainsi obtenue a une épaisseur de

5000Å. Après l'étuvage de 4 minutes sous 60°C, la couche de résine est dure et prête à être exposée.

L'exposition est effectuée à l'aide d'un microscope ZEISS. Le substrat sera posé sur la "platine". La lumière fournie par la source KL1500 est conduite à l'"Epi-condenser" où est inséré le masque. Ce dernier est aussi réalisé par lithographie sur une couche de chrome. L'image du masque sera réduite 25 fois par l'objectif (40x) et se projette sur la couche de résine. La limite de résolution de cet appareil est la moitié de la longueur d'onde du rayon, soit $0,2 \sim 0,3 \mu\text{m}$. En fait, à cause de la précision, nous n'arrivons qu'à $0,8 \sim 1 \mu\text{m}$ comme la largeur du trait. Par contre, la réalisation du masque, qui est 25 fois plus grande, ne pose aucun problème. La rayon réfléchi par le plan de la résine arrive à l'oculaire et l'image du masque devient visible. On règle le microscope pour obtenir la meilleure focalisation. Pendant le réglage, un filtre orange est inséré dans l'"Epi-condenser" pour que la résine ne soit pas préexposée. Après avoir exposé 20 secondes sous la lumière blanche, le substrat est trempée dans un produit chimique -- Dichloro-1,2 benzène ($\text{C}_6\text{H}_4\text{Cl}_2$), et est déposée dans un four à 70°C pendant 7 minutes. Cette opération très importante permettra de durcir la surface et ainsi d'obtenir le profil "en casquette" de la résine figure II.4.2d.

On le trempe ensuite dans "le développeur" (pendant 45 secondes), la surface protégée par le dichloro - benzène est moins attaquée que les couches profondes. On obtient par conséquent un profil comme le montre la figure II.4.2h à droite. Les couches métalliques évaporées sur le substrat et sur la résine sont bien séparées l'une de l'autre. En revanche, sans l'étape de trempage dans le dichloro - benzène, les couches métalliques sur le substrat de silicium et sur la résine resteraient rondes et les traits risqueraient d'être enlevés ou déchirés (Fig.II.4.2h à gauche).

Le dépôt de métal se fait dans un évaporateur à vide (COATING UNIT 12E6/1010). Le métal à évaporer est placé dans un creuset en tungstène à travers lequel passe un courant de $15 \sim 40 \text{ A}$. Le métal évaporé adhère sur le substrat refroidi par l'azote liquide. L'enceinte est maintenue sous vide ($< 10^{-6} \text{ tor}$) ce qui

assure la pureté de la couche métallique. Son épaisseur est mesurée très précisément par une microbalance à quartz.

En dernière étape, on trempe l'échantillon dans l'acétone, la couche de résine s'en va avec le métal évaporé au-dessus et les filaments du réseau restent sur le substrat de silicium (Fig. II.4.2g).

Cette méthode optique a une résolution limitée naturellement par la longueur d'onde du faisceau lumineux. En pratique, elle ne s'applique qu'à des petits motifs centrés au voisinage de l'axe optique de l'objectif du microscope (champ < 300 μm).

Les réseaux submicroniques étendus discutés dans le prochain chapitre ont été fabriqués par lithographie électronique.

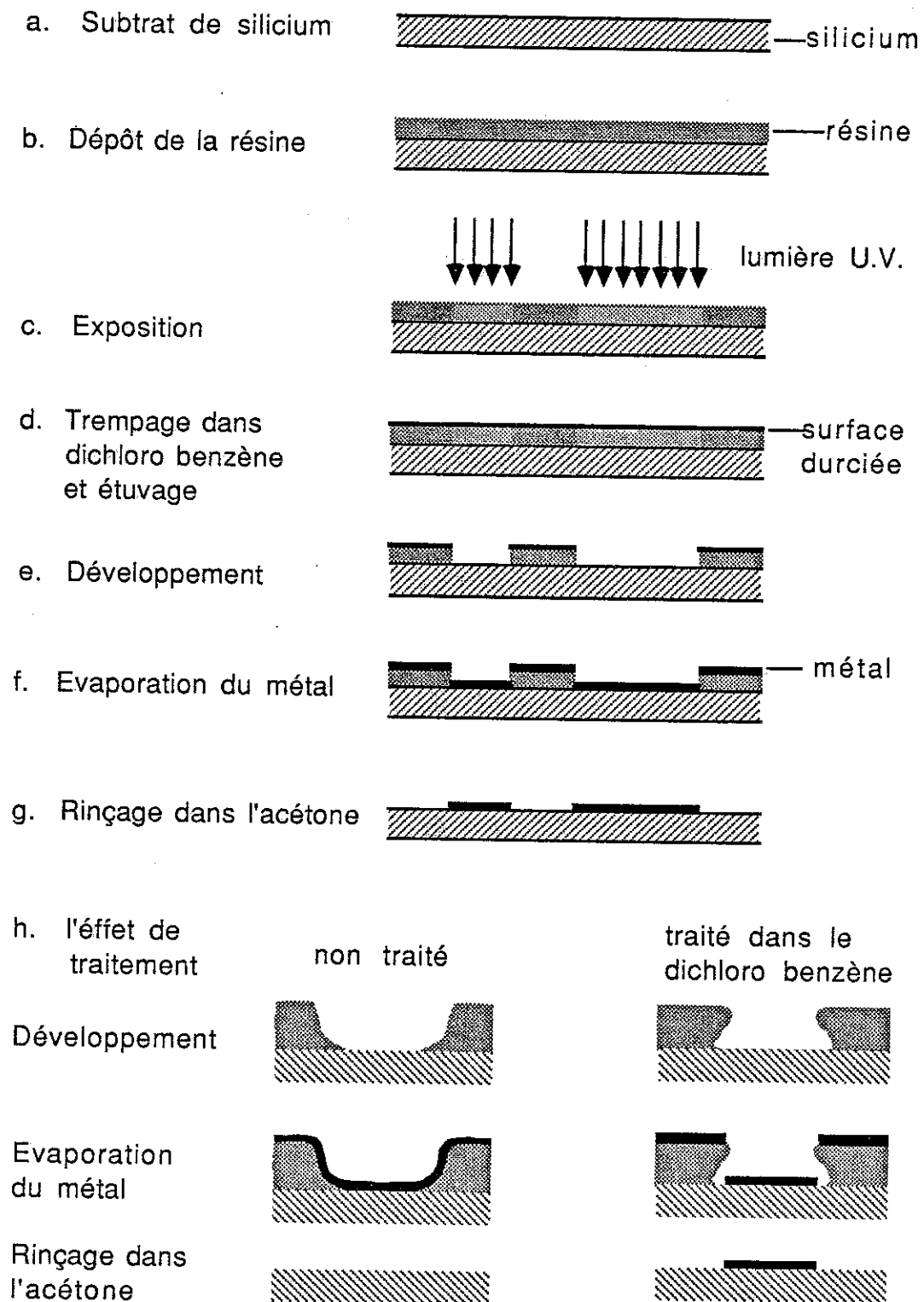


Fig. II.4.2 La procédure "lift-off"

II.4.2. Lithographie électronique

La réalisation des motifs fractals ou quasipériodiques a été faite par écriture électronique directe au Centre National d'Etudes des Télécommunications (CNET) de Meylan. Le faisceau d'électrons (diamètre $0.2 \mu\text{m}$ pour un courant de 5 nA) est piloté par un ordinateur de façon à insoler sur la résine, point par point, les motifs programmés. La résine employée est une résine électrosensible de très haute résolution : le polyméthylmetacrylate (PMMA). Le profil pyramidal désiré est obtenu pour une dose optimale d'électrons : une partie des électrons est rétrodiffusée dans le substrat de Silicium et élargit la base des sillons gravés dans la résine. La suite du procédé est similaire au procédé décrit ci-dessus : développement de la résine, évaporation du métal et lift-off de la résine.

II.4.3. Formation des contacts avec le réseau

Selon les impératifs des mesures, on aura besoin parfois de contact avec le réseau en métal différent de celui du réseau. Ce sera le cas des microréseaux (une ou plusieurs boucles) où, pour ne pas perturber les mesures, seul le réseau devra être supraconducteur. Les contacts devront être conducteurs normaux. Les contacts sont réalisés aussi par lithographie après ou avant la réalisation du réseau, cependant avec moins de difficulté puisqu'ils demandent moins de précision. La superposition entre les deux est faite par alignement à l'aide du microscope.

Dans les cas pratiques décrits ci-après, les réseaux sont étendus et le problème des contacts n'est pas critique. Dans l'exemple des réseaux fractals, l'échantillon consiste en un damier de 32×32 tarmis de Sierpinski (ordre 6) élémentaires connectés à leurs sommets. La prise de contact se fait aux extrémités du damier. Les plots nécessaire aux mesures 4 fils sont des carrés d'Aluminium doré de 1 mm^2 connectés de façon continue aux extrémités du réseau.

REFERENCES

- [1] B. Pannetier, J. Chaussy et R. Rammal,
J. Phys. (Paris) 20 L853 (1983)
B. Pannetier, Y. Y. Wang et J. Chaussy, J., Proc. 17-th Int. Conf.
Low Temp. Phys., (North-Holland) 1984, p.721.
B. Pannetier, Helvetica Phys. Acta, 60, 143 (1987)

CHAPITRE III. Résultats expérimentaux sur divers réseaux supraconducteurs

III.1. Les réseaux fractals

III.1.1. Tamis de Sierpinski

III.1.2. Réseau Fractal Carré

III.2. Echelle quasipériodique

III.A. Annexe : *First Observation of the Universal Periodic Corrections to Scaling: Magnetoresistance of Normal-Metal Self-Similar Networks*

Références

Après la répétition des expériences de Pannetier sur les réseaux hexagonal[1,3] et carré[2,3], nous avons effectués les mêmes types d'expériences sur une série des réseaux non-périodiques :

- tamis de Sierpinski
- "tapis" de Sierpinski -- réseau fractal carré
- réseau rectangulaire quasipériodique (le réseau l'est suivant l'axe X et périodique suivant Y).

Nous avons mesurés les températures critiques des échantillons en fonction du champ magnétique . Les résultats correspondent bien aux prédictions du chapitre I.

Nous avons mesurés aussi la magnéto-résistance du tamis de Sierpinski au-dessus de T_c dont le comportement est prédit par Douçot[4] avec la théorie de localisation faible (voir l'annexe III.A).

III.1. Les réseaux fractals

Parmi les divers géométries fractales, nous avons réalisés deux réseaux.

Le premier est le réseau fractal triangulaire, aussi appelé tapis de Sierpinski, qui est la plus simple géométrie fractale. Nous montrons la photo de l'échantillon sur la Fig. III.1.1. Sa dimension fractal est $d = \log 3 / \log 2$. Le réseau possède une répétition 32×32 de tapis Sierpinski d'ordre 6.

Le deuxième est le réseau fractal carré, qu'on appelle tapis, avec une dimension fractale plus faible, $d = \log 5 / \log 3$. Sa photo est montrée sur la Fig. III.1.2. L'échantillon est aussi "macroscopiquement" périodique. Chaque élément répétitif est un tapis d'ordre 5.

Dans le tableau III.1.1 sont résumées les caractéristiques des deux échantillons.

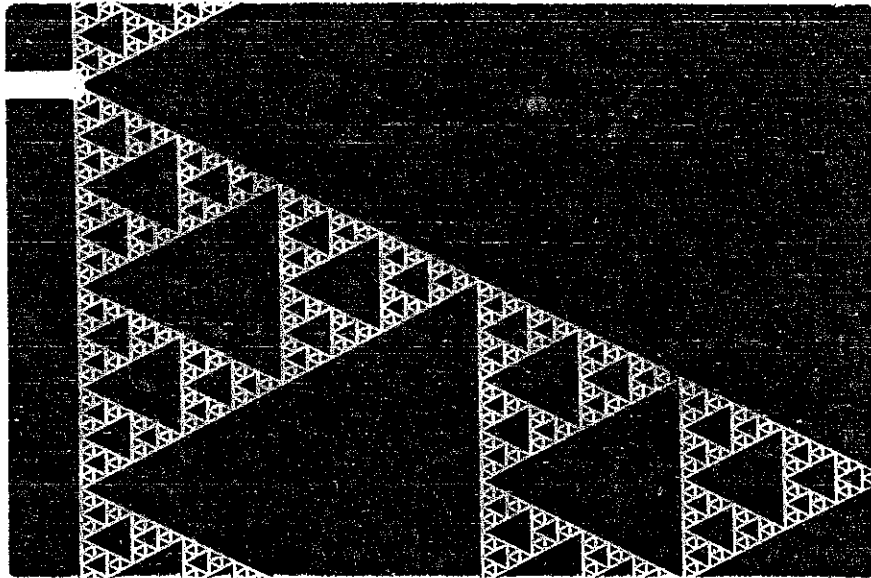


Fig. III.1.1 Photo du tamis de Sierpinski.

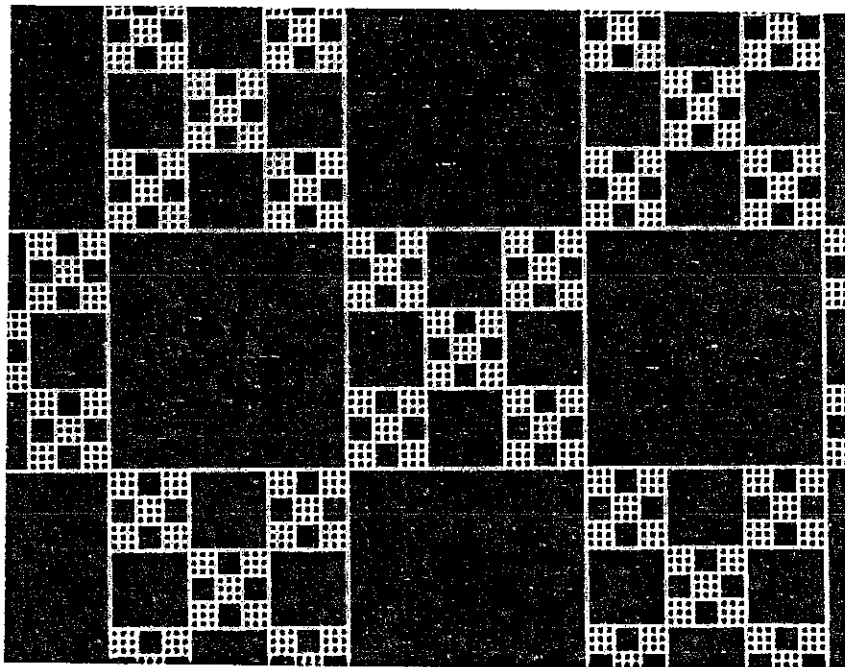


Fig. III.1.2 Photo du tapis de Sierpinski.

échantillons fractals	triangulaire	carré
metal	Al	Al
épaisseur	1000Å	1000Å
largeur nominale	0.3µm	0.3µm
constants du réseau	3.2µm	3.8µm
ordre fractal	6	4
R ³⁰⁰	15.93 Ω	15.76 Ω
R ^{4.2}	2.476 Ω	2.799 Ω
T _c (0)	1.230K	1.2285K
ξ _s (0)	0.336 µm	0.370 µm

Tab. III.1.1 Caractéristiques des échantillons fractals

III.1.1. Tamis de Sierpinski

La résistance de l'échantillon dans l'état normal est $R_n = 2.476 \, \Omega$. La température correspondant au milieu de la transition est $1.23 \, \text{K}$. La demie largeur de la transition est relativement étroite, $\sim 2 \, \text{mK}$.

La température critique est prise en maintenant la résistance de l'échantillon à $1 \, \Omega$ (au lieu de $R_n/2$) là où la pente de $R(T)$ est maximum. Nous portons sur la Fig. III.1.3 la température critique en fonction du champ magnétique qui varie de $-20 \, \text{Oe}$ à $20 \, \text{Oe}$. C'est une parabole avec une modulation périodique. Cette dernière est l'effet propre dû au réseau fractal. La première vient de la contribution de volume des brins due au fait que la largeur w des filaments n'est pas infinitésimale. La contribution parabolique est donnée par le champ critique d'une couche mince en champ parallèle[5] :

$$\begin{aligned} H_{cs}(T) &= 2\sqrt{6} \frac{\lambda(T)}{w} H_c(T) \\ &= \frac{2\sqrt{6}}{w} \frac{\lambda(0)}{\sqrt{1-t^4}} H_c(0) (1-t^2) \\ &\approx \sqrt{24} \frac{\lambda(0) H_c(0)}{w} \sqrt{1 - \frac{T}{T_c(0)}} \end{aligned} \quad (\text{III.1.1})$$

où $t = T/T_c(0)$ est la température normée par la température critique en champ nul : $T_c(0)$, $\lambda(T)$ est la longueur de pénétration et $H_c(T)$ le champ critique du supraconducteur massif.

En tenant compte des deux contributions sur T_c , nous avons

$$T_c(H) = T_c(0) \left[1 - A \frac{a^2}{\xi^2(H)} \right] - B H^2 \quad (\text{III.1.2})$$

avec $A = [\xi(0)/a]^2 \quad (\text{III.1.3})$

$$B = \frac{1}{24} \left[\frac{w}{\lambda(0) H_c(0)} \right]^2 \quad (\text{III.1.4})$$

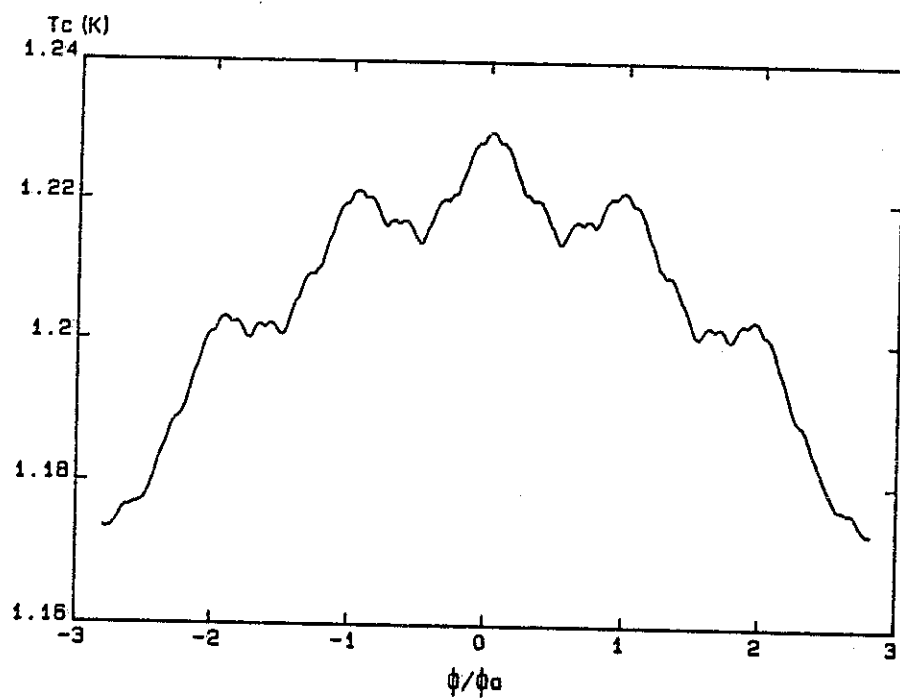


Fig. III.1.3 La température critique mesurée du tamis de Sierpinski.

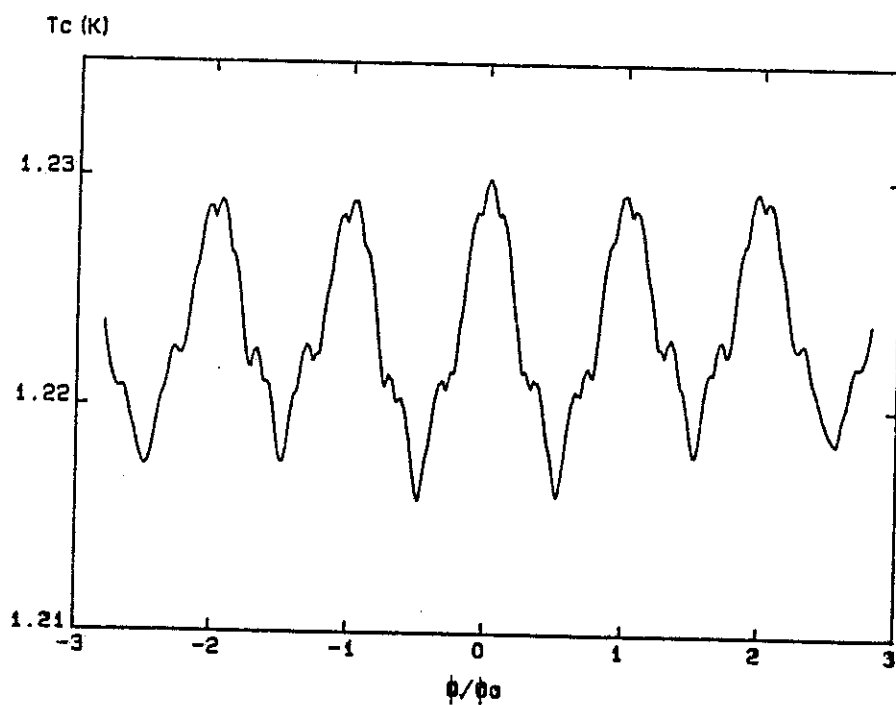


Fig. III.1.4 Identique à Fig. III.1.3 après avoir retranché la contribution parabolique.

Après avoir retranché la parabole BH^2 avec $B = 4.548 \cdot 10^{-4}$, nous traçons $T_c(H)$ sur la Fig. III.1.4. La période de l'oscillation mesurée, 4.104 Oe, correspond 1 quantum de flux Φ_0 à travers la cellule élémentaire. Nous connaissons sa surface, $S = 5.12 \mu m^2$, qui nous permet de calculer la période

$$H_0 = \Phi_0/S = 4.043 \text{ Oe}$$

La comparaison entre les deux H_0 est satisfaisante.

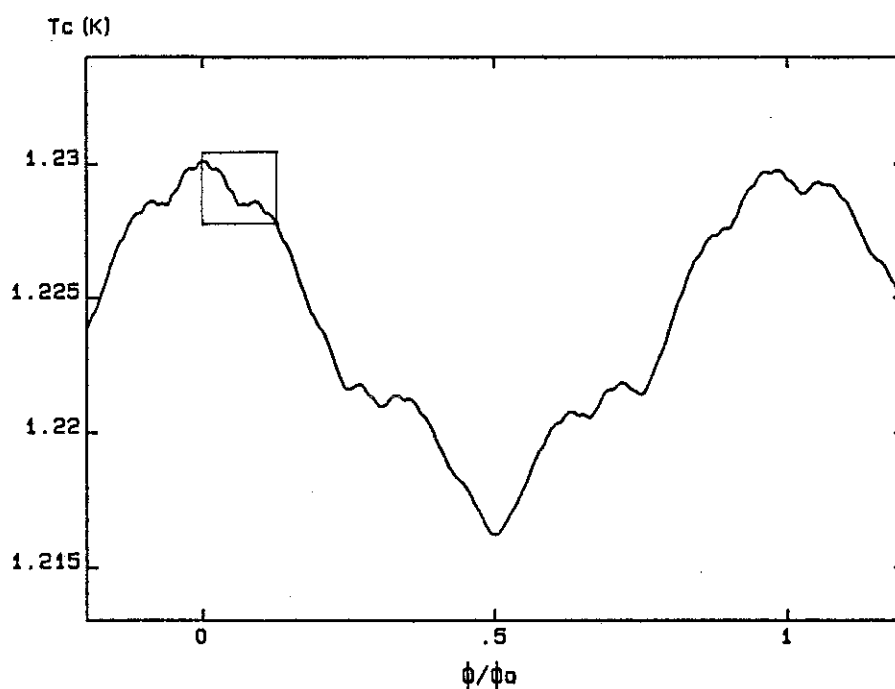


Fig. III.1.5 La température critique du tamis de Sierpinski dans la première période ($\Phi/\Phi_0 \in [0,1]$).

La première période ($\Phi = HS$ varie de 0 à Φ_0) est remesurée et le résultat $T_c(\Phi/\Phi_0)$ se présente sur la Fig III.1.5 (la parabole était retranchée). Le calcul théorique $A(a/\xi(\Phi/\Phi_0))^2$ de la section I.2.1 est tracé sur la même figure en pointillés. Les deux paramètres $T_c(0)$ et A sont déterminés par la loi des moindres carrés :

$$T_c(0) = 1.2304 \text{ K}$$

$$A = 0.01010$$

Nous en déduisons $\xi(0) = 0.1049 a = 0.3607 \mu\text{m}$ où $a = 3.439 \mu\text{m}$ est la moyenne des 3 côtés du triangle élémentaire.

D'après la théorie, le diagramme $T_c(H)$ présente la self similarité avec le rapport d'homothétie 4. Nous pouvons déjà remarquer cette propriété sur la Fig III.1.5 --- la partie de $\Phi/\Phi_0 = 0$ à $1/8$ (encadrée sur Fig. III.1.5) ressemble parfaitement à celle de $\Phi/\Phi_0 = 0$ à $1/2$.

Pour vérifier cette propriété plus précisément, nous avons effectué une série de mesures à flux magnétique réduit $\Phi/\Phi_0 = -1/(2 \cdot 4^n) \rightarrow 1/(2 \cdot 4^n)$, $n = 0, 1, \dots, 4$. Les résultats sont portés sur la Fig. III.1.6. Où

$$\varepsilon_{\text{ex}} = \cos \frac{a}{\xi} = \cos \frac{a}{\xi(0)} \left[\frac{T_c(0) - T_c(H)_{\text{ex}}}{T_c(0)} \right]$$

Les courbes théoriques sont tracées en pointillée sur la même figure. Nous observons au moins 4 étages de self similarité. Les écarts entre les courbes théorique et expérimentale sur les étages 3 et 4 sont relativement grands. Ils peuvent être dus à :

- imprécision expérimentale à cause des bruits parasites, instabilité de la température, étalonnage de thermomètre, etc, Nous voyons le maximum d'écart est $7 \cdot 10^{-6}$ K, soit $6 \cdot 10^{-6}$ en écart relatif, qui est presque la limite de notre appareil.

- défauts sur l'échantillon. Si il y avait quelques coupures sur l'échantillon, le spectre changerait complètement.

- approximation théorique. Nous ne savons calculer que le spectre de fractal Sierpinski contenant des triangles équilatéraux, qui est bien sûr, légèrement différent de celui de l'échantillon contenant des triangles isocèles.

En traçant les 5 courbes en échelle log-log, nous observons la périodicité et la propriété d'échelle (Fig. III.1.7).

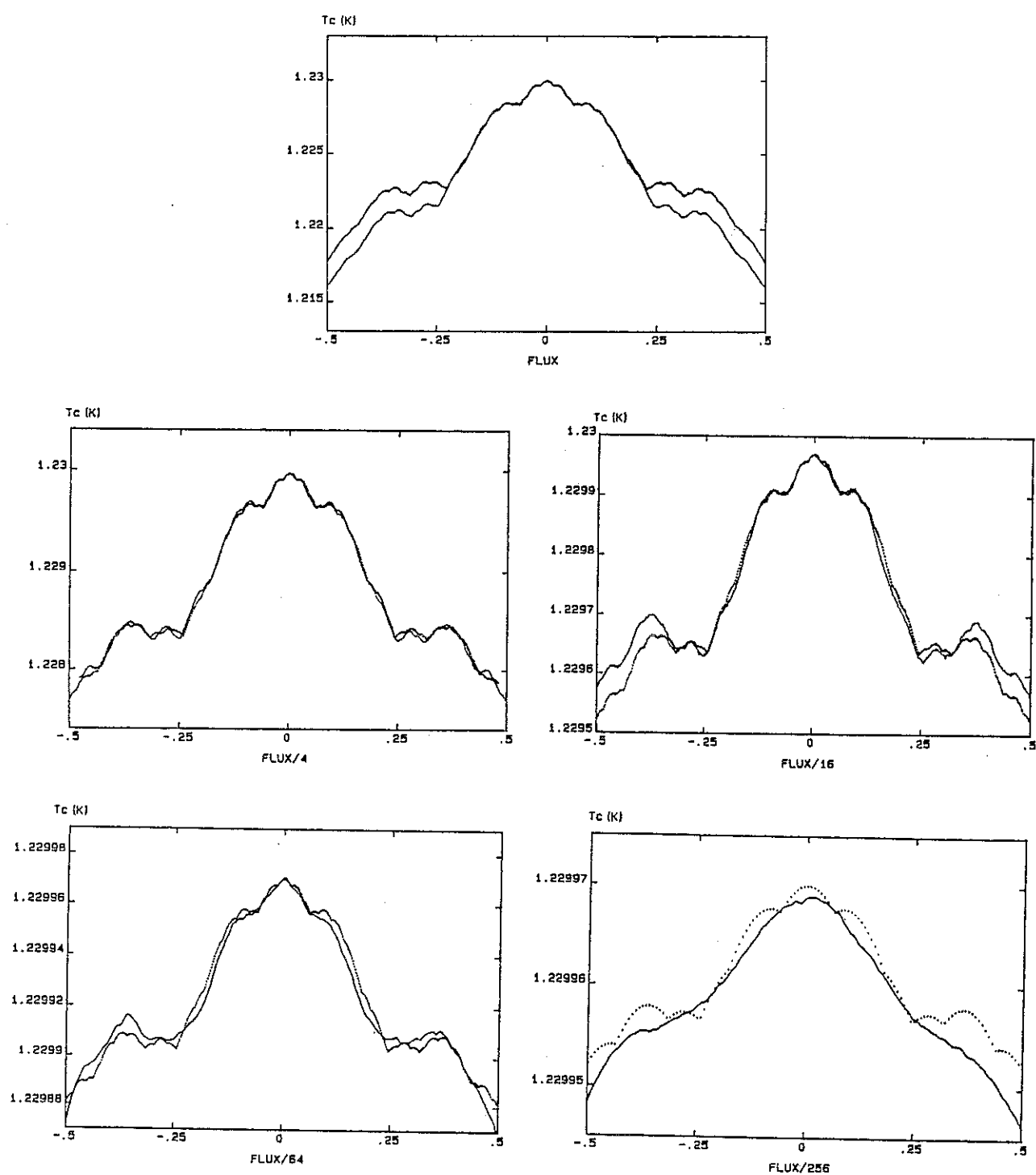


Fig. III.1.6 Les comparaisons de la température critique du tamis de Sierpinski sur différentes échelles. Les courbes solides sont expérimentales et les pointillées sont théoriques.

La période est $\log 4$, comme prévue. La courbe théorique est tracée aussi sur la même figure avec un décalage de $\log 10$. Comme on le voit, l'accord entre la théorie et l'expérience est excellent. En particulier, la pente mesure, 1.164 ± 0.004 , correspond exactement à la valeur théorique $\log 5 / \log 4 = 1.161$.

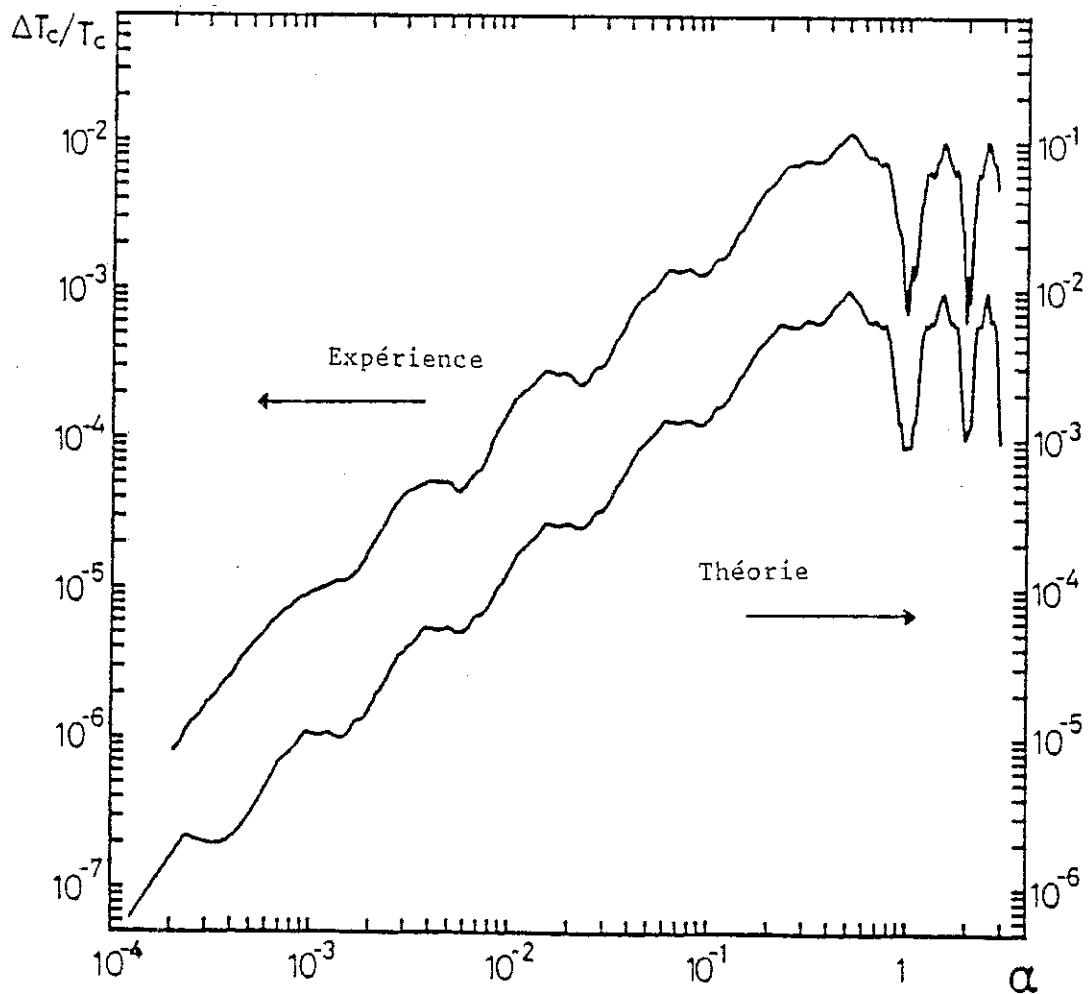


Fig. III.1.7 Les températures critiques du tamis de Sierpinski sur l'échelle log-log. La courbe expérimentale (théorique) est tracée en haut (bas) et correspond à l'échelle à gauche (droite).

III.1.2. Réseau Fractal Carré

Comparé au tamis, notre "tapis" contient moins d'ordre de self similarité, $n = 4$, et son rapport d'homothétie est plus grand, $R = 9$, ce qui présentent une difficulté d'observer les propriétés fractals en ordre élevé. Par exemple, pour observer le détail de l'ordre 2, il faut avoir une mesure de $T_c(H)$ dans la gamme de $H = H_0 / 162 = 0.009$ Oe, tandis que pour le tamis nous pouvons monter à l'ordre 4 dans la même gamme. Pour cette raison les résultats sur le tapis sont beaucoup moins spectaculaires.

Le tapis est formé du même supraconducteur (Al) et a les mêmes largeur et épaisseur que le tamis et donc présente une même largeur de transition, ~ 2 mK, comme attendu. La résistance de l'échantillon à l'état normal est $R_n = 2.799 \Omega$. La température correspondant au milieu de la transition est 1.2285 K.

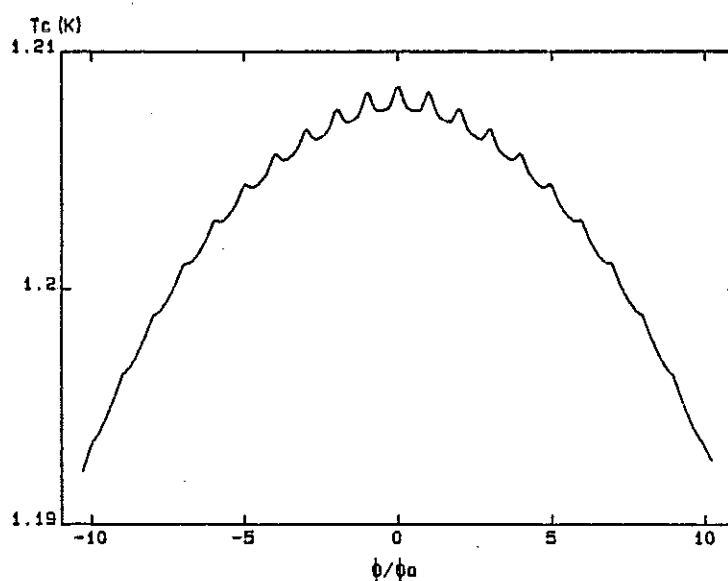


Fig. III.1.8 La température critique du tapis de Sierpinski mesurée pour $H \in [-14.5, 14.5]$ correspondant à $\Phi/\Phi_0 \in [-10, 10]$.

Le résultat brut de la mesure de la température critique en fonction du champ ($H = -14.5$ Oe $\rightarrow$ 14.5 Oe) est montré sur la Fig. III.1.8. Nous voyons l'enveloppe parabolique BH^2 (avec $B =$

$3.916 \cdot 10^{-4}$) modulée par l'effet quantique du réseau qui devient de plus en plus faible à cause des imperfections de l'échantillon (par exemple, les cellules n'ont pas la même surface, chacune donne une oscillation de période différente. L'effet de moyennage sera de plus en plus grand lorsque le champ s'accroît.)

La période mesurée, $H_0 = 1.45 \text{ Oe}$, correspond à celle calculée,

$$H_0 = \Phi_0/a^2 = 1.43 \text{ Oe}$$

Les deux premières périodes sont agrandies expérimentalement sur la Fig. III.1.9 après avoir retranché la parabole. Elles ont bien sûr les mêmes structures (l'amplitude de deuxième est plus petite que la première dû à l'effet de moyennage) qui se décompose grossièrement en 9 arcs. Notons que cette structure existe déjà sur le tapis d'ordre 1 (triviale) (voir la figure I.2.7), chaque arc correspond à un état propre différent et une configuration de flux différente. La contribution du tapis fractal d'ordre plus élevé se manifeste dans les structures fines sur chaque arc. Du fait de la self similarité, nous espérons observer une ressemblance entre ces structures fines et globale.

Nous avons donc agrandi encore une fois (bien sûr, expérimentalement) les arcs et obtenu la figure III.1.10. Les arcs révélant la structure la plus riche sont le quatrième, le cinquième et le sixième. Ces structures ont la même caractéristique — un pic au milieu, qui diffère à chaque ordre. Ceci est probablement dû à l'effet de la structure à l'ordre 3, puisqu'il n'existe pas encore sur le spectre calculé à l'ordre 2 (voir la figure I.2.8a). La seule ressemblance, si l'on peut dire, est l'enveloppe des arcs. Ceci n'est pas étonnant puisque sur un tapis fractal la renormalisation n'est pas exacte et il n'y a aucune raison qu'une partie du spectre reproduise le spectre tout entier.

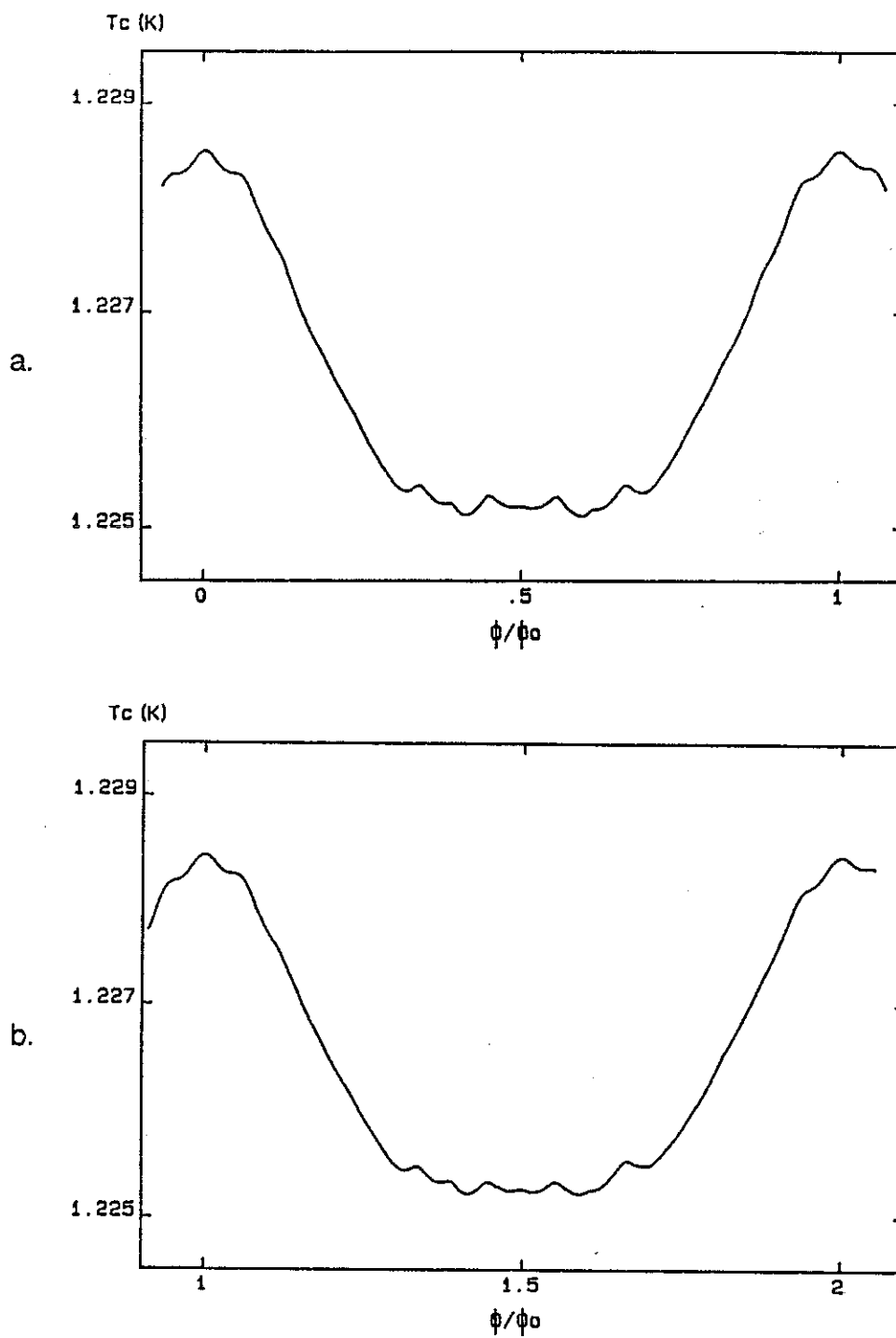


Fig. III.1.9 La température critique du tapis de Sierpinski mesurée pour a. $\Phi/\Phi_0 \in [0,1]$; b. $\Phi/\Phi_0 \in [1,2]$.

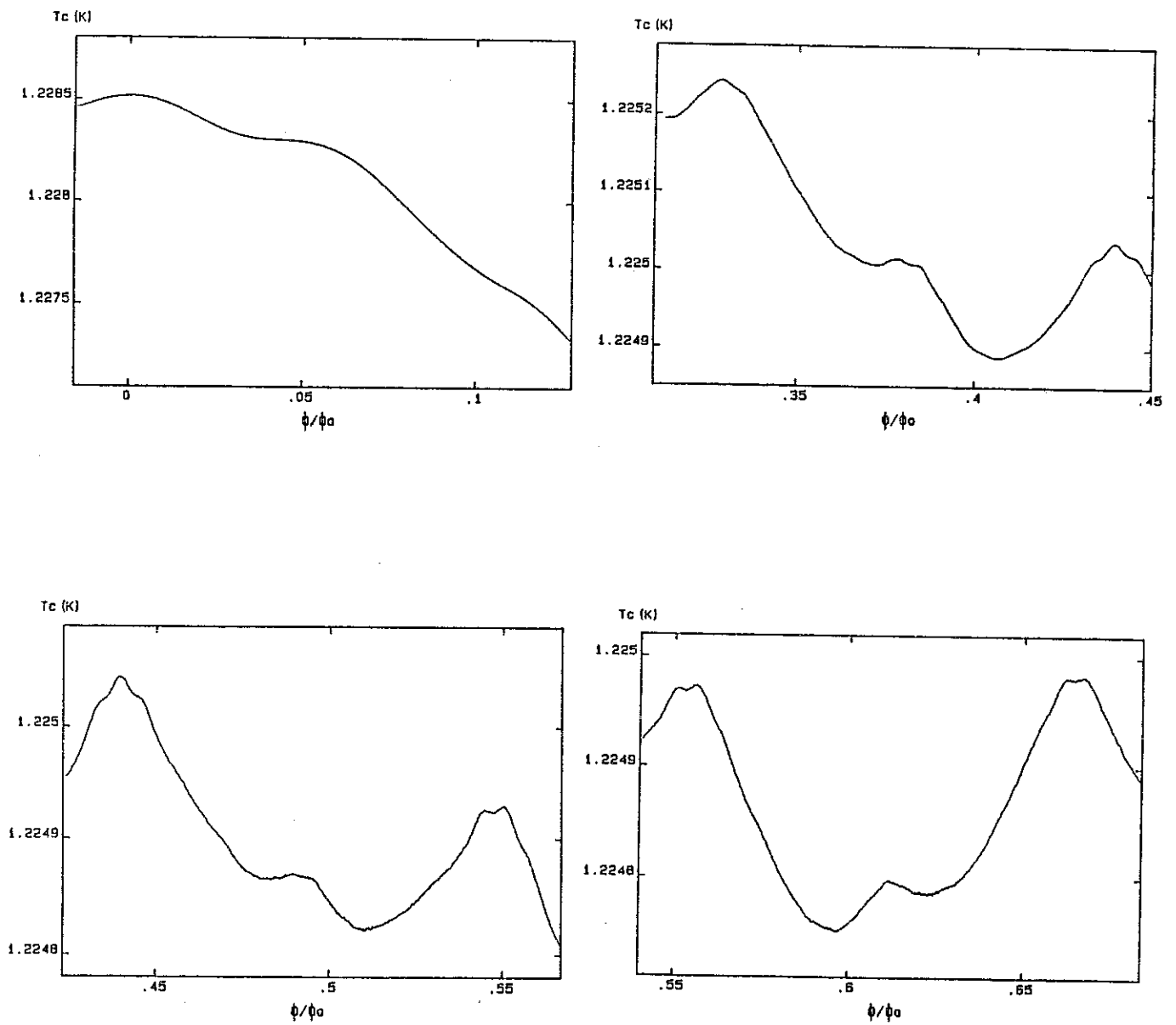


Fig. III.1.10 Les températures critiques du tapis de Sierpinski mesurée sur différentes sous-périodes.

Sur la Fig.III.1.11. on montre la comparaison des spectres théoriques (courbe solide) et expérimentaux (pointillés). Le calcul d'ordre 2 est satisfaisant. Le meilleur fit donne

$$T_c(0) = 1.2285 \text{ K}$$

$$A = 0.00946$$

ce qui conduit à

$$\xi(0) = 0.0973 \cdot a = 0.370 \text{ } \mu\text{m},$$

qui est comme on s'y attend proche de la valeur obtenue dans le tamis.

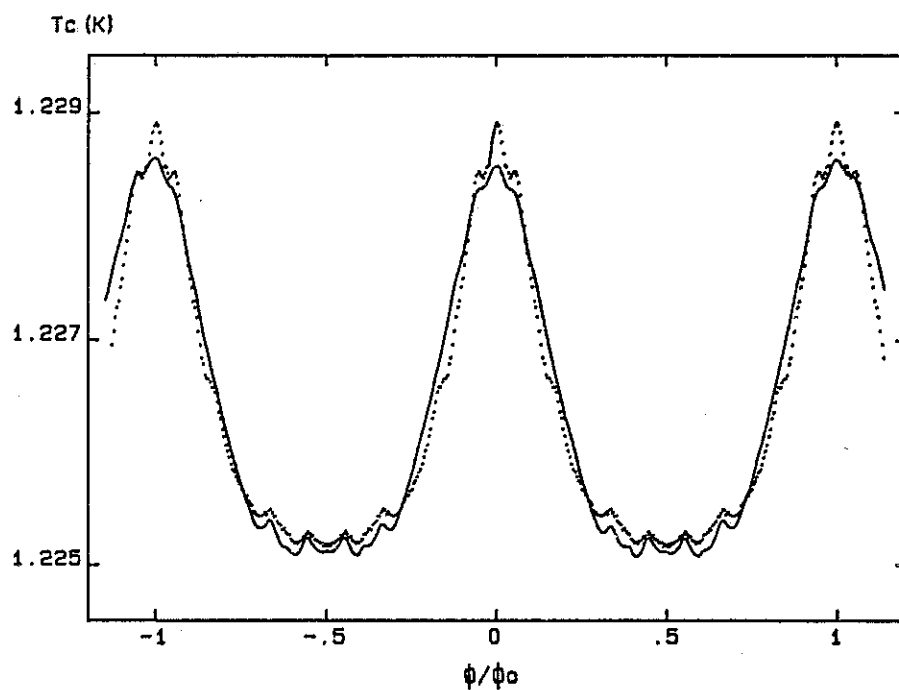


Fig. III.1.11 La comparaison de la température critique du tapis de Sierpinski. Résultats expérimental (solide) et théorique (pointillée).

III.2. Echelle quasipériodique

Cet échantillon est le premier d'une série d'échantillons quasipériodiques. Pour des raisons techniques (fiabilité, diminution de la densité du courant de mesure, etc.), on est obligé de mettre des échelles en parallèle suivant la direction Y. Suivant X, notre échantillon contient environ 1000 cellules élémentaires (la figure III.2.1), qui se répartissent en deux types a et b, où a est un carré de longueur de côté $l_a = 2.1 \mu\text{m}$, et b est un rectangle $l_a \times l_b$ avec $l_b = \tau l_a = 3.4 \mu\text{m}$. Les a et b s'arrangent selon la règle suivante :

$$M_n = M_{n-1}M_{n-2} \quad (\text{III.2.1})$$

avec

$$M_0 = "a"$$

$$M_1 = "b"$$

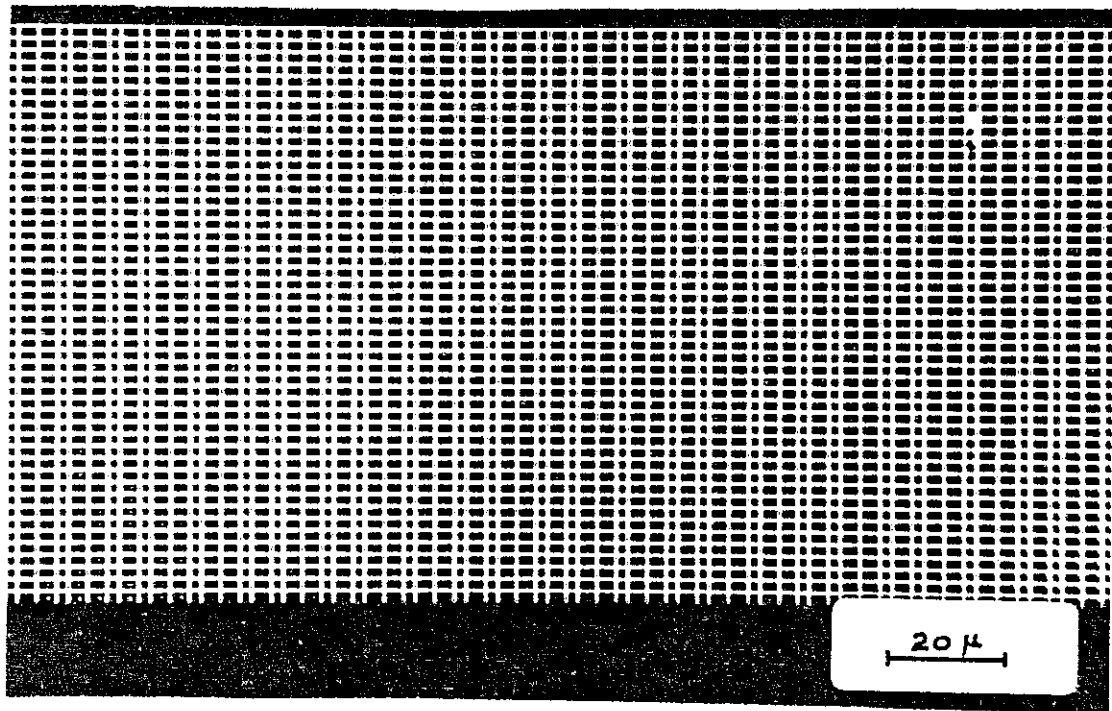


Fig. III.2.1 La photo du réseau quasipériodique. Il contient 50 échelles quasipériodiques en parallèle. Chacune est formée en environ 1000 boucles de deux types a et b.

Suivant y l'échantillon contient 50 cellules. La largeur de filaments est $w = 0.8 \mu\text{m}$. L'échantillon est réalisé par évaporation d'aluminium sur la masque préparé comme décrit dans II.4. L'épaisseur est $0.1 \mu\text{m}$.

La transition a lieu à 1.2333 K et la largeur de la transition est $\sim 2 \text{ mk}$.

Le spectre $T_c(H)$ (figure III.2.2) a un comportement complexe. Le terme parabolique BH^2 a même l'ordre grandeur : $B = 4.4 \cdot 10^{-4}$. Le diagramme propre (après avoir retranché la parabole) est porté sur la figure III.2.3. Trois pics principaux sont identifiés (indiqués par les flèche) dont les positions sont :

$$H_1 = 3.25 \text{ Oe}$$

$$H_2 = 5.27 \text{ Oe}$$

$$H_3 = 8.67 \text{ Oe}$$

ou, transformés en flux normalisé à travers la surface moyenne $f = \Phi_m/\Phi_0 \equiv HS_m/\Phi_0$, où $S_m = (3 - \tau)S_a$, défini dans la section I.3.2 :

$$f_1 = 0.957$$

$$f_2 = 1.553$$

$$f_3 = 2.554$$

correspondants aux valeurs théorique^[6]

$$\Phi_c/\Phi_0 = 1, \tau, \tau^2$$

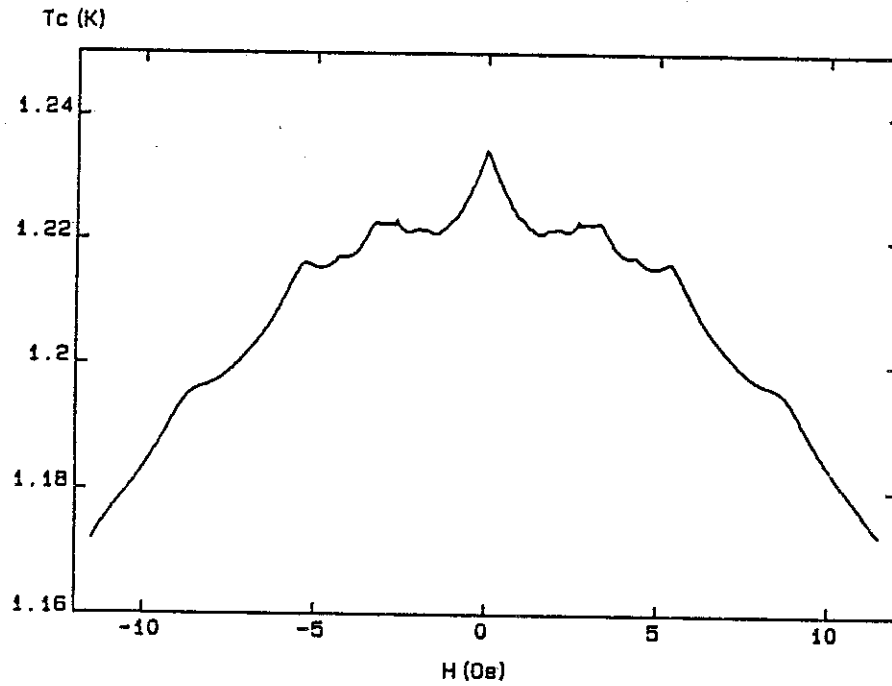


Fig. III.2.2 La température critique mesurée du réseau quasipériodique.

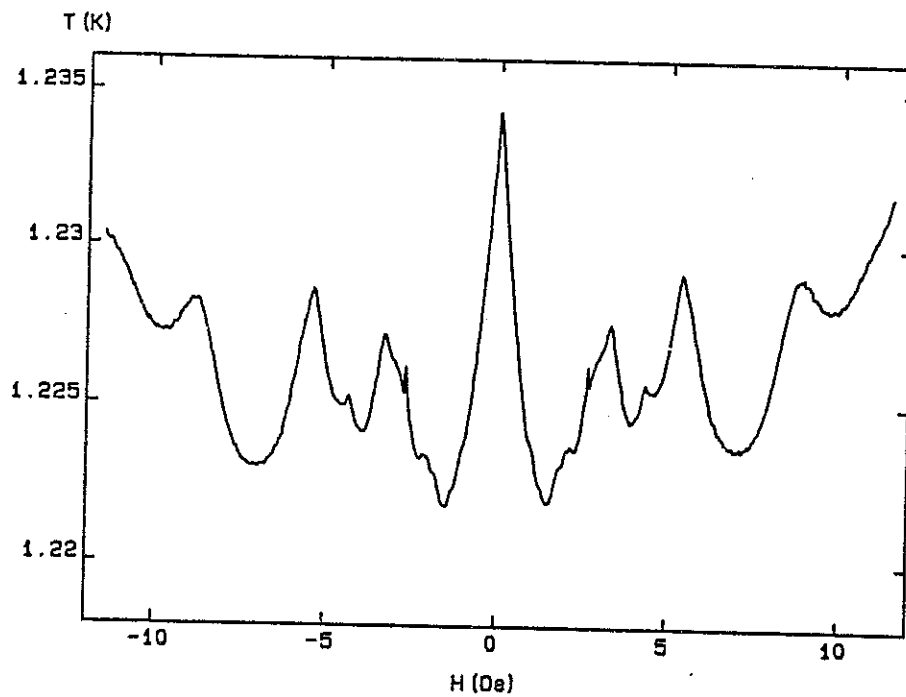


Fig. III.2.3 Identique à Fig. III.2.2 après avoir retranché la contribution parabolique.

Il existe une région mystérieuse qui est agrandie sur la figure III.2.4 Ce qui est étonnant est un pic pointu non-identifié qui correspond probablement à une configuration de flux très favorable. Nous voyons aussi d'une sorte du bruit de haute fréquence à côté de ces pics. Nous avons refait plusieurs fois la même mesure dans cette région avec des conditions légèrement différentes. Deux courbes sont comparées sur la figure III.2.5. La coïncidence parfaite entre les deux montre que ce "bruit" est reproductible. Pour l'instant nous ne savons pas encore l'interpréter. D'autre part, le couplage entre les échelles quasipériodiques produit à la fois des structures sub-harmoniques aux valeurs rationnelles. La compétition entre les deux effets complique le spectre. En conclusion, ce système n'est pas idéal pour étudier le phénomène quasipériodique. Il serait préférable de revenir à des structures plus simples et plus pures, comme :

0D ab
 1D abababab...
 abbababb...
 2D penrose
 ...

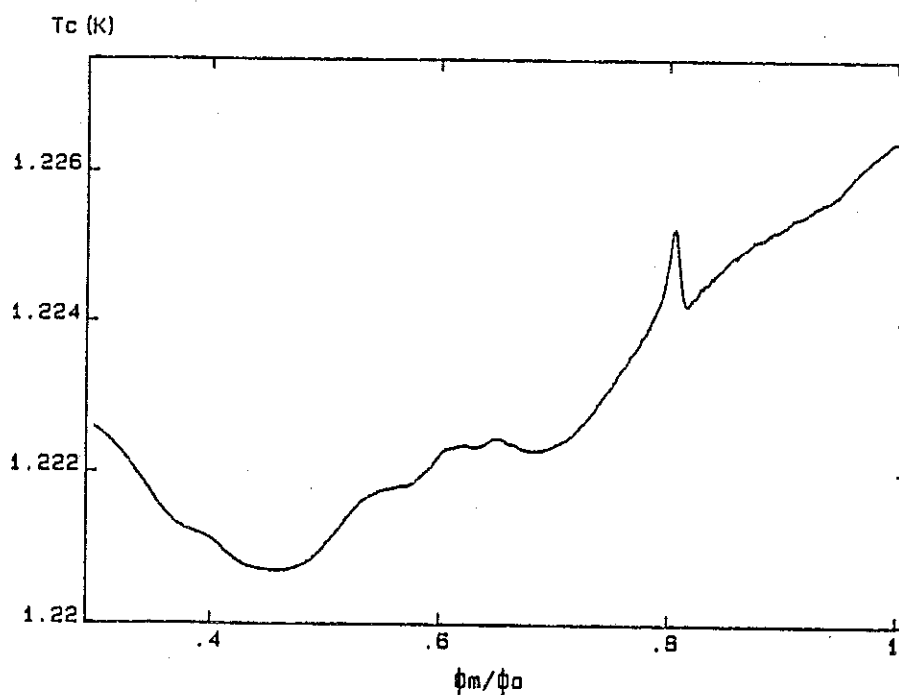


Fig. III.2.4 La température critique du réseau quasipériodique mesurée au voisinage de $\Phi_m/\Phi_0 \sim 0.8$ où apparaît un pic extrêmement fin.

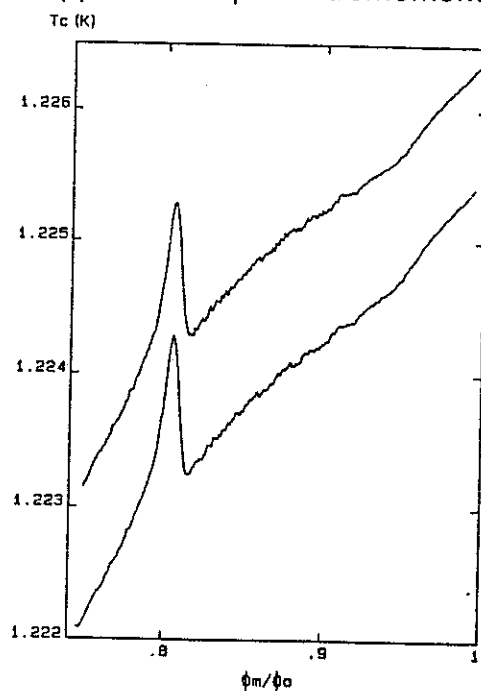


Fig. III.2.5 Deux mesures effectuées sous des conditions légèrement différentes. (Celui en bas est décalé de 1mK.) Les "fluctuations" sont reproductibles.

REFERENCES

- [1] B. Pannetier, J. Chaussy et R. Rammal,
J. Phys. Lett. (Paris) 44, L853 (1983)
B. Pannetier, Y. Y. Wang et J. Chaussy, Proc. 17-th Int.
Conf. Low Temp. Phys., (North-Holland) 1984, p.721.
- [2] B. Pannetier, J. Chaussy, R. Rammal et J. C. Villegier,
Phys. Rev. Lett. 53, 1845 (1984).
B. Pannetier, J. Chaussy et R. Rammal,
Phys. Scripta. T13, 245 (1986)
- [3] B. Pannetier, Helvetica Phys. Acta, 60, 143 (1987)
- [4] B. Douçot, Y. Y. Wang, J. Chaussy, B. Pannetier, R. Rammal,
A. Vareille et D. Henry, Phys. Rev. Lett. 57, 1235 (1986)
- [5] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity* ,
McGRAW-HILL New York (1975)
- [6] A. Behrooz, M. J. Burns, H. Deckman, D. Levine, B. Whitehead et
P. M. Chaikin, Phys. Rev. Lett. 57, 368 (1986)

Annexe III.A.

First Observation of the Universal Periodic Corrections to Scaling: Magnetoresistance of Normal-Metal Self-Similar Networks

B. Doucot, W. Wang, J. Chaussy, B. Pannetier, and R. Rammal

Centre de Recherches sur les Très Basses Températures, Centre National de la Recherche Scientifique, 38042 Grenoble Cédex, France

and

A. Varelle and D. Henry

Centre National d'Etude des Télécommunications, 38240 Meylan, France

(Received 17 June 1986)

In many physical problems where renormalization-group transformations are exact, periodic oscillating corrections to power-law behavior are usually expected. The magnetoresistance of a normal-metal self-similar network, which exhibits such behavior in the weak localization regime, is shown to provide the first experimental evidence for this phenomenon.

PACS numbers: 64.60.Ak, 71.55.Jv, 73.60.Dt

In many physical problems where scaling properties play an important role, it is now well established that renormalization-group (RG) transformations are the natural tool for a detailed interpretation of the observed phenomena. In this context, self-similar structures appear as the ideal models for a simple and transparent illustration of scaling concepts. The most interesting feature of self-similar structures is probably the possibility to have exact RG transformations, which allow for a detailed study of the RG flow. The powerful RG method has been extended in recent years to various fields including a wide range of physical problems (condensed matter, statistical and quantum mechanics, fluid dynamics, disordered systems, etc.). In general, when a RG transformation holds exactly, there are two basic equations. The first one gives the transformation law of parameters under a scale change (length or time scale, for instance). The second one is simply the transformation equation of a given physical quantity (free energy, Green's function, etc.).

In order to illustrate the purpose of this Letter, let us consider the case of a one-parameter (x) RG and one physical observable $F(x)$. A simple example of a RG transformation is provided by the following functional equation for F :

$$\mu F(x) = F[\phi(x)]. \quad (1)$$

Here $F(x)$ is assumed to be a very well behaved function and μ denotes a positive real number. The function $\phi(x)$, which generates the RG flow, is usually used to extract the qualitative behavior as well as the stability of fixed points and critical exponents. For example if $x=0$ denotes a fixed point [$\phi(0)=0$] and $\phi(x)=\lambda x + \dots$ is the corresponding linearized transformation, then $\omega = \ln \mu / \ln \lambda$ is the critical ex-

ponent describing the power-law solution $F_0(x) = x^\omega$ of Eq. (1) near this fixed point.

Aside from this sort of local analysis of the RG flow near fixed points, one can be interested in the general solutions of Eq. (1). It appears that there is actually a large number of simple but nontrivial such solutions. Indeed, if we assume that $F_0(x)$ is a particular solution, then the general solution $F(x)$ is related to $F_0(x)$ in terms of a periodic function $p(x)$, with a period $\ln \mu$, through

$$F(x) = F_0(x) p(\ln F_0(x)). \quad (2)$$

Using the Fourier expansion of $p(x)$, and assuming the following expansion for the function $F_0(x)$,

$$F_0(x) = x^\omega \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n,$$

one ends up with the general solution (F real)

$$F(x) = \sum_{m,n=0}^{\infty} F_{m,n} x^{\omega+n} \cos \left[2\pi m \frac{\ln x}{\ln \mu} + \theta_{m,n} \right], \quad (3)$$

where $F_{m,n}$ and $\theta_{m,n}$ denote constant numbers.

The occurrence of these universal oscillations is actually a quite general phenomenon related to functional equations like Eq. (1), where $\phi(x)$ is an analytical function. In statistical mechanics,¹ this corresponds to critical "complex exponents" which are usually rejected for translationally invariant systems since they imply a length scale, or a finite size. However, these oscillations, although of a rather small amplitude, can appear in general when an exact RG transformation occurs, as is the case for self-similar structures, and this will be shown below. For a much more rigorous discussion of this point, we direct the reader to Bessis,

Geronimo, and Moussa.²

In order to highlight these periodic oscillations, we have used a regular self-similar network made of sub-micronic Al wires: the Sierpinski gasket,^{3,4} which is a 2D array of triangles (see Fig. 1 of Ref. 4) exhibiting a perfect dilation symmetry. The gasket structure has been realized by direct writing of the pattern on PMMA (polymethylmethacrylate) resist by use of an electron-beam microfabricator (Cambridge EBMF6). Then the Al was deposited in the open lines of the PMMA mask by thermal evaporation followed by a liftoff of the resist. The Al lines are $0.1 \mu\text{m}$ thick and $\sim 0.3 \mu\text{m}$ wide. The elementary triangles, at the lowest length scale, are isosceles triangles of equal height and base: $3.2 \mu\text{m}$. In order to optimize the signal-to-noise ratio in our resistance measurements, the structure was restricted to six stages of iterations: $0 \leq n \leq 5$, and this corresponds to the basic cell. The measured sample is a lattice of 1024 basic cells; the overall size of the network is $3.2 \times 3.2 \text{ mm}^2$.

The resistance measurements were performed between the top node of the lattice and the two other nodes. The resistivity ratio of the Al film between room temperature and 4.2 K was found to be 6.4. The resistance of the sample above the superconducting critical temperature ($T_c = 1.23 \text{ K}$) was 2.47Ω . Measurements of the magnetoresistance $R(H)$ were performed at $T = 1.30 \text{ K}$ (above T_c) with a maximum current of $1 \mu\text{A}$, with use of a four-probe ac bridge.⁵

In the temperature range of interest, weak localization effects have been studied recently on 1D and 2D clean Al films by different groups.⁶ Above T_c , the low-field magnetoresistance is governed both by localization effects and by Maki-Thomson superconducting fluctuations. The contribution of the Maki-Thomson term can be understood by means of a simple temperature-dependent parameter $\beta(T/T_c)$, which is independent of the localization dimension.⁷ The factor $\beta(T/T_c)$, which is field independent in the low-field regime, has no effect on the fine structure of the magnetoresistance (MR). However, because of its divergence as T_c is approached, $\beta(T/T_c)$ provides an enhancement factor to the weak localization effect which allows a large improvement of the experimental accuracy.

Typical magnetic fields range between 1 mOe and 10 Oe. Within this range, the critical temperature $T_c(H)$ of the network has been found to exhibit a very rich structure, as shown in the inset of Fig. 1.⁸ This curve, which will be described elsewhere,⁹ shows five levels of self-similarity and provides an accurate calibration of the flux quantization¹⁰ at the different hierarchy stages of the Sierpinski gasket. In our sample, the magnetic field which corresponds to one superconducting flux quantum $\phi_0 = hc/2e$ in the elementary triangles is 4.4 Oe, and the fine structure was observed

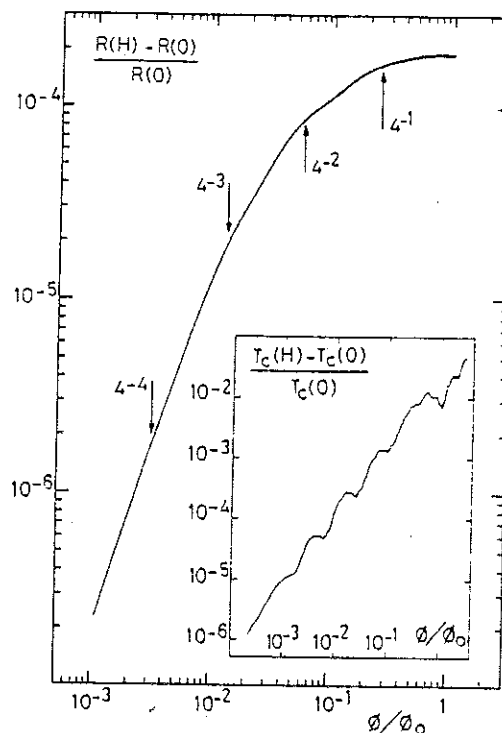


FIG. 1. MR of a Sierpinski gasket of Al submicronic wires. The inset shows the normal-superconducting phase boundary $T_c(H)$ of the same network. The magnetic field scale corresponds to the range of one superconducting quantum flux ϕ_0 through the elementary triangular cell. Arrows indicate the positions of reduced fluxes $\phi/\phi_0 = 4^{-n}$, $n = 1, 2, \dots$

down to $\phi_0/512$.

The MR, shown in Fig. 1, was measured at $T = 1.30 \text{ K}$: $R(H) - R(0)$ vs H in a log-log plot. We see that the fine structure, which was observed on the $T_c(H)$ line, is no longer present. There only remain peaks at integer values of ϕ/ϕ_0 (not shown here), where ϕ is the magnetic flux through an elementary triangle. This is a manifestation of the Al'tshuler-Aronov-Spivak effect, observed also on regular Euclidean networks.⁵ The limiting value of the slope of this curve is 2 in the very low-field regime (Fig. 2), and this agrees with the expected value (see below). However, close inspection of the MR curve reveals kinks at precise values of the magnetic flux. This behavior contrasts with the MR behavior on regular Euclidean networks,⁵ where no structure occurs at $\phi < \phi_0$. Figure 2 shows the variation of the slope, i.e., the logarithmic derivative $\partial \ln \Delta R(H) / \partial \ln H$. As the field is lowered, the slope increases up to 2 but exhibits periodic oscillations in this logarithmic plot; the associated period of these oscillations is exactly $\ln 4$.

The oscillations of the slope of the MR curve are actually a clear signature of the phenomena discussed in

the introduction. Furthermore, the experimental data can be analyzed up to a high level of accuracy by use of the weak-localization theory for normal-metal networks.¹¹ For a regular network of identical strands of length a , with a coordination number z , the integrated correction to the resistance is given by

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\kappa}{2} \left[\left(1 - \frac{2}{z} \right) \frac{\eta \cosh \eta - \sinh \eta}{\eta \sinh \eta} + \frac{2}{N} \sinh \eta \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha}^{-1} \right]. \quad (4)$$

In Eq. (4), $\eta = a/L_{\phi}$, where $L_{\phi} \equiv (D\tau_{\phi})^{1/2}$ is the length over which dephasing of the electron wave function

results from inelastic processes (D is the diffusion constant). The dimensionless factor is given by $\kappa = 2e^2 L_{\phi} / \pi \hbar \sigma_0 S$, where σ_0 is the bulk conductivity of wires and S is their transverse section area. The sum in Eq. (4) is taken over the N eigenvalues λ_{α} of the Hermitian matrix Q , defined as follows: $Q_{\alpha\alpha} = z \cosh \eta$ and $Q_{\alpha\beta} = -e^{-i\gamma_{\alpha\beta}}$ for nearest-neighboring nodes α, β on the network, where $\gamma_{\alpha\beta} = (2\pi/\phi_0) \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ is the magnetic phase factor induced by the vector potential $\mathbf{A}$.

In the case of the Sierpinski gasket ($z=4$), it is not easy to find a closed expression for the sum involved in Eq. (4). However, it is possible to write down an exact RG transformation (scaling factor $b=2$), which can be used to perform a numerical calculation of $\Delta R/R$, up to any desirable precision. Rather cumbersome algebra is involved in this decimation procedure and the details can be found in Ref. 11. The results for the logarithmic derivative of the MR are shown in Fig. 2. The only adjustable parameter in these calculations is the ratio $\eta = a/L_{\phi}$, and a perfect agreement is obtained for $\eta = 0.195 \pm 0.005$. Here we have neglected minor corrections due to unequal lengths of the sides of the elementary triangle. We note that the number of maxima on Fig. 2 is very sensitive to the value of η and this is illustrated in the inset. The period of oscillation is equal to $\ln 4$, as expected, and corresponds to the ratio of the enclosed fluxes by elementary cells at two successive stages. Note that the value of L_{ϕ} so obtained is consistent with the estimates¹¹ extracted from the results of Ref. 5.

The main features of the localization corrections to resistance can be summarized as follows. At zero magnetic field, one has $\Delta R/R \sim \tau_{\phi}^{(2-d)/2}$ ($d < 2$) in the scaling regime, where τ_{ϕ} is the phase-coherence breaking time and d is the spectral dimensionality of the structure.¹¹ However, because of anomalous diffusion, this result can be cast in a more familiar form, $\Delta R/R \sim L_{\phi}^{-\beta}$, where $L_{\phi}/a = (L_{\phi}/a)^{d/\bar{d}}$ is the true phase-coherence length on the gasket and $\bar{d}$ is the fractal dimensionality. Here $\beta = d(\bar{d}-2)/\bar{d}$ denotes the localization exponent, as defined by Rammal and Toulouse.¹² In finite magnetic fields, the MR exhibits a crossover between a quadratic dependence $(\Delta R/R)(H) - (\Delta R/R)(0) \sim H^2$ at low fields ($HL_{\phi}^2 \ll \phi_0$) and a power-law behavior $(\Delta R/R)(H) \sim H^{\beta/2}$ at larger fields ($HL_{\phi}^2 \gg \phi_0$). We note that for Euclidean structure ($\bar{d}=d=d$) the known results

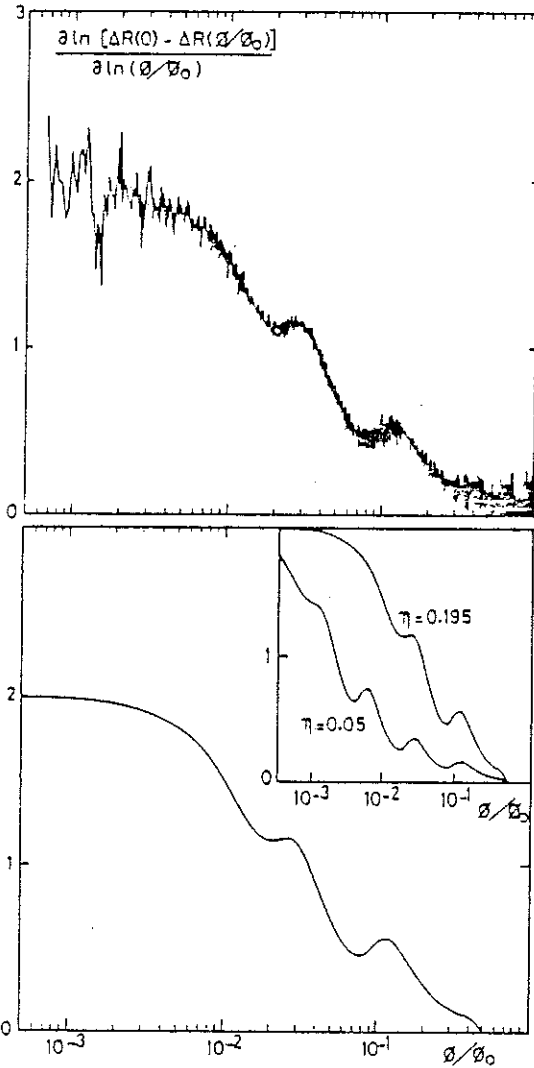


FIG. 2. Logarithmic derivative $\partial \ln[\Delta R(0) - \Delta R(H)] / \partial \ln(H/\phi_0)$ of the magnetoresistance. The upper part corresponds to the experimental data. The lower part is the result of the RG calculation of the same quantity ($\eta = 0.195$). On the same plot, these two parts cannot be distinguished and they are separated for the sake of clarity. In the inset, the same curve is reproduced, on reduced scales, with another one corresponding to a smaller value of $\eta = a/L_{\phi}$ ($\eta = 0.05$) which leads to more and more periodic oscillations. Here ϕ_0/ϕ_0 denotes the reduced flux through the elementary triangular cell.

are recovered,¹³ in particular the logarithmic behavior for 2D films where $\beta = 0$.

The power-law behavior $\Delta R/R \sim H\beta/2$ is actually the manifestation of the singular shape of the spectrum edge $\epsilon(H)$ of the operator Q , at low magnetic field^{3,11}: $\epsilon(0) - \epsilon(H) \sim H^{\bar{d}/\bar{d}}$ [$\epsilon(0) = z = 4$]. Such a behavior is reflected on the line $T_c(H)$ shown in Fig. 1 (see also Ref. 4). On the other hand, the RG calculation reproduces¹¹ this overall behavior, with $\bar{d} = \ln 3 / \ln 2$, $\bar{d} = 2 \ln 3 / \ln 5$, as it should be. Periodic modulations are superposed on the power law, with a period $\ln 4$ in a log-log plot.

The physical origin of the oscillation can be traced back to the fact that the considered structure exhibits a dilation symmetry only under a discrete subgroup of the dilation group. Indeed, at low fields, the magnetic flux renormalizes as¹¹

$$\phi_n / \phi_{n=0} \approx 4^n [4 + 13(\frac{3}{20})^n] / 17, \quad (5)$$

at stage n of decimation and $\mathcal{L}_\phi = \infty$ (scaling regime). The maximal modulations are obtained for reduced fluxes ϕ/ϕ_0 corresponding to integer values of the renormalized flux. According to Eq. (5), ϕ_n is the same for (ϕ, n) and $(\phi/4, n+1)$, and this leads to the observed period of $\ln 4$. Another approach to this result involves a careful study of the RG flow, which leads to the following equation for $\Delta R/R$:

$$(\Delta R/R)(\phi/\phi_0) = \frac{1}{3}(\Delta R/R)(4\phi/\phi_0). \quad (6)$$

Equation (6) has the same form as Eq. (1) and the general solution can be written as

$$\frac{\Delta R}{R} \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right) = \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^{\beta/2} p \left(2\pi \frac{\ln(\phi/\phi_0)}{\ln 4} \right), \quad (7)$$

where p denotes a periodic function, with period 1. Equation (7) shows that $\eta \equiv a/L_\phi$ governs just the low-field cutoff and does not play any role in the self-similar regime¹¹ where the predicted oscillations are observed. It is important to notice that in Fig. 2, we have plotted $(\Delta R/R)(0) - (\Delta R/R)(H)$ instead of $(\Delta R/R)(H)$. We note that this behavior is due again to the singular self-similar edge of the spectrum of the operator Q , which reflects the self-similarity of the structure. Furthermore, there is no such oscillation at zero magnetic field, as a function of temperature for instance. Of course, the lack of exact self-similarity can lead to the disappearance of the obtained periodic oscillations.

To summarize, we believe that the periodic corrections to scaling reported in this Letter are the manifestation of a very general phenomenon observed here for the first time. Such corrections are associated in a natural way with an exact RG transformation, which generates a singular measure. In the present case, this can also be seen on the spectral measure as well as the spectrum (Cantor-type set) of the operator Q . The existence of such a RG transformation depends of course on the validity of the weak localization theory. Thus the observation of both the predicted power law and the periodic corrections should be viewed as a strong evidence for weak localization theory.

¹Th. Niemeijer and J. M. J. Van Leeuwen, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, edited by C. Domb and M. S. Green (Academic, New York, 1976), Vol. 6, p. 425.

²D. Bessis, J. S. Geronimo, and P. Moussa, *J. Phys. (Paris)*, Lett. 44, 977 (1983).

³R. Rammal and G. Toulouse, *Phys. Rev. Lett.* 49, 1194 (1982).

⁴J. M. Gordon, A. M. Goldman, J. Maps, D. Costello, R. Tiberio, and B. Whitehead, *Phys. Rev. Lett.* 56, 2280 (1986).

⁵B. Pannetier, J. Chaussy, R. Rammal, and P. Gandit, *Phys. Rev. Lett.* 53, 718 (1984), and *Phys. Rev. B* 31, 3209 (1985); G. I. Dolan, J. C. Licini, and D. J. Bishop, *Phys. Rev. Lett.* 56, 1493 (1986).

⁶P. Santhanam, S. Wind, and D. E. Prober, *Phys. Rev. Lett.* 53, 1179 (1984); J. M. Gordon, *Phys. Rev. B* 30, 6770 (1984).

⁷A. I. Larkin, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 31, 239 (1980) [*JETP Lett.* 31, 219 (1980)]; W. Brenig, *J. Low Temp. Phys.* 60, 297 (1985).

⁸Similar structure has been found in Ref. 4 for the Sierpinski gasket. The results obtained for other structures—Sierpinski carpet, Fibonacci quasiperiodic network, and Penrose pattern—will be reported elsewhere (B. Pannetier *et al.*, to be published).

⁹Pannetier *et al.*, Ref. 8.

¹⁰For a comparison with the corresponding line on Euclidean networks, see B. Pannetier, J. Chaussy, R. Rammal, and J. Villegier, *Phys. Rev. Lett.* 53, 1845 (1984).

¹¹B. Doucot and R. Rammal, *Phys. Rev. Lett.* 55, 1148 (1985), and *J. Phys. (Paris)* 47, 973 (1986), and references therein; B. Doucot and B. Pannetier, to be published.

¹²R. Rammal and G. Toulouse, *J. Phys. (Paris)*, Lett. 44, 13 (1983).

¹³P. Lee and T. V. Ramakrishnan, *Rev. Mod. Phys.* 57, 287 (1985).

CHAPITRE IV. L'état mixte de réseaux supraconducteurs

- IV.1. Etat mixte d'un réseau supraconducteur
- IV.2. Déterminations de β_A , du paramètre d'ordre et le courant diamagnétique pour un réseau carré
 - IV.2.1. Minimisation de β_A
 - IV.2.2. Les distributions des courants diamagnétiques pour un réseau carré
- IV.3. Bandes sur le spectre d'Hofstadter
 - IV.3.1. limite de $\gamma = 0$
 - IV.3.2. γ rationel quelconque
 - IV.3.3. Vérification par l'expérience de Gandit
- IV.A. Annexe : *Finite Width Effect on the Upper Critical Field H_{c2} of Superconducting Networks*
- IV.B. Annexe

Ce chapitre est une extension théorique du chapitre I où l'on a étudié la ligne de transition supraconductrice de différents réseaux. Bien sûr ce n'est pas toute l'information que l'on peut extraire des équations d'Alexander — on peut aussi déterminer les configurations spatiales du paramètre d'ordre. Vu que ces équations sont linéaires, le terme non-linéaire des équations de Ginzburg-Landau est pris en compte, par la méthode de perturbation, pour fixer la norme du paramètre d'ordre et déterminer la configuration d'équilibre du paramètre d'ordre ainsi que la distribution des supercourants induits. La structure de l'état mixte ainsi obtenue pour un réseau supraconducteur diffère totalement de celle calculée par Abrikosov pour un supraconducteur homogène. Le paramètre d'Abrikosov qui caractérise l'uniformité de la fonction d'onde convient aussi aux réseaux supraconducteurs et permet de calculer l'énergie libre, d'où se déduisent toutes les quantités thermodynamique.

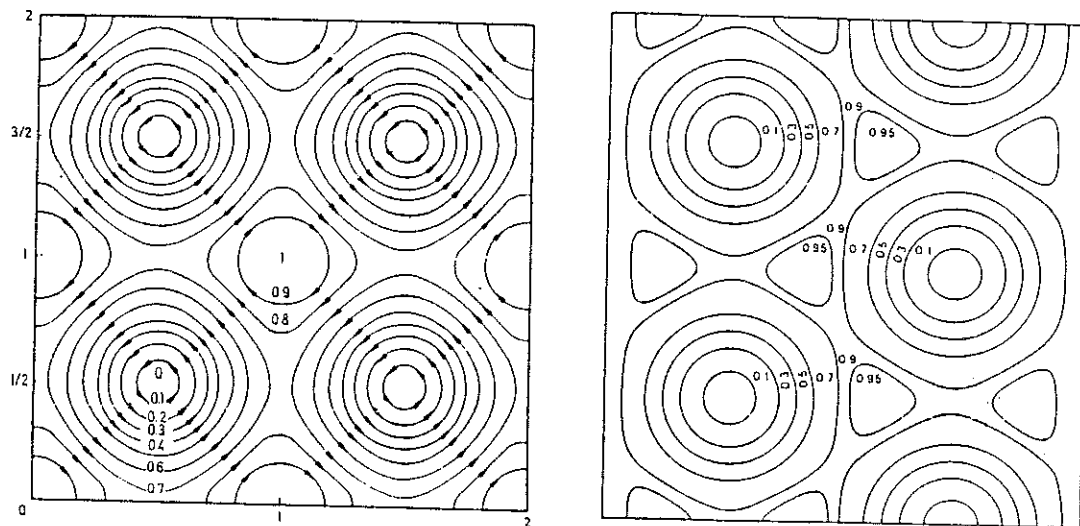
Ce chapitre est divisé en trois parties :

- Généralisation du calcul d'Abrikosov pour un réseau quelconque
- Application du réseau carré
- Propriétés spécifiques du bord du spectre s'appliquant au problème de l'aimantation d'un supraconducteur.

IV.1. Etat mixte d'un réseau supraconducteur

Bien que les équations linéarisées de Ginzburg-Landau aient remportées un grand succès sur la détermination du diagramme de phase supraconductrice-normale, elles se limitent par leur défaut majeur qui est l'indétermination de la norme des vecteurs propres. D'autre part, elles ne se vérifient exactement que sur la ligne de transition et nous ne savons rien des propriétés physiques d'équilibre de la phase supraconductrice au-dessous de la température critique.

Dans le cas d'un supraconducteur homogène, l'équation de Ginzburg-Landau complète a été résolue au-dessous de la température critique par la méthode des perturbations et la distribution du paramètre d'ordre a été obtenue (fig.IV.1.1) sur laquelle les isocèles de $|\Psi|^2$ se ferment autour des vortex qui sont répartis aux noeuds d'un réseau triangulaire: C'est l'état mixte bien connue, établie d'abord par Abrikosov[1,2].



a. Carré $\beta_A = 1.18$

b. Triangulaire $\beta_A = 1.16$

Fig. IV.1.1 Configuration du paramètre d'ordre d'un supraconducteur massif (Extrait de *Magnetic flux structures in superconductors* par R. P. Huebener [3]).

Dans cette partie nous généralisons l'approche d'Abrikosov à l'état mixte d'un supraconducteur non homogène.

Il convient d'admettre d'abord que l'échantillon est un cylindre infini dans la direction de Z pour que toutes les quantités relevantes soient indépendantes de la coordonnée Z, si le champ extérieur est appliqué le long l'axe Z. Cet échantillon peut représenter, par exemple, une extension cylindrique d'un réseau bidimensionnel. Le facteur démagnétisant le long l'axe de Z sera nul dans cette géométrie.

Nous écrivons l'équation de Ginzburg-Landau linéarisée sous la forme générale

$$\left(i \nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right)^2 \Psi = E \Psi \quad (\text{IV.1.1})$$

où $E = E(H)$ est la valeur propre de l'opérateur $\mathcal{O} = (i\nabla + 2\pi/\Phi_0 \mathbf{A})^2$ et son minimum donne la ligne de la transition:

$$\left. \frac{1}{\xi^2(T)} \right|_{T=T_c} = \min \{ E(H) \} \quad (\text{IV.1.2})$$

Remplaçons le terme gradient dans l'énergie libre l'Eq I.1.1 par le terme diagonal $E|\Psi|^2$ et négligeons la contribution de surface, nous avons

$$F_s = F_n + \left\langle \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(E - \frac{1}{\xi^2} \right) |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{\hbar^2}{8\pi} \right\rangle \quad (\text{IV.1.3})$$

Au premier d'ordre de $|\Psi|^2$, F est proportionnelle à $E - (1/\xi^2)$ et donc l'état équilibre est donnée par le paramètre d'ordre $\Psi(\mathbf{r})$ ayant la valeur propre E la plus basse. Ceci est valable si T est tout près de $T_c(H)$. Lorsque T est plus loin de $T_c(H)$, le paramètre d'ordre augmente progressivement et l'équation de Ginzburg-Landau linéarisée n'est plus suffisante pour décrire la distribution du paramètre d'ordre. Mais, comme signalé par Abrikosov, la solution exacte doit avoir, par continuité, une forte ressemblance à certain

solutions de l'équation linéarisée. Une solution approximative peut être construite à l'aide d'une combinaison des solutions dégénérées de l'équation l'Eq IV.1.1. Ces solutions correspondant à différentes configurations de vortex ont même énergie au premier ordre en $|\Psi|^2$ dans l'énergie libre. En revanche, le terme d'ordre plus élevé qui représente l'interaction entre vortex va en fin de compte favoriser certaines solutions particulières.

Supposons que $\Psi(r) = \Psi_0 \cdot f(r)$

où $f(r)$ est la combinaison des fonctions propres dégénérées de l'Eq. IV.1.1 correspondant à la valeur propre $E(H)$ la plus basse. $f(r)$ est normalisé à 1 et donc Ψ_0 est l'amplitude de $\Psi(r)$:

$$\Psi_0^2 = \langle |\Psi(r)|^2 \rangle \quad (\text{IV.1.4})$$

En présence d'un champ extérieur H , la fonctionnelle à minimiser est l'énergie libre de Gibbs G . Introduisons le champ induit h_s défini par la différence entre champ microscopique h et champ extérieur H :

$$h_s = h - H \quad (\text{IV.1.5})$$

La valeur propre dans l'Eq. IV.1.3 doit être

$$E(h) = E(H) + h_s \frac{dE}{dH}$$

Faisant une transformation de Legendre : $G_s = F_s - Hh/4\pi$, nous avons

$$G_s = G_n + \langle \frac{\hbar^2}{2m^*} (E(H) + h_s \frac{dE}{dH} - \frac{1}{\xi^2}) f^2 \Psi_0^2 + \frac{\beta}{2} f^4 \Psi_0^4 + \frac{h_s^2 - H^2}{8\pi} \rangle \quad (\text{IV.1.6})$$

En disant que G doit être stationnaire lorsque h_s et Ψ_0 ont des petites variations δh_s et $\delta \Psi_0$, nous obtenons deux équations par la méthode des variations standards

$$h_s = -4\pi \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{dE}{dH} f^2 \Psi_0^2 \quad (\text{IV.1.7})$$

$$\frac{\hbar^2}{2m^*} (E - \frac{1}{\xi^2}) \langle f^2 \rangle + \Psi_0^2 \left[\beta - 4\pi \left(\frac{\hbar^2}{2m^*} \right)^2 \left(\frac{dE}{dH} \right)^2 \right] \langle f^4 \rangle = 0 \quad (\text{IV.1.8})$$

Notons que

$$\beta = 2\pi \left(\frac{2e\hbar}{m^*c} \kappa \right)^2 = 8\pi \left(\frac{\hbar^2}{2m^*} \right)^2 \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \right)^2 \kappa^2 \quad (\text{IV.1.9})$$

où κ est le paramètre de Ginzburg-Landau, l'Eq IV.1.8 devient

$$E - \frac{1}{\xi^2} + \frac{8\pi e^2}{m^*c^2} \Psi_0^2 (2\kappa - \mu^2) \beta_A(H) = 0 \quad (\text{IV.1.10})$$

avec

$$\mu = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{dE}{dH} = \frac{\Phi_0}{2\pi \xi^2(0)^2 T_0} \frac{dT_c(H)}{dH} \quad (\text{IV.1.11})$$

La solution IV.1.10 est remarquable puisqu'elle ne dépend du détail de la fonction $f(r)$ que par une quantité moyenne :

$$\beta_A(H) = \frac{\langle |\Psi|^4 \rangle}{\langle |\Psi|^2 \rangle^2} = \langle |f|^4 \rangle \quad (\text{IV.1.12})$$

Ceci est la généralisation du paramètre d'Abrikosov β_A qui a été introduit pour un supraconducteur homogène^[1,2]. Ici $\beta_A(H)$ dépend du champ et est toujours supérieur ou égal à 1 (inégalité de Schwartz). Ce paramètre caractérise l'uniformité de la fonction $f(r)$ et mesure la contribution de l'énergie d'interaction entre vortex. On verra plus loin que l'état équilibre requiert β_A minimum.

L'amplitude moyenne du paramètre d'ordre se déduit immédiatement de l'Eq IV.1.10:

$$\langle |\Psi|^2 \rangle = \Psi_0^2 = - \frac{m^*c^2}{8\pi e^2 \beta_A} \frac{E - \frac{1}{\xi^2}}{2\kappa - \mu^2} \quad (\text{IV.1.13})$$

Dans l'état équilibre, l'énergie libre s'écrit sous la forme simple^[2] :

$$F_s = F_n - \beta/2 \langle |\Psi|^4 \rangle + \langle h^2 \rangle / 8\pi, \text{ donc}$$

$$F_s = F_n - \frac{1}{4\pi\beta_A} \left[\frac{\frac{\Phi_0}{2\pi}}{2\kappa^2 - \mu^2} \left(E - \frac{1}{\xi^2} \right) \right]^2 + \frac{\langle h^2 \rangle}{8\pi} \quad (\text{IV.1.14})$$

En reportant l'Eq. IV.1.7 et IV.1.13a dans l'Eq IV.1.6, nous trouvons

$$G_s = G_n - \frac{1}{8\pi\beta_A} \frac{1}{2\kappa^2 - \mu^2} \left[\frac{\Phi_0}{2\pi} \left(E - \frac{1}{\xi^2} \right) \right]^2 + \frac{H^2}{8\pi} \quad (\text{IV.1.15})$$

L'induction sera

$$B = -4\pi \frac{\partial E}{\partial H} = \frac{\left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \frac{dE}{dH}}{\beta_A (2\kappa^2 - \mu^2)} \left(E - \frac{1}{\xi^2} \right) + H \quad (\text{IV.1.16})$$

D'autre part, notons que

$$\langle h \rangle = H + \langle h_s \rangle$$

en utilisant l'Eq IV.1.7 et IV.1.13a nous trouvons que B n'est rien autre que $\langle h \rangle$, comme il faut, et l'aimantation.

$$4\pi M = B - H = \langle h_s \rangle = \frac{\left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2}{\beta_A (2\kappa^2 - \mu^2)} \left(E - \frac{1}{\xi^2} \right) \frac{dE}{dH} \quad (\text{IV.1.17})$$

Il est clair que pour un supraconducteur de type II, $2\kappa^2 - \mu^2 \geq 0$, le minimum d'énergie s'obtient quand β_A est minimum. Cette condition détermine le choix de la combinaison de fonction d'onde $\Psi(r)$ comme on le fera dans la partie suivante.

Dans le cas particulier où le supraconducteur est homogène et massif, $T_c(H)$ est linéaire en H et $\mu = 1$, on retrouve les propriétés de l'état mixte prédites par Abrikosov[1,2] : la fonction $f(r)$ est la fonction propre de l'oscillateur harmonique, et β_A est minimum à 1.16, ce qui correspond à un arrangement de vortex périodique triangulaire.

Maintenant on passe au réseau bidimensionnel où le champ démagnétisant non-nul doit être pris en compte. Une approximation grossière consiste à le confondre avec un ellipsoïde plat pour lequel le champ démagnétisant est uniforme si le champ extérieur s'applique perpendiculairement. Dans tous les calculs effectués le champ extérieur H doit être remplacé par le champ effectif

$$H' = H - 4\pi N_z M \quad (\text{IV.1.18})$$

où $N_z \leq 1$ est le facteur démagnétisant le long de l'axe Z . Près de H_{c2} , M doit être petite et ceci permet d'écrire

$$E(H') = E(H) - 4\pi N_z M dE/dH$$

Appelons l'Eq. IV.1.17 et notons que $\Phi_0/2\pi dE/dH = \mu$, nous avons

$$E(H') - \frac{1}{\xi^2} = \left[E(H) - \frac{1}{\xi^2} \right] \frac{2\kappa^2 - \mu^2}{2\kappa^2 - \mu^2 + N_z \mu^2 / \beta_A} \quad (\text{IV.1.19})$$

En reportant cette expression dans l'Eq IV.1.13, IV.1.14 et l'Eq IV.1.17, nous trouvons finalement l'amplitude du paramètre d'ordre, l'énergie libre et l'aimantation d'un réseau bidimensionnel

$$\langle |\Psi|^2 \rangle = \Psi_0^2 = \frac{m^* c^2}{8\pi e^2 \beta_A} \frac{E(H) - 1/\xi^2}{2\kappa^2 - \mu^2 (1 - N_z/\beta_A)} \quad (\text{IV.1.20a})$$

$$= \frac{m^* c^2}{8\pi e^2 \beta_A} \frac{1}{2\kappa^2 - \mu^2 (1 - N_z/\beta_A)} \frac{T_c(H) - T}{\xi^2(0) T_0} \quad (\text{IV.1.20b})$$

$$F_s = F_n - \frac{1}{4\pi \beta_A} \left[\frac{\kappa \Phi_0 / 2\pi}{2\kappa^2 - \mu^2 (1 - N_z/\beta_A)} \left(E(H) - \frac{1}{\xi^2} \right) \right]^2 + \frac{\langle h^2 \rangle}{8\pi} \quad (\text{IV.1.21a})$$

$$= F_n - \frac{1}{4\pi \beta_A} \left[\frac{\kappa \Phi_0 / 2\pi}{2\kappa^2 - \mu^2 (1 - N_z/\beta_A)} \frac{T_c(H) - T}{\xi^2(0) T_0} \right]^2 + \frac{\langle h^2 \rangle}{8\pi} \quad (\text{IV.1.21b})$$

$$4\pi M = \frac{1}{\beta_A} \frac{(\Phi_0/2\pi)^2}{2\kappa^2 - \mu^2 (1 - N_z/\beta_A)} \left(E(H) - \frac{1}{\xi^2} \right) \frac{dE}{dH} \quad (\text{IV.1.22a})$$

$$= \frac{1}{\beta_A} \frac{(\Phi_0/2\pi)^2}{2\kappa^2 - \mu^2 (1 - N_z/\beta_A)} \frac{T_c(H) - T}{[\xi^2(0) T_0]^2} \frac{dT_c}{dH} \quad (\text{IV.1.22b})$$

Notons que pour le réseau bidimensionnel, le facteur démagnétisant $N_z \approx 1$, et nous voyons dans la section suivante que β_A est légèrement supérieur que 1, donc $\mu^2(1-N_z/\beta_A)$ est petit devant $2\kappa^2$ même si $\kappa < \sqrt{2}/2$. En conséquence, le traitement de l'état mixte d'un réseau est valable aussi pour supraconducteur bidimensionnel de type I. En cas particulier, comme marqué par Tinkham[4], un film supraconducteur de type I a un comportement de type II.

En négligeant le facteur $\mu^2(1-N_z/\beta_A)$ et utilisant la notation habituelle $\Psi_\infty(T) = -\alpha/\beta$ avec α et β donnés par les équations I.0.3 et IV.1.9, nous obtenons l'expression simple

$$\langle |\Psi|^2 \rangle = \Psi_0^2 = \frac{1}{\beta_A} \Psi_\infty^2(0) \frac{T_c(H) - T}{T_c(0)} \quad (\text{IV.1.23})$$

De la même façon, posons que

$$\Delta F_\infty(T) = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\beta}$$

est la différence d'énergie libre entre états normal et supraconducteur correspondant à $\Psi_\infty(T)$, nous avons

$$F_s = F_n - \frac{1}{\beta_A} \Delta F_\infty(0) \left(\frac{T_c(H) - T}{T_c(0)} \right)^2 + \frac{\langle h^2 \rangle}{8\pi} \quad (\text{IV.1.24})$$

Evidemment, lorsque $H = 0$, $\beta_A = 1$, l'amplitude du paramètre d'ordre d'un réseau Ψ_0 , ainsi que l'énergie libre F_s retombent sur ceux du supraconducteur massif : Ψ_∞ et F_∞ .

IV.2. Déterminations de β_A , du paramètre d'ordre et du courant diamagnétique pour un réseau carré

Nous avons bien déterminé les valeurs propres du réseau carré dans la section I.1. et nous tournons notre attention sur les états propres qui illustrent le concept d'état mixte.

IV.2.1. Minimisation de β_A

Notons que la racine maximale de l'Eq.I.1.3 ε_0 demande $\alpha = 0$ et $k = 2\pi l/q$, $l=0, 1, \dots, q-1$, et la fonction propre correspondante est donc q fois dégénérée. Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} f_m(\alpha, k+l\gamma) &= f_{m-l}(\alpha, k) \\ f_m(-\alpha, k) &= f_m^*(\alpha, k) \end{aligned} \quad (\text{IV.2.1})$$

Comme p, q sont premiers entre eux, l'ensemble

$$\{f_m(0, 2\pi l p/q)\} = \{f_m(0, l\gamma)\} = \{f_{m-l}(0, 0) \mid l=0, 1, \dots, q-1\}$$

Le paramètre d'ordre normalisé au noeud (m, n) sera la combinaison linéaire des q équations propres dégénérées

$$f_{m,n} = \sum_{l=0}^{q-1} c_l f_{m-l} e^{inl\gamma} \quad (\text{IV.2.2})$$

où c_l sont des coefficients complexes à déterminer par la minimisation de β_A . La normalisation $\sum_l |c_l| = q$, $\sum_{mn} f_{mn} = q^2$ impose que

$$\sum_{l=0}^{q-1} |c_l|^2 = 1 \quad (\text{IV.2.3})$$

Pour calculer $\beta_A = \langle |f_{m,n}|^4 \rangle / \langle |f_{m,n}|^2 \rangle^2$, il faut moyenner la norme du paramètre d'ordre sur tous les filaments. Nous traitons d'abord le cas le plus général : un réseau équilatéral, où le

paramètre d'ordre le long d'un filament terminé par les nœuds i et j est donné par l'Eq. I.0.11 en posant $l_{ij} = a$, la longueur d'un filament:

$$\Psi(s_{ij}) = \frac{e^{i\gamma_{is}}}{\sin \frac{a}{\xi_e}} \left[\Psi_i \sin \frac{a - s_{ij}}{\xi_e} + \Psi_j e^{-i\gamma_{ij}} \sin \frac{s_{ij}}{\xi_e} \right] \quad (\text{IV.2.4})$$

Supposons que N est le nombre de nœuds et z le nombre de premiers voisins

$$\begin{aligned} \langle |\Psi|^2 \rangle &= \frac{1}{Nza} \sum_{(i,j)} \int_i^j ds_{ij} |\Psi(s_{ij})|^2 \\ &= \frac{\xi_e}{2Nza \sin^2(a/\xi_e)} \sum_{(i,j)} \left[(|\Psi_i|^2 + |\Psi_j|^2) S_{21} + 2 \operatorname{Re} \left(\Psi_i^* \Psi_j e^{-i\gamma_{ij}} \right) S_{22} \right] \end{aligned}$$

avec $S_{21} = a/\xi_e - 1/2 \sin(2a/\xi_e)$

$$S_{22} = \sin(a/\xi_e) - a/\xi_e \cos(a/\xi_e)$$

et $\sum_{(ij)}$ représente la sommation sur toutes les paires de nœuds voisins. Evidemment, $\sum_{(ij)} = \sum_i \sum_{ji}$ où j_i parcourt tous les premiers voisins de i . Selon l'Eq I.0.13,

$$\sum_{ji} \Psi_{ji} e^{-i\gamma_{ji}} = z \cos(a/\xi_e) \Psi_i$$

et il est facile de voir que $S_{21} + \cos(a/\xi_e) S_{22} = (a/\xi_e) \sin^2(a/\xi_e)$

En utilisant les deux équations, nous obtenons

$$\langle |\Psi|^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_i |\Psi_i|^2 \quad (\text{IV.2.5})$$

De la même façon,

$$\langle |\Psi|^4 \rangle = \frac{1}{Nza} \sum_{(i,j)} \int_i^j ds_{ij} |\Psi(s_{ij})|^4$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\xi_e}{4Nza \sin(4a/\xi_e)} \sum_i \left\{ z |\Psi_i|^4 S_{44} + \sum_{j_i} \left[2 \operatorname{Re}^2 \left(\Psi_i^* \Psi_{j_i} e^{-i\gamma_{ij_i}} \right) + |\Psi_i \Psi_{j_i}|^2 \right] S_{42} \right\} \\
&= \frac{1}{N} \sum_i |\Psi_i|^4 + \\
&+ \frac{\xi_e S_{42}}{4Nza \sin \frac{4a}{\xi_e}} \sum_i \sum_{j_i} \left\{ \frac{1}{z} \sum_{k_i} \operatorname{Re}^2 \left(\Psi_i^* \Psi_{j_i} e^{-i\gamma_{ij_i}} - \Psi_i^* \Psi_{k_i} e^{-i\gamma_{ik_i}} \right) - \frac{1}{2} \left[|\Psi_i|^2 - |\Psi_{j_i}|^2 \right]^2 \right\}
\end{aligned}$$

avec $S_{41} = -3a/\xi_e - 6(a/\xi_e)\cos(a/\xi_e) + 3\sin(2a/\xi_e) + (3/4)(\sin(4a/\xi_e))$

$$S_{42} = 2a/\xi_e - (3/2)\sin(2a/\xi_e) + (a/\xi_e)\cos(a/\xi_e)$$

et la relation $S_{41} + (2\cos^2(a/\xi_e) + 1)S_{42} = 4(a/\xi_e)\sin^4(a/\xi_e)$

est utilisée. Comme la différence entre les paramètres d'ordre sur les deux nœuds voisins est petite, nous avons une bonne approximation

$$\langle |\Psi|^4 \rangle = \frac{1}{N} \sum_i |\Psi_i|^4 \quad (\text{IV.2.6})$$

Pour le réseau carré, vu que la norme du paramètre d'ordre reste invariante par la translation $T : (m,n) \rightarrow (m+lq, m+kq)$ et que f_{mn} est normalisée, nous obtenons finalement

$$\beta_A = \frac{1}{q^2} \sum_{m=0}^{q-1} \sum_{n=0}^{q-1} |f_{m,n}|^4$$

qui est une fonction de l'ensemble $\{c_l \mid l=0,1,\dots, q-1\}$.

Nous prenons comme exemple le cas le plus simple $\Phi/\Phi_0 = 1/2$: Il est déjà connu que

$$\varepsilon_0 = 2\sqrt{2},$$

$$f_0 = \sqrt{(2+\sqrt{2})/2},$$

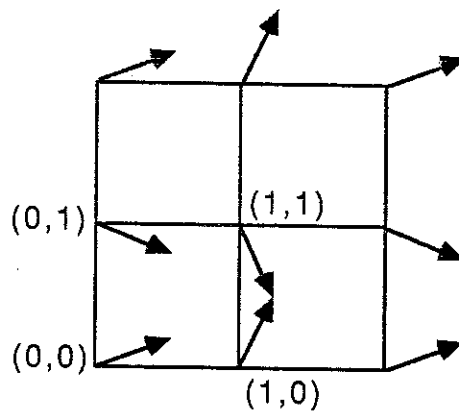
$$f_1 = \sqrt{(2-\sqrt{2})/2}.$$

Après un petit calcul nous trouverons (voir aussi la figure.IV.2.1)

$$\begin{bmatrix} f_{00} & f_{10} \\ f_{01} & f_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\pi}{8}} & e^{i\frac{3\pi}{8}} \\ e^{-i\frac{\pi}{8}} & e^{-i\frac{3\pi}{8}} \end{bmatrix}$$

avec deux coefficients $C_0 = 1$, $C_1 = i$ qui donnent le minimum de $\beta_A = 1$.

Fig. IV.2.1 La configuration de paramètres d'ordre d'un réseau carré pour $\Phi/\Phi_0 = 1/2$.



La procédure d'optimisation numérique a été effectuée pour $q \leq 9$. Les valeurs minimales de β_A en fonction de Φ/Φ_0 sont tracées sur la figure IV.2.2. Comme on le voit $\beta_A(H)$ est une fonction non monotone du champ comme toutes les autres quantités du réseau carré.

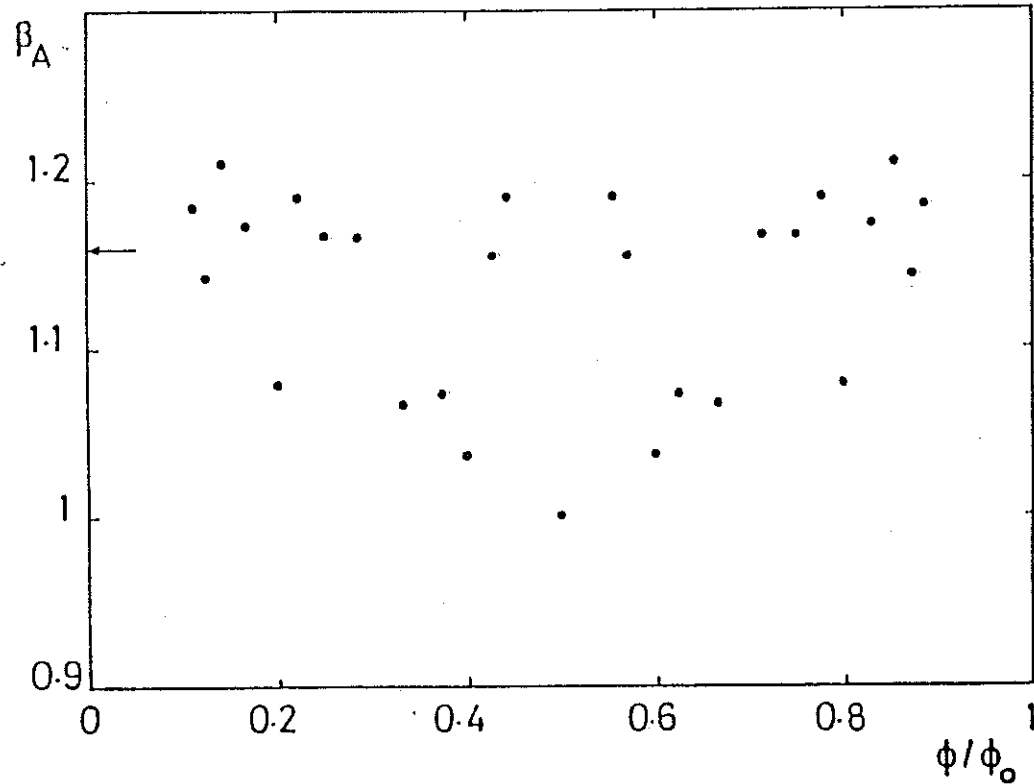


Fig. IV.2.2 Le paramètre β_A en fonction de Φ/Φ_0 . La flèche indique la limite de continuum $\beta_A = 1.16$.

Les configurations d'équilibre de l'amplitude du paramètre d'ordre pour $q = 3$ et 5 sont calculées selon l'Eq IV.2.4 et sont illustrées sur la figure IV.2.3. Elles sont de période $q \times q$ et symétriques par rapport à x et y comme attendu — elles doivent être indépendantes du choix de la jauge. Les flèches représentent les densités de supercourants calculées dans la section suivante. Nous le discuterons plus tard.

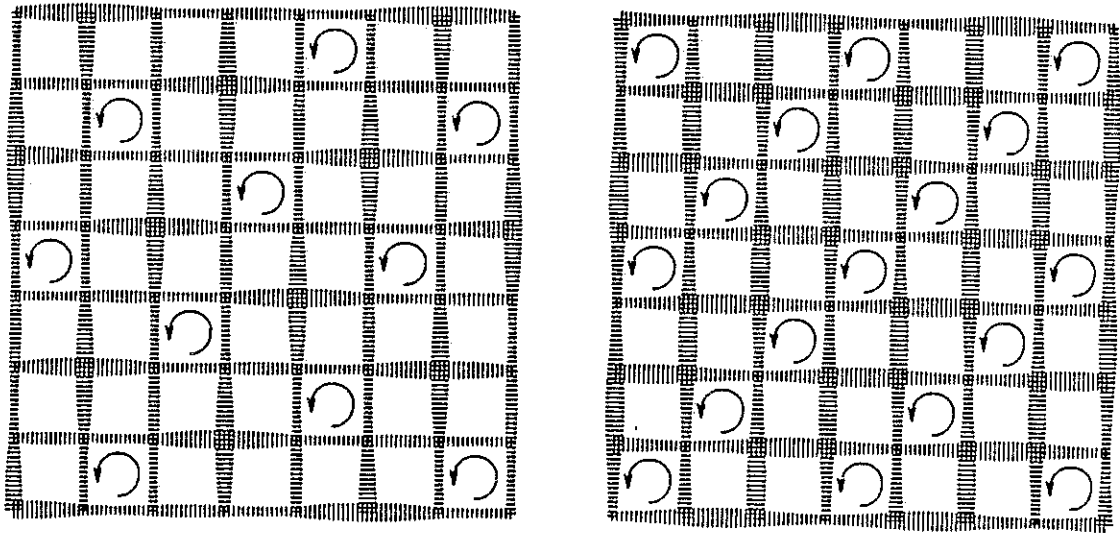
a. $\Phi/\Phi_0 = 1/5$ b. $\Phi/\Phi_0 = 1/3$

Fig. IV.2.3 Les configurations de paramètres d'ordre pour deux cas simples. L'amplitude de Ψ est représentée par la largeur des lignes. Les flèches indiquent la circulation des supercourants.

IV.2.2. Les distributions des courants diamagnétiques pour un réseau carré

Dans cette partie on se limite au cas où les courants appliqués sont nuls bien que ce cas soit irréalisable puisqu'il faut toujours faire passer un courant non nul pour mesurer la résistance de l'échantillon. Dans ce cas, les supercourants sont uniquement dûs au champ magnétique extérieur, et se referment sur eux mêmes. Autrement dit, leurs rotationnels sont non-nuls. Ce sont des courants diamagnétiques. Grâce à un microscope à balayage avec platine cryogénique (LTSEM), on aura la possibilité de "visionner" la distribution des courants[5].

Ecrivons la fonction d'onde (solution linéaire) le long d'un filament:

$$\Psi(s) = \frac{\exp(i\gamma_{is})}{\sin(l/\xi_e)} \left[\Psi_i \sin \frac{l-s}{\xi_e} + \Psi_j \exp(-i\gamma_{ij}) \sin \frac{s}{\xi_e} \right] \quad (\text{IV.2.7})$$

A l'aide de (I.0.12), et après un simple calcul, on a

$$J_{ij} = J_0(T, H) j_{ij} \quad (\text{IV.2.8})$$

$$\text{où} \quad j_{ij} = \mathcal{T} m [f_i^* f_j \exp(-i\gamma_{ij})] \quad (\text{IV.2.9a})$$

$$= |f_i f_j| \sin(\varphi_j - \varphi_i - \gamma_{ij}) \quad (\text{IV.2.9b})$$

est le courant normalisé ou relatif, $|j_{ij}| \leq 1$, et

$$\begin{aligned} J_0(T, H) &= \frac{\Psi_0^2}{\xi_e \sin(l/\xi_e)} \frac{2e\hbar}{m^*} \\ &= J_n \frac{1}{\beta_A} \frac{\xi(0)}{\xi_e \sin(l/\xi_e)} \frac{T_c(H) - T}{T_0} \end{aligned} \quad (\text{IV.2.10})$$

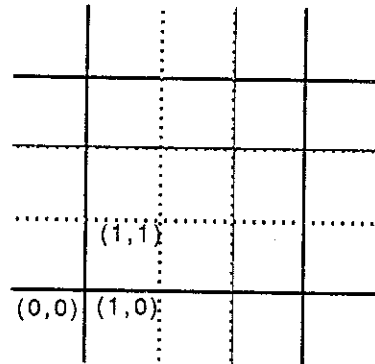
qui gouverne l'amplitude du supercourant. La constante J_n , ayant la dimension d'une densité de courant, est définie par

$$J_n = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{c}{4\pi} \frac{1}{\kappa^2 \xi^3(0)} \quad (\text{IV.2.11})$$

On garde la même notation : $\Psi_i = \Psi_0 f_i$. La détermination de Ψ_0 dans la section précédente nous permet d'avoir la valeur absolue du courant et la distribution relative. Lorsque $T \rightarrow T_c$, $\Psi_0 \rightarrow 0$, $J_0 \rightarrow 0$, tous les supercourants disparaissent. C'est bien le résultat attendu.

Comme pour le calcul de la température critique, on ne peut traiter le problème du courant que sous champ rationnel. Supposons donc $\gamma = 2\pi p/q$. Le système forme un super réseau de période q et dont la maille contient $q \times q$ cellules élémentaires. Considérons, par exemple, le sous-réseau de période q passant par le nœud $(0,0)$ (figure IV.2.4). La fonction d'onde sur le nœud (mq,nq) est $\Psi_{m,n} = \Psi_{0,0} e^{im\alpha + inkq}$.

Fig. IV.2.4 Réseau carré et sous-réseau (lignes solides) pour $\Phi/\Phi_0 = 1/3$.



D'après (I.0.3b), les courants horizontaux et verticaux sur ce réseau sont proportionnels aux dérivées de phases :

$$j_{\rightarrow 0,0} \sim \sin(\alpha)$$

$$j_{\uparrow 0,0} \sim \sin(kq)$$

Et ainsi de suite pour les autres sous réseaux $(1,0)$, $(1,1)$, Donc les courants moyens par fil s'écrivent :

$$j_{\rightarrow} = \frac{1}{q} \sum_n j_{\rightarrow mn} \sim \sin(\alpha) \quad (\text{IV.2.12a})$$

$$j_{\uparrow} = \frac{1}{q} \sum_m j_{\uparrow mn} \sim \sin(qk) \quad (\text{IV.2.12b})$$

En fait, on montrera dans la partie suivante que

$$j_{\rightarrow} = \sin(\alpha)/P'$$

$$j_{\uparrow} = \sin(qk)/P', \quad \text{où } P' = dP(\epsilon)/d\epsilon$$

Si on impose au courant total d'être nul, on a $\alpha=0$, $k=0$, et l'énergie est minimale, puisqu'il n'y a plus d'énergie supplémentaire due aux courants de transport. Rappelons la fonction d'onde associée au bord du spectre:

$$f_{m,n} = \sum_l c_l f_{m-1} \exp(inl\gamma) \quad (\text{IV.2.13})$$

Par remplacement de f_l par f_{mn} et f_j par $f_{m+1,n}$ dans (IV.2.9a) on a le courant entre les nœuds (m,n) et $(m+1,n)$:

$$j_{\rightarrow mn} = \Im m \left[\sum_{l,l'} c_l^* c_{l'} f_{m-1} f_{m+1-l'} e^{in(l'-l)\gamma} \right] = \Im m \left[f_{mn}^* f_{m+1,n} \right] \quad (\text{IV.2.14a})$$

De même, le courant circulant de (m,n) à $(m,n+1)$ est :

$$j_{\uparrow mn} = \Im m \left[\sum_{l,l'} c_l^* c_{l'} f_{m-1} f_{m-l'} e^{in(l'-l)\gamma + il'\gamma - im\gamma} \right] = \Im m \left[f_{mn}^* f_{m,n+1} e^{-im\gamma} \right] \quad (\text{IV.2.14b})$$

On connaît les coefficients $\{c_l\}$ pour $q \leq 5$. Le calcul des densités de supercourants peut être donc accompli. Les cartes de courants calculés sur l'ordinateur sont portées aussi sur la figure IV.2.3 (flèches).

Il est intéressant de comparer la configuration de la fonction d'onde et celle du courant. Nous voyons que le paramètre d'ordre a une amplitude maximale sur les filaments où ne circule pas de supercourant ; sur les bras au contraire, les amplitudes de la fonction d'onde restent petites et varient peu puisque le courant tend à détruire la supraconductivité. Cette propriété est la réminiscence de l'état mixte d'Abrikosov où les lignes de courant coïncident rigoureusement avec les lignes de $|\Psi|^2$ constants [2].

Autour des plaquettes où les courants se ferment, la somme de la phase jauge-invariante $\varphi_j - \varphi_i - \gamma_{ij}$ prend un incrément de 2π puisque les courants fournissent un quantum de flux. Ces boucles singulières jouent un rôle de vortex sur la géométrie du réseau. De plus, les positions de ces vortex coïncident exactement avec l'état fondamental du réseau de jonction Josephson[6] et avec les solutions du réseau supraconducteur dans l'approximation de London.

Le cas où α ou k sont différents de 0 correspond à un courant de transport non nul (courant injecté), il sera traité au chapitre suivant.

IV.3. Bandes sur le spectre d'Hofstadter

Nous avons vu que la dérivée dE/dH joue un rôle important sur la détermination de l'énergie libre et surtout qu'elle donne directement la dérivée de l'aimantation par rapport à la température. En outre il existent des relations intéressantes entre dE/dH , la phase de Berry (phase adiabatique) et la densité d'état [7,8]. Dans cette partie nous donnons l'expression de dE/dH sur la borne du spectre en utilisant l'approximation du continuum. Nous laissons les discussions concernant la phase de Berry dans l'annexe IV.C.

Considérons l'équation presque-Mathieu suivante

$$\epsilon \Psi(x) = \Psi(x+a) + \Psi(x-a) + 2 \cos(k + \gamma \frac{x}{a}) \Psi(x) \quad (\text{IV.3.1})$$

qui est obtenue en changeant l'indice m dans l'Eq 1.1.1 par la coordonnée $x = ma$. Il est connu que pour un γ rationnel, $\gamma = 2\pi p/q$, où p et q sont entiers, premiers entre eux, l'Eq IV.3.1 se réduit à une équation caractéristique $q \times q$ (l'Eq 1.1.2), qui peut être écrite comme

$$P_q(\epsilon) = 2 \cos \alpha + 2 \cos qk \equiv w(\alpha, k) \quad (\text{IV.3.2})$$

où k est un facteur de phase de Floquet ($0 \leq k \leq 2\pi$) est $P_q(\epsilon) = \epsilon^q + \dots$ est un polynôme de ϵ de l'ordre q .

En général, lorsque le potentiel varie très lentement comme une fonction de la position x , l'approximation quasiclassique reste valable. C'est le cas lorsque γ est très petit dans l'Eq IV.3.11, où l'approximation quasiclassique a été utilisée pour étudier la structure de la bande [9]. Pour $\gamma/2\pi$ proche d'une valeur rationnelle, les fonctions d'onde perturbées doivent montrer quelques ressemblances avec celles non-perturbées. Ceci permettra de préciser la validité de l'approximation quasiclassique.

Dans un but de clarté, nous décrivons d'abord cet approche pour $\gamma = 0$ et l'étendons ensuite à des valeurs rationnelles arbitraires.

IV.3.1. limite de $\gamma = 0$

Pour $\gamma = 0$, il n'y a qu'une bande : $-4 \leq \varepsilon \leq 4$. Pour γ tendant vers 0, les niveaux d'énergie $\varepsilon(\gamma)$ admettent la dépendance linéaire de γ . Ceci n'est pas étonnant parce que lorsque γ tend vers 0 les niveaux de Landau de charges libres doivent être retrouvés.

Récrivons l'Eq IV.3.1 en imposant $k = \alpha = 0$ (bord de bande)

$$\varepsilon \Psi(x) = \Psi(x+a) + \Psi(x-a) + 2 \cos(\gamma x/a) \Psi(x) \quad (\text{IV.3.3})$$

Dans (IV.3.3) x est considéré comme une variable continue. La bande $\varepsilon = 4$ à $\gamma = 0$ est associée au mode uniforme :

$$\Psi(x \pm a) = \Psi(x), \quad \text{pour tous les } x \quad (\text{IV.3.4})$$

Dans la limite du continuum, nous pouvons développer l'Eq (IV.3.1) en supposant $x/a \gg 1$, $\gamma \ll 1$ mais $\gamma x/a \ll 1$:

$$\Psi(x \pm a) = \Psi(x) \pm a \frac{d}{dx} \Psi(x) + \frac{1}{2} a^2 \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) \quad (\text{IV.3.5})$$

$$\cos(\gamma x/a) = 1 - 1/2 (\gamma x/a)^2$$

Ces développements restent valables lorsque $\Psi(x)$ varie lentement par rapport au mode uniforme, i.e. à $\gamma \ll 1$. En reportant (IV.3.4) dans (IV.3.2) nous aboutissons à l'équation de Schrödinger pour le simple oscillateur harmonique 1D :

$$(4 - \varepsilon + a^2 \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\gamma^2}{a^2} x^2) \Psi(x) = 0 \quad (\text{IV.3.6})$$

Les valeurs propres associées sont simplement les niveaux de Landau

$$\varepsilon - 4 = (2n + 1) \hbar \omega / 2 \quad (\text{IV.3.7})$$

où

$$\frac{1}{2} \hbar \omega = \left(a^2 \frac{\gamma^2}{a^2} \right)^{1/2} |\gamma|$$

Donc,

$$\varepsilon = 4 \pm (2n+1) |\gamma| \quad (\text{IV.3.8})$$

En particulier, pour $n = 0$ (sur la borne du spectre), nous avons $\varepsilon = 4 - |\gamma|$ et donc

$$d\varepsilon/d\gamma = \pm 1 \quad (\text{IV.3.9})$$

sur le bord du spectre. Notons que le pas du réseau a n'apparaît pas dans le résultat final (limite du continuum).

En écrivant $\varepsilon = 4\cos(a/\xi)$ et $\gamma = 2\pi a^2 H/\Phi_0$, nous obtenons le champ critique du réseau carré

$$H_{c2}^r = \frac{4\Phi_0}{\pi a^2} \sin^2 \frac{a}{2\xi(T)} \quad (\text{IV.3.10})$$

Si $a \ll \xi(T)$, soit $(T_c(0)-T)/T_c(0) \ll 1$,

$$H_{c2}^r = \frac{\Phi_0}{\pi \xi^2(T)} \quad (\text{IV.3.11})$$

En comparant avec H_{c2} d'un supraconducteur massif

$$H_{c2}^m = \frac{\Phi_0}{2\pi \xi^2(T)} \quad (\text{IV.3.12})$$

nous voyons

$$H_{c2}^r = 2 H_{c2}^m$$

Une discussion en détail sur la pente de $H_{c2}(T)$ et l'effet de largeur finie est donnée dans l'annexe IV.A.

IV.3.2. γ rationel quelconque

L'idée essentielle est la même, i.e. réduire l'Eq (IV.3.1) à une équation d'oscillateur harmonique et trouver les niveaux de Landau quantifiés.

Pour $\gamma = \gamma_0 = 2\pi p/q$, nous avons exactement (sur le bord de bande)

$$\Psi(x+qa) = \Psi(x) \quad , \quad \text{pour tous les } x, \quad (\text{IV.3.13})$$

qui est la généralisation de l'Eq (IV.3.4). Pour $\gamma = \gamma_0 + \gamma^*$ avec $\gamma^* \ll \gamma_0$, $\Psi(x+qa)$ est proche de $\Psi(x)$ et donc le développement de l'Eq (IV.3.1) peut être effectué comme pour $\gamma_0 = 0$, i.e. $\gamma^* \ll x/a$, $qa \ll x$ dans l'Eq (IV.3.1). Pour cela, nous développons $\Psi(x \pm qa)$ comme

$$\Psi(x \pm qa) = H^\pm \Psi(x) \quad (\text{IV.3.14})$$

où l'opérateur $H^\pm$ est défini par

$$\begin{aligned} H^\pm &= 1 \pm qa \frac{d}{dx} + \frac{1}{2} (qa)^2 \frac{d^2}{dx^2} \\ &= 1 \pm \mathcal{H} + \frac{1}{2} \mathcal{H}^2, \quad \mathcal{H} = qa \frac{d}{dx} \end{aligned} \quad (\text{IV.3.15})$$

Dans la suite, nous noterons l'expression approximative de $2\cos(\gamma x/a) + m - \varepsilon$ dans l'approximation du continuum par

$$a_m = 2 \cos [r + m(\gamma_0 + \gamma^*)] - \varepsilon, \quad r \equiv (x/a) \gamma^* \gg \gamma^* \quad (\text{IV.3.16})$$

Les équations propres pour $\Psi(x+la)$, $-(q-1) \leq l \leq (q-1)$ peuvent s'écrire sous forme d'une équation matricielle $(2q-1) \times (2q-1)$:

$$\begin{bmatrix} a_{-(q-1)} & 1 & \dots & 0 & H^- & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_{-(q-2)} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ \vdots & & & a_{-1} & 1 & 0 & & \\ \vdots & & & 1 & a_0 & 1 & & \\ \vdots & & & 0 & 1 & a_1 & & \\ 0 & & & 0 & 0 & 0 & a_{q-2} & 1 \\ 0 & & & 0 & H^+ & 0 & 1 & a_{q-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi(x-(q-1)a) \\ \Psi(x-(q-2)a) \\ \vdots \\ \Psi(x-a) \\ \Psi(x) \\ \Psi(x+a) \\ \vdots \\ \Psi(x+(q-2)a) \\ \Psi(x+(q-1)a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.3.17})$$

Pour la suite, il est commode d'éliminer $\Psi(x)$ dans l'Eq (IV.3.17) en faisant passer à droite la colonne centrale, ce qui donne les deux équations non-homogènes

$$\begin{bmatrix}
 a_{-(q-1)} & 1 & & & & \\
 1 & a_{-(q-2)} & & & & \\
 & & 1 & & & \\
 & & 1 & a_{-1} & 0 & \\
 & & & 0 & a_1 & 1 \\
 & & & & 1 & \\
 & & & & & a_{q-2} & 1 \\
 & & & & 1 & a_{q-1} &
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \Psi(x-(q-1)a) \\
 \Psi(x-(q-1)a) \\
 \\
 \Psi(x-a) \\
 \Psi(x+a) \\
 \\
 \Psi(x+(q-2)a) \\
 \Psi(x-(q-1)a)
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 H^- \\
 0 \\
 \\
 1 \\
 1 \\
 \\
 0 \\
 H^+
 \end{bmatrix}
 \Psi(x) \quad (\text{IV.3.18a})$$

et

$$\Psi(x+a) + \Psi(x-a) + a_0 \Psi(x) = 0 \quad (\text{IV.3.18b})$$

La première équation (IV.3.18a) peut être résolue pour $\Psi(x \pm a)$:

$$\Psi(x \pm a) = - \frac{\Delta^\pm}{\Delta} \Psi(x) \quad (\text{IV.3.19})$$

qui sera ensuite reportée dans l'Eq (IV.3.18b). Ici nous avons employé les notations suivantes :

$\Delta = \det[A]$, où A représente la matrice du membre gauche de l'Eq (IV.3.18a), et

$$\Delta^+ = \det \begin{bmatrix}
 a_{-(q-1)} & 1 & \cdot & \cdot & 0 & H^- \\
 1 & a_{-(q-2)} & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\
 \cdot & & & & & \\
 \cdot & & & a_{-1} & 1 & \\
 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 & & & & 0 & a_2 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & a_{q-2} & 1 \\
 & & & H^+ & 0 & 1 & a_{q-1}
 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.3.20})$$

et Δ^- peut être défini similairement.

Afin d'accomplir le calcul explicite, il est utile de définir les déterminants $\Delta^{m,n}$ par

$$\Delta^{m,n} = \det \begin{bmatrix} a_m & 1 & & \\ & 1 & a_{m+1} & \\ & & & 1 \\ & & 1 & a_n \end{bmatrix} \quad (\text{IV.3.21})$$

pour $m \leq n$ et $\Delta^{m,n} = 0$ pour $m > n$. Pour les termes de $\Delta^{m,n}$ nous avons respectivement

$$\begin{aligned} \Delta^- &= \Delta^{-1,-(q-1)} \Delta^{1,(q-1)}, \\ \Delta^+ &= \Delta^{-1,-(q-1)} (\Delta^{2,q-1} + (-1)^q H^+) \end{aligned} \quad (\text{IV.3.22})$$

$$\text{et} \quad \Delta^- = \Delta^{1,q-1} (\Delta^{-2,-(q-1)} + (-1)^q H^-)$$

En reportant l'Eq IV.3.19 dans l'Eq IV.3.18b, nous obtenons l'équation suivante pour $\Psi(x)$ ($\Delta^{-1,-(q-1)} \neq 0$)

$$\odot \Psi(x) = 0 \quad (\text{IV.3.23})$$

où $\odot$ dénote l'opérateur suivant

$$\begin{aligned} \odot &= [(a_0 \Delta^{1,q-1} \Delta^{-1,-(q-1)} \\ &- \Delta^{-1,-(q-1)} \Delta^{2,q-1} - \Delta^{1,q-1} \Delta^{-2,-(q-1)}) \\ &+ (-1)^{q+1} (\Delta^{-1,-(q-1)} H^+ + \Delta^{1,q-1} H^-)] / \Delta^{1,q-1} \end{aligned} \quad (\text{IV.3.24})$$

Dans l'annexe IV.B nous démontrons qu'il équivaut à un opérateur d'oscillateur d'harmonique de la forme suivante

$$\odot = (-1)^q \left\{ \left[P_q(\varepsilon) - 4 - q^2 a^2 \frac{d^2}{dx^2} + q \frac{2\gamma^{*2}}{a^2} x^2 \right] + (-1)^q \gamma^* \frac{\partial}{\partial \gamma^*} [\Delta_q + \Delta^{1,q-2} - \Delta^{-2}] \right\} \quad (\text{IV.3.25a})$$

$$= (-1)^q \left\{ \left[P_q(\varepsilon) - 4 - q^2 a^2 \frac{d^2}{dx^2} + q \frac{2\gamma^{*2}}{a^2} x^2 \right] + (-1)^q \gamma^* \frac{\partial}{\partial \gamma^*} [\Delta^{0,q-1} - \Delta^{2,q-1}] \right\} \quad (\text{IV.3.25b})$$

Dans ces équations, la dérivée $\partial/\partial\gamma^*$ est prise aux $\gamma^* = \Gamma = 0$.

Donc, pour une valeur rationnelle donnée, $\gamma_0 = 2\pi p/q$, nous avons l'équation de Schrödinger pour $\Psi(x)$

$$\left[q^2 a^2 \frac{d^2}{dx^2} - q \frac{2\gamma^{*2}}{a^2} x^2 \right] \Psi(x) = \left[P_q(\varepsilon) - 4 + (-1)^q \gamma^* \frac{\partial}{\partial \gamma^*} [\Delta^{0,q-1} - \Delta^{2,q-1}] \right] \Psi(x) \quad (\text{IV.3.26})$$

C'est le résultat principal de cette section. En comparaison avec l'Eq IV.3.6, correspondant à $p=0$, $q=1$, nous remarquons l'apparition d'un nouveau terme dans l'Eq IV.3.26 : $(-1)^q \gamma^* \partial/\partial \gamma^* (\Delta^{2,q-1} - \Delta^{0,q-1})$. Ce facteur non trivial est le responsable de la discontinuité asymétrique des niveaux de Landau à γ rationnel.

Les valeurs propres de l'Eq IV.3.26 sont ici encore données par $(n+1/2)\hbar\omega$, $n = \text{entier}$. En particulier, sur le bord du spectre ($n=0$), nous avons l'équation explicite pour $\varepsilon(\gamma)$

$$P_q(\varepsilon) - 4 + (-1)^q \gamma^* \frac{\partial}{\partial \gamma^*} [\Delta^{0,q-1} - \Delta^{2,q-1}] = \left[q^2 a^2 \frac{2\gamma^{*2}}{a^2} \right]^{1/2} = q^2 |\gamma^*| \quad (\text{IV.3.27})$$

qui permet à priori le calcul de $\varepsilon(\gamma)$ pour $\gamma^* \ll \gamma$. Par exemple, à $\gamma=0$, nous retrouvons l'équation du bord du spectre : $P_q(\varepsilon)=4$. Cependant, l'Eq IV.3.27 ayant été déduite à premier ordre en γ^* , la seule information applicable est la valeur de $\partial\varepsilon/\partial\gamma$ à $\gamma=\gamma_0$. La dérivée par rapport à γ^* de l'Eq IV.3.27 donne

$$S^\pm \equiv \frac{\partial\varepsilon}{\partial\gamma^*} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\gamma} = \left[(-1)^q \frac{\partial}{\partial\gamma^*} (\Delta^{0,q-1} - \Delta^{2,q-1}) \pm q^2 \right] / P'_q(\varepsilon) \quad (\text{IV.3.28})$$

où $P'_q(\varepsilon) = dP(\varepsilon)/d\varepsilon$ pris à $\varepsilon_0 = \varepsilon(\gamma_0)$ et comme avant $\partial/\partial\gamma^*$ est prise à $\gamma^* = \Gamma = 0$.

Comme attendu, le résultat de l'Eq IV.3.9 est retrouvé comme un cas particulier, correspondant à $p=0$, $q=1$ et $P_q(\varepsilon)=\varepsilon$.

Exemple :

$p/q = 1/2$:

nous avons $\gamma_0 = \pi$, $\partial/\partial\gamma \Delta^{0,q-1} = 0$, $\Delta^{2,q-1} = 0$, qui nous donne

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \gamma} = \pm \frac{q^2}{2\varepsilon} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

au bord du spectre $\varepsilon_0 = 2\sqrt{2}$. Dans ce cas $\varepsilon(\gamma)$ présente un pic de rehaussement symétrique qui correspond à une dégénérescence accidentelle.

$p/q = 1/3$:

Dans ce cas, $\varepsilon_0 = 1 + \sqrt{3}$ et $P_3(\varepsilon) = \varepsilon^3 - 6\varepsilon$. Un simple calcul donne $d\varepsilon/d\gamma = [\sqrt{3}(\varepsilon^2 - \varepsilon - 6) \pm 9] / [3\varepsilon^2 - 6]$. Donc pour $\varepsilon = \varepsilon_0 = 1 + \sqrt{3}$,

$$\frac{d\varepsilon}{d\gamma} = \begin{cases} -(1 + \sqrt{3})/4 \\ (7 - 5\sqrt{3})/4 \end{cases}$$

L'existence de ce pic asymétrique est la propriété générale de $\varepsilon(\gamma)$ près de γ rationnel.

Sur la figure IV.3.1 nous montrons les résultats $S^\pm$ ainsi obtenus pour les rationels, $\gamma = p/q$, $q \leq 30$. Nous voyons clairement l'asymétrie générale de $\varepsilon(\gamma)$. En plus du calcul exact de $S^\pm$, appelé ici $S^\pm_{\text{ex}}$, nous avons aussi calculé numériquement les $S^\pm_{\text{num}} = \Delta\varepsilon/\Delta\gamma$ de la façon suivante. Pour un $\gamma_0 = 2\pi p/q$ donné, les deux $\gamma' = 2\pi p'/q'$ les plus proches ($q' \leq 73$) ont été utilisés pour calculer $\Delta\gamma$ et $\Delta\varepsilon$. Les différences $\Delta S^\pm = S^\pm_{\text{ex}} - S^\pm_{\text{num}}$ sont montrés sur la figure IV.3.2. Dans les conditions de validité de l'approximation du continuum : $q^2|\gamma^*| \ll 1$, les $\Delta S^\pm$ sont suffisamment petits.

Nous finissons cette partie par quelques remarques :

a) Clairement, l'approximation du continuum peut être utilisée pour traiter d'autres équations presque-Mathieu qui apparaissent dans d'autres réseaux (triangulaire, hexagonal, etc.)

b) Au voisinage de γ rationnel, le bord du spectre $\varepsilon(\gamma)$ peut être approximée par une fonction linéaire de γ , dont la pente est donnée par l'Eq IV.3.40. La condition de validité de cette approximation est $q^2|\gamma^*| \ll 1$, qui peut s'expliquer comme suit. Dans l'Eq IV.3.13 nous voyons que la période du potentiel est $\approx q$. L'approximation du continuum reste valable si la période de perturbation est beaucoup plus grande que q , i.e. $1/(q\gamma^*) \gg q$, qui est équivalente à la condition précédente.

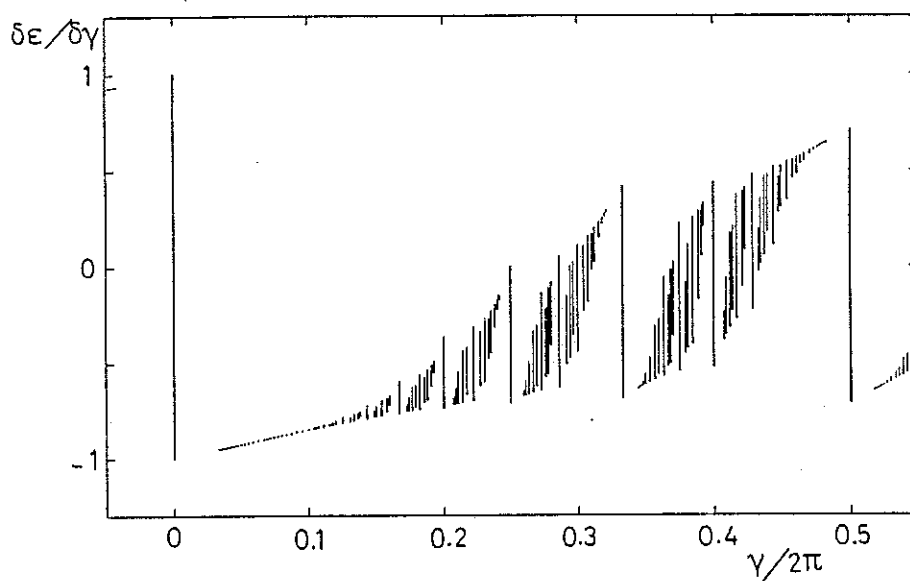


Fig. IV.3.1 Les pentes $\partial\epsilon/\partial\gamma$ au champ rationnel $\gamma = 2\pi p/q$. Chaque droite verticale représente le saut entre la pente gauche S^- et droite S^+ .

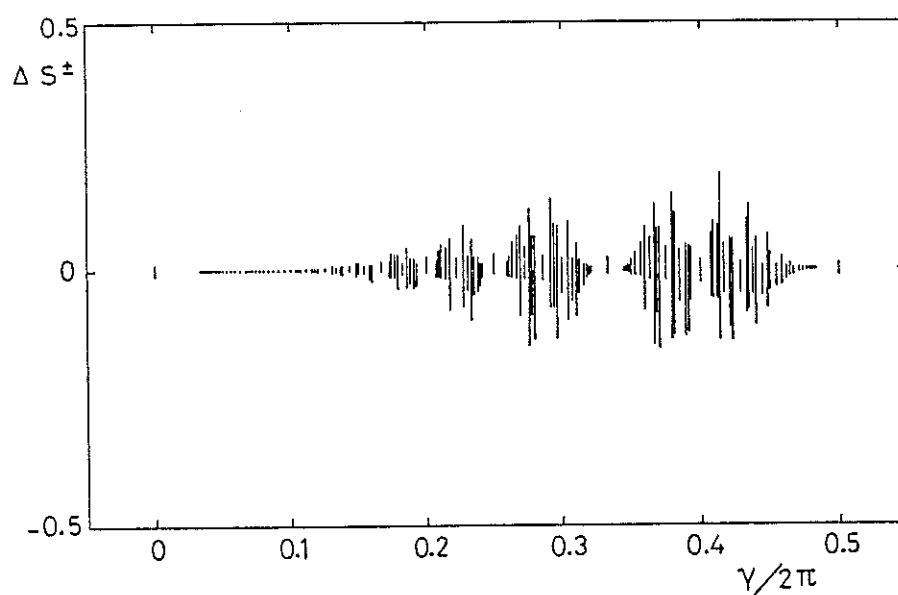


Fig. IV.3.2 Les différences $\Delta S^\pm = S^\pm_{\text{ex}} - S^\pm_{\text{num}}$ en fonction de γ .

IV.3.3. Vérification par l'expérience de Gandit^[10,11]

Une nouvelle technique expérimentale qui permet de mesurer directement la dérivée de l'aimantation par rapport à la température dM/dT a été réalisée récemment par P. Gandit et J. Chaussy. A l'aide de cette technique un réseau carré supraconducteur d'indium a été étudié^[10,11] et le résultat confirme qualitativement le calcul de $de/d\gamma$ ^[11].

Supposons que l'état équilibre d'un réseau supraconducteur subisse une modulation de la température dT . Si dT est suffisamment petit, il n'y a pas de variation du champ au premier ordre. En dérivant l'Eq. IV.1.22b par rapport à la température le préfacteur concernant T s'élimine et donc

$$\frac{dM}{dT} \sim - \frac{dT_c(H)}{dH}$$

En utilisant les relations $T_c(H) = T_c(0) \xi^2(0)/\xi^2$ et $\xi = 4\cos a/\xi$ pour le réseau carré, le diagramme $dT_c(H)/dH$ est porté sur la figure IV.3.3a tandis que dM/dT mesuré (extrait de l'article de Gandit et al^[11]) est montré à côté. Nous voyons l'accord qualitatif entre eux --- les chutes sur chaque Φ/Φ_0 rationel, qui apparaissent dans le diagramme expérimental, sont beaucoup moins nets ($\Phi/\Phi_0 = 1/2$) à cause du rapport signal/bruit trop faible.

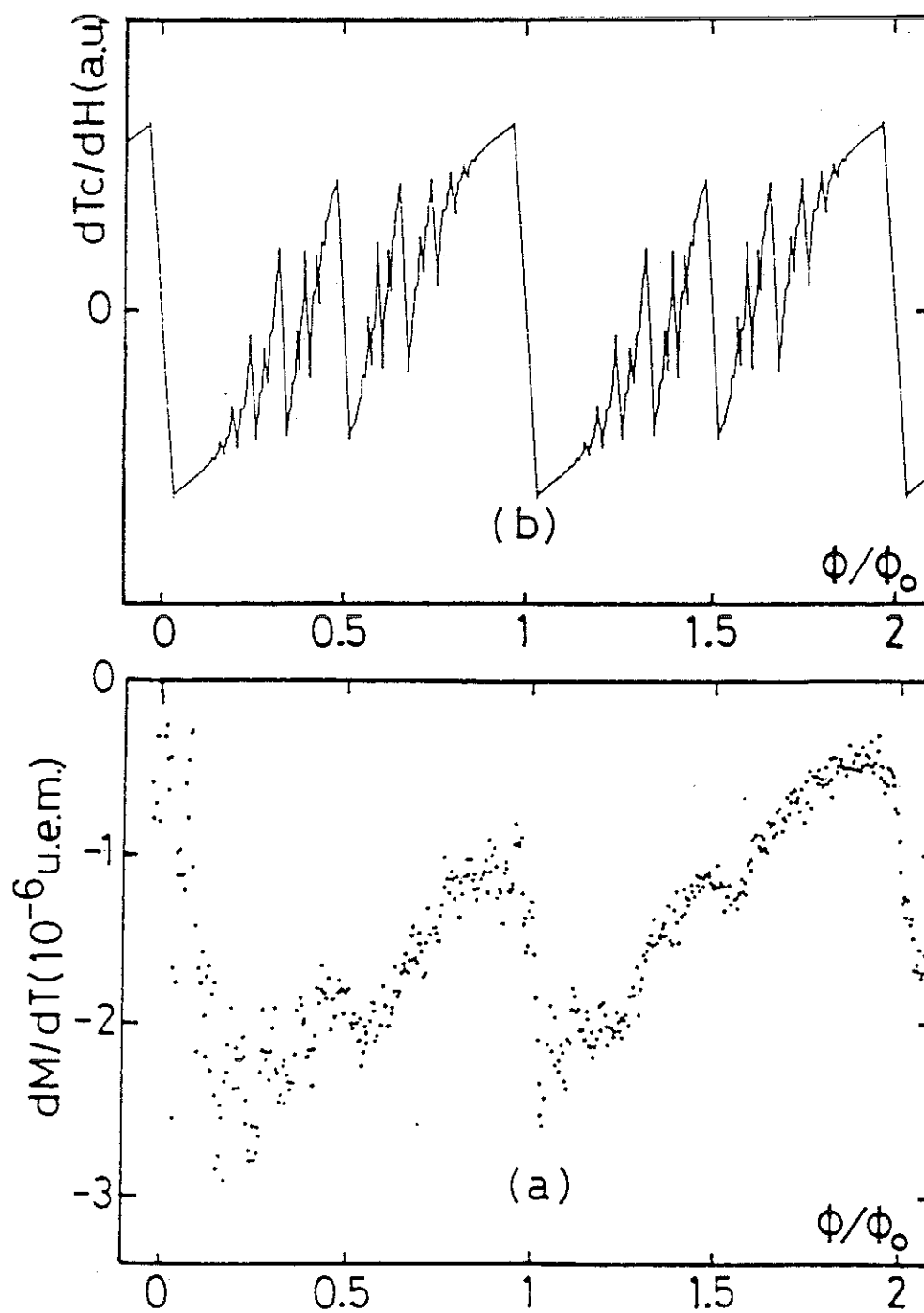


Fig. IV.3.3

a. La dérivée dT_c/dH en fonction de Φ/Φ_0 .

b. dM/dT mesuré (extrait de la référence [11]).

REFERENCES

- [1] D. St-James et al. *Type II Superconductivity*.
W. H. Kleiner, L. M. Roth et S. H. Autler,
Phys. Rev. 133, A1226 (1964)
- [2] De Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys*.
- [3] R. P. Huebener, *Magnetic flux structures in superconductors*,
New York (1979)
- [4] M. Tinkham, Phys. Rev. 129 2413 (1963)
- [5] J. Bosh, R. Gross, R. Huebeuer, B. Pannetier, à paraître
- [6] S. Teitel et C. Jayaprakash, Phys. Rev. Lett. 51 1999 (1983)
- [7] R. Rammal, Y. Y. Wang, B. Pannetier, soumis à Phys. Rev. Lett
- [8] Y. Y. Wang, B. Pannetier et R. Rammal,
Soumis à J. Phys. (Paris)
- [9] J. B. Sokoloff, Phys. Reports 126, 189 (1985)
- [10] P. Gandit, J. Chaussy, B. Pannetier, R. Rammal, A. Vareille et
A. Tissier, Frühjarstagung der Schweiz. Physikalischen
Gesellschaft 59 (1986)
- [11] P. Gandit, J. Chaussy, B. Pannetier, A. Vareille et A. Tissier,
Europhys. Lett., 623 3 (1987)

Annexe IV.A.

FINITE WIDTH EFFECT ON THE UPPER CRITICAL FIELD H_{c2} OF SUPERCONDUCTING NETWORKS

Y.Y. WANG, B. DOUCOT, R. RAMMAL and B. PANNETIER

Centre de Recherches sur les Très Basses Températures, CNRS, BP 166X, 38042 Grenoble Cedex, France

Received 13 August 1986; accepted for publication 8 October 1986

A recent prediction for the continuum limit of the upper critical field of infinite superconducting networks $H_{c2}(T) = dH_{c2}^{(\text{bulk})}$ (d =spatial dimension of the network) is checked experimentally. A direct comparison of the measured critical fields on both samples: film and infinite 2D regular networks, made of the same material, support strongly this theoretical prediction. The deviation of the proportionality coefficient from $d=2$ is attributed to the finite width of wires. Wires of finite width are shown to be responsible for a renormalization of the diffusion coefficient of Cooper pairs. The expression so obtained for H_{c2} as a function of the filling factor is consistent with the measured value.

Recent technical and theoretical advances have led to a revival of interest in the magnetic properties of superconducting networks [1,2]. Up to now, the networks considered fall into three categories: infinite regular arrays (honeycomb lattice [3], square lattice [4]), fractal networks (Sierpinski gasket [5,6], Sierpinski carpet [6]) and aperiodic structures (quasi-periodic [6,7], Penrose pattern [7]). Different physical properties have been studied experimentally: (i) the critical field for the onset of superconductivity H_{c2} [3,7] (ii) the zero-field susceptibility [8] and (iii) the magnetization [8].

The network structures considered are made of wires, so thin that they can sustain diamagnetic currents only by loop formation. Today, a large number of the available theoretical predictions have been checked positively. In this respect, a careful investigation of the normal-superconducting phase boundary H_{c2} has been done for both network structures. The rich fine structure of this boundary line has been the object of a successful quantitative analysis for both euclidean (square and honeycomb lattices) as well as fractal networks (Sierpinski gasket).

Among the various investigated properties of finite and infinite superconducting networks, the following expression for $H_{c2}(T)$ has been obtained [2]:

$$H_{c2}(T) = \frac{d}{2} \frac{\phi_0}{\pi \xi^2(T)} = dH_{c2}^{(\text{bulk})}(T). \quad (1)$$

Here $H_{c2}(T)$ refers to the continuum limit, i.e., as $T \rightarrow T_{c0}$ and $H_{c2} \rightarrow 0$ of the upper critical field of euclidean networks. In eq. (1), d is the dimension of the network, $\xi(T)$ is the temperature-dependent Ginzburg-Landau coherence length of the superconducting wires forming the network, $H_{c2}^{(\text{bulk})}$ is the upper critical field of the corresponding bulk material (same $\xi(T)$), and T_{c0} is the zero field superconducting transition temperature. The above eq. (1) has been checked against 2D square, triangular and honeycomb lattices and 3D simple cubic and centered cubic lattices.

The result eq. (1) can actually be understood as a simple renormalization of the diffusion coefficient of Cooper pairs. Further investigations [9] have led to a generalized version of eq. (1), particularly for anisotropic networks. For instance, in a 2D rectangular network (side lengths a and b), eq. (1) becomes:

$$H_{c2} = (\sqrt{a}/\sqrt{b} + \sqrt{b}/\sqrt{a}) H_{c2}^{(\text{bulk})}, \quad (1')$$

The square lattice ($d=2$) result is recovered at $a=b$. Similarly, for a 3D simple rectangular network (side lengths a , b and c), eq. (1) generalizes as follows:

$$H_{c2} = (\sqrt{a}/\sqrt{b} + \sqrt{b}/\sqrt{a} + \sqrt{c^2/ab}) H_{c2}^{(\text{bulk})}. \quad (1'')$$

The applied field is assumed to be along the c sides of the unit cell. In general, $H_{c2} \geq 2H_{c2}^{(\text{bulk})}$ seems to be obeyed at $d=2$ (equality for networks with an n -

fold rotational symmetry $n > 3$). The purposes of this note are: (i) to check eq. (1) experimentally, by comparing directly and for the same material, the corresponding behavior of H_{c2} on a film and an infinite euclidean network; (ii) to generalize eq. (1) by taking into account the finite width of wires (i.e. filling factor of the lattice). It turns out that, up to the finite width corrections, eq. (1) is actually well obeyed. Note that similar width effects appear in some related problems such as the quantum oscillations of the magnetoconductance of normal metal networks [10].

In order to test experimentally the predictions of eq. (1) we have made a direct comparison between the measured upper critical field slopes dH_{c2}/dT in an homogenous film and an infinite 2D regular network. According to eq. (1) the expected ratio is 2. Since the superconducting coherence length is extremely sensitive to the material parameters, purity, thickness, strains, etc., one must compare samples made of the same material but differing only by their geometry. Accordingly, the measurements were performed on two samples taken in adjacent parts of a unique aluminium film electron beam evaporated on the same silicon wafer. The Al layer, 800 Å thick has a sheet resistance $0.33 \Omega/\square$ at room temperature. The network pattern, defined by optical lithography, was etched on one of the samples by reactive ion etching. The network consists of a square array of $2 \mu\text{m}$ wide aluminium lines with period $6 \mu\text{m}$. It contains about 2.7 million identical square loops of area $36 \mu\text{m}^2$. The reference film was a strip 5 mm wide and 10 mm long. Careful measurement of the resistivities and the resistance ratios RRR between room temperature and 4.2 K (respectively 5.20 and 5.30 for the two films) confirmed that the material parameters of the Al network were not altered by etching process and justify the statement that the two films have identical superconducting properties and differ only by their geometries. The samples were attached to a thermally regulated block held in vacuum. Control of the temperature to better than 10^{-5} K was achieved thanks to a PID (Proportional, Integral, Derivative) thermal regulation. The sample resistance was measured by a four terminal resistance bridge at low bias current $\leq 1 \mu\text{A}$.

The zero-field critical temperatures, defined as the midpoint of the resistive transition are respectively

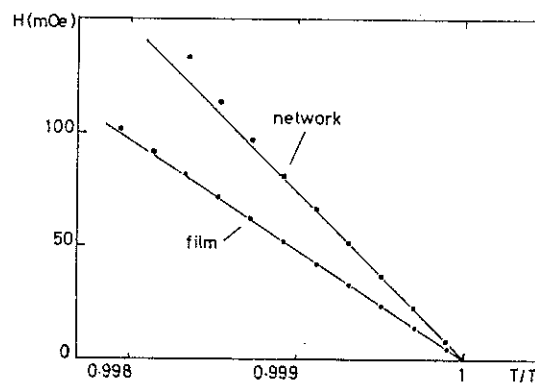


Fig. 1. Plot of the upper critical field H_{c2} in an Al square superconducting network (a) and in a reference 2D film made of the same material (b).

1.252 and 1.265 K for the network and the 2D film. The slight difference is considered not to be significant.

Fig. 1 shows the low-field data for the two samples. As expected the critical temperature is a linear function of the magnetic field. The measured slopes dH/dT are respectively 57.5 Oe/K for the network and 38.5 Oe/K for the uniform film. The obtained ratio 1.49 is independent within 10% of the criterion chosen to define the resistive transition: 20, 30, ..., 70% of the normal state resistance.

The measured values of the slopes dH_{c2}/dT at zero-field critical temperatures seem to support the prediction of eq. (1). However, the proportionality factor we found is lower than the predicted one 2. This apparent discrepancy can be explained as a result of the finite width of wires. Namely, eq. (1) holds only if the network is made of wires having a vanishing width. The extension of this result requires the renormalization of the diffusion coefficient for Cooper pairs, not only by the dimension of the network but also by the filling factor. Such an expression for $H_{c2}(T)$ can actually be obtained through a reanalysis of the network equations. For the sake of simplicity, we shall illustrate the argument for a square network (fig. 2). Let us denote by $\eta = 1 - (1 - w/a)^2$, $0 \leq \eta \leq 1$, the filling factor of the network, where w/a is the ratio width/side length of wires. $\eta = 1$ corresponds to the bulk limit and $\eta = 0$ is associated to wires of vanishing width. The renormalized expression for the diffusion coefficient can

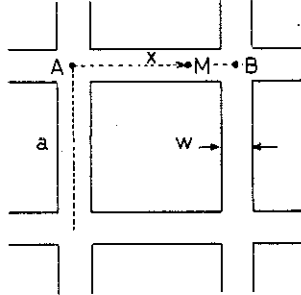


Fig. 2. Elementary cell of a square network made of wires of width w .

be obtained without resorting to a full solution of the linearized 2D Ginzburg-Landau equations (GL). This can be done at zero field as follows. Close to the critical temperature, GL equations reduce to a Schrödinger-like equation:

$$\{[\nabla - (2\pi/\phi_0)\mathbf{A}]^2 + (1/\xi^2)\} \Psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (2)$$

Here $\Psi(\mathbf{r})$ denotes the order parameter amplitude at $\mathbf{r}$. Integrating this equation over the volume of wires, around point A, leads to the following continuity equation for currents at zero-field:

$$w \sum_M \nabla \Psi_{AM} + (w^2/\xi^2) \Psi_A = 0. \quad (3)$$

Here the gradient term is taken along the dashed path AB, at point M of abscissa x , with respect to the origin A ($x=0$) and Ψ_{AM} refers to $\Psi(x)$. The solution of eq. (2) on the dashed line:

$$\Psi(x) = \Psi_A \cos(x/\xi) + [\Psi_B - \Psi_A \cos(a/\xi)] \sin(x/\xi) / \sin(a/\xi). \quad (4)$$

Now replacing $\nabla \Psi_{AM} = d\Psi(x)/dx$ by its value at $x=w/2$, one obtains, after an expansion to first order in w/ξ

$$[4 \cos(a/\xi) + (w/\xi) \sin(a/\xi)] \Psi_A - \sum_B \Psi_B = 0. \quad (5)$$

This approximation is actually valid at $w/a \ll 1$, and reproduces the correct behavior at $w=0$ as well as $w=a$. In particular, this leads to the renormalized mass term: $4a \cos(a/\xi) + (w/\xi) \sin(a/\xi)$ which reduces to the coordination number ($=4$) at $a \ll \xi$ and $w=a$ as it should.

When used in the network equations, in the pres-

ence of a magnetic field H , the above result gives

$$H_{c2} = (2 - wa) H_{c2}^{(\text{bulk})}, \quad (6)$$

where $H_{c2}^{(\text{bulk})} = \phi_0/2\pi\xi^2(T)$. As expected, $w=a$ reproduces the bulk limit, and $w=0$ that of eq. (1) for $d=2$. Using the expression of the filling factor η , one obtains finally

$$H_{c2} = [1 + (1 - \eta)^{1/2}] H_{c2}^{(\text{bulk})}, \quad (7)$$

which interpolates between the bulk and the network limits. This result can actually be generalized to simple cubic networks of spatial dimension d :

$$H_{c2} = [1 + (d-1)(1 - \eta)^{1/d}] H_{c2}^{(\text{bulk})}, \quad (7)$$

where $\eta = 1 - (1 - w/a)^d$ is the corresponding filling factor.

Note that a most complete analysis requires the renormalization of the mass term by the magnetic field also. However, it turns out that such a correction is actually quadratic in magnetic field, and can then be neglected.

Using eq. (7), with a filling factor $\eta \approx 0.556$ corresponding to the measured network, one obtains $H_{c2}/H_{c2}^{(\text{bulk})} = 1.67$ which is somewhat larger than the measured value 1.49. This discrepancy is not surprising since eqs. (6) and (7) have been established in the limit of a very small filling factor $\eta \rightarrow 0$. Although it reproduces the exact limits at $\eta=0$ and $\eta=1$ we do not know how to interpolate H_{c2} between these two limits. In addition, the above dependence (eq. (7)) on the filling factor will probably break down for large filling factors.

In summary, we have checked experimentally the anomalous slope of the upper critical field of a superconducting network close to T_c . We observe unambiguously an enhancement of the critical slope in the network geometry which is attributed to the renormalization of the diffusion coefficient of Cooper pairs. The available space for diffusion in the network geometry is reduced to the one-dimensional strands of network. Equivalently we can say that the laplacian operator in the CL equations must be renormalized by a constant factor. The actual enhancement factor is explained by taking into account the finite width of wires.

We gratefully acknowledge J.C. Villegier in LETI Grenoble for valuable help in sample fabrication.

References

- [1] S. Alexander, Phys. Rev. B 27 (1983) 1541.
- [2] R. Rammal, T.C. Lubensky and G. Toulouse, Phys. Rev. B 27 (1983) 2820.
- [3] B. Pannetier, J. Chaussy and R. Rammal, J. Phys. (Paris) Lett. 44 (1983) 853.
- [4] B. Pannetier, J. Chaussy, R. Rammal and J.C. Villegier, Phys. Rev. Lett. 53 (1984) 1845.
- [5] J.M. Gordon, A.M. Goldman, J. Maps, D. Costello, R. Tiberio and B. Whitehead, Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 2280.
- [6] B. Pannetier et al., to be published.
- [7] A. Behrooz, M. Burns, H. Deckman, D. Levine, B. Whitehead and P.M. Chaikin, Phys. Rev. Lett. 57 (1986) 368.
- [8] P. Gandit, J. Chaussy, R. Rammal, B. Pannetier, A. Vareille and A. Tissier, to be published.
- [9] C.R. Hu, unpublished.
- [10] B. Doucot, R. Rammal and B. Pannetier, to be published.

Annexe IV.B.

Nous voulons dans cette annexe déduire l'opérateur $\mathcal{O}$:

$$\mathcal{O} = [(a_0 \Delta^{1,q-1} \Delta^{-1,-(q-1)} - \Delta^{-1,-(q-1)} \Delta^{2,q-1} - \Delta^{1,q-1} \Delta^{-2,-(q-1)}) + (-1)^{q+1} (\Delta^{-1,-(q-1)} H^+ + \Delta^{1,q-1} H^-)] / \Delta^{1,q-1} \quad (\text{IV.B.1})$$

Notons que $\Delta^{m,n}$ est une fonction des deux variables indépendantes Γ et γ^* , qui peuvent être développées pour γ^* et Γ petits comme :

$$\Delta^{m,n}(\Gamma, \gamma^*) = \Delta^{m,n}(0,0) \left[1 + \Gamma \frac{\partial}{\partial \Gamma} + \gamma^* \frac{\partial}{\partial \gamma^*} + \frac{1}{2} \Gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial \Gamma^2} \right] \quad (\text{IV.B.2})$$

Ici, nous avons négligé les termes d'ordre $\mathcal{O}(\gamma^* \Gamma)$ et $\mathcal{O}(\gamma^{*2})$ en comparant avec $\mathcal{O}(\Gamma^2)$.

Afin d'aller plus loin, il est utile de réduire l'expression de l'opérateur $\mathcal{O}$. Cette réduction peut être effectuée grâce aux relations symétriques suivantes :

$$\text{i) } \Delta^{m,n}(0,0) = \Delta^{-m,-n}(0,0) = \Delta^{q-n,q-m}(0,0) = \Delta^{m-q,n-q}(0,0) \quad (\text{IV.B.3a})$$

$$\text{ii) } \frac{\partial}{\partial \gamma^*} \Delta^{m,n}(0,0) = \frac{\partial}{\partial \gamma^*} \Delta^{-m,-n}(0,0) \quad (\text{IV.B.3b})$$

$$\text{iii) } \frac{\partial}{\partial \Gamma} \Delta^{m,n}(0,0) = -\frac{\partial}{\partial \Gamma} \Delta^{-m,-n}(0,0) = \frac{\partial}{\partial \Gamma} \Delta^{m-q,n-q}(0,0) \quad (\text{IV.B.3c})$$

$$\text{iv) } \frac{\partial^2}{\partial \Gamma^2} \Delta^{m,n}(0,0) = \frac{\partial^2}{\partial \Gamma^2} \Delta^{-m,-n}(0,0) = \frac{\partial^2}{\partial \Gamma^2} \Delta^{m-q,n-q}(0,0) \quad (\text{IV.B.3d})$$

Il est important de remarquer que, en général, l'équation suivante

$$\Delta^{m,n}(\Gamma, \gamma^*) = \Delta^{-m,-n}(\Gamma, \gamma^*) = \Delta^{n-q,m-q}(\Gamma, \gamma^*) \quad (\text{IV.B.4})$$

n'est vérifiée que pour $n = q-m$; i.e.

$$\Delta^{m,q-m}(\Gamma, \gamma^*) = \Delta^{-m,-(q-m)}(\Gamma, \gamma^*) \quad (\text{IV.B.5})$$

Ceci impose en particulier l'identité suivante

$$\Delta^{1,q-1}(\Gamma, \gamma^*) = \Delta^{-1,-(q-1)}(\Gamma, \gamma^*) \quad (\text{IV.B.5'})$$

qui nous permet de réduire l'opérateur $\mathcal{O}$ en forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &= a_0 \Delta^{1,q-1} - \Delta^{2,q-1} - \Delta^{-2,-(q-1)} + (-1)^{q+1} (2 + \mathfrak{K} 2) \\ &= \Delta^{0,q-1} - \Delta^{-2,-(q-1)} + (-1)^{q+1} (2 + \mathfrak{K} 2) \end{aligned} \quad (\text{IV.B.6})$$

Dans la dernière étape, la propriété du déterminant $\Delta^{m,n}$

$$\Delta^{m,n} = a_m \Delta^{m-1,n} - \Delta^{m-2,n} \quad (\text{IV.B.7})$$

a été utilisée.

Donc, nous avons

$$\mathcal{O} = \Delta_q(\Gamma, \gamma^*) + (\Delta^{2,q-1} - \Delta^{-2,-(q-1)}) + (-1)^{q+1} \mathfrak{K} 2 \quad (\text{IV.B.8})$$

où

$$\Delta_q(\Gamma, \gamma^*) = \Delta^{0,q-1}(\Gamma, \gamma^*) - \Delta^{2,q-1}(\Gamma, \gamma^*) + 2(-1)^{q+1} \quad (\text{IV.B.9})$$

$$= \det \begin{bmatrix} a_0 & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 \\ 1 & 0 & a_{q-1} \end{bmatrix}$$

A partir de cette définition, il n'est pas difficile de déduire l'identité suivante

$$\Delta_q(\Gamma, \gamma^*=0) = (-1)^q [P_q(\epsilon) - 2 - 2\cos(q\Gamma)] \quad (\text{IV.B.10})$$

où $P_q(\epsilon)$ dénote le polynôme de l'Eq (IV.3.2). Nous en déduisons

$$\partial/\partial \Delta_q(0,0) = 0 \quad (\text{IV.B.11a})$$

$$\partial^2/\partial^2 \Delta_q(0,0) = 2q^2 \quad (\text{IV.B.11b})$$

A l'aide de l'Eq IV.B.10 et IV.B.11, l'approximation de (IV.B.9) pour $\Gamma, \gamma^* \ll 1$ s'écrit

$$\Delta_q(\Gamma, \gamma^*) = (-1)^q [P_q(\epsilon) - 4 + q^2 \Gamma^2] + \gamma^* \partial/\partial \gamma^* \Delta_q(0,0) \quad (\text{IV.B.12})$$

De façon similaire, à partir de l'Eq IV.B.2 et IV.B.3, nous obtenons

$$\Delta^{2,q-1}(\Gamma, \gamma^*) - \Delta^{-2,-(q-1)}(\Gamma, \gamma^*)$$

$$= \gamma^* [\partial/\partial \gamma^* \Delta^{1,q-2}(0,0) - \partial/\partial \gamma^* \Delta^{2,q-1}(0,0)] \quad (\text{IV.B.13})$$

En reportant l'Eq IV.B.12 et IV.B.13 dans l'Eq IV.B.8, nous obtenons finalement l'expression simple pour $\mathcal{O}$:

$$\mathcal{O} = (-1)^q \left\{ \left[P_q(\varepsilon) - 4 - q^2 a^2 \frac{d^2}{dx^2} + q \frac{2\gamma^{*2}}{a^2} x^2 \right] + (-1)^q \gamma^* \frac{\partial}{\partial \gamma^*} [\Delta_q + \Delta^{1,q-2} - \Delta^{-2}] \right\} \quad (\text{IV.B.14a})$$

$$= (-1)^q \left\{ \left[P_q(\varepsilon) - 4 - q^2 a^2 \frac{d^2}{dx^2} + q \frac{2\gamma^{*2}}{a^2} x^2 \right] + (-1)^q \gamma^* \frac{\partial}{\partial \gamma^*} [\Delta^{0,q-1} - \Delta^{2,q-1}] \right\} \quad (\text{IV.B.14b})$$

Dans ces équations, la dérivée $\partial/\partial \gamma^*$ est prise aux $\gamma^* = \Gamma = 0$.

Annexe IV.C.

THERMODYNAMICAL MANIFESTATION OF BERRY's TOPOLOGICAL
PHASE :
MAGNETIZATION OF SUPERCONDUCTING NETWORKS

R. RAMMAL(*)

AT & T Bell Laboratories, Murray Hill, New Jersey 07974,USA

Y.Y. WANG and B. PANNETIER

C.R.T.B.T., C.N.R.S., BP 166 X, 38042 GRENOBLE Cédex, FRANCE

ABSTRACT

It is shown that close to the normal-superconductor phase boundary $T_c(H)$ of a regular superconducting network, the magnetization $M(T,H)$ exhibits a singular behavior at each rational value of the reduced flux. In particular, asymmetric jumps of $\partial M/\partial T$ are predicted and calculated. The asymmetry is shown to be a direct consequence of a phase holonomy and its physical meaning is discussed.

PACS numbers : 03.65.Sq, 64.90.+b, 74.60.Ec.

An unexpected and remarkable phenomenon has been recently discovered by Berry⁽¹⁾ in the context of the adiabatic theorem of quantum mechanics. During an excursion round a closed loop $\mathcal{C}$ in the external parameter space, the acquired phase by the adiabatic deformation of the wave function is not simply the familiar dynamical phase. Instead an additional extra phase $\Gamma(\mathcal{C})$ may result and depends only on the geometry of the parameter space and the considered loop $\mathcal{C}$. Later⁽²⁾ this phase was shown to be a universal feature in the topological analysis of various physical problems. The existence of $\Gamma(\mathcal{C})$ can be understood as an Aharonov-Bohm effect in the parameter space and thus is relevant to many areas of quantum physics : condensed matter ⁽³⁾, molecular physics ⁽⁴⁾ and particle physics ⁽⁵⁾. One of the important consequences of the adiabatic phase $\Gamma(\mathcal{C})$, of particular interest here, is the modification of the semi-classical Bohr-Sommerfeld quantization rule ⁽⁶⁾.

The purpose of this letter is to describe a physical system where the existence of $\Gamma(\mathcal{C})$ can be observed on a thermodynamical quantity⁽⁷⁾. Below we show that the magnetization $M(T,H)$ of a regular superconducting network, in the so-called mixed state, provides such an example. The presence of a Berry's phase leads to a rather singular behavior of M close to the normal-superconducting phase boundary $T_c(H)$: at each rational value of the reduced flux, $\partial M/\partial T$ is predicted to exhibit an asymmetric jump, which is calculated below. The asymmetry is shown to be a consequence of an adiabatic phase, arising in an extended WKB theory. The direct measurement of the predicted $\partial M/\partial T$, which is actually accessible to experimental investigations, will therefore provide the first thermodynamical signature of Berry's phase.

Extended arrays of superconducting filaments (square network for instance) are now recognized as ideal experimental model systems for studying frustration effects in a well characterized situation⁽⁸⁾. In such a system, the reduced flux ϕ/ϕ_0 through an elementary cell of the network ($\phi_0 = hc/2e$) plays the role of a tunable frustration parameter. Furthermore, the mean-

field Ginzburg-Landau (GL) theory provides a very accurate description of the phase boundary line $T_c(H)$. For instance, novel flux-quantization effects have been predicted⁽⁹⁾ and observed⁽⁸⁾ : oscillations of $T_c(H)$ as well as cusp-like singularities at rational values of ϕ/ϕ_0 . The fine structures of the transition line $T_c(H)$, very well described by the linearized GL equations, are the signature of a complex organization of the order parameter under the competing effects of the magnetic field (H) and the spatial periodicity of the lattice. In order to describe the ordered phase below $T_c(H)$, the complete non linear GL equations must be considered. Here we shall describe briefly the extension of Abrikosov's original approach to the case of the network geometry. Details will be published elsewhere⁽¹⁰⁾.

Mixed state :

As T is lowered below $T_c(H)$, the order parameter increases. However as pointed out by Abrikosov⁽¹¹⁾, close to the critical line, the equilibrium solutions must (by continuity) have a strong resemblance to certain solutions of the linearized GL equation :

$$\left(i\nabla + \frac{2\pi}{\phi_0} A\right)^2 \psi = E\psi \quad (1)$$

where $\psi(r)$ denotes the order parameter at r . The lowest eigenvalue $E(H)$ of Eq. 1 is directly related to $T_c(H)$: $T_c(H)/T_c(O) = 1 - \xi^2(O) E(H)$, where $\xi(T) = \xi(O) [1 - T/T_c(O)]^{-1/2}$ refers to the temperature dependent coherence length. The associated degenerate eigenstates correspond to the nucleation of superconductivity in different parts of the sample and have the same energy. The higher order term in GL free energy will eventually favor some particular solutions. An appropriate solution can be built up from a linear combination of the degenerate solutions of Eq. 1. Proceeding exactly as Abrikosov, one can show⁽¹⁰⁾ that the equilibrium states of the network correspond to the minimum of a generalized Abrikosov's parameter $\beta_A(H)$ defined

by : $\beta_A(H) = \langle \psi^4 \rangle / \langle \psi^2 \rangle^2$. Here, for a given H , ψ refers to a linear combination of the eigenstates of Eq. 1 corresponding to $\min E(H)$.

In general, the physical properties of the mixed state are controlled by the topology of the network through $T_c(H)$ and $\beta_A(H)$, which are directly related to the spectrum of Eq. 1. Explicit expressions for : the order parameter $\langle \psi^2 \rangle \approx (T_c(H) - T)$, the free energy $F \approx (T_c(H) - T)^2$ and the magnetization can then be obtained. For instance, the magnetization is given by :

$$4\pi M = \left[\frac{\phi_0}{2\pi\xi^2(O)T_c(O)} \right] \frac{T_c(H) - T}{\beta_A(2\kappa^2 - \mu^2)} \frac{dT_c(H)}{dH} \quad (2)$$

In Eq. 2, κ is the GL parameter and we have defined the parameter μ by :

$$\mu = \frac{\phi_0}{2\pi} \frac{dE}{dH} = \frac{\phi_0/2\pi}{\xi^2(O)T_c(O)} \frac{dT_c(H)}{dH} \quad (3)$$

It is important to notice that the explicit expressions of $\langle \psi^2 \rangle$, F , M , ..., etc., involve the same parameters. The dependence on $T_c(H) - T$ can actually be anticipated from general considerations of second order phase transitions⁽⁹⁾. As a simple consequence of the formalism described above, one recovers the known properties of the mixed state of a bulk type II superconductor : $T_c(H) - T_c(O) \approx H$, $\mu = 1$ and $\beta_A \approx 1,16$ (independent of H) corresponding to a triangular arrangement of vortices. The case of extended networks has been worked out in detail within the same framework⁽¹⁰⁾. Explicit values of $\beta_A(H)$ have been obtained as well as the order parameter configurations, current patterns, ...etc., for rational values of the reduced flux. Here we shall focus our discussion on the magnetization behavior only.

Magnetization singularities :

For the sake of simplicity we limit our discussion to the square lattice case. Results pertaining to other lattices will be discussed briefly at the end. As pointed out in Refs. 8,9, the linearized GL equations reduce in this case to a set of finite difference equations for the order parameter $\psi_{m,n}$ at the nodes (m,n) of the network. Using the translation invariance, $\psi_{m,n} = \psi_m e^{-i\theta_1 n}$ (θ_1 = arbitrary phase factor) one ends up with Harper's equation(12) :

$$\psi_{m+1} + \psi_{m-1} + 2 \cos(\gamma m + \theta_1) \psi_m = \varepsilon \psi_m \quad (4)$$

Here $\gamma = 2\pi\phi/\phi_0$, $\phi = Ha^2$ being the flux through an elementary cell ($a \times a$) and ε denotes the "tight-binding" energy, defined by $\varepsilon \equiv 4 \cos(aE^{1/2})$. The rich spectrum (ε, γ) of Eq. 4 has been studied in Ref. 12. Here we are interested only by the lowest edge of this spectrum. In fact M is governed by $\varepsilon(\gamma)$ and $d\varepsilon/d\gamma$ along this edge, the line $T_c(H)$ being related to $\varepsilon(\gamma)$ through $\varepsilon(\gamma) = 4 \cos a/\xi(T)$.

As was shown in Refs. 8,9 and 12, $T_c(H)$ as well as $\varepsilon(\gamma)$ exhibit cusp-like singularities at each rational value of the reduced flux ϕ/ϕ_0 . For instance, near $\gamma = 0$, ε is given by⁽⁹⁾ $\varepsilon = 4 - |\gamma| + O(e^{-1/|\gamma|})$ leading to a cusp of $T_c(H)$ at zero field and then (Eq. 2) to a symmetric jump of $\partial M/\mu T$ (see Fig.. 1). More generally, for generic rational flux $\phi/\phi_0 = p/q$, $\partial M/\partial T$ will be shown to exhibit an asymmetric jump as shown in Fig. 1. In order to show this property, one needs an approximate expression for $\varepsilon(\gamma)$ for γ close rational values of ϕ/ϕ_0 . It turns out that WKB theory is the appropriate framework to solve this problem. To do this, we have used two different approaches. The first one is an extension of the continuum approximation, used previously in Ref. 9 (Bloch picture) and involving a $q \times q$ Hermitian eigenvalue equation. The other (Floquet picture) involves considering products of $q \times 2$ transfer matrices. Full solution has been obtained with each method. A

detailed account of Bloch picture will be published elsewhere⁽¹³⁾, here we describe the second approach as outlined first by Wilkinson⁽¹⁴⁾. Using a transfer matrix formulation (12), Eq. 4 can be written as

$$\begin{pmatrix} \psi_{m+1} \\ \psi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon - 2 \cos x_m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_m \\ \psi_{m-1} \end{pmatrix} \equiv T(x_m) \begin{pmatrix} \psi_m \\ \psi_{m-1} \end{pmatrix} \quad (5)$$

where $x_m = m\gamma + \theta_1$. For rational flux $\gamma_0 = 2\pi p/q$, this leads to the following dispersion relation : $\text{Tr}M = 2 \cos S'$, where S' is a phase factor and M refers to the string : $M = T(x+(q-1)\gamma) \dots T(x+\gamma)T(x)$. In this case, $\varepsilon(x, S')$ is periodic in x (period $2\pi p/q$) as well as in S' (period $2\pi/q$) since p and q are coprime.

For $\gamma = \gamma_0 + \Delta\gamma$, an adiabatic WKB theory can be implemented, where

$\hbar \equiv q\Delta\gamma$ plays the role of an adiabatic parameter. The phase space is (x, S') , with x as "position" and S' as "momentum". Within this scheme an interesting feature arises in connection with Bohr-Sommerfeld quantization rule. The eigenvectors of matrix M cannot be given as single-valued and continuous functions of the position in phase space. When they are transported around a closed orbit, they are multiplied by a complex phase factor when they return to their starting point. The existence of this adiabatic phase Γ leads to a modification of Bohr-Sommerfeld rule, as discussed in the introduction. In particular at the edge of the spectrum, the quantization rule becomes

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{tq}{s} \Delta\gamma + \frac{2q^2}{s} |\Delta\gamma| \left[n + \frac{1}{2} - \frac{\kappa}{q} \text{sgn}(\Delta\gamma) \right], n = \text{integer} \quad (6)$$

The different parameters in Eq. 6 are defined with $M \equiv$ in

the vicinity of $x = 0$, $S' = 0$ and $\varepsilon = \varepsilon_0$ giving the edge of the spectrum at $\gamma = \gamma_0$. More precisely, $t = q^{-1} \partial \text{Tr} M / \partial \gamma$, $s = \partial \text{Tr} M / \partial \varepsilon$ and $\kappa = [(D-1)/2C] \partial C / \partial x - 1/2 \partial D / \partial x$, all taken at $x = 0$, $S' = 0$ and $\varepsilon = \varepsilon_0$. The adiabatic angle Γ is given explicitly by $\Gamma = 2\pi\kappa/q$ and is responsible for the asymmetry of $\varepsilon(\gamma)$ close to $\varepsilon_0(\gamma_0)$. In fact, from Eq. 6 one deduces the values of the slope $\partial \varepsilon / \partial \gamma$ to the left (S^-) and to the right (S^+). For generic p/q , we have $|S^+| \neq |S^-|$. The equality is reached only for $p/q = 0$ and $1/2$ and this corresponds to an accidental degeneracy, due to a time-reversal symmetry which leads to $\Gamma = 0$.

The results of the numerical calculations (Eq. 6) are shown on Fig. 1 for the square lattice. The same scheme has also been extended to other networks such as the triangular lattice (Fig. 2). In both cases, and for a generic rational p/q , $\partial \varepsilon / \partial \gamma$ and then $\partial M / \partial T$ exhibit an asymmetric jump. The asymmetry being a consequence of the adiabatic phase, the jumps are due to the infinite extension of the network in both directions. In fact, for semi-infinite⁽⁹⁾ networks (Ladder, strips,...), $T_c(H)$ is a differentiable function and $\partial M / \partial T$ has no jump. The same conclusion holds for finite networks excepted some particular cases as the single loop geometry. Here $\partial M / \partial T$ has a sawtooth variation with symmetric jumps at half-integer values of ϕ/ϕ_0 . The overall shape of Fig. 1 reflects this sawtooth variation, but with asymmetric jumps, almost everywhere.

We conclude this letter with two remarks. First, using Maxwell's relation $\partial M / \partial T|_H = \partial S / \partial H|_T$ (S = entropy), it is not difficult to translate the asymmetry of $\partial M / \partial T$ in terms of entropy variations, close to each rational flux. Secondly, thanks to a direct and accurate measurement of $\partial M / \partial T$ (dM response to a dT modulation), the predicted behavior of $\partial M / \partial T$ is actually accessible to an experimental study on real networks. Preliminary⁽¹⁵⁾ results seem to support the predictions presented here. However, more accurate measurements are called for, in order to achieve a close comparison with the results of Fig. 1 for instance.

REFERENCES

(*) Permanent address : CRTBT-CNRS, BP 166 X, 38042 GRENOBLE Cédex, France.

1. M. V. BERRY, Proc. Roy. Soc. A 392, 45 (1984).
2. B. SIMON, Phys. Rev. Lett. 51, 2167 (1983).
3. F.D.M. HALDANE and YONOG-SHI WU, Phys. Rev. Lett. 55, 2887 (1985).
D. AROVAS, R. SCHRIEFFER, F. WILCZEK and A. ZEE, Nucl. Phys. B521, [FS13], 117 (1985).
4. C. A. MEAD and D. G. TRUHLAR, J. Chem. Phys. 70, 2284 (1984).
For a critical discussion of the optical fibers experiment see :
F.D.M. Haldane, Opt. Lett. 11, 730 (1986).
5. P. NELSON and L. ALVAREZ-GAUME, Comm. Math. Phys. 99, 103 (1985).
6. H. KURATSUJ and S. IIDA, Progr. Theor. Phys. 74, 439 (1985).
7. In thermodynamics, Carnot's cycles are examples of holonomy effects governed by inexact differential 1-forms. In this respect, Berry's phase is governed by a phase 2-form in parameter space.
8. See for instance, B. PANNETIER, J. CHAUSSY, R. RAMMAL and J. C. VILLEGIER, Phys. Rev. Lett. 53, 1845 (1984).
9. S. ALEXANDER, Phys. Rev. B27, 1541 (1983)
R. RAMMAL, T. C. LUBENSKY and G. TOULOUSE, *ibid*, 2820 (1983).
10. Y. Y. WANG, R. RAMMAL and B. PANNETIER, to be published.
11. A. A. ABRIKOSOV, Sov. Phys. JETP 5, 1174 (1957)

P. G. de GENNES, Superconductivity of Metals and Alloys
(Bejamin, New York, 1966).

12. D. R. HOFSTADTER, Phys. Rev. B 14, 2239 (1976)
and references therein.
13. R. RAMMAL, Y. Y. WANG and B. PANNETIER, to be published.
14. M. WILKINSON, J. Phys. A 17, 3459 (1984).
15. P. GANDIT, J. CHAUSSY, B. PANNETIER, A. VAREILLE and
A. TISSIER, to be published.

FIGURE CAPTIONS

Fig. 1 : Jumps of the slope $\partial\epsilon/\partial\gamma$ at rational values of the reduced flux $\gamma = 2\pi p/q$, for a square network. Each vertical bar represents the jump between the right (S^+) and left (S^-) slope at the corresponding p/q , for $q \leq 30$. (identique à Fig. IV.3.1)

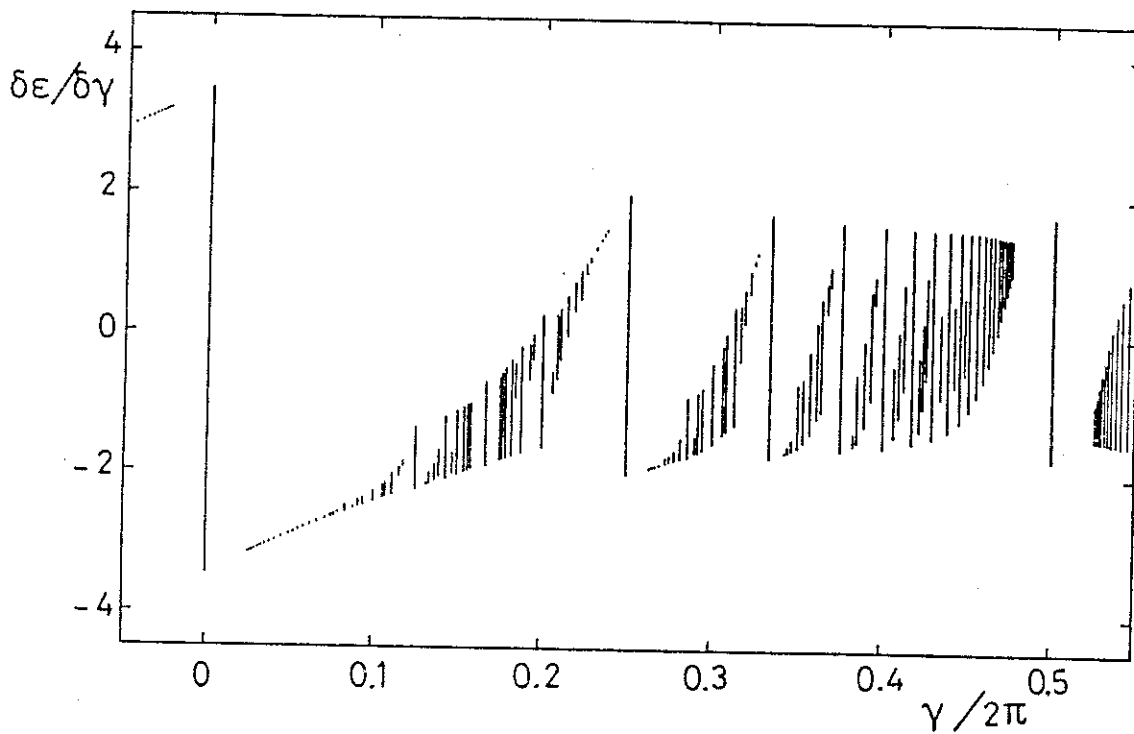


Fig. 2 : Same as Fig. 1 for the triangular network.

CHAPITRE V. Descriptions des supercourants et des courants critiques dans les réseaux supraconducteurs

V.1. L'état mixte en présence d'un courant de transport non-nul

V.1.1. L'équation d'Alexander en présence de courants extérieurs

V.1.2. Etat mixte d'un réseau carré en présence d'un courant extérieur

V.2. Les courants critiques des réseaux supraconducteurs

V.2.1. Définition du courant critique au champ moyen

V.2.2. courant critique d'un réseau carré

V.3. Résultats expérimentaux sur les courants critiques

V.A. Annexe

Jusqu'à présent, nous nous sommes concentrés sur les états du bord du spectre où l'énergie est minimale et le courant de transport nul. Nous nous demandons maintenant ce qui se passe à l'intérieur du spectre et comment nous pouvons réaliser des états ayant une énergie plus élevée (états métastables).

Evidemment, lorsque l'on fait passer un courant de transport dans un réseau, l'énergie du système s'élève du fait de l'énergie cinétique dû au courant et donc les états métastables deviennent accessibles. Pour étudier ces états nous avons besoin du formalisme de de Gennes-Alexander en présence du courant extérieur. C'est ce que nous allons développer dans la première partie de ce chapitre.

Lorsque l'énergie supplémentaire dû au courant dépasse celle de l'état normal, ce dernier devient préférable et il n'existe plus de solutions aux équations décrivant l'état supraconducteur. La valeur du courant extérieur correspondant est donc le courant critique, qui sera traité dans la deuxième partie.

A la fin de ce chapitre, quelques résultats préliminaires sur les mesures du courant critique d'un réseau carré seront discutés.

V.1. L'état mixte en présence d'un courant de transport non-nul

Pour introduire le courant extérieur dans le formalisme de de Gennes-Alexander, nous distinguons deux cas différents : réseaux fini et infini.

Pour le réseau fini, Fink et al.[1] ont généralisé la formalisme de de Gennes-Alexander et établi une équation similaire, mais contenant un terme du courant extérieur.

Dans le second cas, comme le réseau contient une infinité de cellules, l'équation donnée par Fink ne convient plus parce que nous ignorons la condition aux bornes où s'injecte le courant extérieur. Cependant, nous nous posons la question inverse : pourquoi les états métastables possèdent-ils une énergie plus élevée que l'état fondamental. Nous verrons plus loin la réponse : excepté quelques points singuliers, ces états correspondent à un courant de transport non nul. Nous ne nous occupons pas de la façon dont ce courant est injecté aux bornes du réseau et nous supposons que le système choisira l'état métastable correspondant au courant injecté. Cette méthode ne s'applique pas au cas des réseaux finis car le spectre est discret et à chaque état permis est associé un courant de transport nul.

La question qui peut se poser est la suivante : y a-t-il une divergence entre ces deux manières d'introduire le courant de transport?

Nous verrons que la réponse est négative et que les deux situations sont équivalentes. Dans les deux cas, le courant et la phase du paramètre d'ordre sont des variables conjuguées.

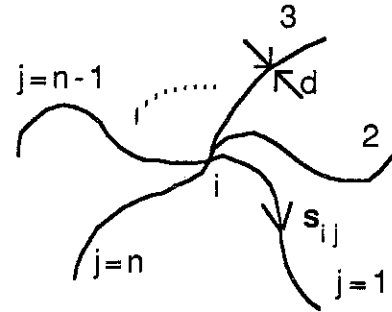
V.1.1. L'équation d'Alexander en présence de courants extérieurs

Reprenons le réseau décrit dans le chapitre I et écrivons l'équation d'Alexander I.0.15 en séparant le terme correspondant au n ème filament :

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left[-\Psi_j \operatorname{ctg} \frac{l_{ij}}{\xi_e} + \frac{\Psi_j \exp(-i\gamma_{ij})}{\sin(l_{ij}/\xi_e)} \right] - \Psi_i \operatorname{ctg} \frac{l_{in}}{\xi_e} + \frac{\Psi_n \exp(-i\gamma_{in})}{\sin(l_{in}/\xi_e)} = 0 \quad (\text{V.1.1})$$

Fig. V.1.1 Un réseau

bidimensionnel (la diamètre $d \ll \xi$)



Posons

$$T_n = \frac{\Psi_i}{\xi_e} \left[\Psi_i \operatorname{ctg} \frac{l_{in}}{\xi_e} + \frac{\Psi_n \exp(-i\gamma_{in})}{\sin(l_{in}/\xi_e)} \right]$$

Lorsque l'on fait tendre l_{in} vers zéro, T_n devient imaginaire pur et représente alors un supercourant.

$$\begin{aligned} \lim_{l_{in} \rightarrow 0} T_n &= \lim_{l_{in} \rightarrow 0} \left[-|\Psi_i|^2 \operatorname{ctg} \frac{l_{in}}{\xi_e} + |\Psi_i| |\Psi_n| e^{i(\varphi_n - \varphi_i - \gamma_{in})} / \sin \frac{l_{in}}{\xi_e} \right] \frac{1}{\xi_e} \\ &= \lim_{l_{in} \rightarrow 0} |\Psi_i|^2 \left[-\operatorname{ctg} \frac{l_{in}}{\xi_e} + \sin^{-1} \frac{l_{in}}{\xi_e} + i(\varphi_n - \varphi_i - \frac{2\pi}{\Phi_0} A_{||} l_{in}) / (\sin \frac{l_{in}}{\xi_e}) \right] \frac{1}{\xi_e} \\ &= |\Psi_i|^2 \left[\frac{1}{\xi_e} \lim_{l_{in} \rightarrow 0} (\sin \frac{l_{in}}{\xi_e}) / (\cos \frac{l_{in}}{\xi_e}) + i \cdot \lim_{l_{in} \rightarrow 0} (\varphi_n - \varphi_i) / l_{in} - i \frac{2\pi}{\Phi_0} A_{||} \right] \\ &= iQ |\Psi_i|^2 \end{aligned}$$

où $Q = d\phi_i/ds - 2\pi/\Phi_0 A_{||}$ (V.1.2)

est la vitesse des superélectrons à une constante près. Remplaçons le même terme par sa limite, l'équation V.1.1 devient

$$\sum_j \left(-\Psi_j \cotg \frac{l_{ij}}{\xi_e} + \Psi_j e^{-i\gamma_{ij}} / \sin \frac{l_{ij}}{\xi_e} \right) + i \xi_e Q \Psi_i = 0 \quad (V.1.3)$$

Sa représentation physique est claire. C'est la condition limite au nœud i où nous injectons un courant

$$J = \frac{2e\hbar}{m^*} |\Psi|^2 Q = J_n \xi(0) Q \frac{T_c(H) - T}{T_c(0)} \quad (V.1.4)$$

Cas d'une boucle :

Comme exemple, nous appliquons cette équation au cas d'une simple boucle sans bras (figure V.1.2). Nous avons

$$\begin{bmatrix} i\xi_e Q \sin \frac{2a}{\xi_e} - 2\cos \frac{2a}{\xi_e} & 2\cos \frac{\gamma}{2} \\ 2\cos \frac{\gamma}{2} & -i\xi_e Q \sin \frac{2a}{\xi_e} - 2\cos \frac{2a}{\xi_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} = 0$$

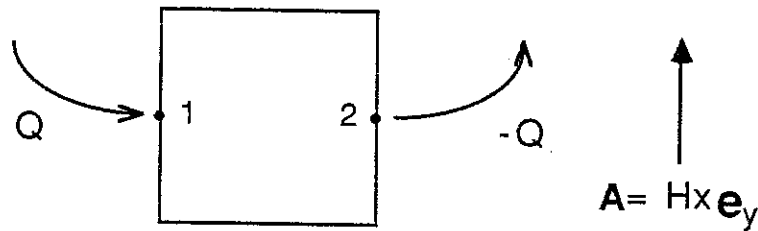


Fig. V.1.2 La boucle carrée. Le courant est injecté entre 1 et 2.

Le déterminant doit être nul :

$$\Delta = 4\cos^2(2a/\xi_e) + \xi_e^2 Q^2 \sin^2(2a/\xi_e) - 4\cos^2(\gamma/2) = 0 \quad (V.1.5)$$

Cela donne

$$\sin(2a/\xi_e) = \pm [1 - \xi_e^2 Q^2/4]^{-1/2} \sin(\gamma/2) \quad (\text{V.1.6})$$

Maintenant faisons passer un courant constant :

$$J = J_n \xi(0) Q \left(\Delta t - \frac{\xi^2(0)}{\xi_e^2} \right)$$

En remplaçant Q dans l'Eq V.1.6 par son expression tirée de l'égalité ci-dessus, nous obtenons alors l'équation implicite décrivant les états a/ξ_e en fonction du champ γ , du courant J et de la température relative $\Delta t = (T_0 - T)/T_0$:

$$\left[1 - \left(\frac{J}{2J_n \Delta t - \xi^2(0)/\xi_e^2} \right)^2 \right]^{1/2} \sin\left(\frac{2a}{\xi_e}\right) = \pm \sin\frac{\gamma}{2} \quad (\text{V.1.7})$$

Le spectre a été étudié par Fink et al. [1].

Notons que les amplitudes de la fonction d'onde sur les nœuds 1 et 2 sont égales :

$$\begin{aligned} \frac{|\Psi_2|^2}{|\Psi_1|^2} &= \frac{|-\sin(2a/\xi_e) \cdot \xi_e Q + 2\cos(2a/\xi_e)|}{|2\cos(\gamma/2)|^2} \\ &= \frac{4\cos^2(2a/\xi_e) + \xi_e^2 Q^2 \sin^2(2a/\xi_e)}{4\cos^2(\gamma/2)} = 1 \end{aligned}$$

comme le demande la symétrie du système. Supposons donc que $\Psi_2 = \Psi_1 e^{i\alpha} = \Psi_0 e^{i\alpha}$, nous avons

$$\cos\alpha \cdot \cos(\gamma/2) = \cos(2a/\xi_e) \quad (\text{V.1.8a})$$

$$2\sin\alpha \cdot \cos(\gamma/2) = -\xi_e Q \sin(2a/\xi_e) \quad (\text{V.1.8b})$$

La dérivée par rapport à α de (V.1.8a) est

$$-\sin\alpha \cdot \cos(\gamma/2) = -\sin(2a/\xi_e) \cdot 2\partial(a/\xi_e)/\partial\alpha \quad (\text{V.1.9})$$

La comparaison des équations (V.1.8b) et (V.1.9) donne

$$Q = - \frac{4}{\xi_e} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{a}{\xi_e} = \frac{2a}{\xi_e^2(0)} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{T_c(H) - T}{T_c(0)}$$

Donc

$$J = J_n \frac{a}{\xi(0)} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{T_c(H) - T}{T_c(0)} \right)^2$$

Utilisons l'équation IV.1.24, nous trouvons $J = J_0 \partial F / \partial \alpha$ avec $J_0 = 8ea/\hbar$. Nous verrons encore cette relation entre le courant injecté et la phase de la fonction d'onde dans le cas d'un réseau étendu.

La méthode peut s'appliquer également à d'autres microréseaux. Elle ne s'applique pas au cas d'un réseau infini.

V.1.2. état mixte d'un réseau carré en présence d'un courant extérieur

Supposons que notre réseau contienne une infinité de cellules, et qu'un courant passe d'un côté à l'autre du réseau. (figure V.1.3) Près des deux extrémités la distribution du courant dépend bien-sûr des conditions aux bords et ne peut pas être calculée. Nous nous plaçons loin des bords. Cet effet est alors négligeable et les courants peuvent s'arranger librement compte tenu du courant total non-nul imposé. Nous cherchons parmi tous les états possibles celui correspondant au courant de transport fixé I et ayant l'énergie la plus faible possible.

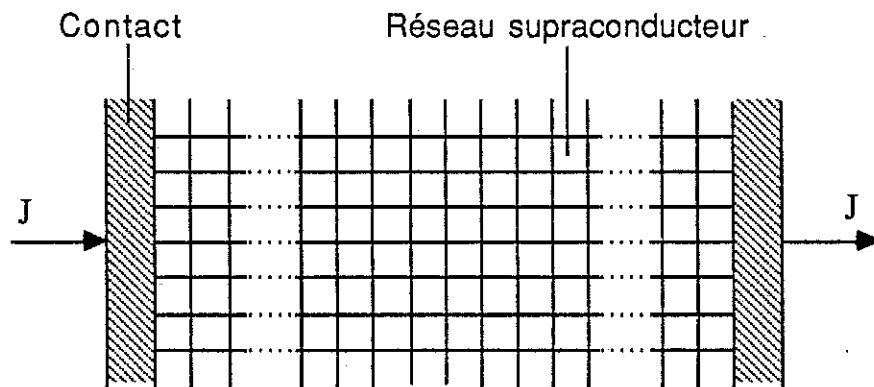


Fig. V.1.3 Le réseau carré infini. Le courant est injecté entre les deux extrémités.

A un champ donné, l'énergie du système ne dépend que deux paramètres : α et k . Quel est leur représentation physique? Bien évidemment, l'énergie doit être une fonction du courant total, et cela incite à penser que α et k doivent représenter des courants de transport.

Pour l'instant, nous nous concentrons sur les courants relatifs j_{ij} définis par l'Eq IV.2.9. D'abord nous calculons le courant total en prenant une fonction d'onde simple $f_{mn} = f_m e^{ink}$.

$$\begin{aligned}
\sum_n j_{\rightarrow m,n} &= \sum_n \Im m \left[f_{m,n}^* f_{m+1,n} e^{-i\gamma_{\rightarrow m,n}} \right] \\
&= \sum_n \Im m \left[f_m^* f_{m+1} \right] = q \Im m [f_m^* f_{m+1}]
\end{aligned}
\tag{V.1.10a}$$

$$\begin{aligned}
\sum_m j_{\uparrow m,n} &= \sum_m \Im m \left[f_{m,n}^* f_{m,n+1} e^{-i\gamma_{\uparrow m,n}} \right] \\
&= \sum_m \Im m \left[|f_m|^2 e^{i(k-m\gamma)} \right] = \sum_m |f_m|^2 \sin(k-m\gamma)
\end{aligned}
\tag{V.1.10b}$$

Dans l'annexe V.A nous démontrerons les relations suivantes

$$\Im m [f_m^* f_{m+1}] = \frac{\sin \alpha}{P_q'(\epsilon)} \tag{V.1.11a}$$

$$\sum_{m=0}^{q-1} |f_m|^2 \sin(k-m\gamma) = \frac{q \sin qk}{P_q'(\epsilon)} \tag{V.1.11b}$$

Définissons le courant moyen par fil dans le super réseau $q \times q$:

$$\begin{aligned}
\text{horizontal} \quad j_{\rightarrow} &= \frac{1}{q} \sum_{n=0}^{q-1} j_{\rightarrow m,n} \\
\text{vertical} \quad j_{\uparrow} &= \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} j_{\uparrow m,n}
\end{aligned}
\tag{V.1.12}$$

Nous obtenons les deux formules symétriques

$$\begin{cases} j_{\rightarrow} = \sin \alpha / P_q'(\epsilon) \\ j_{\uparrow} = \sin qk / P_q'(\epsilon) \end{cases}
\tag{V.1.13}$$

Ces deux formules restent correctes pour une fonction d'onde générale

$$f_{mn} = \sum_l c_l f_{m-l} \exp i(nk + nl\gamma)$$

puisque le courant total ne dépend pas de la combinaison de fonctions d'onde associées à la même énergie. Nous allons vérifier ceci :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{q} \sum_n j_{\rightarrow m,n} &= \frac{1}{q} \sum_n \Im m \left[f_{m,n}^* f_{m+1,n} \right] \\
 &= \frac{1}{q} \Im m \sum_{l,l'} c_l^* c_{l'} f_{m-l}^* f_{m+1-l'} \sum_n e^{in(l'-l)\gamma} \\
 &= \frac{1}{q} \Im m \sum_{l,l'} c_l^* c_{l'} f_{m-l}^* f_{m+1-l'} q \cdot \delta_{ll'} \\
 &= \sum_l |c_l|^2 \Im m \left[f_{m-l}^* f_{m+1-l} \right] \\
 &= j_{\rightarrow}
 \end{aligned}$$

Ci-dessus, $\Im m[f_{m-l}^* f_{m+1-l}]$ ne dépend pas de l et sort donc de la sommation. Nous avons fixé $\sum_l |c_l|^2 = 1$.

De la même façon

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{q} \sum_m j_{\uparrow m,n} &= \frac{1}{q} \sum_m \Im m \left[f_{m,n}^* f_{m,n+1} \exp(-iy_m) \right] \\
 &= \frac{1}{q} \Im m \sum_{m,l,l'} c_l^* c_{l'} f_{m-l}^* f_{m-l'} \exp i \left[k_+(n+1)l' - nl\gamma - m\gamma \right] \\
 &= \frac{1}{q} \Im m \sum_{m,l,l'} c_l^* c_{l'} f_{m-l}^* f_{m-l'} \exp i \left[(n+1/2)(l'-l)\gamma \right] \exp i \left[k_+ \left(\frac{l+l'}{2} - m \right) \gamma \right]
 \end{aligned}$$

Evidemment,
$$\sum_{l,l'} c_l^* c_{l'} f_{m-l}^* f_{m-l'} \exp \left[i \frac{n+1}{2} (l' - l) \gamma \right]$$

est réel, et par conséquent

$$\frac{1}{q} \sum_m j_{\uparrow m,n} = \frac{1}{q} \sum_{l,l'} c_l^* c_{l'} \exp \left[i \frac{n+1}{2} (l' - l) \gamma \right] \sum_m f_{m-l}^* f_{m-l'} \sin \left[k_+ \left(\frac{l+l'}{2} - m \right) \gamma \right]$$

Nous avons vérifié la propriété d'orthogonalité des fonctions f_m :

$$\begin{aligned}
\sum_m f_{m-1}^* f_{m-1'} \sin \left[k + \left(\frac{l+l'}{2} - m \right) \gamma \right] &= \sum_m f_{m-1}^* f_{m-1'} \sin [k - (m-1) \gamma] \delta_{l,l'} \\
&= \sum_m |f_m|^2 \sin [k - m \gamma] \delta_{l,l'} \\
&= q j_{\uparrow} \delta_{l,l'}
\end{aligned}$$

Donc
$$\frac{1}{q} \sum_m j_{\uparrow m,n} = \sum_l |c_l|^2 j_{\uparrow} = j_{\uparrow}$$

Les densités des courants complètes s'écrivent

$$\begin{aligned}
J_{\rightarrow} &= \frac{2e\hbar}{m^*} \frac{\Psi_0^2}{\xi_e \sin \frac{a}{\xi_e}} j_{\rightarrow} = \frac{2e\hbar}{m^*} \frac{\Psi_0^2}{\xi_e \sin \frac{a}{\xi_e}} \frac{\sin \alpha}{P'(\epsilon)} \\
J_{\uparrow} &= \frac{2e\hbar}{m^*} \frac{\Psi_0^2}{\xi_e \sin \frac{a}{\xi_e}} j_{\uparrow} = \frac{2e\hbar}{m^*} \frac{\Psi_0^2}{\xi_e \sin \frac{a}{\xi_e}} \frac{\sin qk}{P'(\epsilon)}
\end{aligned}$$

En utilisant l'expression de Ψ_0^2 donnée par l'Eq IV.1.23, les deux équations s'écrivent

$$J_{\rightarrow} = J_n \frac{\xi(0)}{\xi_e \sin(a/\xi_e)} \frac{\sin \alpha}{P'(\epsilon)} \frac{T_c(H) - T}{T_0} \quad (V.1.14a)$$

$$J_{\uparrow} = J_n \frac{\xi(0)}{\xi_e \sin(a/\xi_e)} \frac{\sin qk}{P'(\epsilon)} \frac{T_c(H) - T}{T_0} \quad (V.1.14b)$$

Finissons cette partie avec une remarque intéressante. En notant que

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} = \frac{2 \sin \alpha}{P'(\epsilon)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial qk} = \frac{2 \sin qk}{P'(\epsilon)}$$

nous trouvons les relations qui rappellent les équations de Josephson :

$$J_{\rightarrow} = J_0 \frac{\partial F}{\partial \alpha} \quad (V.1.15)$$

$$J_{\uparrow} = J_0 \frac{\partial F}{\partial qk}$$

où F est l'énergie libre et la constante $J_0 = 2ea/\hbar$. Au point de vue thermodynamique, la densité du courant de transport et le déphasage du paramètre d'ordre le long de la même direction sont une paire de variables conjuguées. Ceci est aussi vrai pour des réseaux finis. Dans le cas d'une boucle, le déphasage α est pris entre les deux nœuds où s'injecte le courant, tandis que pour le réseau carré les déphasages α où qk sont ceux du paramètre d'ordre $e^{i\alpha}$ ou e^{iqk} sur le super réseau.

V.2. Les courants critiques des réseaux supraconducteurs

V.2.1. Définition du courant critique au champ moyen

Le problème du courant critique est l'un des problèmes les plus complexes dans le domaine des supraconducteurs à cause de ses origines variées (sauts de flux, instabilités thermiques, cassage des paires, etc.) et de sa dépendance vis à vis de nombreux facteurs (température, champ magnétique, tension, seuil de la résistance, etc.). Notre système permet une grande simplification : Les flux sont complètement fixés dans les trous du réseau; le champ inductif au tour d'un filament sera faible devant H_{c2} .

Nous allons traiter dans cette partie le courant critique le plus pur du point de vue de la théorie : le courant critique Ginzburg Landau, que nous définissons comme le courant au-dessus duquel il n'existe plus d'état d'équilibre supraconducteur, autrement dit, au-dessus duquel apparaît la première résistance.

Pour bien expliquer ce que nous allons faire, nous prenons l'exemple du calcul du courant critique d'un filament supraconducteur décrit dans la référence [2] par Tinkham.

Supposons que la largeur du filament $d \ll \xi(T)$ et donc l'amplitude du paramètre d'ordre sera uniforme le long du filament : $\Psi(s) \equiv \Psi_0 e^{i\varphi(s)}$ où Ψ_0 ne dépend pas de la coordonnée s . Dans ce cas, le terme dans l'énergie libre proportionnel au gradient du paramètre d'ordre devient l'énergie cinétique d'une paire d'électrons ayant la vitesse

$$v_s = \frac{\hbar}{m^*} \left(\frac{\partial}{\partial s} \varphi - \frac{\Phi_0}{2\pi} A_{||} \right) \quad (V.2.1)$$

et l'énergie libre prend la forme simple

$$F_s = F_n + \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{2} m^* v_s^2 |\Psi|^2 + \frac{\hbar^2}{8\pi} \quad (V.2.2)$$

Les variables conjuguées J et v_s sont reliées par l'Eq V.0.1b :

$$J = 2e |\Psi|^2 v_s \quad (V.2.3)$$

Le calcul du courant critique, i.e. la maximisation de J se fait en deux étapes :

i) Minimisation de l'énergie libre F_s par rapport à $|\Psi|^2$, ce qui donne

$$|\Psi|^2 = \Psi_\infty^2 \left[1 - \left(\frac{\xi m^* v_s}{\hbar} \right)^2 \right] \quad (V.2.4)$$

ii) Recherche du maximum de J dans V.2.3 avec la contrainte V.2.4. Pour cela, nous éliminons $|\Psi|^2$ entre les deux équations pour obtenir J comme une fonction cubique de v_s

$$J = 2e \Psi_\infty^2 \left[1 - \left(\frac{\xi m^* v_s}{\hbar} \right)^2 \right] v_s \quad (V.2.5)$$

Son maximum est donc identifié au courant critique

$$\begin{aligned} J_c &= \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{2e\hbar \Psi_\infty^2}{m^* \xi} \\ &= \frac{2}{3\sqrt{3}} J_n \left(\frac{\xi(0)}{\xi(T)} \right)^3 \propto \left(\frac{T_0 - T}{T_0} \right)^3 \end{aligned} \quad (V.2.6)$$

où la constante J_n est définie par l'Eq IV.2.11. La variation de J_c vis à vis de la température obéit à la célèbre loi de puissance $3/2$.

Faisons maintenant un changement de variable $v_s^2 \rightarrow 1/\xi_e^2$. Ce dernier, qui représente les niveaux d'énergie comme précisé dans le chapitre I.0, est identique à E défini dans IV.1. Nous gardons cette forme pour avoir la bonne dimensionnalité. D'après cette définition, $1/\xi_e^2$ est la valeur propre de l'équation de Ginzburg-Landau linéarisée, ce qui s'écrit pour notre filament sous la forme simple

$$\frac{1}{2} m^* v_s^2 |\Psi|^2 = \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{1}{\xi_e^2} |\Psi|^2$$

Sa valeur propre est triviale

$$\frac{1}{\xi_e^2} = \frac{m^{*2}}{\hbar^2} v_s^2$$

ce qui donne la correspondance un-à-un entre $1/\xi_e$ et v_s . Avec ce changement de variable, les équations V.2.4 et V.2.5 deviennent

$$|\Psi|^2 = \Psi_\infty^2 \left[1 - \left(\frac{\xi}{\xi_e} \right)^2 \right] \quad (\text{V.2.4}')$$

et

$$J = J_n \frac{\xi^3(0)}{\xi^2 \xi_e} \left[1 - \left(\frac{\xi}{\xi_e} \right)^2 \right] \quad (\text{V.2.5}')$$

Si nous maximisons cette dernière équation vis-à-vis de $1/\xi_e$, nous trouverons le même résultat que V.2.6.

Maintenant nous passons à un cas plus compliqué : une boucle carrée où passe un courant $J = (e\hbar/m^*)\Psi_0^2 Q$ (figure V.2.1).

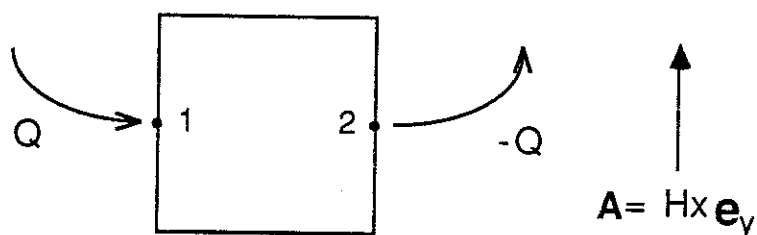


Fig. V.2.1 La boucle carrée. Le courant est injecté entre 1 et 2.

Il est préférable de choisir la valeur propre a/ξ_e représentant des niveaux d'énergie comme variable libre (au lieu de la vitesse de paire Q). Cela ne change pas de la procédure du calcul de J_c parce que a/ξ_e et Q se correspondent un à un pour un champ fixé :

$$4 \cos \frac{22a}{\xi_e} + \xi_e^2 Q^2 \sin \frac{22a}{\xi_e} - 4 \cos^2 \frac{\gamma}{2} = 0 \quad (\text{V.2.7})$$

En fait l'étape i) est juste ce que nous avons fait dans la section IV.1 --- minimiser l'énergie libre et donner l'amplitude du paramètre d'ordre comme une fonction de la variable a/ξ_e :

$$\Psi_0^2 = \Psi_\infty^2 \frac{T_c(H) - T}{T_0} = \Psi_\infty^2 \left[- \frac{\xi^2(0)}{\xi_e^2} + \frac{T_0 - T}{T_0} \right] \quad (\text{V.2.8})$$

En revanche, la étape ii) s'effectue de manière analogue. Pour cela, portons ces deux expressions dans $J = (2e\hbar/m^*)\Psi_0^2 Q$. Nous obtenons la densité du courant en fonction de a/ξ_e (au lieu de Q) :

$$J = 2J_n \frac{\xi(0)}{\xi_e} \left[\frac{T_0 - T}{T_0} - \frac{\xi^2(0)}{\xi_e^2} \right] \left[1 - \frac{\sin^2(\gamma/2)}{\sin^2(2a/\xi_e)} \right]^{1/2} \quad (\text{V.2.9})$$

Il est évident que J_c est une fonction décroissante monotone de T . Comme nous le voyons nous ne pouvons pas obtenir analytiquement le maximum de J . Cependant, à champ nul, une relation analytique $J_c(T)$ est facilement obtenue :

$$J_c = \frac{4}{3\sqrt{3}} J_n \left(\frac{T_0 - T}{T_0} \right)^{3/2} \quad (\text{V.2.10})$$

Nous trouvons aussi la loi de puissance 3/2 attendue. En plus, le courant critique par fils $J_c/2$ coïncide exactement avec celui du filament (Eq. V.2.6).

V.2.2. courant critique d'un réseau carré

Le calcul du courant critique d'un réseau carré est beaucoup plus compliqué puisque son spectre consiste en des bandes de "conduction" séparées par des bandes interdites au lieu d'un spectre discret. Mais cela ne change pas l'idée physique ni la procédure du calcul. Nous allons d'abord calculer le courant critique horizontal $J_{\rightarrow}$ et nous supposons que $J_{\uparrow} \propto \sin k = 0$, donc $k = 0$ ou π . Maintenant le paramètre α prend la place de la vitesse de paire Q puisqu'il est proportionnel au gradient de la phase de fonction d'onde plane $\exp(i m \alpha)$ suivant X . Comme dans la cas d'une boucle, pour un champ fixé et k donné (0 ou π), la valeur propre $\epsilon = 4 \cos(a/\xi_e)$ et α se correspondent un à un.

$$\alpha = \arccos[1/2 P_q(\epsilon) \pm 1] \quad (V.2.11)$$

Le courant moyen par fil s'écrit comme une fonction de ϵ :

$$J_{\rightarrow} = J_n \frac{\arccos(\epsilon/4)}{\sqrt{1-\epsilon^2/16}} \frac{\xi(0)}{\beta_A} \left[E(H) - \frac{1}{\xi^2(T)} \right] \frac{[1-(1/2 P(\epsilon) \pm 1)^2]^{1/2}}{P'(\epsilon)} \quad (V.2.12)$$

En général il présente des maxima sur chaque bande. Celui le plus haut est donc le courant critique horizontal qui dépend de la température. A chaque champ γ et température T fixés, le courant critique peut être obtenu numériquement.

V.2.3. Courant critique du réseau carré en champ nul

Il est toujours facile de trouver le comportement de J_c en champ nul. Supposons $p=0$, $q=1$, nous avons $P_1(\epsilon)=\epsilon$, $P'_1(\epsilon)=1$. Eq.(V.2.12) se simplifie et devient :

$$J_{\rightarrow} = 2J_n \sqrt{\frac{\cos(a/\xi_e)}{\pm 1 + \cos(a/\xi_e)}} \left[\frac{T_0 - T}{T_0} - \frac{\xi^2(0)}{\xi_e^2} \right] \frac{\xi(0)}{\xi_e} \quad (V.2.13)$$

Près de T_c , a/ξ_e est petit, $\cos kq=1$ et le prefacteur

$$2 \sqrt{\frac{\cos(a/\xi_e)}{\pm 1 + \cos(a/\xi_e)}} \quad \text{vaut } \sqrt{2}$$

Le maximum de $J_{\rightarrow}$, soit J_c , est trouvé :

$$J_c = J_0 \left(\frac{T_0 - T}{T_0} \right)^{3/2} \quad (\text{V.2.14})$$

$$\text{avec } J_0 = \frac{4}{3\sqrt{6}} \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{c}{4\pi} \frac{1}{\kappa^2 \xi^3(0)} = \frac{4}{3\sqrt{6}} J_n \quad (\text{V.2.15})$$

Nous avons pu vérifier qu'elle coïncide avec la résolution rigoureuse de l'équation G.L. complète [3] dans la limite $T \rightarrow T_c$.

Il n'y a plus d'expression analytique de J_c loin de T_c . Une solution numérique est montrée sur la figure V.2.2 pour $\xi(0)/a = 0.78$.

Ce que nous avons fait ne sera plus valable lorsque T s'éloigne de T_c , c'est à dire $\xi(0)/\xi_e$ s'éloigne de zéro. La situation devient intéressante si $\xi(0)$ est très petit devant la constante du réseau a . Dans ce cas, a/ξ_e peut être supérieur à $\pi/2$ et saute sur d'autre bande tout en gardant T proche de T_c . Par exemple lorsque $\pi/2 < a/\xi(0) < 3\pi/2$, la deuxième bande $a/\xi_e \in [\pi/2, 3\pi/2]$ est accessible. Donc il faut chercher le maximum de l'Eq (V.2.12) non seulement pour $\cos(qk) = 1$, mais aussi pour $\cos(qk) = -1$ (correspondant à $\varepsilon \in [0, -4]$, soit $a/\xi \in [\pi/2, 3\pi/2]$). De la même façon, lorsque $a/\xi(0) > 3\pi/2$, la troisième bande $a/\xi_e \in [3\pi/2, 5\pi/2]$ doit être prise en compte en cherchant le maximum du courant. Sur la figure (V.2.3) nous portons $J_{\rightarrow}(a/\xi_e)$ à quelques températures pour $a/\xi(0) = 0.063$, par exemple. Nous voyons à la température relative $(T_0 - T)/T_0 = 0.5$, le maximum de $J_{\rightarrow}$ a lieu sur la deuxième bande et à $(T_0 - T)/T_0 = 0.8$, J_c a lieu sur la troisième bande. Nous calculons J_c point par point et le résultat est tracé sur la figure (V.2.4) pour $\xi(0)/a = 0.063$. Notons que les maximums de $J_{\rightarrow}$ se produisent toujours près de $n\pi$ (fig.V.2.5) où le préfacteur

$$2 \sqrt{\frac{\cos(a/\xi_e)}{\pm 1 + \cos(a/\xi_e)}} \sim \sqrt{2}$$

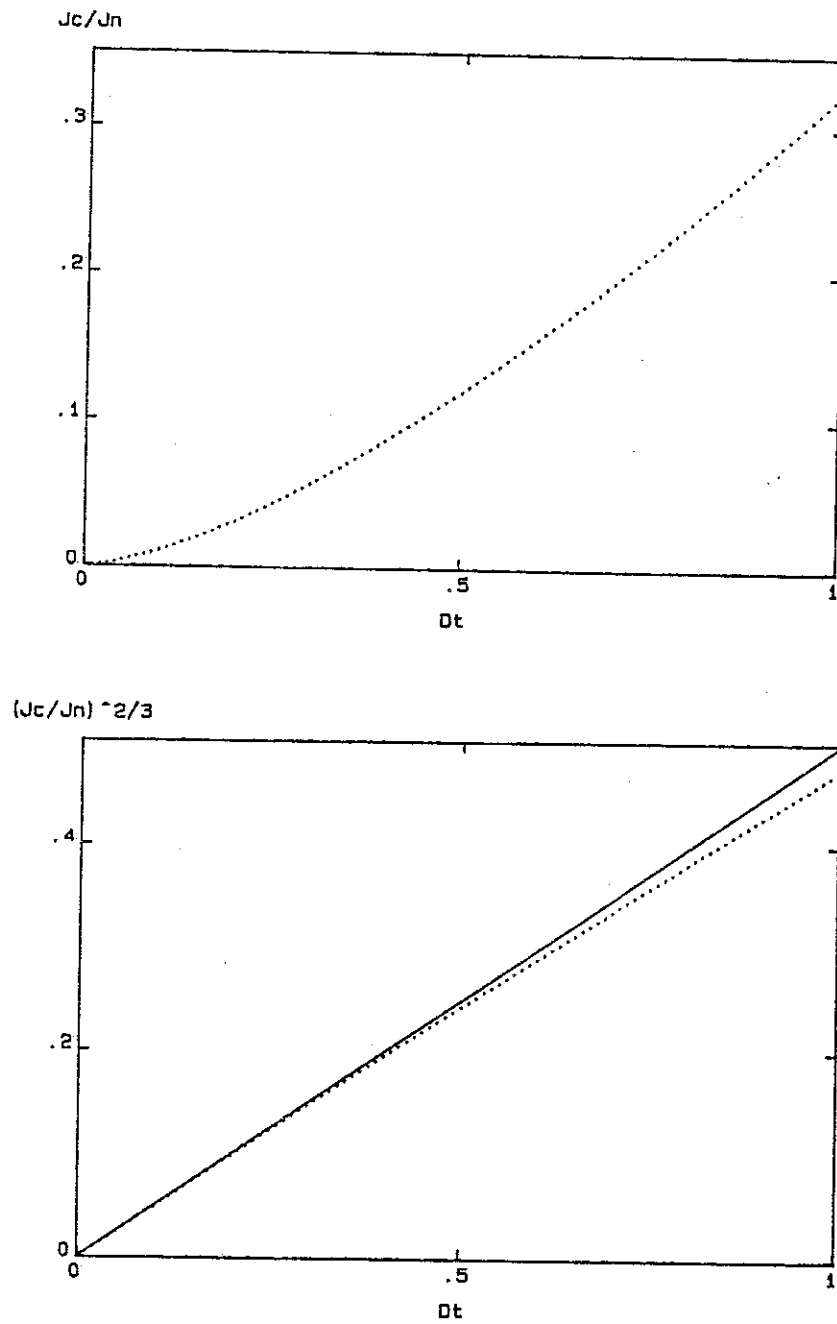


Fig. V.2.2 a. Courant critique normalisé J/J_n en fonction de la températures relatives $\Delta t = (T_0 - T)/T_0$ pour $\xi(0)/a = 0.78$.

b. $(J/J_n)^{2/3}$ en fonction de Δt (en pointillé). La ligne droite est $J = \Delta t^{3/2}$ pour comparaison.

Donc la loi de puissance $3/2$ est toujours une bonne approximation de J_c (le pointillé sur figure V.2.4)

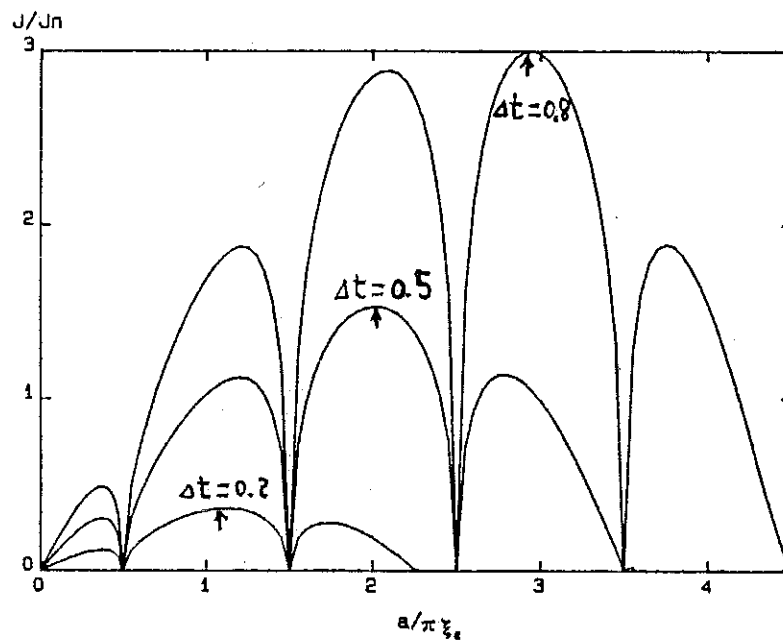


Fig. V.2.3 Courant de transport normalisé J/J_n en fonction de l'énergie $a/\pi\xi_e$ pour $\xi(0)/a = 0.063$.

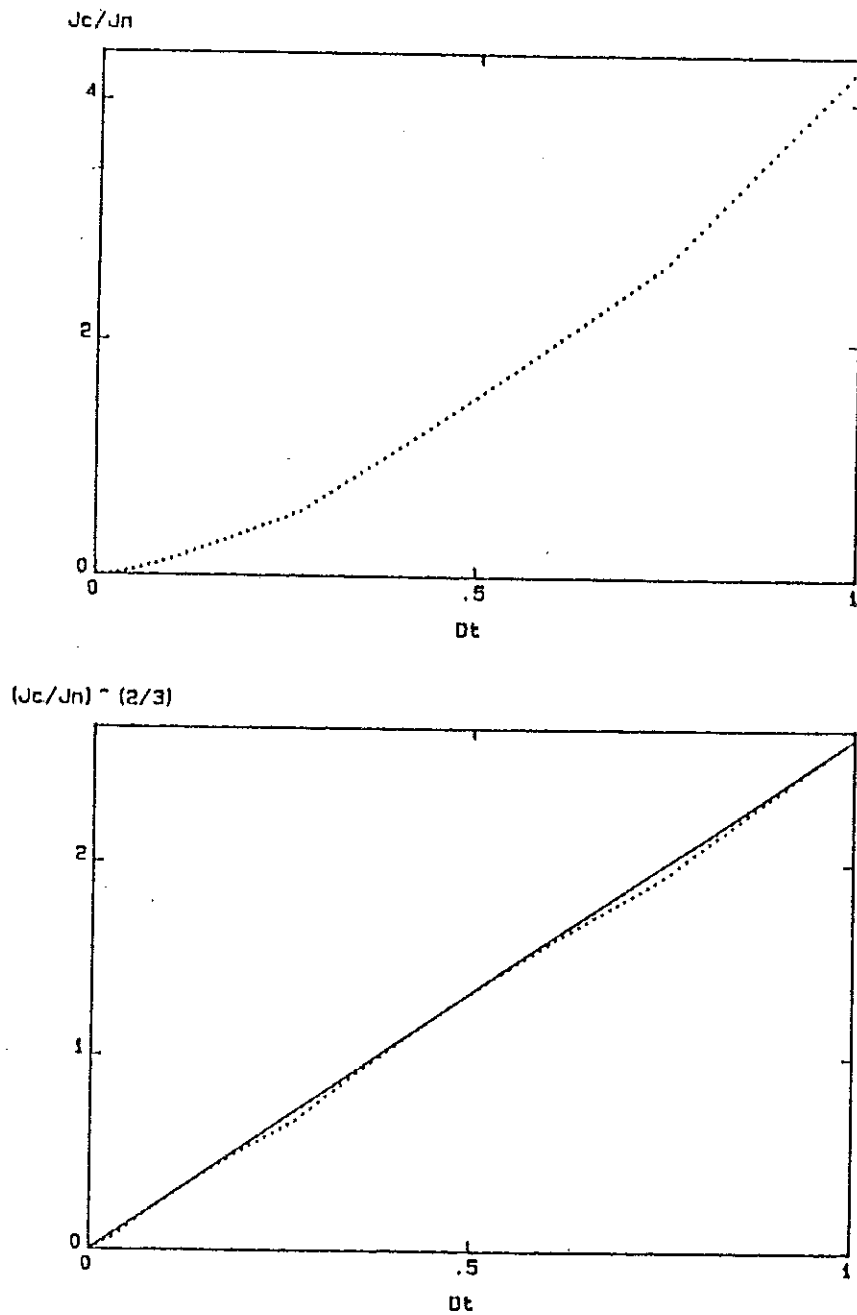


Fig. V.2.4 a. Courant critique normalisé J/J_n en fonction de la températures relatives $\Delta t = (T_0 - T)/T_0$ pour $\xi(0)/a = 0.063$.

b. $(J/J_n)^{2/3}$ en fonction de Δt (en pointillé). La ligne droite est $J = \Delta t^{2/3}$ pour comparer.

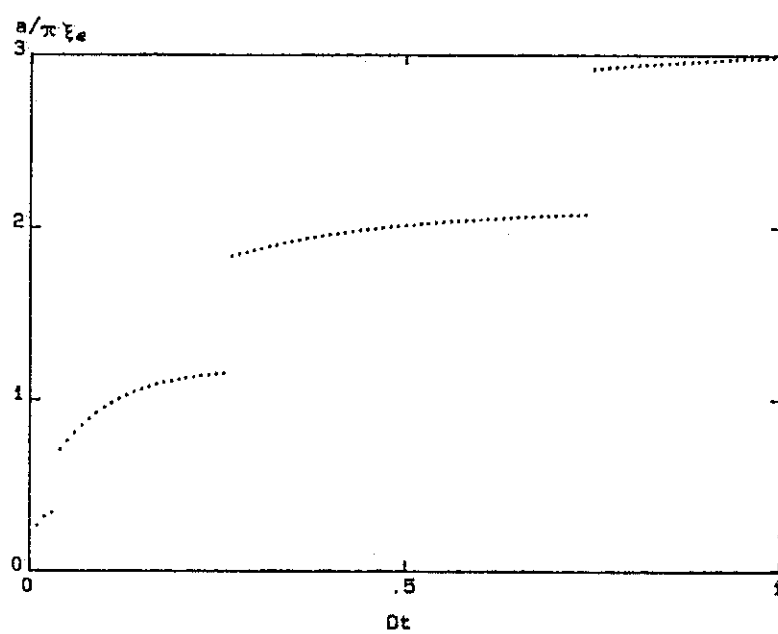


Fig. V.2.5 L'énergie correspondante à Fig. V.2.4 (voir texte).

V.3. Résultats expérimentaux sur les courants critiques

Le mesure du courant critique d'échantillons homogènes a été effectuée par nombreux expérimentateur [4,5]. La valeur absolue aussi bien que la loi de puissance 3/2 en fonction de la température ait été bien vérifiées près de T_c (voir la figure V.3.1).

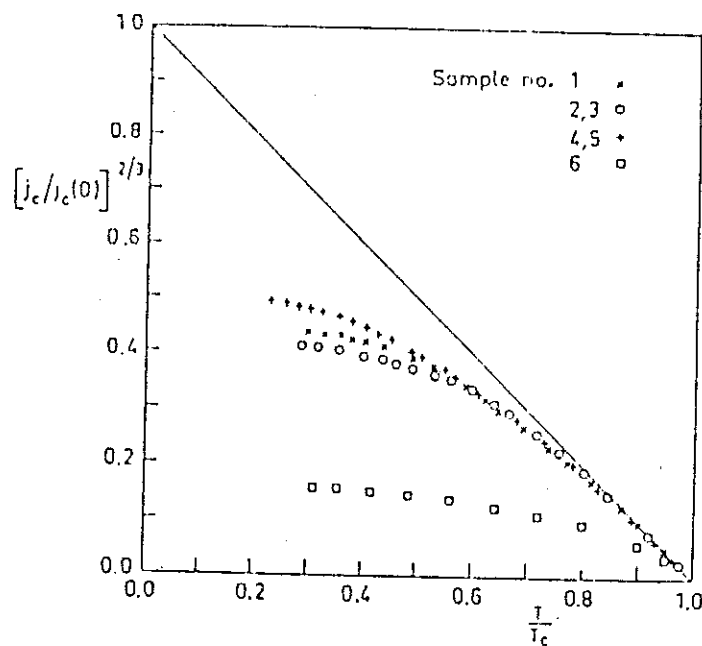


Fig. V.3.1 Courant critique en fonction de la température de différents films massifs (extrait de la référence [4]).

Dans cette partie nous allons montrer quelques résultats expérimentaux préliminaires pour des réseaux carrés. Les expériences sont beaucoup plus difficiles que les mesures de la ligne $T_c(H)$. L'homogénéité, les effets de chauffages jouent un rôle prépondérant.

Ce que nous entendons expérimentalement par courant critique, c'est la valeur minimum du courant, introduit dans

l'échantillon, qui permet d'observer la transition supraconductrice-normal. Pour une température donnée, on détecte cette valeur à l'aide d'un picovoltmètre (voir le chapitre II.4) : L'existence d'une tension $V \neq 0$ nous indique que l'échantillon est dans l'état normal. Nous choisissons, de façon arbitraire, un "critère de tension" (seuil V_s) défini par une valeur faible, pour laquelle la transition est observée. On verra que le choix de V_s est délicat : a priori, V_s doit être le plus faible possible ; d'autre part, si on le choisit trop faible, on risque de tomber au pieds de la transition dû aux effets de supraconducteur massif ou inhomogénéité.

Le premier échantillon mesuré est un réseau carré (figure V.3.2) en aluminium de 800 Å d'épaisseur. La largeur et longueur des filaments sont de $2\mu\text{m}$ et de $6\mu\text{m}$, respectivement.

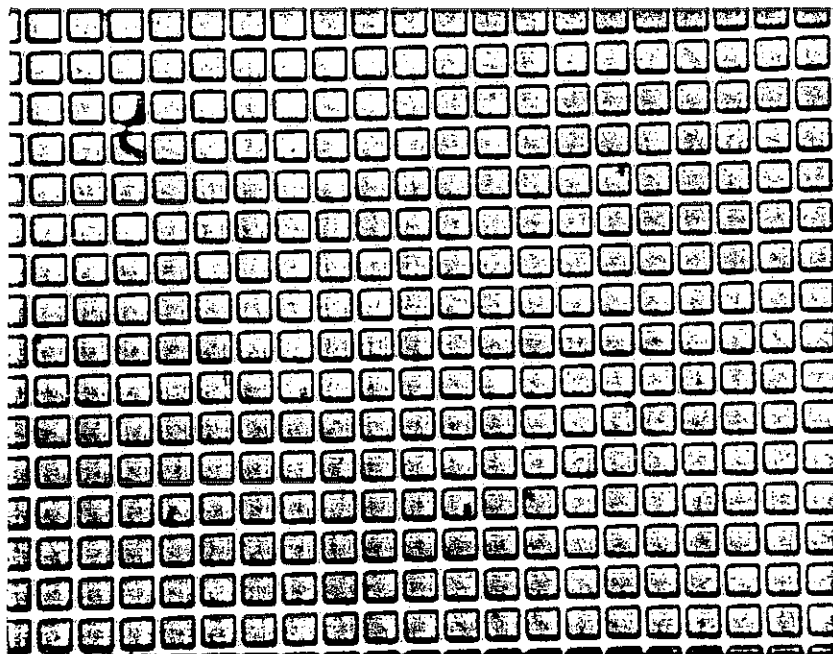


Fig. V.3.2 La photo du premier échantillon (réseau carré).

Sur la figure V.3.3 et V.3.4 nous portons I_c mesurés ainsi en fonction de la température T pour différents seuils. Le premier

correspondant au seuil élevé ($V_s = 1\mu V$) a un comportement parabolique (Voir sur la figure V.3.3b) au lieu de la loi de puissance $3/2$ que nous cherchons. Cela s'explique par l'effet de chauffage dû à la puissance importante dissipée dans l'échantillon. Pour diminuer cet effet on mesure I_c à un seuil plus bas (Fig. V.3.4, $V_{seuil}=0.2\mu V$). La loi en puissance $3/2$ est alors observée mais sur quelques millidegrés seulement.

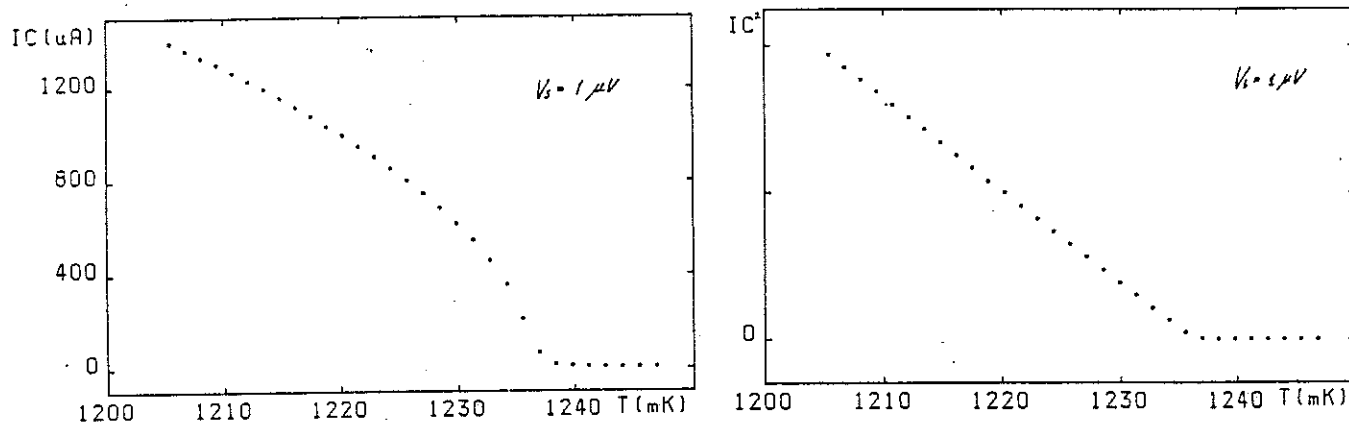


Fig. V.3.3 a. Courant critique en fonction de la température du reseau carré ($V_S = 1 \mu V$). b. $I_C^2(T)$

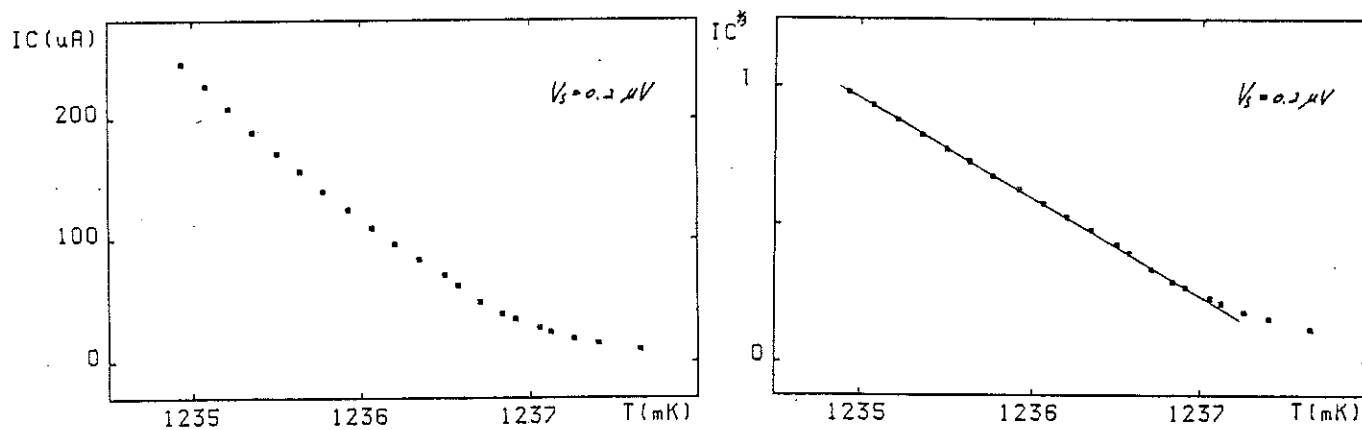


Fig. V.3.4 a. Courant critique en fonction de la température du reseau carré ($V_S = 0.2 \mu V$). b. $I_C^{2/3}(T)$

Une solution est de diminuer le nombre de cellule en parallèle et donc le courant total sera plus faible en atteignant la même densité du courant. Pour cette raison nous avons réalisé un deuxième échantillon (voir la photo sur la figure V.3.5) en indium d'épaisseur 1000Å. Les filaments sont beaucoup plus fins ($0.75\text{ }\mu\text{m}$) ; la boucle élémentaire correspond à une surface $S = 8\text{ }\mu\text{m}^2$. Le diagramme (T_c -H) montre une belle oscillation dont l'amplitude permet de déterminer la longueur de cohérence $\xi_s(0) = 0.178\text{ }\mu\text{m}$.

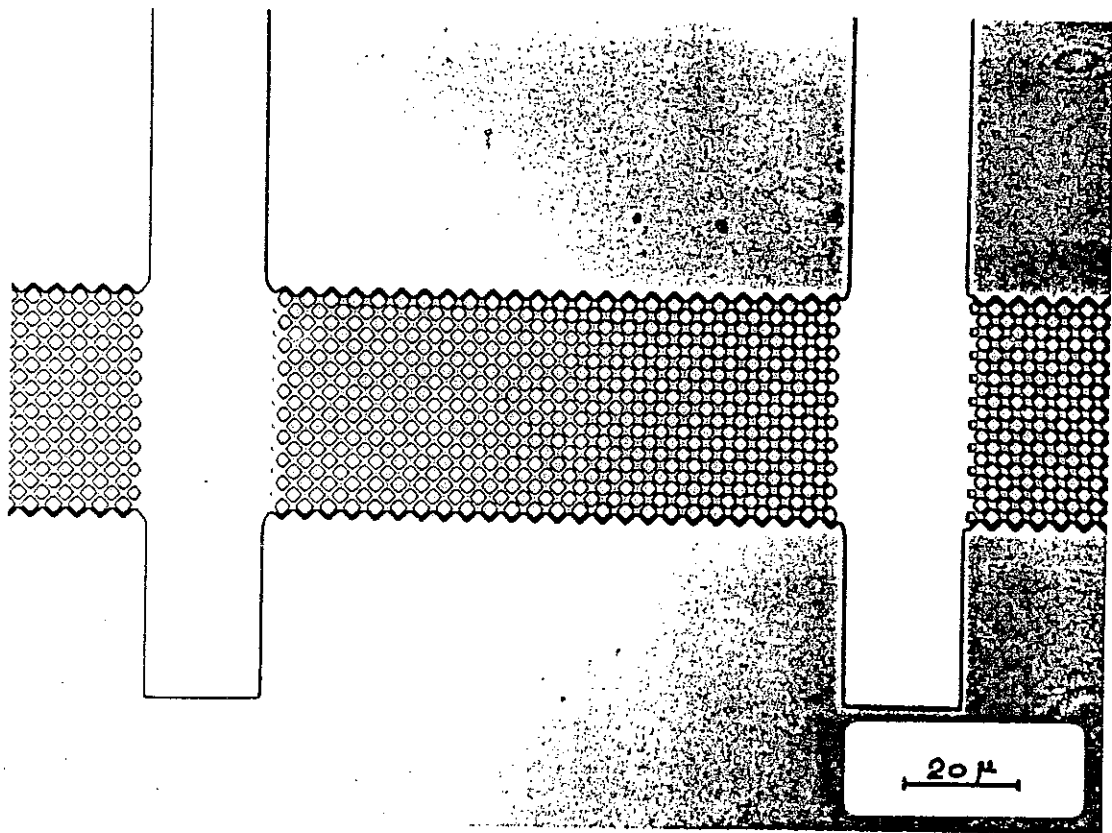


Fig. V.3.5 La photo du deuxième échantillon (réseau carré diagonal).

La caractéristique courant-tension est montrée sur la figure V.3.6. Elle a un comportement complexe et inexplicable. (En revanche, nous avons obtenu une caractéristique courant-tension sur un autre échantillon en aluminium granulaire ayant le même motif, qui ressemblait parfaitement celle d'une jonction Josephson

(figure V.3.7). Nous avons essayé d'appliquer une irradiation de haute fréquence sur le réseau, aucun escalier n'a été observé. Par contre, ce phénomène a été étudié par d'autres auteurs et des paliers quantifiés ont été trouvés^[6-8]).

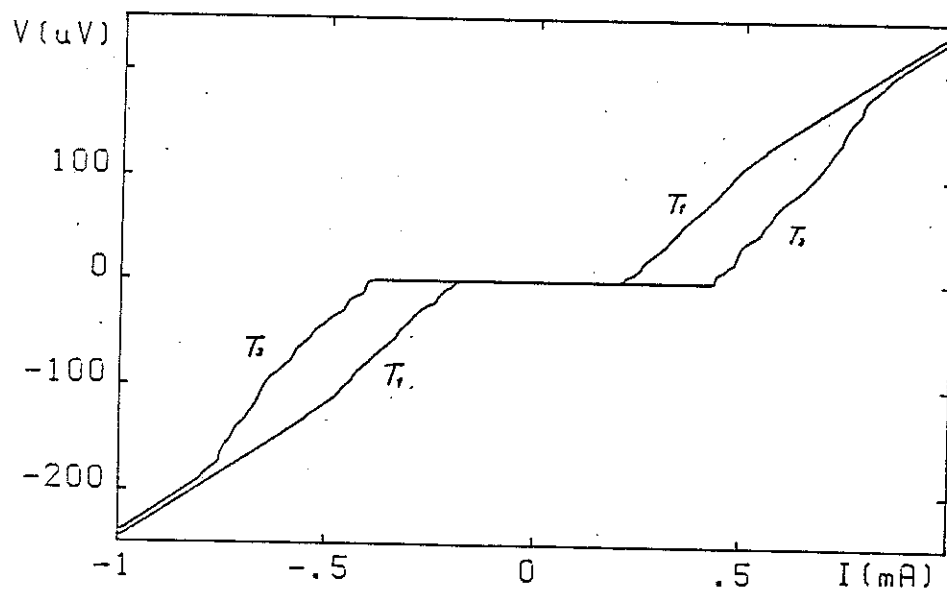


Fig. V.3.6 La caractéristique courant-tension de l'échantillon diagonal en indium.

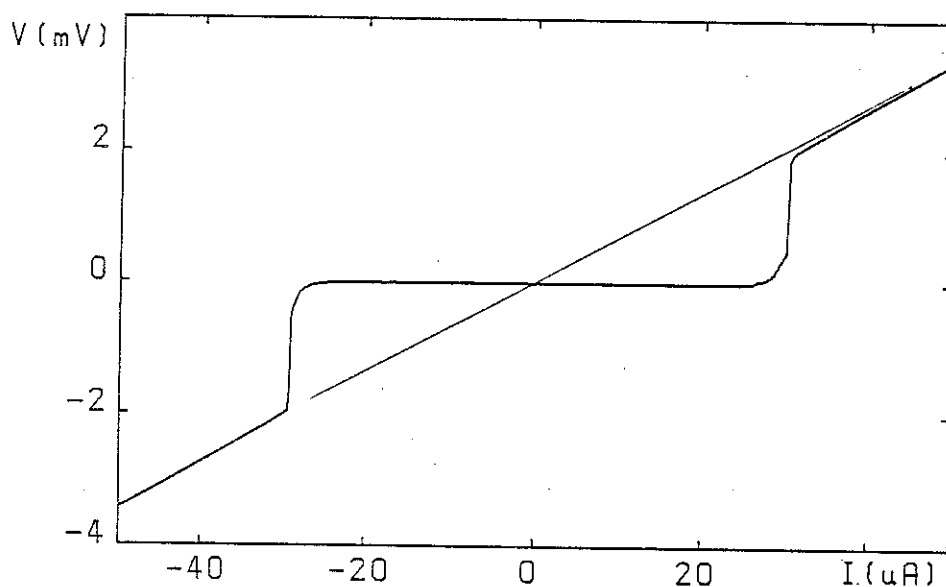


Fig. V.3.7 La caractéristique courant-tension de l'échantillon diagonal en aluminium granulaire.

Le courant critique mesuré en champ nul en fonction de la température démontre exactement la loi de puissance $3/2$ pour un seuil $V_s = 0,5\mu\text{V}$ (figure V.3.8) :

$$I(T) = I_0 (1 - T/T_0)^{3/2}$$

Nous en déduisons $T_0 = 3.405$ K et $I_0 = 1.247$ A correspondant à une densité du courant $J_0 = I_0/nwd = 8.31 \cdot 10^{11}$ A/m² avec les paramètres suivants : nombre de filaments en parallèle $n = 20$, largeur de filament $w = 0.75$ μ m et épaisseur $d = 1000$ Å. Cette densité coïncide avec la valeur calculée selon l'Eq.(V.2.15) en prenant le paramètre de Ginzburg-Landau $\kappa = 0.64$.

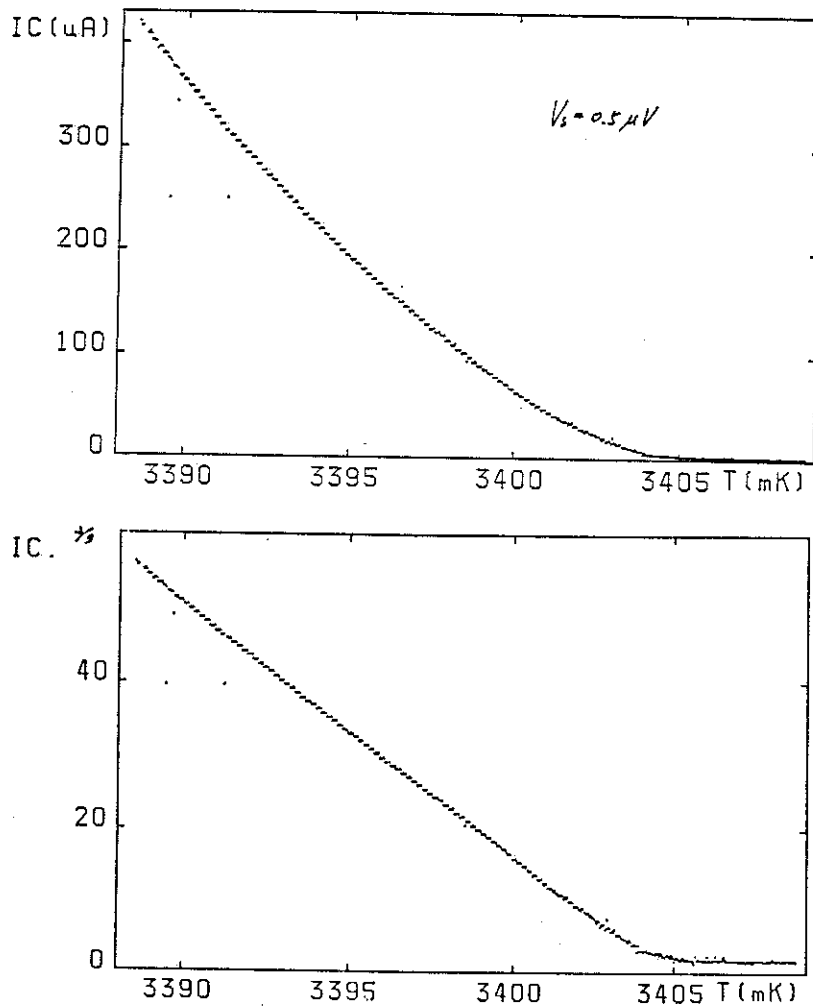


Fig. V.3.8 a. Courant critique en fonction de la température du réseau carré diagonal ($V_S = 10 \mu$ V).
b. $I_C^{2/3}(T)$.

Nous finissons ce chapitre par deux remarques.

i) L'observation préliminaire de comportement de cassure sur le diagramme (I_c - T) (nous l'avons vu seulement en présence du champ magnétique, voir Fig. V.3.9, où $\Phi/\Phi_0 = 1$), ce qui peut être dû à la "bande d'énergie" discutée dans la section V.2.2.

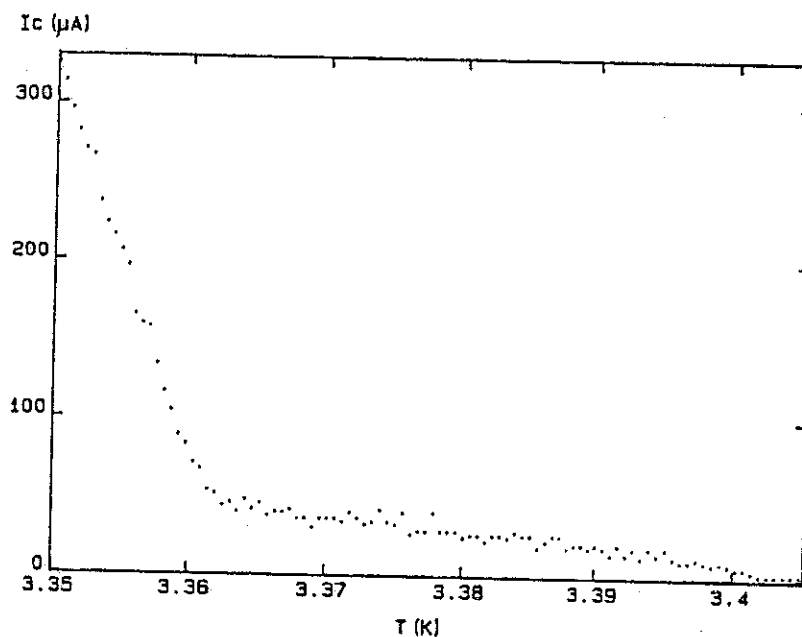


Fig. V.3.9 Le comportement de cassure sur le diagramme (I_c - T) mesuré à $\Phi/\Phi_0 = 1$.

ii) Les températures critiques mesurées à différents courants dépolariation I_m . Sur la figure V.3.10 nous portons les résistances du thermomètre (fonction décroissante de la température) en fonction du courant passant dans la bobine du champ (directement proportionnel au champ magnétique). En augmentant le courant I_m , la structure fine devient plus en plus faible.

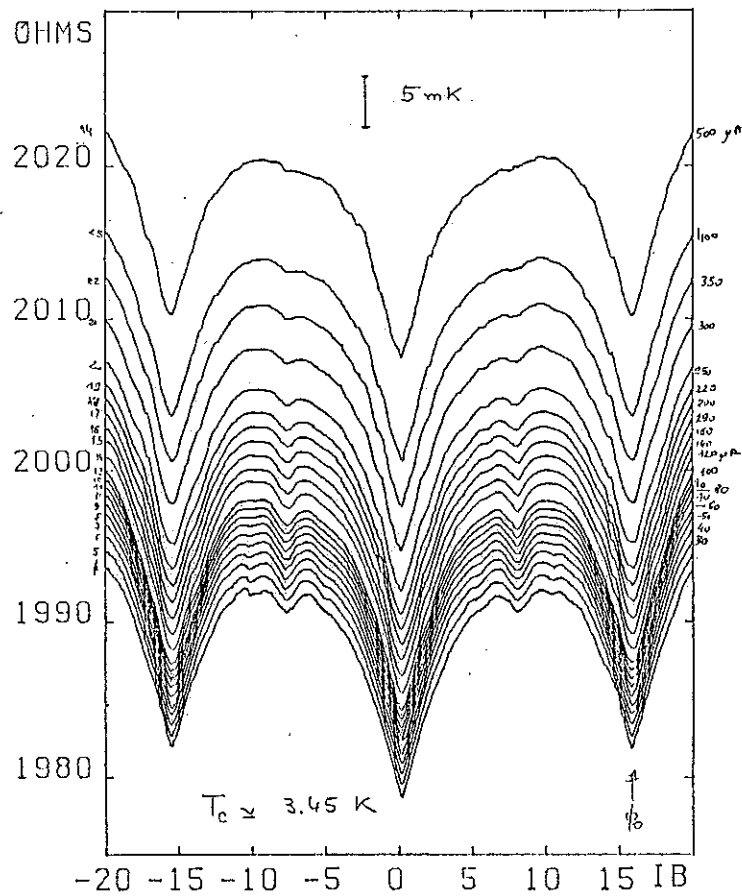


Fig. V.3.10 Les températures critiques mesurées aux courants différents.

REFERENCES

- [1] H. J. Fink, A. L'opez, and R. Maynard,
Phys. Rev. B 26, 5237 (1982)
- [2] M. TINKHAM *"Introduction to superconductivity"*
- [3] H. J. Fink and A. L'opez J, Phys. Lett. (Paris) 46, L961 (1985)
- [4] J. Ronujn, T. M. Klapwijk, M. J. Renne, and J. E. Mooij,
Phys. Rev. B 26, 3648 (1982)
- [5] O. Liengme, A. Baratoff, and P. Martinoli,
J. Low T. Phys. 65, 113 (1986)
- [6] J. Niemeyer, J. H. Hinke, and R. L. Kantz,
Appl. Phys. Lett. 45, 478 (1984)
- [7] Moriwaksi, M. Suzuki and T. Murakami,
Jap. J. Appl. Phys. 23, L181 (1984)
- [8] M. Ito, Y. Enomoto, and T. Murakami,
Appl. Phys. Lett. 43, 314 (1983)

Annexe V.A.

Dans cette annexe nous allons démontrer les deux égalités V.1.11a et V.1.11b.

Récrivons l'équation (I.1.1) sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{q-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_{q-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} f_0 \quad (\text{V.A.1})$$

Notons

$$\Delta_{i,j} = \det \begin{bmatrix} a_i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a_{i+1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a_{i+2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_j \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_{i,0} = 1 \quad (\text{V.A.2})$$

Nous avons selon la méthode de Cramer :

$$f_m = -\frac{\Delta_m}{\Delta_{1,q-1}} f_0 = (-1)^m \frac{\Delta_{m+1,q-1} - (-1)^{q-1} \beta \Delta_{1,m-1}}{\Delta_{1,q-1}} f_0 \quad (\text{V.A.3})$$

où Δ_i est un déterminant obtenu à partir de $\Delta_{1,q-1}$ après avoir remplacé la $i^{\text{ème}}$ colonne par $(1,0,0,\dots, \beta)'$.

Donc

$$\begin{aligned} f_m^* f_{m+1} = & - (f_0^2 / \Delta_{1,q-1}) [\Delta_{m+1,q-1} \Delta_{m+2,q-1} + \Delta_{1,m-1} \Delta_{1,m} \\ & - (-1)^{q-1} (\beta \Delta_{m+1,q-1} \Delta_{1,m} + \beta^* \Delta_{m+2,q-1} \Delta_{1,m-1})] \end{aligned} \quad (\text{V.A.4})$$

et sa partie imaginaire est

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_m[f_m^* f_{m+1}] &= ((-1)^{q-1} f_0^2 \sin \alpha / \Delta_{1,q-1}^2) [\Delta_{m+1,q-1} \Delta_{1,m} + \Delta_{m+2,q-1} \Delta_{1,m-1}] \\ &= ((-1)^{q-1} \sin \alpha / \Delta_{1,q-1}) f_0^2 \end{aligned} \quad (\text{V.A.5})$$

Notons que la matrice $q \times q$

$$\begin{bmatrix} a_0 & 1 & 0 & \beta^* \\ 1 & a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta & 0 & 0 & a_{q-1} \end{bmatrix}$$

est formé de vecteurs linéairement dépendants. Nous pouvons récrire (I.1.1) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} a_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \beta^* \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & a_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & a_{i+1} & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & 1 & a_{i+2} & 0 \\ \beta & & 0 & 0 & 0 & a_{q-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_{i-1} \\ f_{i+1} \\ f_{i+2} \\ f_{q-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} f_i \quad (\text{V.A.6})$$

La méthode de Cramer donne

$$f_0 = - \frac{(-1)^i (\Delta_{i+1,q-1} - (-1)^{q-1} \Delta_{1,i-2} \beta^*)}{\Delta_{0,i-1} \Delta_{i+1,q-1} - \Delta_{1,i-1} \Delta_{i+1,q-2}} f_i \quad (\text{V.A.7})$$

$$\text{où } f_m^* = (-1)^m \frac{\Delta_{0,m-1} \Delta_{m+1,q-1} - \Delta_{1,m+1} \Delta_{m+1,q-2}}{\Delta_{m+1,q-1} - (-1)^{q-1} \Delta_{1,m-1} \beta} f_0^* \quad (\text{V.A.8})$$

Multiplions par (II.2.13)

$$|f_m|^2 = - \frac{\Delta_{0,m-1} \Delta_{m+1,q-1} - \Delta_{1,m-1} \Delta_{m+1,q-2}}{\Delta_{1,q-1}} |f_0|^2 \quad (\text{V.A.9})$$

Reprenons l'équation caractéristique du réseau est

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta_{0,q-1} \Delta_{1,q-2} - [\cos qk + 2\cos \alpha] (-1)^q \\ &= [P_q(\epsilon) - 2\cos qk - 2\cos \alpha] (-1)^q = 0 \end{aligned} \quad (\text{V.A.10})$$

Décrivons ce déterminant par rapport à ϵ :

$$\begin{aligned} P_q'(\epsilon) &= -[\Delta_{1,q-1} + (\Delta_{0,0} \Delta_{2,q-1} - \Delta_{2,q-2}) + (\Delta_{0,1} \Delta_{3,q-1} - \Delta_{1,1} \Delta_{3,q-2}) \\ &\quad + \dots + (\Delta_{0,q-2} \Delta_{1,q-3})] (-1)^q \\ &= -\Delta_{1,q-1} - \sum_{m=1}^{q-1} (\Delta_{0,m-1} \Delta_{m+1,q-1} - \Delta_{1,m-1} \Delta_{m+1,q-2}) \\ &= |f_0|^{-2} \Delta_{1,q-1} \sum_{m=0}^{q-1} |f_m|^2 (-1)^{q-1} = \frac{q \Delta_{1,q-1}}{|f_0|^2} (-1)^{q-1} \end{aligned} \quad (\text{V.A.11})$$

La combinaison de (V.A.5) et (V.A.11) conduit à :

$$\mathcal{I}_m[f_m * f_{m+1}] = \sin \alpha / P_q'(\epsilon) \quad (\text{V.A.12})$$

De même si nous dérivons Δ par rapport à k , nous avons

$$\begin{aligned} &[P_q'(\epsilon) \partial \epsilon / \partial k - 2q \sin qk] (-1)^q \\ &= - \left[\Delta_{1,q-1} + \sum_{m=1}^{q-1} (\Delta_{0,m-1} \Delta_{m+1,q-1} - \Delta_{1,m-1} \Delta_{m+1,q-2}) \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial k} + 2q \sin(\kappa - m\gamma) \right) \right] \\ &\quad + (-1)^{q-1} 2q \sin q\kappa \\ &= \frac{q \Delta_{1,q-1}}{|f_0|^2} (-1)^{q-1} \frac{\partial \epsilon}{\partial k} + \frac{2q \Delta_{1,q-1}}{|f_0|^2} (-1)^{q-1} \sum_{m=0}^{q-1} |f_m|^2 \sin(\kappa - m\gamma) + (-1)^{q-1} 2q \sin q\kappa \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\sum_{m=0}^{q-1} |f_m|^2 \sin(\kappa - m\gamma) = \frac{1}{2} \frac{\partial \epsilon}{\partial k} = \frac{q \sin q\kappa}{P_q'(\epsilon)} \quad (\text{V.A.13})$$

CONCLUSION

Dans ce mémoire nous avons étudié la ligne de transition supraconductrice de réseaux ordonnés formant des structures non-périodiques ---- réseaux fractals et quasipériodiques ---- fabriqués par lithographie électronique. Comme dans le cas de réseaux périodiques, les prédictions théoriques de la ligne de transition dans le régime linéaire donnent une précision suffisante et coïncident bien avec les températures critiques mesurées expérimentalement pour les deux réseaux fractals. La propriété d'échelle du réseau fractal triangulaire est observé jusqu'à l'ordre 5. Cette propriété d'échelle, par contre, n'apparaît pas clairement dans le réseau fractal carré. Le diagramme de transition de phase $T_C(H)$ du réseau quasipériodique présente un comportement complexe dont nous n'avons pas encore l'explication théorique. Cependant, les pics caractéristiques de la structure quasipériodique (et qui apparaissent également dans d'autres réseaux quasipériodiques formés à partir des mêmes cellules de base) sont identifiés comme une série $\tau^0, \tau, \tau^2, \dots$ (où τ est le nombre d'or).

Nous avons aussi abordé quelques problèmes soulevés par l'existence de singularités dans la ligne de transition des réseaux périodiques. Nous avons déterminé le paramètre d'ordre dans l'état mixte supraconducteur au dessous de T_C pour le réseau carré. Nous avons trouvé les expressions de fonctions thermodynamiques du réseau (énergie libre, aimantation ...) qui présentent des singularités aux flux rationnels. Le règle de quantification de Bohr-Sommerfeld doit être modifiée dans un réseau étendu en ajoutant un terme supplémentaire (phase de Berry) qui est le responsable de l'assymétrie des dérivées du spectre de ce réseau. Cet effet se relève sur la dérivée de l'aimantation par rapport à la température.

Nous avons commencé dans la dernière partie de cette thèse l'étude préliminaire des problèmes du courant critique. A champ nul les courants critiques en fonction de la température est obtenus analytiquement dans le régime linéaire pour réseaux fini (boucle) et infini (réseau carré). La loi de puissance $3/2$ est retrouvé près de T_C comme dans le cas d'un filament (Tinhkam) et solution

rigoureuse des équations de Ginzburg-Landau complètes (Fink et al). Cette loi est vérifiée expérimentalement pour un réseau carré.

Dans ces différents domaines il reste encore beaucoup à faire. A propos de la structure quasipériodique, il serait préférable de revenir à des structures plus simples et plus pures, comme : deux boucles adjacentes avec le rapport de surface irrationnelle (OD), échelles formant en ces deux boucles alternativement ou quasipériodiquement (1D) et réseaux de Penrose (2D).

Les prédictions théoriques qui ont été faites sur la configuration du paramètre d'ordre demandent des vérifications expérimentales de même que les prédictions sur le courant critique de Ginzburg-Landau. Mentionnons également les effets dynamiques (analogie avec les jonctions Josephson) qui n'aient pas été abordés dans cette thèse.

CHAPITRE V. Descriptions des supercourants et des courants critiques dans les réseaux supraconducteurs

V.1. L'état mixte en présence d'un courant de transport non-nul

V.1.1. L'équation d'Alexander en présence de courants extérieurs

V.1.2. Etat mixte d'un réseau carré en présence d'un courant extérieur

V.2. Les courants critiques des réseaux supraconducteurs

V.2.1. Définition du courant critique au champ moyen

V.2.2. courant critique d'un réseau carré

V.3. Résultats expérimentaux sur les courants critiques

V.A. Annexe

Résumé

Les effets de quantification du flux magnétique sur des réseaux supraconducteurs bidimensionnels sont étudiés dans ce mémoire. Du point de vue théorique, la température de transition supraconductrice en fonction du champ magnétique appliqué est déterminée en résolvant les équations d'Alexander pour divers réseaux : périodiques, quasipériodiques et fractals. Quelques uns de ces réseaux submicroniques ont été réalisés par lithographie électronique. Leurs températures critiques sont mesurées et l'accord entre la théorie et l'expérience est discuté.

A l'intérieur de la phase supraconductrice, les vortex entrent dans le réseau et induisent des supercourants diamagnétiques. L'état d'équilibre est traité d'une manière analogue au traitement de l'état mixte d'un supraconducteur massif d'Abrikosov : on détermine l'amplitude du paramètre d'ordre en tenant compte du terme non-linéaire de l'équation de Ginzburg-Landau par une méthode de perturbation. On en déduit les quantités thermodynamiques, en particulier l'énergie libre et l'aimantation du réseau, qui sont des fonctions de la différence entre la température et la température critique $T - T_C$, ainsi que du paramètre d'Abrikosov β_A . Ce formalisme a été appliqué au réseau carré pour lequel les configurations du paramètre d'ordre et les distributions du courant diamagnétique ont été déterminées pour quelques valeurs simples du champ magnétique.

D'autre part, la dérivée de la ligne critique par rapport au champ magnétique, qui s'identifie à la dérivée du bord du spectre d'Hofstadter a été calculée à l'aide d'une approximation continue. Cette dérivée contient un terme anormal que l'on peut relier à la phase de Berry. Elle donne directement la dérivée de l'aimantation par rapport à la température $\partial M / \partial T$.

Nous donnons également quelques résultats préliminaires sur l'état mixte du réseau supraconducteur en présence d'un courant extérieur. Le courant critique au-dessus duquel cet état n'existe plus est obtenu pour quelques cas simples (boucle, réseau carré). Quelques mesures préliminaires de ce courant ont été effectuées sur un réseau carré.

mots clés

Réseaux supraconducteurs

Micropysique

Courant critique

Etat mixte supraconducteur

Fractals

Quasipériodicité

Systemes incommensurables

