

T H E S E

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DU TROISIEME CYCLE
DE MAGNETISME ET PHYSIQUE DU SOLIDE

par

Jean-Pierre PERRIER
Assistant à la Faculté des Sciences

Les constantes élastiques statiques des milieux para-élastiques

Soutenue le 17.6.1966

devant la commission d'examen

MM. L. NEEL Président

F. BERTAUT

F. GALLISSOT Examineurs

R. VERGNE

LISTE des PROFESSEURSDOYEN HONORAIRE

M. MORET

DOYEN

M. WEIL L.

Chaire de Thermodynamique

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. NEEL L.

Chaire de Physique Expérimentale

HEILMANN R.

Chaire de Chimie

KRAVTCHENKO J.

Chaire de Mécanique Rationnelle

CHABAUTY C.

Chaire de Calcul Différentiel et Intégral

PARDE M.

Chaire d'Hydrologie Fluviale

BENOIT J.

Chaire de Radioélectricité

CHENE M.

Chaire de Chimie Papetière

BESSON J.

Chaire de Chimie

FELICI N.

Chaire d'Electrostatique

KUNTZMANN J.

Chaire de Mathématiques Appliquées

BARBIER R.

Chaire de Géologie Appliquée

SANTON L.

Chaire de Mécanique des Fluides

OZENDA P.

Chaire de Botanique

FALLOT M.

Chaire de Physique Industrielle

GALVANI O.

Professeur à titre personnel

MOUSSA A.

Chaire de Chimie Nucléaire

TRAYNARD P.

Chaire de Chimie Générale

SOUTIF M.

Chaire de Physique Générale

CRAYA A.

Chaire d'Hydrodynamique

REULOS R.

Professeur à titre personnel

AYANT Y.

Professeur à titre personnel

GALLISSOT F.

Professeur à titre personnel

M^{le} LUTZ E.

Professeur à titre personnel

BLAMBERT M.

Chaire de Mathématiques

BOUCHEZ R.

Professeur à titre personnel

LLIBOUTRY L.

Professeur à titre personnel

MICHEL R.

Chaire de Géologie et Minéralogie

BONNIER E.	Chaire d'Electrochimie et Electrometallurgie
DESSAUX G.	Chaire de Physiologie Animale
PILLET E.	Chaire de Physique Industrielle et Electrotechnique
DEBELMAS J.	Chaire de Géologie Générale
GERBER R.	Professeur à titre personnel
PAUTHEENET R.	Professeur à titre personnel
VAUQUOIS B.	Chaire de Calcul Electronique
SILBER R.	Professeur à titre personnel
BARBIER J.C.	Chaire de Physique
KOSZUL J.L.	Chaire de Mathématiques MPC
BUYLE-BODIN M.	Chaire d'Electronique
DREYFUS B.	Professeur à titre personnel
KLEIN J.	Professeur à titre personnel
VAILLANT F.	Professeur à titre personnel
ARNAUD P.	Chaire de Chimie MPC
SENGEL P.	Chaire de Zoologie
BARJON R.	Professeur à titre personnel
BRISSONNEAU P.	Professeur à titre personnel
Mme KOFLEER L.	Professeur à titre personnel
BARNOUD F.	Chaire de Biosynthèse de la Cellulose
GAGNAIRE D.	Chaire de Chimie Physique
GIRAUD P.	Professeur sans chaire
GIDON P.	Professeur sans chaire
PERRET R.	Professeur sans chaire
Mme BARBIER M.J.	Professeur sans chaire
Mme SOUTIF J.	Professeur sans chaire
COHEN J.	Professeur sans chaire
DEPASSEL R.	Professeur sans chaire
ANGLES D'AURIAE	Professeur sans chaire
DUCROS P.	Professeur sans chaire
GASTINEL A.	Professeur sans chaire
GLENAT R.	Professeur sans chaire
LACAZE A.	Professeur sans chaire
BARRA J.	Professeur sans chaire

COURMES A.	Professeur sans chaire
DEGRANGE C.	Professeur sans chaire
PEBAY-PEROULA	Professeur sans chaire
PERRIAUX J.	Professeur sans chaire
RASSAT A.	Professeur sans chaire
ROBERT A.	Professeur sans chaire

PROFESSEURS ASSOCIES

MM. NAPP-ZINN
DUTTON Guy
MATSUSHIMA Yozo

MAITRES DE CONFERENCES

MM. BIAREZ J.P.
DODU J.
HACQUES G.
LANCIA R.
Mme KAHANE J.
POLOUJADOFF M.
DEPOMMIER P.
DEPORTES C.
Mme BOUCHE L.
SARROT-REYNAULD
CAUQUIS G.
BONNET G.
BONNIER M.J.
KAHANE A.
DOLIQUE J.M.
BRIERE G.
DESRE P.
LAJZEROWICZ J.
VALENTIN P.
BERTRANDIAS J.P.
BONNETAIN L.
LAURENT P.
CAUBET J.P.
PAYAN J.J.
Mme BERTRANDIAS F.
FONTANGES R.
LONGEQUEUE J.P.
NIVAT M.
SOHM J.C.
ZADWORNY F.

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. RADELLI
KEYSTON J.
WAHIYAMA T.

Je tiens à exprimer ma respectueuse reconnaissance à Monsieur le Professeur NEEL, Membre de l'Institut, qui m'a accueilli dans son laboratoire et qui me fait l'honneur de présider mon jury.

Je suis très reconnaissant à Monsieur BERTAUT, Directeur scientifique au C.N.R.S., qui a bien voulu m'aider de ses suggestions pour la partie physique de mon travail, et à Monsieur le Professeur GALLISSOT, qui a accepté d'en superviser la partie mathématique.

Monsieur VERGNE, en suivant quotidiennement mon travail, a su en diriger le cours et me permettre d'en tirer des conclusions positives. Qu'il trouve ici l'expression de ma sincère gratitude.

Je voudrais enfin remercier tout le personnel du laboratoire, pour l'aide qu'il ne m'a pas ménagée dans la réalisation matérielle de cette thèse.

P L A N

INTRODUCTION	p. 1
CHAPITRE I - Les déformations statiques des milieux continus	p. 2
CHAPITRE II - Les déformations statiques des milieux à structure	p. 6
CHAPITRE III - Les déformations élastiques	p. 14
CHAPITRE IV - Les déformations para-élastiques	p. 20
CHAPITRE V - Une définition des constantes élastiques dans les milieux para-élastiques	p. 25
CONCLUSION	p. 32
BIBLIOGRAPHIE	p. 33
Annexe 1 : Propriété caractéristique des déformations uniformes	
Annexe 2 : Expression de R_{β}^{α} en fonction de Ω_{β}^{α}	

I N T R O D U C T I O N

Le traitement des phénomènes élastiques et para-élastiques a conduit à un ensemble de théories pas toujours cohérentes, avec des hypothèses de travail rarement bien explicitées ; voici quinze ans environ, J. LAVAL (*), reprenant les calculs effectués sur les milieux à structure par M. BORN, mettait en évidence une insuffisance dans une démonstration de BORN, et concluait qu'en l'absence de démonstration valable de ces relations, il ne fallait pas en tenir compte. La conséquence la plus spectaculaire de cette précaution est de porter dans le milieu le moins symétrique le nombre de constantes élastiques au second ordre à 45, au lieu des 21 des théories classiques.

D'autre part, l'étude mathématique des phénomènes para-élastiques n'a jamais été faite, à notre connaissance, et la définition des axes de référence jamais clairement abordée. Ceci tient probablement au fait que les actions para-élastiques sont toujours très faibles en regard aux phénomènes élastiques eux-mêmes, et donc que leur étude au premier ordre ne nécessite pas de théorie précise.

Nous nous proposons donc d'examiner de façon critique les hypothèses des diverses théories, et de dégager clairement plusieurs notions essentielles concernant en particulier les axes cristallins liés au milieu déformé, l'influence sur l'énergie de déformation d'une action à longue distance, pour aboutir à une définition non ambiguë des constantes élastiques d'un milieu para-élastique.

(*) L'état solide ; 9^e congrès de physique Solvay - Stoops -
Bruxelles 1952, p.273.

CHAPITRE I

DEFORMATIONS STATIQUES des MILIEUX CONTINUS

1. Les hypothèses de départ

Nous nous proposons d'étudier une généralisation des écritures de l'élasticité des corps solides. Nous supposerons que tous les phénomènes décrits sont isothermes, réversibles, et dans un milieu solide illimité. Nous bornons par là même notre problème à l'étude des phénomènes statiques, sans nous préoccuper des problèmes de limite du corps.

Relativement à un système d'axes fixes, nous considérerons les applications continues, dérivables à jacobien non nul de R^3 dans R^3 . Nous appellerons déformations les applications qui vérifient en outre la relation $f(\vec{0}) = \vec{0}$. Pour la commodité des calculs, le repère sera choisi orthonormé, ce qui, en réduisant le tenseur métrique au tenseur de Kronecker, allège considérablement les notations.

2. Le tenseur des déformations

Soit $\vec{V}(x^\alpha)$ un vecteur de l'ensemble de départ (milieu non déformé) et $\vec{V} + d\vec{V}$ un vecteur infiniment voisin. Soient \vec{V}' et $\vec{V}' + d\vec{V}'$ leurs transformés respectifs. Les hypothèses de départ nous permettent d'écrire :

$$(1.1) \quad dx'^\alpha = \mathcal{Q}_\beta^\alpha dx^\beta$$

Nous appellerons \mathcal{Q}_β^α matrice de la déformation. Le déterminant de \mathcal{Q}_β^α étant le jacobien de la transformation, nous sommes assurés de la régularité de cette matrice.

Définition : nous dirons que la déformation est nulle lorsque $\mathcal{L}_\beta^\alpha = \Delta_\beta^\alpha$ matrice unitaire. Il est commode, pour la plupart des applications, d'introduire la notation $t_\beta^\alpha = \mathcal{L}_\beta^\alpha - \Delta_\beta^\alpha$. Le tenseur t_β^α sera alors appelé tenseur des déformations, et, si \vec{u} représente le vecteur $\vec{V}' - \vec{V}$, l'expression de ce tenseur sera simplement :

$$(1.2) \quad t_\beta^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}$$

3. Succession de deux déformations

Si on utilise la notation de matrice de transformation $(\mathcal{L}_\beta^\alpha)$, on sait que la succession de deux déformations définies par $\mathcal{L}_{1\beta}^\alpha$ et $\mathcal{L}_{2\beta}^\alpha$ effectuées dans cet ordre est donnée par la matrice produit de \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 définies dans les mêmes axes, soit :

$$(1.3) \quad \mathcal{L}_\beta^\alpha = \mathcal{L}_{2\gamma}^\alpha \mathcal{L}_{1\beta}^\gamma$$

En revenant aux tenseurs t_β^α à l'aide du symbole de Kronecker, il vient :

$$(1.4) \quad \Delta_\beta^\alpha + t_\beta^\alpha = (\Delta_\gamma^\alpha + t_{2\gamma}^\alpha) (\Delta_\beta^\gamma + t_{1\beta}^\gamma)$$

$$= \Delta_\beta^\alpha + t_{2\beta}^\alpha + t_{1\beta}^\alpha + t_{2\gamma}^\alpha t_{1\beta}^\gamma$$

Ainsi, le tenseur définissant la succession de deux déformations t_1 et t_2 dans un même système d'axes, effectuées dans l'ordre 1, 2 est :

$$(1.5) \quad t_\beta^\alpha = t_{1\beta}^\alpha + t_{2\beta}^\alpha + t_{2\gamma}^\alpha t_{1\beta}^\gamma$$

4. Les déformations uniformes

Définition : une déformation sera dite uniforme si le tenseur local des déformations est indépendant du choix du vecteur \vec{V} . La relation (1.1) différentielle devient alors une loi linéaire, valable pour un vecteur quelconque :

$$(1.6) \quad x'^\alpha = \mathcal{L}_\beta^\alpha x^\beta$$

$$u^\alpha = t_\beta^\alpha x^\beta$$

Propriété caractéristique d'une déformation uniforme : étant donnés deux vecteurs proportionnels $V_1 \rightarrow$ et $V_2 \rightarrow = kV_1 \rightarrow$, une condition nécessaire et suffisante pour que la déformation soit uniforme est que les transformés de $V_1 \rightarrow$ et $V_2 \rightarrow$ soient proportionnels dans le même rapport, et ceci quel que soit le choix de $V_1 \rightarrow$ et de k . La démonstration de cette propriété est faite en annexe 1.

5. Densité d'énergie de déformation

Hypothèse : nous supposons que la densité d'énergie en un point n'est fonction, à température donnée, que de la déformation locale en ce point. Ceci implique notamment que les déformations soient réversibles, ou plus précisément que l'énergie du milieu n'ayant subi aucune déformation est la même que celle du milieu ayant subi une déformation, puis la déformation inverse. Nous savons que ceci est vérifié par l'expérience à une bonne approximation pour des valeurs suffisamment petites des composantes t . La densité locale d'énergie peut alors s'écrire sous la forme d'un développement en série entière :

$$(1.7) \quad W = A + A_{\alpha\beta}^{\beta} t_{\beta}^{\alpha} + \frac{1}{2} A_{\alpha\gamma\delta}^{\beta\delta} t_{\beta}^{\alpha} t_{\delta}^{\gamma} + \frac{1}{6} A_{\alpha\gamma\epsilon}^{\beta\delta\zeta} t_{\beta}^{\alpha} t_{\delta}^{\gamma} t_{\zeta}^{\epsilon} + \dots$$

Il est exclu de trouver un domaine de convergence à ce développement sans rien connaître des termes A . On peut supposer la convergence de celui-ci pour des valeurs "assez petites" des composantes de t_{β}^{α} . En fait, l'hypothèse de réversibilité faite plus haut est beaucoup plus draconienne que celle de la convergence de W , par les conditions qu'elle impose à t_{β}^{α} .

Définition : Milieu homogène : nous appellerons homogène un milieu dans lequel les coefficients A sont indépendants du point du milieu considéré. Nous pourrions alors appeler constantes de déformation ces coefficients. Dans toute la suite, nous nous bornerons à l'étude d'un milieu homogène ; cette définition est très générale. Elle ne suppose pas en particulier la déformation uniforme.

6. Symétries des constantes de déformation

De par leur définition même, les constantes de déformation jouissent de la symétrie des dérivées partielles, soit :

$$(1.8a) \quad A_{\alpha\gamma}^{\beta\delta} = A_{\gamma\alpha}^{\delta\beta}$$

$$(1.8b) \quad A_{\alpha\gamma\epsilon}^{\beta\delta\zeta} = A_{\gamma\alpha\epsilon}^{\delta\beta\zeta} = A_{\gamma\epsilon\alpha}^{\delta\zeta\beta} = A_{\epsilon\gamma\alpha}^{\zeta\delta\beta} = A_{\epsilon\alpha\gamma}^{\zeta\beta\delta} = A_{\alpha\epsilon\gamma}^{\beta\zeta\delta}$$

Sans autre information ou hypothèse sur le milieu, ces relations sont les seules qui existent entre les constantes de déformation. On trouve alors 9 constantes indépendantes au premier ordre, 45 au second et 165 au troisième. Toutefois, suivant l'anisotropie et les symétries auxquelles elle est soumise, il est possible de réduire notablement le nombre de constantes indépendantes d'un corps cristallin. Cette étude fera l'objet du tableau 5.

CHAPITRE II

DEFORMATIONS STATIQUES des MILIEUX à STRUCTURE

1. Position du problème

La théorie des milieux continus peut être contestée dans son principe de base, les milieux matériels n'étant pas continus mais à structure. Cependant M. BORN (1) et ses collaborateurs, en partant d'un modèle atomique du réseau cristallin, ont trouvé des résultats en accord avec la théorie des milieux continus en ce qui concerne l'élasticité. Plus récemment J. LAVAL et ses collaborateurs (2), (3), ont contesté les calculs de M. BORN, ce qui se traduisait par une augmentation du nombre de constantes élastiques. En fait, J. LAVAL considéré les déformations dans leur ensemble, comme nous l'avons fait au précédent chapitre. Nous nous proposons de donner ici une extension des calculs de J. LAVAL.

Relativement à un système d'axes fixes, supposé toujours orthonormé, nous définissons la position d'un atome par trois vecteurs : un vecteur \vec{m} , définissant l'origine de la maille du réseau à laquelle appartient l'atome, un vecteur \vec{j} définissant la position moyenne de l'atome à l'intérieur de la maille, et un vecteur $\vec{v}(m,j)$ définissant la position instantanée de l'atome par rapport à sa position moyenne.

Note : nous appellerons maille du réseau cristallin le plus petit motif cristallin qui peut, par des translations, reconstituer le cristal tout entier. Le réseau formé par les origines de toutes les mailles est le réseau de Bravais. Si la maille comprend g atomes, chacun de ceux ci engendrera un sous réseau superposable par translation au réseau de Bravais.

Restriction fondamentale : à la suite de tous les auteurs, nous n'étudierons les déformations d'un réseau cristallin que lorsque le réseau déformé reste un réseau. Cela revient à dire ; s'il y a g atomes par maille, que le réseau cristallin, formé de g sous réseaux simples, identiques et parallèles (réseau de Bravais) se déforme de façon que le réseau de Bravais reste un réseau. Trois positions alignées de ce réseau resteront donc alignées, et dans le même rapport. Donc la déformation du réseau de Bravais est uniforme, d'après le §4 du chapitre précédent.

Nous bornons donc notre étude aux déformations uniformes.

2. Expression du vecteur déplacement moyen

Soit $\vec{u}(m, j)$ le vecteur déformation moyenne du point $\vec{m} + \vec{j}$. Dans l'hypothèse que \vec{u} est petit devant $(\vec{m} + \vec{j})$, nous pouvons développer \vec{u} en série de $(\vec{m} + \vec{j})$:

$$(2.1) \quad u(\vec{m}, \vec{j})^\alpha = \lambda(m, j)^\alpha + t_\beta^\alpha(m, j)(m^\beta + j^\beta) + K_{\beta\gamma}^\alpha(m^\beta + j^\beta)(m^\gamma + j^\gamma) + \dots$$

Considérons alors les points d'un même sous réseau. La déformation de ce sous-réseau est uniforme si nous nous conformons à la restriction fondamentale exprimée plus haut. Nous pouvons donc appliquer au vecteur \vec{u} les résultats trouvés concernant les déformations uniformes. Le vecteur $\vec{\lambda}(m, j)$, indépendant de \vec{m} , représente une simple translation du réseau. Il vient alors :

$$(2.2) \quad u(\vec{m}, \vec{j})^\alpha = \lambda(\vec{j})^\alpha + t_\beta^\alpha(\vec{j})(m^\beta + j^\beta)$$

Considérons maintenant les points $\vec{m} + \vec{j}$ et $\vec{p} + \vec{j}$ appartenant au sous réseau \vec{j} , et $\vec{m} + \vec{k}$, $\vec{p} + \vec{k}$ deux points appartenant au sous réseau \vec{k} . Les sous réseaux devant rester parallèles, cela implique :

$$(2.3) \quad \vec{u}(\vec{m}, \vec{k}) - \vec{u}(\vec{m}, \vec{j}) = \vec{u}(\vec{p}, \vec{k}) - \vec{u}(\vec{p}, \vec{j})$$

Si l'on tient compte de la relation (2.2), il vient, après simplification :

$$\left[t_\beta^\alpha(k) - t_\beta^\alpha(j) \right] m^\beta = \left[t_\beta^\alpha(k) - t_\beta^\alpha(j) \right] p^\beta \quad (2.4)$$

La relation (2.4) doit être vérifiée quels que soient \vec{m} et \vec{p} d'une part, \vec{j} et \vec{k} d'autre part, ce qui implique que t_{β}^{α} est indépendant de \vec{j} . De sorte que, compte tenu de l'hypothèse de départ que le réseau déformé reste un réseau, le vecteur déplacement moyen de l'atome en position moyenne initiale $\vec{m} + \vec{j}$ a pour composantes sans approximation :

$$(2.5) \quad u(\vec{m}, \vec{j})^{\alpha} = \lambda(j)^{\alpha} + t_{\beta}^{\alpha} (m^{\beta} + j^{\beta})$$

On peut traduire ce résultat en disant que les sous réseaux se déforment de façon identique, mais subissent en outre des glissements les uns par rapport aux autres. Le tenseur t_{β}^{α} sera appelé, ici encore, tenseur des déformations du réseau.

3. Expression de l'énergie d'un cristal

Lorsque le cristal subit une déformation uniforme, il est toujours possible, pour des vecteurs déplacements suffisamment petits, d'écrire l'énergie du cristal sous la forme d'un développement en série des déplacements $u(m, j)^{\alpha}$ des positions moyennes :

$$(2.6) \quad E = E_0 + \sum_{mj} B(m, j)_{\alpha} u(m, j)^{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{mj} C \binom{mj}{pk}{}_{\alpha\beta} u(m, j)^{\alpha} u(p, k)^{\beta} \\ + \frac{1}{6} \sum_{\substack{mj \\ pk \\ ql}} D \binom{mj}{hk}{}_{\alpha\beta\gamma} u(m, j)^{\alpha} u(p, k)^{\beta} u(q, l)^{\gamma} + \dots$$

Les déplacements des atomes n'influent sur l'énergie que par leurs différences relatives (invariance par translation), on est amené à poser (2), (19)

$$(2.7a) \quad \sum_{\substack{mj \\ pk}} C \binom{mj}{pk}{}_{\alpha\beta} = 0$$

$$(2.7b) \quad \sum_{\substack{mj \\ pk \\ q}} D \binom{mj}{pk}{}_{\alpha\beta\gamma} = 0$$

ce qui revient à définir $C \binom{mj}{mj}{}_{\alpha\beta}$ et $D \binom{mj}{mj}{}_{\alpha\beta\gamma}$ en fonction des autres termes.

Les termes B, C, D et E. vont dépendre du vecteur déplacement instantané, donc de l'agitation thermique et de la température. C'est pourquoi, en supposant notre étude isotherme, nous pourrions ne considérer qu'un cristal fictif où tous les atomes seraient immobiles dans leurs positions moyennes. Ceci allègera les notations, en permettant de supprimer le mot "moyen".

Force appliquée à un atome : Par définition, la force appliquée à un atome (\vec{m}, \vec{j}) sera :

$$(2.8) \quad F(m, j)_{\alpha} = - \frac{E}{u(m, j)_{\alpha}} = -B(m, j)_{\alpha} - \sum_{pk} C_{pk}^{mj}{}_{\alpha\beta} u(p, k)^{\beta} \dots$$

En l'absence de tout déplacement, par définition, tous les atomes d'un même sous réseau sont soumis à la même force. Les coefficients $B(m, j)_{\alpha}$ sont donc indépendants de m.

Remarque : Habituellement, le développement de l'énergie limité au second ordre en \vec{u} suffit à interpréter les phénomènes de déformation à une bonne approximation. Il est donc légitime de penser que dans le développement de l'énergie les tenseurs $D_{pk}^{mj}{}_{\alpha\beta\gamma}$ et les suivants sont beaucoup plus petits que les tenseurs $C_{pk}^{mj}{}_{\alpha\beta}$. Ceci peut être interprété en considérant que le terme du second ordre dans l'écriture de l'énergie provient des interactions des atomes deux à deux, alors que les termes d'ordre supérieur proviennent des interactions des atomes 3 à 3, puis n à n, qui sont beaucoup plus faibles (2)

4. Expression des vecteurs $\vec{\lambda}(\vec{j})$ en fonction du tenseur t_{β}^{α}

Remarquons tout d'abord que, dans les hypothèses du chapitre 1, nous avons supposé que le point situé à l'origine restait fixe, au cours des déformations. Ceci implique que son vecteur déplacement s'écrive :

$$u(j)^{\alpha} = \lambda(j)^{\alpha} = 0 \quad (2.9)$$

Nous devons donc supposer que $\vec{\lambda}(j)$ est nul pour tous les atomes du sous réseau comprenant l'origine. Si g est le nombre d'atomes par maille, il n'y aura donc que $g-1$ vecteurs λ à déterminer, soit $3g-3$ inconnues. Remarquons que le cas $g=1$ est fréquent : c'est le cas de la plupart des métaux. Alors la relation linéaire entre u et t_{β}^{α} est vraie sans approximation.

Les calculs faits précédemment par J. LAVAL à l'ordre 2 seulement, sans termes du premier ordre, montrent que l'expression des λ en fonction de t_{β}^{α} est linéaire. Nous poserons a priori un développement des λ en fonction de t_{β}^{α} (2.10). - Voir page hors texte 1- Il s'ensuit immédiatement une écriture du vecteur déplacement (2.11), tirée de (2.8) et de (2.10). Nous pouvons donc écrire la force agissant sur un atome dans un état déformé en fonction du tenseur t_{β}^{α} . Dans un état de déformation statique quelconque, les atomes sont en équilibre, donc sont soumis à une force nulle. Ceci devant être réalisé quel que soit le tenseur t_{β}^{α} définissant la déformation, le développement polynomial obtenu de la force en fonction des composantes de t_{β}^{α} doit être identiquement nul, ce qui conduit immédiatement aux systèmes d'équations (2.12), (2.14) et (2.16). Les notations employées pour ces écritures sont explicitées en (2.13), (2.15) et (2.17).

Résolution des systèmes - Sans aucune approximation, ces systèmes ne sont pas linéaires. Il est donc exclu de les résoudre algébriquement, ce qui n'aurait d'ailleurs d'intérêt que si l'on connaissait les valeurs des coefficients B, C et D. Cependant, parmi toutes les solutions de ces systèmes, nous savons que celles que nous devons obtenir sont voisines des solutions du système linéaire associé, et qu'elles sont en outre très petites. Il est donc possible de résoudre ces systèmes par des itérations. Ainsi, le système (2.12), en première approximation, ne comprendra dans son 2e membre que le terme en B. Nous remarquons que les matrices de tous les systèmes il y a un système (2.12), 9 systèmes (2.14) et 81 systèmes (2.16) sont les mêmes notées $\Gamma_{\alpha\beta}(j,k)$. Compte tenu de la relation (2.9), chacun de ces systèmes comprend $3g-3$ équations et $3g-3$ inconnues.

J. LAVAL a étudié la matrice $\Gamma_0(j,k)_{\alpha\beta}$ et a montré qu'elle était régulière (2). Ainsi il est possible de résoudre rigoureusement le système approché de (2.12) cité plus haut. Si nous appelons $\Gamma_0^{-1}(j,k)_{\alpha\beta}$ l'élément courant de l'inverse de Γ_0 , la solution s'écrit sous la forme (2.18). Pour poursuivre l'itération, il suffit de reporter les valeurs des $P(j)^\alpha$ tirées de (2.18) dans le second membre de (2.12), et de résoudre à nouveau le système (2.19) obtenu. Une fois la solution du système (2.12) obtenue, il est facile de voir que les systèmes (2.14) n'ont comme inconnues que les $P(j)_{\alpha'}^{\alpha\beta}$, et ont la même forme que le système (2.12). Ils se résoudront de la même façon. De même pour les systèmes (2.16).

5. Expression de l'énergie en fonction du tenseur t_β^α

Si on examine l'expression de la force $F(m,j)_\alpha$ agissant sur l'atome mj , on remarque qu'elle peut se décomposer en deux termes : le terme $-B(j)_\alpha$, indépendant des déplacements des atomes, dû à une action extérieure, dite à longue distance (qui peut être un champ électrique, magnétique, etc..) et les autres termes, dépendant des déplacements des atomes, et que l'on peut appeler forces internes. Au cours du calcul fait plus haut, il est visible que si les forces à longue distance sont nulles, les termes $P(j)^\alpha$ sont tous nuls. Lorsqu'on reporte les valeurs de $u(m,j)^\alpha$ donnée en (2.11) dans celle de l'énergie (2.6), on remarque alors que le terme d'ordre 1 en t_β^α est nul. Mais s'il existe des forces à longue distance non nulles, les termes $P(j)^\alpha$ ne sont évidemment plus nuls, mais de plus les termes d'ordre supérieur sont modifiés par l'existence de forces à longue distance. Ainsi, dans le développement de l'énergie en fonction du tenseur des déformations, non seulement il y aura des termes de degré 1, mais les termes de degré 2 et plus ne seront pas égaux aux mêmes termes dans le cas de l'absence du terme $B(j)_\alpha$ dans les équations (2.12).

Dans le cas le plus général, nous pourrions donc écrire l'énergie du cristal sous la forme :

$$(2.20) \quad E = A' + A'_{\alpha}{}^{\beta} t_{\beta}^{\alpha} + \frac{1}{2} A'_{\alpha\gamma}{}^{\beta\delta} t_{\beta}^{\alpha} t_{\delta}^{\gamma} + \frac{1}{6} A'_{\alpha\gamma\epsilon}{}^{\beta\delta\zeta} t_{\beta}^{\alpha} t_{\delta}^{\gamma} t_{\zeta}^{\epsilon} + \dots$$

Comme nos hypothèses supposent le cristal infini, cette écriture n'a pas de signification par elle-même, les sommes définissant les A' en fonction des P , des vecteurs $\vec{m}, \vec{j}, \vec{p}, \vec{k}$ etc.. et des constantes atomiques B, C, D etc.. étant divergentes. En fait, cette écriture est valable pour un cristal fini. L'hypothèse d'infinité n'intervient que pour la définition de la densité d'énergie, qui est supposée constante dans le cristal. Dans la mesure où celui-ci est grand par rapport aux effets de bord, cette supposition est raisonnable et, si v est le volume du cristal, la densité d'énergie sera représentée par :

$$(2.21) \quad W = \frac{E}{v}$$

Si l'on compare cette expression de la densité d'énergie avec celle obtenue dans la théorie des milieux continus, on remarque que la forme en est la même, et que de plus les termes ont la même symétrie, celle des dérivées partielles de l'énergie.

Remarquons que la considération d'un milieu à structure ne fait que donner des renseignements nouveaux sur les termes A du chapitre 1. Il est donc a priori possible, connaissant les symétries des constantes B, C, D de l'expression de l'énergie (2.6), de déduire sur les constantes A de nouvelles symétries. Cet examen, fait par LAVAL (2), a eu un résultat négatif. Néanmoins, il reste possible qu'une meilleure connaissance des constantes atomiques fournisse d'autres relations.

6. Unification des deux théories

La comparaison entre la théorie des milieux continus et des milieux à structure, n'est possible que dans le cas de déformations uniformes. Les définitions choisies pour le tenseur des déformations sont alors identiques du point de vue macroscopique, seul observable au cours des phénomènes statiques.

Le traitement des déformations des milieux à structure dans le cas de déformations non uniformes (flexions et torsions) est très délicat à faire du fait qu'on ne peut plus utiliser la périodicité du réseau. Cependant, l'accord entre les deux théories dans le cas de déformations uniformes et la quasi continuité des milieux à structure pour les phénomènes macroscopiques étudiés incite à penser que l'expression de l'énergie d'un milieu à structure ne change pas de forme au cours de déformations non uniformes.

Dans ce qui suit, nous ne spécifierons plus s'il s'agit d'une théorie de milieu continu ou à structure, et nous noterons la densité d'énergie :

$$(2.22) \quad W = A + A_{\alpha\beta}^{\beta\alpha} t_{\beta}^{\alpha} + \frac{1}{2} A_{\alpha\gamma}^{\beta\delta} t_{\beta}^{\alpha} t_{\delta}^{\gamma} + \frac{1}{6} A_{\alpha\gamma\epsilon}^{\beta\delta\zeta} t_{\beta}^{\alpha} t_{\delta}^{\gamma} t_{\zeta}^{\epsilon} + \dots$$

CHAPITRE III

LES DEFORMATIONS ELASTIQUES

1. Les hypothèses des théories de l'élasticité

Nous avons jusqu'ici étudié systématiquement les déformations d'un corps définies dans les hypothèses de départ du chapitre 1. Parmi ces déformations, le groupe des rotations occupe une place à part. En général, les théories de l'élasticité ne tiennent pas compte des déformations de rotation, en utilisant des tenseurs symétriques extraits du tenseur t_{β}^{α} par divers procédés.

Physiquement, le problème élastique se pose dans les termes suivants : nous étudions un corps solide illimité soumis exclusivement à des forces internes à faible distance, ne dépendant que des positions relatives des atomes. Lors d'une rotation globale de tout le corps, en l'absence de forces à longue distance, il est clair que les positions relatives des atomes restent inchangées ; l'énergie du cristal restera de même invariante par une rotation quelconque. Il s'ensuit dès lors que cette invariance par rotation va impliquer sur les constantes de déformation de nouvelles relations de dépendance.

Conformément à ce qui a été vu au chapitre précédent, en l'absence de force à longue distance, il n'y a pas de terme du premier ordre en t_{β}^{α} dans la densité d'énergie.

2. Les tenseurs de rotation

Une rotation dans R^3 dépend de trois paramètres (les angles d'Euler par exemple). Pour des raisons de commodité, nous préférons définir celle-ci par son axe (p^{α}) et son angle θ .

La matrice d'une rotation, dans des axes orthonormés, est unitaire. Elle s'écrit (Birss (5)) :

$$(3.1) \quad \mathbb{R}_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} \cos\theta + p_1^2(1-\cos\theta) & p_1p_2(1-\cos\theta) + p_3\sin\theta & p_1p_3(1-\cos\theta) - p_2\sin\theta \\ p_2p_1(1-\cos\theta) - p_3\sin\theta & \cos\theta + p_2^2(1-\cos\theta) & p_2p_3(1-\cos\theta) + p_1\sin\theta \\ p_3p_1(1-\cos\theta) + p_2\sin\theta & p_3p_2(1-\cos\theta) - p_1\sin\theta & \cos\theta + p_3^2(1-\cos\theta) \end{bmatrix}$$

d'où nous tirons aussitôt l'expression du tenseur des rotations, R

$$(R_\beta^\alpha = \mathbb{R}_\beta^\alpha - \Delta_\beta^\alpha)$$

$$(3.2) \quad R_\beta^\alpha = (1-\cos\theta) \begin{bmatrix} p_1^2-1 & p_1p_2 & p_1p_3 \\ p_2p_1 & p_2^2-1 & p_2p_3 \\ p_3p_1 & p_3p_2 & p_3^2-1 \end{bmatrix} + \sin\theta \begin{bmatrix} 0 & +p_3 & -p_2 \\ -p_3 & 0 & +p_1 \\ +p_2 & -p_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il est facile de montrer (annexe 2) que le tenseur R_β^α comprenant 9 composantes liées par 6 relations, on peut exprimer celles-ci en fonction des trois composantes de la partie antisymétrique du tenseur R_β^α , soit :

$$(3.3) \quad \Omega_3^2 = p_1 \sin\theta \quad \Omega_1^3 = p_2 \sin\theta \quad \Omega_2^1 = p_3 \sin\theta$$

on obtient alors, en posant $\sin^2\theta = (\Omega_3^2)^2 + (\Omega_1^3)^2 + (\Omega_2^1)^2$,

$$(3.4) \quad R_\beta^\alpha = \Omega_\beta^\alpha + \frac{1}{2} \Omega_\gamma^\alpha \Omega_\beta^\gamma \left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\theta + \frac{1}{8}\sin^4\theta\right)$$

Ce développement est toujours convergent. On remarque en outre que le seul terme d'ordre impair non nul est le terme du premier ordre. En particulier, au 4^e ordre près, nous pouvons écrire :

$$(3.5) \quad R_\beta^\alpha = \Omega_\beta^\alpha + \frac{1}{2} \Omega_\gamma^\alpha \Omega_\beta^\gamma$$

expression que nous utiliserons par la suite.

3. Symétrie des constantes de déformation dans le cas d'un phénomène élastique

Considérons la suite des deux déformations ainsi définies :

- Une déformation décrite par le tenseur t_{β}^{α}

- Une rotation infinitésimale du milieu déformé, décrite par le tenseur dR_{β}^{α} . D'après la relation 3.5, on voit que si le tenseur R_{β}^{α} est infinitésimal, $dR_{\beta}^{\alpha} = d\Omega_{\beta}^{\alpha}$ au second ordre différentiel près. D'après la relation (1.5) sur la succession de deux déformations, la variation infiniment petite dt_{β}^{α} du tenseur t_{β}^{α} due à la rotation $d\Omega_{\beta}^{\alpha}$ vaut :

$$(3.6) \quad dt_{\beta}^{\alpha} = d\Omega_{\beta}^{\alpha} + d\Omega_{\gamma}^{\alpha} t_{\beta}^{\gamma}$$

D'après les hypothèses des théories élastiques, une rotation quelconque doit laisser invariante l'énergie du corps, et ceci quel que soit son état de déformation avant la rotation. Donc la variation de l'énergie due à dt_{β}^{α} (3.6) doit être nulle quel que soit t_{β}^{α} :

$$(3.7) \quad dW = A_{\alpha}^{\beta} dt_{\beta}^{\alpha} + A_{\alpha\gamma}^{\beta\delta} t_{\delta}^{\gamma} dt_{\beta}^{\alpha} + \frac{1}{2} A_{\alpha\gamma\epsilon}^{\beta\delta\zeta} t_{\delta}^{\gamma} t_{\zeta}^{\epsilon} dt_{\beta}^{\alpha} + \dots$$

$$(3.8) \quad 0 = d\Omega_{\beta}^{\alpha} A_{\alpha}^{\beta} + (A_{\alpha\gamma}^{\beta\delta} + A_{\alpha}^{\delta\beta\gamma}) t_{\delta}^{\gamma} + \frac{1}{2} (A_{\alpha\gamma\epsilon}^{\beta\delta\zeta} + 2A_{\alpha\gamma}^{\zeta\delta\beta\epsilon}) t_{\delta}^{\gamma} t_{\zeta}^{\epsilon} + \dots$$

La forme différentielle (3.8) devant être identiquement nulle et le tenseur $d\Omega_{\beta}^{\alpha}$ étant antisymétrique, cela implique la symétrie des expressions entre parenthèses par échange de α et β , soit :

$$(3.9a) \quad A_{\alpha}^{\beta} = A_{\beta}^{\alpha}$$

$$(3.9b) \quad A_{\alpha\gamma}^{\beta\delta} + A_{\alpha}^{\delta\beta\gamma} = A_{\beta\gamma}^{\alpha\delta} + A_{\beta}^{\delta\alpha\gamma}$$

$$(3.9c) \quad A_{\alpha\gamma\epsilon}^{\beta\delta\zeta} + 2A_{\alpha\gamma}^{\zeta\delta\beta\epsilon} = A_{\beta\gamma\epsilon}^{\alpha\delta\zeta} + 2A_{\beta\gamma}^{\zeta\delta\alpha\epsilon}$$

Compte tenu de l'absence d'action à longue distance, les relations (3.9a) se réduisent à l'identité $0=0$, ce qui simplifie les relations (3.9b) qui s'écriront simplement :

$$(3.10) \quad A_{\alpha\gamma}^{\beta\delta} = A_{\beta\gamma}^{\alpha\delta}$$

Il est facile de montrer que les relations de symétrie (3.10) dans le cas d'une déformation élastique, réduisent à 21 le nombre maximum de constantes de déformation indépendantes du second ordre. Il est plus long de montrer que les relations (3.9c) réduisent à 56 le nombre maximum de constantes de déformation indépendantes au 3^e ordre. Nous n'entrerons pas dans les détails de ce calcul, car il est possible de retrouver ce résultat plus facilement, à l'aide des considérations qui vont suivre.

4. Définition d'un tenseur des déformations élastiques

Jusqu'à présent nous avons décrit les phénomènes élastiques à l'aide d'un tenseur général des déformations. Le fait que la déformation est élastique se traduit par de nouvelles symétries, qui réduisent le nombre de constantes de déformation indépendantes. Nous nous proposons maintenant d'extraire du tenseur t_{β}^{α} la partie "utile" dans l'écriture de l'énergie.

L'algèbre linéaire (6) établit qu'une matrice régulière peut s'écrire sous la forme polaire d'une seule façon. C'est-à-dire qu'elle peut s'écrire comme le produit à gauche d'une matrice hermitique définie positive par une matrice unitaire (ou de rotation). Si l'on considère par exemple la matrice $\mathcal{E}_{\beta}^{\alpha}$, elle peut donc s'écrire d'une seule façon sous la forme :

$$(3.11) \quad \mathcal{E}_{\beta}^{\alpha} = R_{\gamma}^{\alpha} \mathcal{Y}_{\beta}^{\gamma}$$

Si on revient à la définition de tenseur des déformations, ceci peut s'écrire :

$$(3.12) \quad t_{\beta}^{\alpha} = R_{\beta}^{\alpha} + S_{\beta}^{\alpha} + R_{\gamma}^{\alpha} S_{\beta}^{\gamma}$$

(nous avons noté $\mathcal{Y}_{\beta}^{\alpha}$ la matrice hermitique définie positive et $\mathcal{Y}_{\beta}^{\alpha} = S_{\beta}^{\alpha} + \Delta_{\beta}^{\alpha}$). Ainsi, toute déformation peut être considérée comme la succession d'une déformation définie par un tenseur symétrique et d'une rotation pure.

Il va de soi alors que s'il s'agit d'un phénomène élastique, seul le terme S_{β}^{α} aura de l'influence sur l'énergie, qui est invariante par rotation. Ceci peut se vérifier en écrivant l'énergie en fonction du tenseur t_{β}^{α} écrit sous sa forme développée (3.12). L'application des relations (3.9) montre bien que l'énergie ne dépend que de S_{β}^{α} . Si on tient compte du fait que S_{β}^{α} est un tenseur symétrique, elle pourra s'écrire : (3.13)

$$W = A + \frac{A^{\beta\delta} + A^{\beta\gamma} + A^{\alpha\delta} + A^{\alpha\gamma}}{4} S_{\beta}^{\alpha} S_{\delta}^{\gamma} + \frac{A^{\beta\delta\zeta} + A^{\beta\delta\epsilon} + A^{\beta\gamma\zeta} + A^{\beta\gamma\epsilon} + \dots}{8} S_{\beta}^{\alpha} S_{\delta}^{\gamma} S_{\zeta}^{\epsilon}$$

Il est évident sur cette écriture que W ne dépendra pas nommément de toutes les constantes A , mais seulement d'un certain nombre de groupements de celles-ci. Ces groupements sont au nombre de 21 au 2^e ordre et de 56 au 3^e ordre, comme on peut le voir facilement.

5. Critique des théories usuelles de l'élasticité

La difficulté majeure rencontrée dans la théorie des déformations élastiques est que le tenseur t_{β}^{α} "contient" un terme de rotation globale qui n'influe pas sur l'énergie de déformation. Pour éliminer d'un tenseur à 9 composantes les rotations (dépendant de 3 paramètres), il fallait se ramener à un tenseur à 6 composantes. Les tenseurs les plus simples dépendant de 6 composantes étant les tenseurs symétriques, on a extrait du tenseur t_{β}^{α} des tenseurs symétriques. D'où trois définitions fondamentales :

A) *Déformations infinitésimales* - Dans ce cas, le tenseur symétrique est simplement la partie symétrique du tenseur t_{β}^{α} . Il est facile de voir que cette définition n'est valable que si on borne l'écriture de la densité d'énergie à l'ordre 2 ; la théorie exclut d'elle même toute étude des ordres supérieurs. La raison en est que cette théorie se fonde sur la loi de Hooke, qui, on le sait, n'est qu'une première approximation.

On trouve cette définition dans tous les ouvrages élémentaires, ainsi que dans les travaux de LOVE(7), VOIGT(8), HEARMON(9), HUNTINGTON(10), TIMOSHENKO(11)

B) *Les déformations finies* - La matrice symétrique extraite de la matrice $\mathcal{Q}_{\beta}^{\alpha}$ est le produit de celle-ci par sa transposée, qui permet d'écrire le tenseur des déformations, en axes rectangulaires

$$(3.14) \quad e_{\alpha\beta} = t_{\beta}^{\alpha} + t_{\alpha}^{\beta} + t_{\alpha}^{\gamma} t_{\beta}^{\gamma}$$

Cette écriture est rigoureuse, et la connaissance de $e_{\alpha\beta}$ en tout point permet de définir complètement l'état de déformation du corps. Remarquons de plus qu'en négligeant les termes du second degré dans $e_{\alpha\beta}$ on retrouve (à un facteur 1/2 près) le tenseur défini plus haut. Elle a été employée par CAUCHY, le premier, puis par GREEN et ZERNA (12), LANDAU et LIPSCHITZ (13), NOVZHILOV (14), GRIOLI (15) TRUESDELL et TOUPIN (16), etc.. Cependant, bien que cette définition soit rigoureuse, et bien adaptée aux problèmes géométriques très généraux, elle se plie plus difficilement à l'interprétation physique des rotations.

C) Nous prendrons donc comme définition du tenseur des déformations élastiques le tenseur S , symétrique, extrait du tenseur total des déformations, d'une façon unique, par :

$$(3.12) \quad t_{\beta}^{\alpha} = R_{\beta}^{\alpha} + S_{\beta}^{\alpha} + R_{\gamma}^{\alpha} S_{\beta}^{\gamma}$$

Nous remarquons que si nous bornons cette écriture au premier ordre, la décomposition est exactement la même que dans le cas des déformations infinitésimales. Il n'y a donc aucune contradiction entre les trois définitions tant qu'on se borne à une rotation infinitésimale.

CHAPITRE IV

LES DEFORMATIONS PARA-ELASTIQUES

1. Les hypothèses de départ

Contrairement aux déformations purement élastiques, nous appellerons para-élastiques les déformations où les rotations ont une influence sur l'énergie du corps. Nous avons montré précédemment qu'en l'absence de force à longue distance, la déformation était "purement" élastique. Donc l'étude des phénomènes para-élastiques concernera les déformations de corps en présence d'une action à longue distance. Nous supposerons que les caractéristiques directionnelles de cette action à longue distance sont invariablement liées, sauf spécification contraire, au repère de référence.

Dans tous les cas pratiques, l'apport des forces à longue distance est petit devant les forces interatomiques. Ceci revient à dire que l'énergie due à cet apport sera petite devant l'énergie de cohésion atomique, ou énergie élastique.

2. Décomposition de l'énergie

Si l'on porte dans l'expression (2.22) de la densité d'énergie la valeur (3.12) du tenseur des déformations t_{β}^{α} , la densité d'énergie se décompose en :

$$(4.1) \quad W = A + W_E + W_R + W_I$$

où W_E désigne l'énergie élastique, dépendant du tenseur S_{β}^{α} , W_R l'énergie rotationnelle, dépendant du tenseur R_{β}^{α} , et W_I une énergie d'interaction entre les déformations élastiques et les rotations, dépendant à la fois de S_{β}^{α} et R_{β}^{α} . Les valeurs de ces trois énergies figurent dans la page hors texte 2. (4.2a, 4.2b et 4.2c).

Pour la suite, il est plus commode d'écrire ces trois densités en fonction des composantes indépendantes du tenseur des rotations ; nous avons montré qu'il était possible (annexe 2) d'écrire celui-ci en fonction uniquement des termes Ω_{β}^{α} de sa partie antisymétrique. En remplaçant R_{β}^{α} par son expression en fonction de Ω_{β}^{α} dans (4.2a, 4.2b et 4.2c), on obtient respectivement les relations (4.3a, 4.3b et 4.3c).

Habituellement on note la densité d'énergie d'une autre manière. La contribution élastique étant prépondérante, on écrit celle-ci comme un développement en fonction du tenseur S_{β}^{α} , les coefficients de ce développement dépendant des paramètres directionnels (ϕ) de l'action à longue distance, sous la forme $W(\phi)$ (4.4).

Pour identifier ces deux écritures, nous allons considérer, à partir d'un milieu déformé par un tenseur symétrique S_{β}^{α} par rapport au repère de référence, les deux opérations suivantes :

1) Une rotation du corps, définie par les composantes Ω_{β}^{α} de la partie antisymétrique du tenseur des rotations, par rapport au repère de référence, les directions (ϕ) restant liées à ce repère. L'énergie de cet état est parfaitement définie par la relation (4.1), où W_E , W_R , W_I sont définis par (4.3a, 4.3b, 4.3c)

2) Le corps déformé par S_{α}^{β} restant fixe relativement au repère, une rotation des directions (ϕ) par rapport au repère, définie par le tenseur $-\Omega_{\beta}^{\alpha}$. Les directions (ϕ) deviennent (ϕ'), et l'état ainsi construit a une énergie $W(\phi')$.

Physiquement, les deux états ainsi obtenus sont identiques. Il suffit de voir que, pour un référentiel lié au corps déformé par S_{β}^{α} , la transformation 1) revient à la transformation 2). Nous pouvons donc affirmer que $W(\phi')$ est égal à la densité d'énergie W définie en (4.1). D'autre part, le raisonnement ci-dessus étant valable quels que soient les tenseurs S_{β}^{α} et Ω_{β}^{α} , ces écritures sont identiques. Il suffit donc de connaître les variations des K en fonction de $-\Omega_{\beta}^{\alpha}$ (4.5) pour pouvoir écrire $W(\phi')$ sous la même forme de $W(4.1)$, soit :

$$(4.6) \quad W(\phi') = A + W_E(\phi') + W_R(\phi') + W_I(\phi')$$

où $W_E(\phi')$ est une fonction ne dépendant que du tenseur S_β^α , $W_R(\phi')$ une fonction ne dépendant que du tenseur Ω_β^α , et $W_I(\phi')$ une interaction entre les deux tenseurs. (4.7).

Remarque : Dans toutes les écritures concernant $W(\phi)$ et $W(\phi')$, nous supposons que les variables sont indépendantes. Cela suppose que les développements sont pris uniquement par rapport à $S_1^1, S_2^2, S_3^3, S_3^2, S_1^3, S_2^1$ et à $\Omega_3^2, \Omega_1^3, \Omega_2^1$.

Il est dès lors possible d'identifier les expressions (4.3) et les expressions (4.7), pour obtenir les relations (4.8) permettant de calculer les constantes de déformation R. Celles-ci dépendront visiblement de (ϕ) , qui est lié au repère, donc aux conditions initiales.

3. Les constantes de déformation des milieux para-élastiques

A) *Les constantes du premier ordre* : D'après ce que nous avons vu précédemment, elles sont dues à l'existence du phénomène à longue distance. Leur existence signifie que l'énergie du milieu cristallin n'est pas minimale en l'absence de déformation. Cela signifie aussi que le milieu, instable en l'absence de contraintes, se déforme spontanément. Elles sont liées aux paramètres (ϕ) , comme le montrent les relations (4.8).

B) *Les constantes du deuxième ordre* : Les relations (4.8) montrent que les constantes du second ordre dépendent aussi de (ϕ) . Nous aurons donc, associée à chaque corps et à chaque direction (ϕ) , relativement à un système d'axes donné, une famille de constantes dépendant des paramètres directionnels (ϕ) de l'action à longue distance.

4. Les constantes élastiques dépendant de (ϕ) .

Nous appellerons constantes élastiques des milieux para-élastiques associées à une direction ϕ les combinaisons de constantes A intervenant dans W_E , ou dans $W_E(\phi)$. C'est-à-dire, sans même faire l'identification complète, les coefficients $K(\phi)_{\alpha}^{\beta}$ et $K(\phi)_{\alpha\gamma}^{\beta\delta}$. Il est intéressant de comparer ces constantes élastiques à celles d'un milieu hypothétique où l'action de ϕ serait supprimée. Dans un tel milieu, il n'y aurait pas de constantes au premier ordre et les constantes du second ordre ne dépendraient pas de ϕ , naturellement.

Les constantes du premier ordre sont toujours prises en compte par les auteurs traitant des phénomènes para-élastiques. Cependant, presque tous les auteurs négligent la variation avec (ϕ) des constantes du second ordre qui s'introduit cependant de façon absolument parallèle aux constantes du premier ordre. Dans ses travaux sur les piézo-électriques, MUELLER (18) a tenu compte de cette variation, et a dénommé énergie morphique l'énergie qui y est attachée.

5. Cas d'un phénomène m-élastique

Nous appellerons m-élastiques les milieux où l'action à longue distance est caractérisée par un seul paramètre directionnel m. C'est notamment le cas des ferromagnétiques saturés et des piézo-électriques.

Dans le cas particulier d'un corps m-élastique, les constantes $K(\phi)$ du développement de l'énergie $W(\phi)$ en fonction du tenseur S sont habituellement exprimées en fonction des monomes en m^{α} . Il est alors possible d'obtenir, pour une rotation définie par Ω_{β}^{α} , un développement des K en fonction des Ω_{β}^{α} (4.5). Il suffit d'écrire que :

$$(4.9) \quad m'^{\alpha} = m^{\alpha} + R_{\beta}^{\alpha} m^{\beta}$$

écriture rigoureuse, et de remplacer ensuite R_{β}^{α} par son expression en fonction de Ω_{β}^{α} (3.5). En élevant cette expression à des puissances données, il est possible d'écrire en fonction des Ω_{β}^{α} tous les monomes en m^{α} qui figurent dans l'expression des K. Ce calcul a été fait en ce qui concerne les termes de plus bas degré, sur la page hors texte 3.

Remarquons que dans un milieu m-élastique, il n'y a pas correspondance biunivoque entre les rotations et l'énergie de rotation. En effet, l'énergie est invariante par une rotation quelconque d'axe confondu avec la direction m. Pour cette raison, il est difficile d'exprimer le développement des K en fonction des dérivées partielles ce qui serait plus rigoureux. C'est pourquoi nous préférons utiliser la page hors texte 3.

CHAPITRE V

Une DEFINITION des CONSTANTES ELASTIQUES dans les MILIEUX PARA-ELASTIQUES

1. Position du problème

Nous avons dit, au chapitre I, que le nombre de constantes de déformation A indépendantes, qui était au maximum de 9 au 1^e ordre, de 45 au second et 165 au troisième, dépendait dans une large mesure des symétries du groupe cristallin auquel appartient le corps, qui créent sur ces constantes de nouvelles relations de dépendance. On sait aussi que ces relations atteignent une simplicité maximum lorsque les axes de référence sont confondus avec les axes cristallins. (Tableaux hors texte 4).

D'autre part, pour définir une déformation, il est nécessaire de préciser le milieu initial choisi comme milieu non déformé. En présence d'un phénomène à longue distance, il est nécessaire d'appliquer à la surface du corps des forces pour que la déformation soit nulle. En effet, l'énergie W_R en particulier n'étant pas constante, aura des minima. Pour tout choix des paramètres ϕ , il s'exercera donc sur le corps un couple tendant à l'aligner sur une direction telle que W_R soit minimum. Il n'est donc pas possible de définir un milieu initial où la déformation soit nulle en l'absence de contrainte.

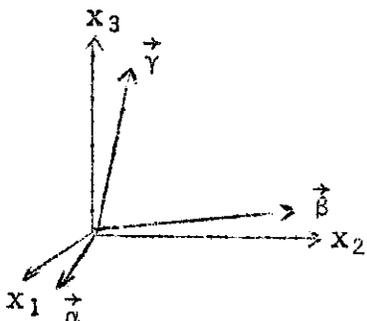
2. Choix d'un milieu initial indépendant de ϕ

La symétrie d'un réseau para-élastique est liée d'une part à la structure du réseau, d'autre part aux directions ϕ . C'est-à-dire que si l'on choisit comme axes les axes de symétrie du milieu, ceux ci

dépendront dans une large mesure de ϕ . En général, pour des positions quelconques des directions ϕ par rapport au corps, le milieu sera triclinique.

Compte tenu du fait que l'action à longue distance est faible devant les interactions atomiques, il est préférable de considérer que la symétrie du milieu est la symétrie cristallographique, évaluée sur des polycristaux, et que l'existence de (ϕ) entraîne une perturbation de la symétrie du cristal.

Le milieu non perturbé n'est pas réalisable en général ; il s'agit donc de définir, à partir d'un état physique possible, les axes de référence. Le milieu non déformé initial sera celui qui, relativement à ces axes, aura la symétrie cristallographique. Comme nous supposons qu'il existe dans le milieu non déformé un couple compensant la rotation du corps tendant à s'aligner suivant les directions faciles de ϕ , nous en concluons que, si $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ et $\vec{\gamma}$ sont les



directions déformées des directions cristallographiques, les directions origine sont celles qui s'en déduisent par une déformation symétrique.

Une fois choisis ces axes, le milieu non déformé initial, qui a par rapport à ces axes une symétrie donnée dépend encore des paramètres qui fixeront son échelle. Ainsi, tous les

milieux ayant la symétrie cubique par rapport à un repère seront équivalents à une compression hydrostatique près, etc... Ces paramètres seront tout entiers contenus dans les termes du premier ordre, et seront sans influence sur ceux du second.

3. Cas particulier des déformations m-élastiques

Pour tous les corps cristallins, il y a au moins un choix de m pour lequel les axes cristallographiques sont inchangés. En effet, l'axe qui supporte le vecteur \vec{m} , s'il est confondu avec l'axe de plus haute symétrie du cristal, conserve cette symétrie. Deux seules exceptions : le cubique où la symétrie devient quadratique pour une aimantation suivant un des axes, et l'orthorhombique qui devient monoclinique. Quoi qu'il en soit, tous les axes gardent leur direction. Autrement dit, ce sont ces axes qui seront choisis comme référence. Ensuite, il suffira de faire tourner \vec{m} en bloquant les rotations du corps pour conserver, quel que soit \vec{m} , les axes de référence.

Conséquence : Au cours de l'identification faite au chapitre précédent, les coefficients des expressions de $W(\phi')$ auront tous la symétrie cristallographique, ce qui pourra beaucoup simplifier le calcul.

4. Définition des constantes élastiques indépendamment de ϕ

Si on évalue les constantes de déformation, puis les constantes élastiques pour un état initial dépendant de (ϕ) , il va de soi qu'on trouvera des "constantes" dépendant de (ϕ) , relativement au repère choisi plus haut. Ces "constantes" seront constituées d'un terme prépondérant constant, et d'un terme variable dépendant de (ϕ) . Nous définirons comme constantes élastiques du corps para-élastiques les valeurs moyennes des constantes liées aux directions ϕ , pour toutes les orientations possibles de ϕ .

Dans le cas des milieux m-élastiques, les coefficients des termes du développement des $K(\phi)$ sont donnés en fonction des cosinus directeurs m^α . Pour prendre les moyennes de ces termes, qui sont des polynômes de cosinus directeurs, il suffit de se reporter à l'ouvrage de GALLISSOT et VERGNE (17) où les résultats figurent sous forme de table.

5. Application à un cas particulier simple

Nous nous intéressons à un corps de symétrie cubique, ferromagnétique, aimanté à saturation dans la direction m . Nous allons calculer complètement les constantes A du premier ordre, et les constantes élastiques "liées à m " au second ordre.

Nous nous référons, pour l'écriture $W(\phi')$, à la notation de BIRSS (5). BIRSS écrit les coefficients $K(\phi)$ en fonction des m sous la forme des relations (5.1), (5.2) et (5.3) (voir page hors texte 5). Nous n'avons fait figurer dans ces notations que le terme de plus bas degré en m . Il va de soi qu'on peut ajouter les termes suivants pour plus de précision.

En développant $K(\phi)$ et $K(\phi)_{\alpha}^{\beta}$ au premier ordre en fonction de Ω_{β}^{α} , à l'aide du tableau hors texte 3, on obtient les relations (5.4), de définition des constantes du premier ordre en fonction de la direction m . Les constantes élastiques moyennes, définies précédemment, seront alors données par :

$$(5.6a) \quad A_1^1 = A_2^2 = A_3^3 = L_0 + \frac{1}{3} L_1 + \dots$$

$$(5.6b) \quad A_3^2 = A_2^3 = A_1^3 = A_3^1 = A_2^1 = A_1^2 = 0.$$

En effet, les moyennes des termes A_{α}^{β} ($\alpha \neq \beta$) sont non seulement nulles à l'approximation faite dans nos calculs, mais bien nulles quelle que soit l'approximation. Pour des raisons de symétrie, il ne peut y avoir dans les crochets définissant ces quantités que des puissances paires de m^{α} . Donc les moyennes à calculer seront de la forme $m^{\alpha} m^{\beta} (m^{\gamma})^{2p}$, c'est-à-dire qu'elles seront forcément nulles (17). Nous retrouvons d'autre part que le milieu initial, s'il est choisi convenablement, peut annuler les termes A_{α}^{α} , car il est défini à une compression hydrostatique près. En effet, les trois termes A_{α}^{α} sont égaux.

Les constantes élastiques moyennes figurent sur le tableau (5.5). Nous pouvons faire la même remarque que précédemment sur les termes nuls de ce tableau : ils sont rigoureusement nuls, de même que les termes (11.11), (22.22) et (33.33) par exemple sont rigoureusement égaux. Dans ces constantes, on trouve des termes d'origine purement magnéto-élastiques, en particulier tous les termes affectés de l'indice 1, et des termes mixtes, d'origine à la fois magnéto-élastique et élastique.

6. Interprétation des résultats

Ecriture de la magnétostriction spontanée - La magnétostriction spontanée, en l'absence de contraintes "élastiques", présente la plupart du temps des contraintes "rotationnelles" qui empêchent le corps de s'aligner sur les directions de facile aimantation. La magnétostriction sera donc une déformation purement élastique du corps, le tenseur Ω_{β}^{α} restant "bloqué" à zéro par les contraintes rotationnelles. Comme les neuf variables $S_1^1 S_2^2 S_3^3$, S_3^2 , S_1^3 , S_2^1 , Ω_3^2 , Ω_1^3 , Ω_2^1 sont indépendantes, les équations de la magnétostriction spontanée s'écrivent :

$$(5.7) \quad \frac{\partial W(m)}{\partial S_{\beta}^{\alpha}} = 0$$

Soit, en décomposant cette expression :

$$(5.8) \quad \frac{\partial W_E(m)}{\partial S_{\beta}^{\alpha}} + \frac{\partial W_I(m)}{\partial S_{\beta}^{\alpha}} = 0$$

Si on remarque que $\partial W_I / \partial S_{\beta}^{\alpha}$ est un polynôme où figurent toujours les composantes du tenseur Ω , on en tire l'écriture finale des équations :

$$(5.9) \quad \frac{\partial W_E(m)}{\partial S_{\beta}^{\alpha}} = 0$$

On retrouve l'écriture classique des équations de la magnétostriction.

Si l'on remplace $W_E(m)$ par son expression tirée de (4.7a), il vient :

$$(5.10) \quad K(\phi)_{\alpha}^{\beta} + K(\phi)_{\alpha\gamma}^{\beta\delta} S_{\delta}^{\gamma} + \dots = 0$$

équation qui peut se résoudre par itération dans le cas le plus général ; toutefois, l'itération convergeant extrêmement vite, on se borne habituellement au premier tour.

En fait, la résolution de ce système est souvent assez compliquée, du fait que le tenseur $K(m)_{\alpha\gamma}^{\beta\delta}$, pour m quelconque, n'a pas de terme nul (cf. 5.3). Aussi on préfère écrire la relation (5.10) sous la forme (5.11) :

$$K(\phi)_{\alpha}^{\beta} + K_{\alpha\gamma}^{\beta\delta} S_{\delta}^{\gamma} + \left[K(\phi)_{\alpha\gamma}^{\beta\delta} - K_{\alpha\gamma}^{\beta\delta} \right] S_{\delta}^{\gamma} + \dots = 0$$

et on fait alors l'itération sur les termes $K(\phi)-K$, d'origine "morphique", dont on sait qu'ils sont petits par rapport à K . Ici aussi, on borne habituellement l'itération au premier tour, ce qui revient en fait à considérer comme nulle l'énergie morphique. Pour une première approximation, cette considération est parfaitement justifiée.

Ainsi, les termes du premier ordre sont liés essentiellement à la magnétostriction, et on les appelle souvent constantes magnéto-élastiques, ce qui est un abus de langage car il en existe d'autres. Leur mesure sera nécessairement due à des mesures de magnétostriction directionnelle, et le terme L_0 (en volume) aura une part prépondérante dans une anomalie de dilatation au passage du point de Curie.

Les termes du second ordre seront composés des constantes élastiques, auxquelles s'ajoutent des termes petits dépendant de m et de moyenne nulle. Cette définition est arbitraire, dans la mesure où il est impossible de séparer dans les constantes du second ordre les termes d'origine interatomique et les termes d'origine magnétique. Nous pensons d'ailleurs qu'il est illusoire de vouloir séparer les deux contributions, l'existence de J_S étant intimement liée au corps lui-même.

Compte tenu de cette écriture et de cette définition des constantes élastiques, ceci permet de prévoir une anomalie de constantes élastiques au franchissement du point de Curie, lorsque cesse le ferromagnétisme.

C O N C L U S I O N

A la suite de cette étude, il apparait que les phénomènes élastiques statiques sont complètement décrits par une théorie considérant le milieu comme un milieu continu, dans la mesure où le spécimen étudié garde des dimensions très grandes devant celles de la maille élémentaire.

Pour les corps présentant une déformation spontanée en l'absence de forces extérieures appliquées, le milieu non déformé de référence est une entité. Il est donc nécessaire de choisir de façon parfaitement déterminée les axes de référence. Ce choix est arbitraire, et nous en proposons un au §2 du chapitre 5. D'autre part, la définition même des constantes élastiques dépend encore du milieu non déformé de référence. Nous proposons comme définition de ces constantes les valeurs moyennes des constantes mesurées pour toutes les directions possibles du phénomène directionnel superposé. Cette définition introduit notamment des constantes élastiques au premier ordre, et oblige à écrire un peu différemment les énergies d'origine para-élastique, qui doivent avoir une moyenne nulle.

Actuellement l'intérêt de cette définition est purement spéculatif ; en effet, les études expérimentales effectuées jusqu'à présent concernent avant tout les phénomènes "du premier ordre" pour lesquels une théorie même approximative est suffisante. Autant la précision des mesures actuelles que l'esprit dans lequel on les a faites interdisent pour l'instant toute application pratique de ce travail.

Cependant, il est possible d'envisager des mesures des termes d'ordre supérieur, comme l'énergie morphique, l'anomalie des constantes élastiques ou les termes d'ordre supérieur de la magnétostriktion.

Pour ces mesures, il est primordial de définir au départ ce que l'on mesure, d'une façon non ambiguë quoiqu'arbitraire, pour pouvoir par la suite interpréter les résultats de façon valable.

B I B L I O G R A P H I E

- (1) M.BORN K.HUANG : Dynamical theory of crystal lattices
Clarendon Press - Oxford -1954-
- (2) J.LAVAL : L'élasticité du milieu cristallin
J. Phys. rad. 18 247, 289, 369 -1957-
- (3) Y. LE CORRE : Thèse de Doctorat - Paris -1953-
J. Phys. rad. 19 541 -1958-
- (4) K.S.VISWANATHAN : Proc. Indian Acad. Sc. A39 196 -1954-
- (5) R.R.BIRSS : Symmetry and Magnetism
North Holland Publishing Company Amsterdam -1964-
- (6) A.WINTER F.MURNAGHAN : Proc. Nat. Acad. Sc. 17 676 -1931-
- (7) A.E.H.LOVE : Mathematical theory of elasticity
Dover - New York -1944-
- (8) W.VOIGT : Lehrbuch der Kristallphysik - Teubner - Leipzig -1910-
- (9) R.F.S. HEARMON : Rev. Mod. Phys. 18 409 -1946-
- (10) H.B. HUNTINGTON : Solid State physics
Vol.7 p.213 Academic Press New York -1958-
- (11) W.TIMOSHENKO : Théorie de l'élasticité
Libr. Polytechnique Béranger - Bruxelles -1948-
- (12) A.E.GREEN W.ZERNA : Theoretical elasticity
Clarendon Press - Oxford -1954-
- (13) L.D.LANDAU E.M.LIFSHITZ : Theory of elasticity
Course of theoretical physics Vol.7 Moscou -1959
- (14) W.NOVOZHILOV : Theory of elasticity
Pergamon Press - London -1961-
- (15) G.GRIOLI : Mathematical theory of elastic equilibrium
Springer Verlag - Berlin -1962-
- (16) C.TRUESDELL R.TOUPIN : Handbuch der Physik III.1
p.241 Springer Verlag - Berlin -1960-
- (17) F.GALLISSOT R.VERGNE : Les propriétés physiques des polycristaux considérées comme valeurs moyennes des monocristaux
Pub. Scient. et Tech. du Ministère de l'Air
Paris - n°412 -1965-
- (18) H.MUELLER : Phys. Rev. 58 805 -1940-
- (19) G.LEIBFRIED W.LUDWIG : Gleichgewichtbedingungen in der Gittertheorie
Z. Phys. 160 80 -1960-

ANNEXE 1

Propriété caractéristique des déformations uniformes

Soient V_1^{\rightarrow} et $V_2^{\rightarrow} = kV_1^{\rightarrow}$ deux vecteurs proportionnels, et $V_1^{\rightarrow}+U_1^{\rightarrow}$ et $V_2^{\rightarrow}+U_2^{\rightarrow}$ leurs transformés respectifs. La déformation étant uniforme, nous pouvons écrire, sans approximation :

$$u_1^{\alpha} = t_{\beta}^{\alpha} x_1^{\beta} \qquad u_2^{\alpha} = t_{\beta}^{\alpha} x_2^{\beta}$$

Compte tenu du fait que $V_2^{\rightarrow} = kV_1^{\rightarrow}$, les relations précédentes permettant d'écrire $U_2^{\alpha} = kU_1^{\alpha}$, ce qui entraîne immédiatement :

$$V_2^{\rightarrow} + U_2^{\rightarrow} = k(V_1^{\rightarrow} + U_1^{\rightarrow})$$

Réciproquement, supposons que les relations :

$$V_2^{\rightarrow} = kV_1^{\rightarrow} \qquad V_2^{\rightarrow} + U_2^{\rightarrow} = k(V_1^{\rightarrow} + U_1^{\rightarrow})$$

soient simultanément vérifiées quels que soient V_1^{\rightarrow} et k . Il vient alors :

$$U^{\alpha}(x_2^1, x_2^2, x_2^3) = k U^{\alpha}(x_1^1, x_1^2, x_1^3)$$

Si l'on utilise alors le fait que $x_2^{\alpha} = kx_1^{\alpha}$, cette expression s'écrit :

$$U^{\alpha}(kx_1^1, kx_1^2, kx_1^3) = kU^{\alpha}(x_1^1, x_1^2, x_1^3)$$

Ce qui montre que la fonction $\vec{U}(\vec{V})$ est homogène de degré 1 en \vec{V} , et permet donc d'écrire :

$$u^{\alpha} = t_{\beta}^{\alpha} x^{\beta}$$

Etant donnés deux vecteurs proportionnels quelconques V_1^{\rightarrow} et $V_2^{\rightarrow} = kV_1^{\rightarrow}$, une condition nécessaire et suffisante pour que la déformation soit uniforme est que les transformés de V_1^{\rightarrow} et de V_2^{\rightarrow} restent proportionnels dans le même rapport.

Expression de R_β^α en fonction de Ω_β^α

$$-\Omega_3^2 = p_1 \sin\theta \quad \Omega_1^3 = p_2 \sin\theta \quad \Omega_2^1 = p_3 \sin\theta$$

$$\text{D'où l'on tire :} \quad \sin^2\theta = (\Omega_3^2)^2 + (\Omega_1^3)^2 + (\Omega_2^1)^2$$

$$p_1 = \frac{\Omega_3^2}{\sin\theta} \quad p_2 = \frac{\Omega_1^3}{\sin\theta} \quad p_3 = \frac{\Omega_2^1}{\sin\theta}$$

L'expression $1 - \cos\theta$ peut être développée en fonction de $\sin\theta$:

$$1 - \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \frac{1}{2} \sin^2\theta + \frac{1}{8} \sin^4\theta + \frac{1}{16} \sin^6\theta + \dots$$

D'où l'expression de chacun des termes:

$$R_1^1 = \left[\frac{(\Omega_3^2)^2}{\sin^2\theta} - 1 \right] \left[\frac{1}{2} \sin^2\theta + \frac{1}{8} \dots \right] = -\frac{(\Omega_3^2)^2 + (\Omega_2^1)^2}{2} \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2\theta + \dots \right]$$

$$R_2^2 = \left[\frac{(\Omega_1^3)^2}{\sin^2\theta} - 1 \right] \left[\frac{1}{2} \sin^2\theta + \frac{1}{8} \dots \right] = -\frac{(\Omega_2^1)^2 + (\Omega_3^2)^2}{2} \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2\theta + \dots \right]$$

$$R_3^3 = \left[\frac{(\Omega_2^1)^2}{\sin^2\theta} - 1 \right] \left[\frac{1}{2} \sin^2\theta + \frac{1}{8} \dots \right] = -\frac{(\Omega_3^2)^2 + (\Omega_1^3)^2}{2} \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2\theta + \dots \right]$$

$$R_3^2 = \frac{\Omega_1^3 \Omega_2^1}{\sin^2\theta} \left[\frac{1}{2} \sin^2\theta + \frac{1}{8} \dots \right] + \Omega_3^2 = \Omega_3^2 + \frac{1}{2} \Omega_1^3 \Omega_2^1 \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2\theta + \dots \right]$$

$$R_2^3 = \frac{\Omega_2^1 \Omega_3^2}{\sin^2\theta} \left[\frac{1}{2} \sin^2\theta + \frac{1}{8} \dots \right] + \Omega_1^3 = \Omega_1^3 + \frac{1}{2} \Omega_2^1 \Omega_3^2 \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2\theta + \dots \right]$$

$$R_1^3 = \frac{\Omega_2^1 \Omega_3^2}{\sin^2\theta} \left[\frac{1}{2} \sin^2\theta + \frac{1}{8} \dots \right] + \Omega_1^3 = \Omega_1^3 + \frac{1}{2} \Omega_2^1 \Omega_3^2 \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2\theta + \dots \right]$$

$$R_3^1 = \frac{\Omega_3^2 \Omega_1^3}{\sin^2\theta} \left[\frac{1}{2} \sin^2\theta + \frac{1}{8} \dots \right] + \Omega_2^1 = \Omega_2^1 + \frac{1}{2} \Omega_3^2 \Omega_1^3 \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2\theta + \dots \right]$$

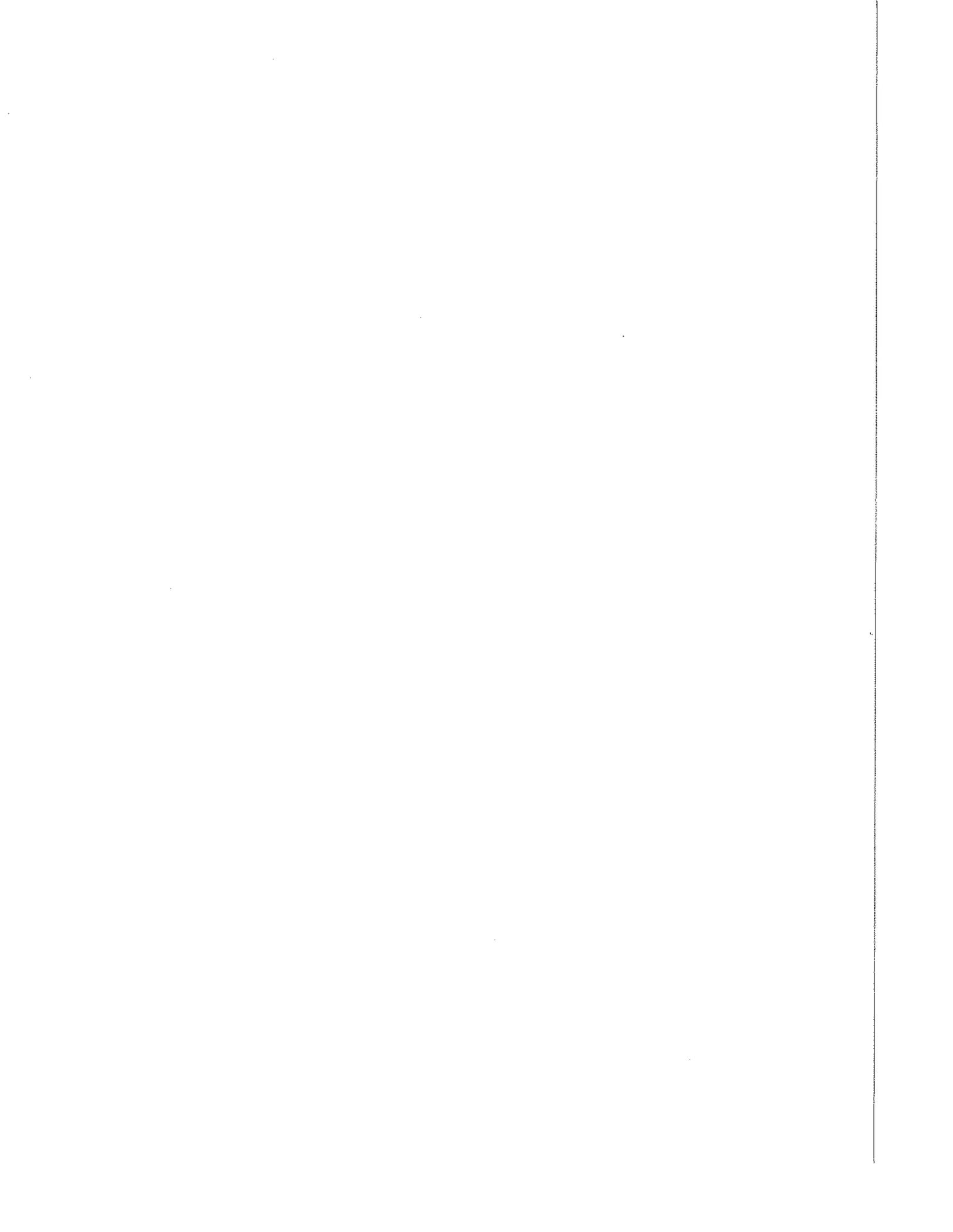
$$R_2^1 = \frac{\Omega_3^2 \Omega_1^3}{\sin^2\theta} \left[\frac{1}{2} \sin^2\theta + \frac{1}{8} \dots \right] + \Omega_2^1 = \Omega_2^1 + \frac{1}{2} \Omega_3^2 \Omega_1^3 \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2\theta + \dots \right]$$

$$R_1^2 = \frac{\Omega_1^3 \Omega_2^1}{\sin^2\theta} \left[\frac{1}{2} \sin^2\theta + \frac{1}{8} \dots \right] + \Omega_3^2 = \Omega_3^2 + \frac{1}{2} \Omega_1^3 \Omega_2^1 \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2\theta + \dots \right]$$

- Compta tenu de l'antisymétrie des termes Ω ($\Omega_\beta^\alpha = -\Omega_\alpha^\beta$)

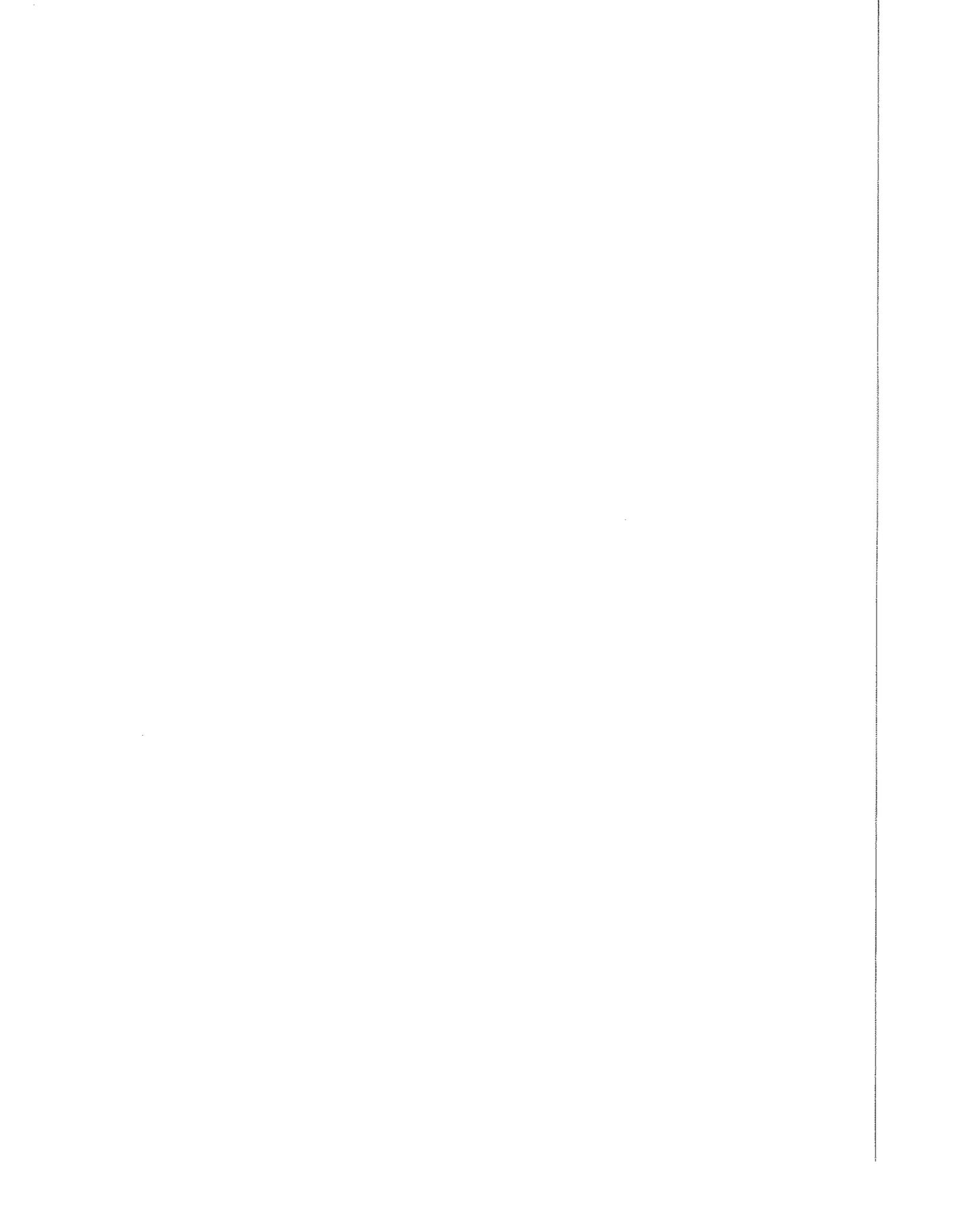
chacune de ces expressions vérifie la forme général:

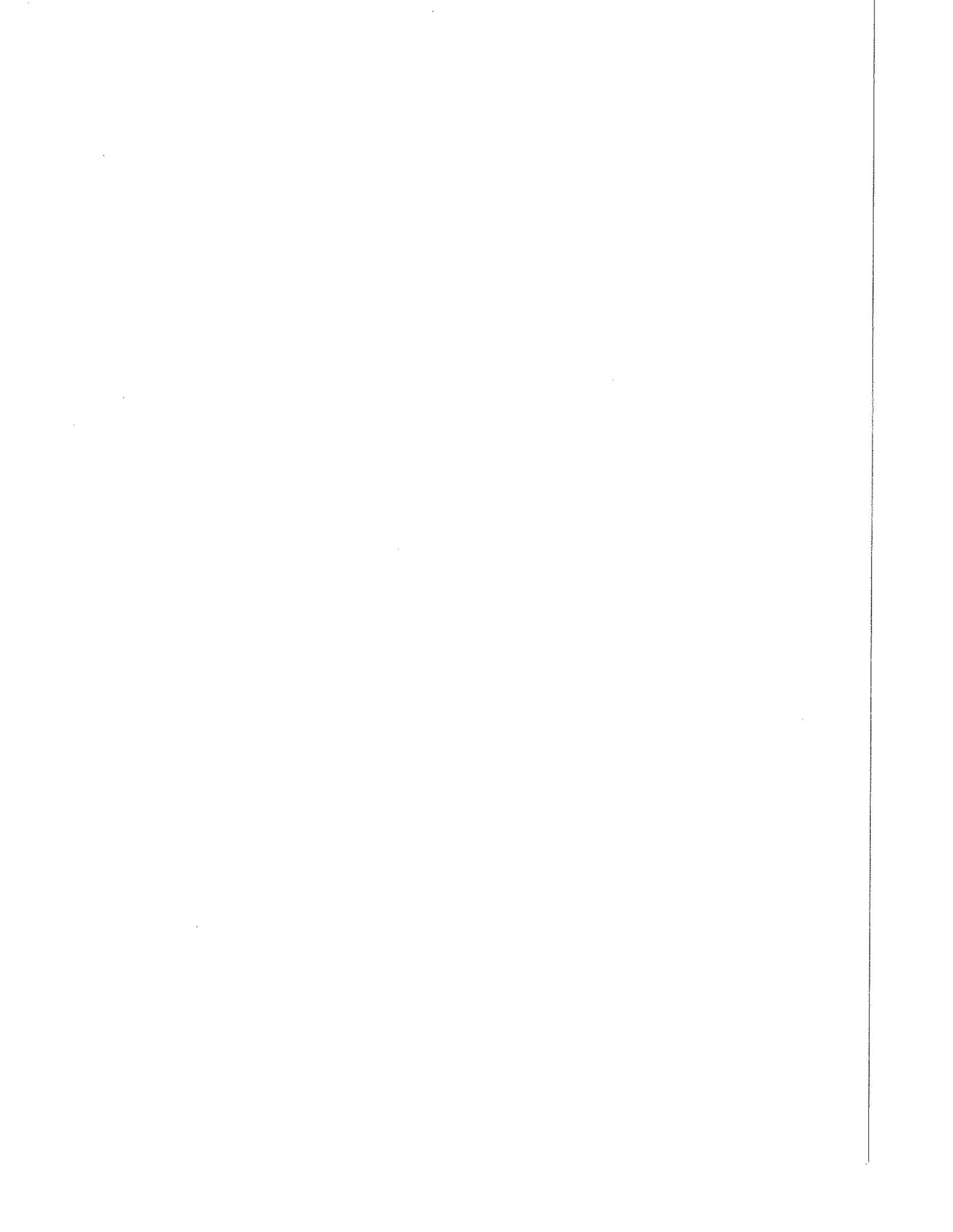
$$R_\beta^\alpha = \Omega_\beta^\alpha + \frac{1}{2} \Omega_\gamma^\alpha \Omega_\beta^\gamma \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2\theta + \dots \right]$$



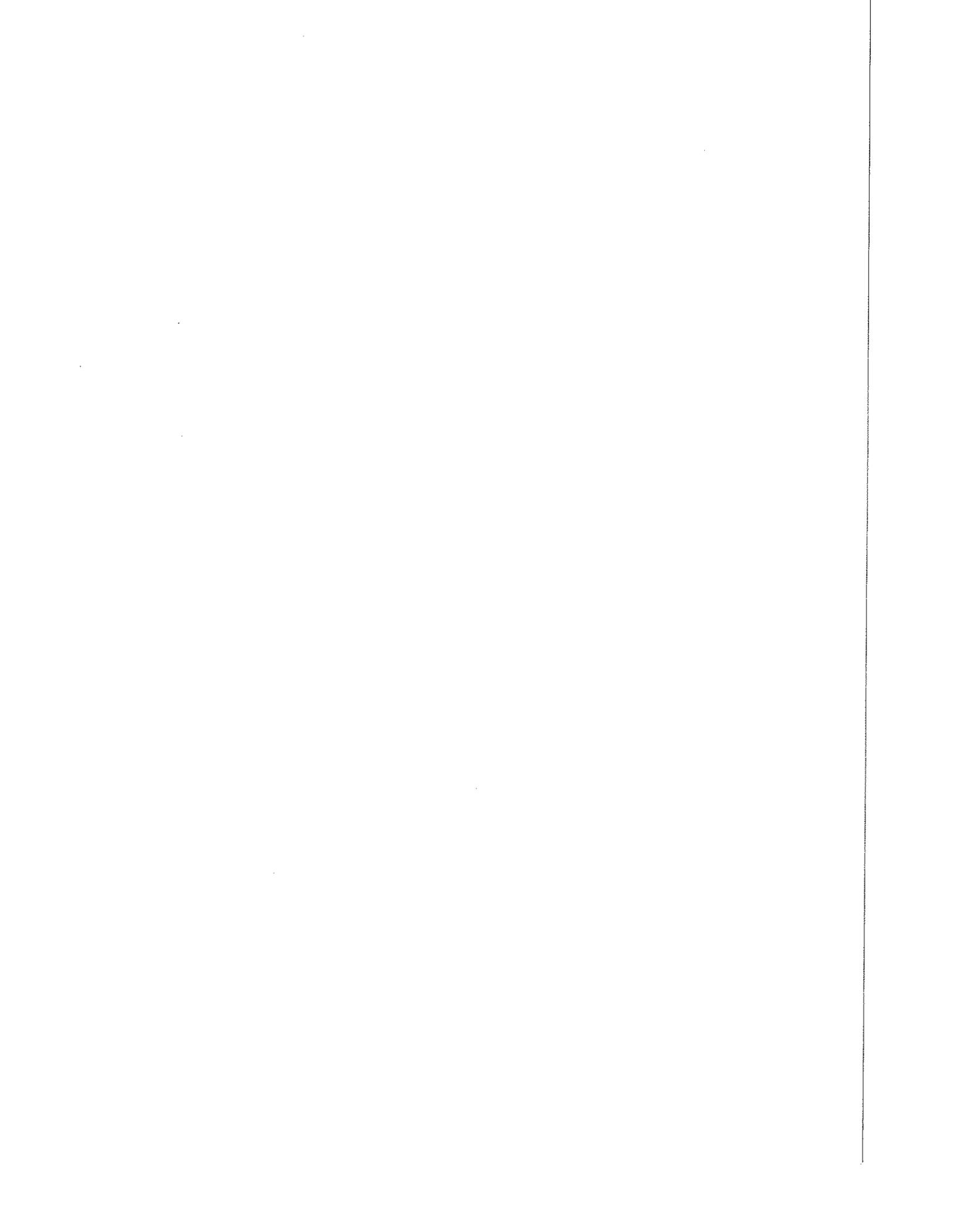












$$(5.1) \quad K(\varphi) = K_0 + K_1(m_2^2 m_3^2 + m_3^2 m_1^2 + m_1^2 m_2^2) + \dots$$

$$(5.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} K(\varphi)_1^1 = L_0 + L_1 m_1^2 + \dots \quad K(\varphi)_2^2 = L_0 + L_1 m_2^2 + \dots \quad K(\varphi)_3^3 = L_0 + L_1 m_3^2 + \dots \\ K(\varphi)_2^3 = m_2 m_3 (M_0 + M_1 m_1^2 + \dots) \quad K(\varphi)_3^1 = m_3 m_1 (M_0 + M_1 m_2^2 + \dots) \quad K(\varphi)_1^2 = m_1 m_2 (M_0 + M_1 m_3^2 + \dots) \end{array} \right.$$

$K(\varphi)_{\alpha\beta}^{\beta\delta}$	S_1^1	S_2^2	S_3^3	S_3^2	S_1^3	S_2^1
S_1^1	$N_0 + N_1 m_1^2 + \dots$	$P_0 + P_1 m_3^2 + \dots$	$P_0 + P_1 m_2^2 + \dots$	$R m_2 m_3 + \dots$	$S m_3 m_1 + \dots$	$S m_1 m_2 + \dots$
S_2^2	$P_0 + P_1 m_3^2 + \dots$	$N_0 + N_1 m_2^2 + \dots$	$P_0 + P_1 m_1^2 + \dots$	$S m_2 m_3 + \dots$	$R m_3 m_1 + \dots$	$S m_1 m_2 + \dots$
S_3^3	$P_0 + P_1 m_2^2 + \dots$	$P_0 + P_1 m_1^2 + \dots$	$N_0 + N_1 m_3^2 + \dots$	$S m_2 m_3 + \dots$	$S m_3 m_1 + \dots$	$R m_1 m_2 + \dots$
S_3^2	$R m_2 m_3 + \dots$	$S m_2 m_3 + \dots$	$S m_2 m_3 + \dots$	$Q_0 + Q_1 m_1^2 + \dots$	$T m_1 m_2 + \dots$	$T m_3 m_1 + \dots$
S_1^3	$S m_3 m_1 + \dots$	$R m_3 m_1 + \dots$	$S m_3 m_1 + \dots$	$T m_1 m_2 + \dots$	$Q_0 + Q_1 m_2^2 + \dots$	$T m_2 m_3 + \dots$
S_2^1	$S m_1 m_2 + \dots$	$S m_1 m_2 + \dots$	$R m_1 m_2 + \dots$	$T m_3 m_1 + \dots$	$T m_2 m_3 + \dots$	$Q_0 + Q_1 m_3^2 + \dots$

$$(5.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1^1 = L_0 + L_1 m_1^2 + \dots \quad A_2^2 = L_0 + L_1 m_2^2 + \dots \quad A_3^3 = L_0 + L_1 m_3^2 + \dots \\ A_2^3 = m_2 m_3 \left[\frac{1}{2} (M_0 + M_1 m_1^2) - K_1 (m_3^2 - m_2^2) + \dots \right] \quad A_3^2 = m_2 m_3 \left[\frac{1}{2} (M_0 + M_1 m_1^2) + K_1 (m_3^2 - m_2^2) + \dots \right] \\ A_3^1 = m_3 m_1 \left[\frac{1}{2} (M_0 + M_1 m_2^2) - K_1 (m_1^2 - m_3^2) + \dots \right] \quad A_1^3 = m_3 m_1 \left[\frac{1}{2} (M_0 + M_1 m_2^2) + K_1 (m_1^2 - m_3^2) + \dots \right] \\ A_1^2 = m_1 m_2 \left[\frac{1}{2} (M_0 + M_1 m_3^2) - K_1 (m_2^2 - m_1^2) + \dots \right] \quad A_2^1 = m_1 m_2 \left[\frac{1}{2} (M_0 + M_1 m_3^2) + K_1 (m_2^2 - m_1^2) + \dots \right] \end{array} \right.$$

$K_{\alpha\beta}^{\beta\delta}$	S_1^1	S_2^2	S_3^3	S_3^2	S_1^3	S_2^1
S_1^1	$N_0 + \frac{1}{3} N_1 + \dots$	$P_0 + \frac{1}{3} P_1 + \dots$	$P_0 + \frac{1}{3} P_1 + \dots$	0	0	0
S_2^2	$P_0 + \frac{1}{3} P_1 + \dots$	$N_0 + \frac{1}{3} N_1 + \dots$	$P_0 + \frac{1}{3} P_1 + \dots$	0	0	0
S_3^3	$P_0 + \frac{1}{3} P_1 + \dots$	$P_0 + \frac{1}{3} P_1 + \dots$	$N_0 + \frac{1}{3} N_1 + \dots$	0	0	0
S_3^2	0	0	0	$Q_0 + \frac{1}{3} Q_1 + \dots$	0	0
S_1^3	0	0	0	0	$Q_0 + \frac{1}{3} Q_1 + \dots$	0
S_2^1	0	0	0	0	0	$Q_0 + \frac{1}{3} Q_1 + \dots$