

THESE
présentée par

Benoît DOUCOT

pour obtenir le titre de

DOCTEUR
de
**L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE**

SUJET

EFFETS COHERENTS DANS LES SYSTEMES DESORDONNES :

- OSCILLATIONS DE MAGNETORESISTANCE DANS
DES RESEAUX DE METAUX NORMAUX .
- INFLUENCE D'UNE NON LINEARITE DU MILIEU .

Soutenue le 5 Septembre 1986 devant la commission d'examen

M. VOOS

Président

S. AUBRY

P. AVERBUCH

J. BELLISSARD

R. RAMMAL

B. SÔUILLARD

Examineurs

-*-*- REMERCIEMENTS -*-*-

Le travail présenté dans cette thèse a été effectué au Centre de Recherches sur les Très Basses Températures à Grenoble.

Je voudrais tout d'abord remercier M. VOOS, Directeur de Recherches au CNRS, d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse, S. AUBRY, Ingénieur au CEA et B. SOUILLARD, Directeur de Recherches au CNRS, pour leur participation à ce jury, J. Bellissard, Professeur à l'Université de Provence et P. AVERBUCH, Directeur de Recherches au CNRS, pour en avoir été les rapporteurs.

Ce travail a été dirigé avec beaucoup d'enthousiasme et de disponibilité par R. RAMMAL. Pour cela, et ce qu'il m'a permis d'apprendre ainsi, je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance.

Je voudrais également remercier B. PANNETIER pour de nombreuses discussions concernant ses expériences sur des réseaux et sa collaboration très stimulante.

J.C. ANGLES d'AURIAC m'a beaucoup aidé en matière d'informatique et je l'en remercie sincèrement.

Je remercie l'ensemble du laboratoire pour son accueil et l'atmosphère de travail qu'il a su créer. En particulier, je suis reconnaissant à A. SIRAT, E. AKKERMANS et beaucoup d'autres encore pour m'avoir fait part de leur expérience et de leur amitié.

Un grand merci enfin à Françoise MAHIEUX pour la dactylographie de cette thèse ainsi qu'à Danièle DEVILLERS pour son aide.

TABLE DES MATIERES

	<u>Pages</u>
<u>INTRODUCTION GENERALE</u>	6
<u>CHAPITRE I - OSCILLATIONS DE MAGNETORESISTANCE DANS DES RESEAUX DE FILS CONDUCTEURS NORMAUX : ETUDE DANS LE REGIME DE LOCALISATION FAIBLE</u>	11
I. Introduction	12
A. La théorie d'échelle de la localisation	13
B. Image physique de la localisation - Effet d'un champ magnétique	15
C. Calcul des corrections à la conductivité	19
D. Géométries multiconnexes - Réseaux	20
II. Localisation faible sur un réseau	21
III. Articles	26
1) Quantum oscillations in normal metal networks	27
2) Interference effects and magnetoresistance oscillations in normal metal networks : weak-localization approach .	31
3) First observation of the universal periodic corrections to scaling : magnetoresistance of normal-metal networks	58
IV. Application de l'approche précédente aux expériences	73
A. Fabrication des réseaux conducteurs	73
B. Effet de la largeur du ruban sur sa magnéto-résistance .	75
C. Effet de largeur propre au réseau	76
D. Limite $L_{\phi} \rightarrow 0$	79
E. Discussion des résultats expérimentaux	83
F. Figures	88
<u>CHAPITRE II - PERIODE DES OSCILLATIONS DE MAGNETORESISTANCE DANS DES SYSTEMES DESORDONNES QUASI UNIDIMENSION- NELS</u>	94
I. Introduction	95
II. h/e ou $h/2e$ - Quelques travaux récents	99
A. Anneaux désordonnés	99
B. Anneaux disposés en série - Echelles	103
C. Le modèle de Nguyen, Spivak et Shklovskii	104
III. Boucle désordonnée	109
A. Formules générales pour la transmission	109
B. Cas d'un système pur	113
C. Cas d'un système désordonné	116
D. Répartition des phases	119

	<u>Pages</u>
IV. Chaîne de boucles	124
A. Modes propres du système infini	124
B. Transmission d'une zone non désordonnée traversée par un champ magnétique	125
C. Faible désordre dilué	126
D. Désordre fort à $x = 1$	131
V. Echelle	135
A. Modes propres du système pur	135
B. Expression du courant et normalisation des canaux	137
C. Propagation dans un seul canal ($t = 1$). Développement autour de $\gamma = 0$	138
D. Propagation dans deux canaux. Matrice de transmission par une impureté	142
E. Equation de Fokker-Planck pour les coefficients de transmission d'un système multicanaux	145
F. Longueurs de localisation de l'échelle	152
G. Discussion des résultats	157
H. Conclusions pour l'échelle	162
VI. Conclusion	164
<u>Références</u> : Chapitres I et II	166
<u>CHAPITRE III - CORRELATIONS ENTRE LES COEFFICIENTS DE TRANS-</u> <u>MISSION D'UNE CHAÎNE LINÉAIRE DÉSORDONNÉE A</u> <u>DEUX VALEURS DIFFÉRENTES DE L'ÉNERGIE INCIDENTE</u>	168
I. Introduction	169
II. Corrélateur $\langle T^{-1}(E)T^{-1}(E') \rangle$	172
A. Approche de type Fokker-Planck	172
B. Utilisation de matrices de transfert	178
III. Corrélateur $\langle \ln T^{-1}(E) \cdot \ln T^{-1}(E') \rangle$	182
IV. Corrélateur $\langle t(E)t^*(E') \rangle$ et $\langle t(E) ^2 t(E') ^2 \rangle$	186
V. Conclusion	188
Appendice : Sur le calcul de $\langle t(E)t^*(E') \rangle$ et $\langle t(E) ^2 t(E') ^2 \rangle$ par Pendry et Kirkman	190
A. $\langle t(E)t^*(E') \rangle$	190
B. $\langle t(E) ^2 t(E') ^2 \rangle$	197
<u>Références</u> : Chapitre III	200

	<u>Pages</u>
<u>CHAPITRE IV - TRANSMISSION D'UNE ONDE DANS UN MILIEU NON LINEAIRE</u>	
<u>DESORDONNE UNIDIMENSIONNEL</u>	202
Articles :	
1) On Anderson localization in non-linear random media	203
2) Invariant-imbedding approach to localization	
I - General framework and basic equations (résumé)	216
3) Invariant-imbedding approach to localization	
II - Non-linear random media	218
<u>CONCLUSION</u>	292

INTRODUCTION GENERALE

Cette thèse est consacrée à l'étude de quelques aspects du problème de la propagation d'une particule quantique, ou d'une onde dans un milieu désordonné. Le phénomène le plus spectaculaire, maintenant bien mis en évidence théoriquement et expérimentalement, est la localisation par le désordre des états propres associés à une équation linéaire de type Schrödinger. Ce phénomène apparaît pour toutes valeurs de l'énergie pour une chaîne unidimensionnelle infinie, et en dimension $d > 2$, un seuil de mobilité séparant des états localisés à basse énergie et des états étendus à plus haute énergie est prédit. La localisation apparaît comme intrinsèquement liée aux interférences entre les ondes partielles émises lors de la diffusion multiple de l'onde incidente sur le système des défauts. Nous nous sommes intéressés à trois mécanismes susceptibles de perturber cette figure d'interférence :

- a) le champ magnétique qui agit en premier lieu sur les phases relatives des différents chemins contribuant à l'interférence ;
- b) une petite variation de l'énergie incidente, qui produit à longue distance une certaine décorrélation entre les ondes transmises pour deux valeurs légèrement différentes de l'énergie ;
- c) la non-linéarité du milieu. Dans ce cas, le principe de superposition, qui est le pilier de la physique linéaire ne s'applique plus, et il est intéressant de comprendre comment non-linéarité et désordre vont interagir.

Cette thèse comprend quatre chapitres.

. Dans le premier chapitre, nous abordons le problème de la magnétorésistance d'un réseau de fils conducteurs faiblement désordonnés. Expérimentalement, de tels réseaux ont révélé une oscillation de la résistance, à très basse température, en fonction du champ magnétique appliqué normalement au plan du réseau. La période de ces oscillations correspond à un flux par boucle élémentaire du réseau

égal au quantum de flux supraconducteur : $\frac{h}{2e}$. Cette périodicité est la moitié de celle que l'on observe dans des métaux extrêmement purs (libre parcours moyen élastique plus grand que le périmètre des boucles du réseau : effet Aharonov-Bohm). Nous nous trouvons donc devant un phénomène intrinsèque à la physique du désordre, montrant de manière non équivoque la présence d'effets cohérents dans ces systèmes. L'explication de cet effet (effet Sharvin-Sharvin) a fait appel à la théorie de la localisation faible, théorie qui calcule les premières corrections quantiques à la conductivité (moyennée sur les réalisations du désordre) d'un métal désordonné. Dans ce chapitre, nous développons une méthode systématique de calcul de cette correction de localisation faible dans une géométrie de réseau, en faisant l'approximation de négliger les degrés de liberté transverses du "Cooperon" dans les brins du réseau. Nous soulignons dans le cas d'un réseau régulier le lien existant entre la correction de localisation faible et la fonction de Green d'un hamiltonien de liaisons fortes associé au réseau. Des illustrations de la méthode sont données dans différentes géométries : systèmes de boucles connectées, échelles, colliers, réseaux carré et nid d'abeilles infinis, tamis de Sierpinski. Ces calculs permettent une description quantitative très précise des expériences réalisées sur des réseaux. Nous précisons notamment les effets de l'interaction spin-orbite et de la largeur finie des fils. En particulier, la magnéto-résistance d'un réseau fractal fournit la première mise en évidence expérimentale des corrections périodiques universelles aux lois d'échelle. La localisation faible se trouve bien décrire ces détails de la courbe de magnéto-résistance.

. Dans le second chapitre, nous envisageons ce problème d'un autre point de vue. Récemment, des expériences faites sur des anneaux désordonnés de taille inférieure au micron ont montré une superposition d'oscillations à $\frac{h}{e}$ et à $\frac{h}{2e}$. L'interprétation donnée par différents auteurs consiste à dire que la distribution de probabilité complète oscille avec la période $\frac{h}{2e}$, mais que les fluctuations d'échantillon à échantillon jouent un rôle essentiel et ramènent la périodicité pour un seul échantillon à $\frac{h}{e}$.

Nous étudions la distribution de probabilité de la résistance pour différents modèles quasi unidimensionnels : boucle désordonnée,

chaîne de boucles, échelle. Dans le cas de l'échelle, il s'agit d'un système à deux canaux de propagation. Nous calculons les deux longueurs de localisation dans la limite de faible désordre en l'absence de champ, et pour un flux par boucle élémentaire égal à $\frac{h}{2e}$. Nos calculs soulignent l'importance de la structure de bande sous-jacente qui possède la périodicité $\frac{h}{e}$. Pour observer la période $\frac{h}{2e}$ sur la distribution de probabilité, il faut que le champ magnétique n'agisse que sur les phases des propagateurs dans le milieu désordonné. Ceci exige que l'échelle de longueur caractéristique du désordre (libre parcours) soit plus petite que l'échelle de longueur associée au champ magnétique. Ces calculs sur la chaîne de boucle montrent également le rôle différent que jouent la concentration des impuretés et l'amplitude des marches de potentiel. Contrairement à l'hypothèse sur laquelle repose la théorie d'échelle de la localisation en l'absence de champ magnétique, la nature microscopique du désordre joue un grand rôle sur la distribution de probabilité de la résistance, au point de provoquer un changement de la périodicité.

. Le troisième chapitre est consacré à l'étude des corrélateurs entre les deux valeurs de la résistance, de son logarithme, et du coefficient de transmission d'une chaîne unidimensionnelle désordonnée pour deux valeurs peu différentes de l'énergie. La différence d'énergie étant fixée, ces corrélations diminuent lorsque la longueur de la chaîne augmente, et nous calculons la longueur caractéristique associée à la perte de ces corrélations. Nous trouvons que la longueur dépend de la grandeur étudiée, ce qui manifeste une nouvelle fois le caractère très pathologique des distributions de probabilité rencontrées dans ces problèmes unidimensionnels.

. Le dernier chapitre traite de la transmission d'une onde décrite par une équation de Schrödinger non linéaire en présence de désordre. Le désordre envisagé est introduit soit sous la forme d'un potentiel aléatoire, soit sous la forme d'un bruit couplé multiplicativement au terme non linéaire. La méthode employée consiste à généraliser l'idée de "l'invariant imbedding", au cas où le coefficient de réflexion dépend de l'intensité de l'onde. On obtient alors une équation aux dérivées partielles stochastique et non linéaire pour le coefficient de

réflexion en fonction de la longueur de la chaîne et de l'intensité de l'onde. La méthode des caractéristiques permet de se ramener à un ensemble d'équations différentielles ordinaires, correspondant à un problème où l'on fixe l'intensité de l'onde sortante. Pour ce problème, nous montrons que la non-linéarité domine à longue distance. On a alors l'image d'un système dynamique légèrement perturbé par le désordre. Dans ce cas, on peut écrire une équation de Fokker Planck pour l'évolution de la distribution de probabilité du coefficient de réflexion en fonction de la longueur. Un comportement d'atténuation en loi de puissance du coefficient de transmission apparaît. Le problème à intensité incidente fixée fait intervenir le système complet des caractéristiques, et présente ainsi de la bistabilité. A longue distance, l'intensité de l'onde décroît, et le régime asymptotique est dominé par le désordre : on retrouve une localisation exponentielle. Enfin, dans le cas d'un bruit couplé de manière multiplicative à la non-linéarité, l'onde est expulsée du milieu : les moments de la distribution de probabilité de la résistance divergent au bout d'une longueur finie. Cette étude nous suggère qu'une très grande diversité de comportements peut être attendue lorsque l'on couple non-linéarité et désordre...

C H A P I T R E I

OSCILLATIONS DE MAGNETORESISTANCE DANS DES RESEAUX DE FILS
CONDUCTEURS NORMAUX : ETUDE DANS LE REGIME DE LOCALISATION
FAIBLE

I - INTRODUCTION

Ce chapitre est consacré à l'étude des corrections quantiques à la conductivité électrique de réseaux plans de fils conducteurs placés dans un champ magnétique. Les phénomènes étudiés sont une manifestation spectaculaire de l'existence d'effets cohérents lors de la diffusion des électrons de conduction sur les impuretés présentes dans le métal. Il faut tout de suite noter que les mécanismes mis en jeu sont intrinsèques à la propagation d'une particule quantique (ou d'une onde plus généralement) dans un milieu désordonné. Ainsi la période des oscillations de résistance en fonction du champ magnétique appliqué différera d'un facteur 2 par rapport à la situation d'un métal parfaitement pur (effet Aharonov-Bohm).

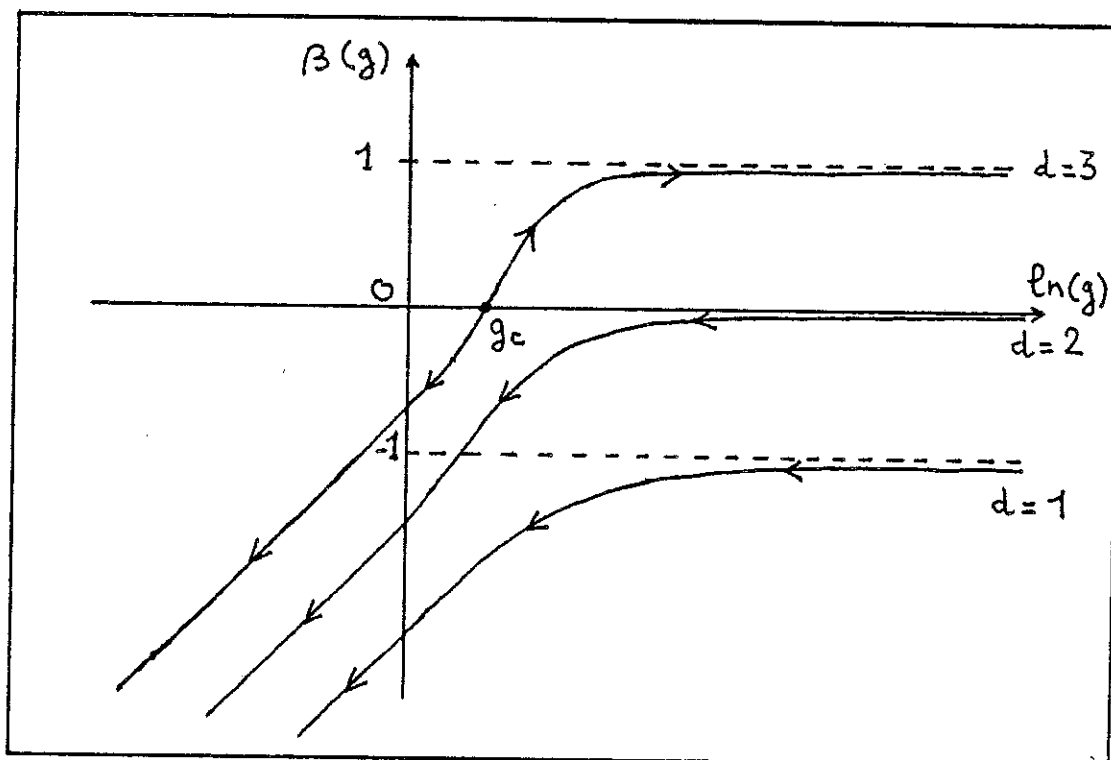
Le problème de la propagation d'une onde dans un milieu linéaire désordonné a été l'objet de beaucoup de travaux, théoriques et expérimentaux. Toutes ces études ont mis en évidence un phénomène très général lié au désordre : la localisation. Historiquement, P.W. Anderson⁽¹⁾ l'a décrite d'abord comme l'absence de diffusion d'une particule sur un réseau avec des énergies aléatoires en chaque site. L'absence de diffusion peut se voir également comme l'annulation de la conductivité statique, et par conséquent, en utilisant l'approche de Landauer⁽²⁾ pour la conductivité d'un système unidimensionnel, comme la décroissance exponentielle du coefficient de transmission d'une chaîne désordonnée en fonction de sa longueur. Le terme lui-même de localisation évoque la nature des modes propres d'un tel système : l'amplitude de la fonction d'onde est significative seulement dans une petite région de l'espace et décroît avec une enveloppe exponentielle lorsque l'on s'éloigne du coeur de la fonction d'onde.

Bien des façons d'aborder le problème ont été proposées et nous ne saurions les décrire toutes. Nous voudrions juste brièvement en présenter quelques aspects qui sont plus directement liés au sujet de cette thèse.

A. La théorie d'échelle de la localisation

Une approche très suggestive de la localisation a été proposée par Abrahams, Anderson, Licciardello et Ramakrishnan en 1979⁽³⁾. Ils ont proposé une théorie d'échelle à un paramètre qui est la conductance typique g d'un hypercube de côté L d'un métal désordonné. Le choix de la conductance repose sur un argument dû à Thouless qui identifie la conductance $g(L)$ au rapport $V(L)/W(L)$ où $V(L)$ est la variation d'énergie d'un état propre à l'intérieur de l'hypercube à la suite d'un changement des conditions aux limites (périodiques - antipériodiques) et $W(L)$ est l'espacement entre les niveaux d'énergie à l'intérieur du bloc. Lorsque plusieurs blocs de taille L sont couplés pour former un hypercube de taille nL , le rapport $V(L)/W(L)$ joue le rôle d'un paramètre couplage/désordre pour le système renormalisé, les cubes de taille L devenant des sites. L'effet d'un changement de taille L est résumé dans la fonction $\beta(g) = \frac{d \ln g(L)}{d \ln L}$, qui d'après l'hypothèse d'échelle ne dépend pas de L .

L'allure de $\beta(g)$ proposée par la "bande des quatre" est la suivante :



A $d \leq 2$, $\beta(g)$ est toujours strictement négative, par suite lorsque L devient infinie, g tend vers zéro, et l'on a une localisation complète de tous les états propres. A $d > 2$, dans la limite g très grand, $\beta(g)$ tend vers la valeur $d-2$ qui résulte de la loi d'Ohm classique $g \approx L^{d-2}$. Cette valeur est donc positive. A g très faible (à très fort désordre), on s'attend à une localisation complète et $\beta(g)$ est négative. Par continuité, $\beta(g)$ s'annule en un point $g = g_c$ qui représente donc un seuil de mobilité. Les flèches sur la figure indiquent le flot au cours de la renormalisation (lorsque L augmente). La région des g grands représente un régime de faible désordre, dans laquelle les écarts à la théorie classique du transport sont petits. Dans cette région, un calcul perturbatif est envisageable. On part en général de la formule de Kubo pour la conductivité. Il est possible alors de faire un développement diagrammatique de la valeur moyenne de la conductivité, pour un système d'électrons libres dans un potentiel aléatoire⁽⁴⁾. Gorkov, Larkin et Khmel'nitskii⁽⁵⁾ ont évalué les premières corrections quantiques à la conductivité, et ont montré que celles-ci correspondaient à la forme asymptotique $\beta(g) = d - 2 - \frac{a}{g} + O\left(\frac{1}{g^2}\right)$, g grand.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à ce régime appelé régime de localisation faible. Le critère de faible localisation est donné par le paramètre de Ioffe-Regel : $k_F \ell$ où k_F est le vecteur d'onde de Fermi et ℓ le libre parcours moyen élastique. Dans le régime de faible localisation $k_F \ell \gg 1$. Ce régime de localisation faible a une importance toute particulière à deux dimensions. En effet, à une dimension, tous les états sont localisés avec une longueur caractéristique ℓ_{loc} qui à un facteur numérique près se confond avec le libre parcours moyen ℓ . Par conséquent, l'extension spatiale de la région où $\beta(g)$ a sa forme asymptotique ($\beta(g) \rightarrow -1$) est très limitée. Par contre, à deux dimensions, à cause de $\beta(g) \rightarrow 0$ lorsque $g \rightarrow \infty$, $\ell_{loc} \approx \ell \exp(k_F \ell)$. Le domaine de longueur $\ell < L < \ell_{loc}$ peut donc être très grand. Il correspond à un comportement diffusif à ces échelles, et les corrections quantiques liées au désordre sont bien décrites par les calculs perturbatifs.

De nombreuses expériences ont été ainsi réalisées sur des films métalliques, réalisant ainsi des conducteurs quasi bidimensionnels. On pourra se reporter à la revue récente de Lee et Ramakrishnan⁽⁶⁾ pour

trouver une description complète d'un grand nombre de résultats expérimentaux.

Dans ce genre d'expériences, on peut effectivement sonder le régime de localisation faible à deux dimensions car, en général, la renormalisation s'arrête à une longueur de coupure inférieure à ℓ_{loc} . Cette longueur de coupure peut être la taille de l'échantillon, dans le cas de systèmes très petits (à l'échelle du micron). Mais plus généralement, c'est la longueur L_ϕ à partir de laquelle la particule (les électrons dans le cas d'un métal) perd sa cohérence de phase par suite d'interactions inélastiques avec des excitations du milieu présentes à température finie. Ainsi pour les électrons, les mécanismes d'interaction électron-électron et électron-phonon contribuent à la perte de la cohérence de phase. En général L_ϕ augmente lorsque la température diminue, ce qui par exemple provoque à deux dimensions une remontée logarithmique de la résistance électrique lorsque $T \rightarrow 0$. Actuellement ce régime de localisation faible semble bien compris au point de devenir un outil précieux d'étude de certaines propriétés de conducteurs à basse température⁽⁷⁾ (temps d'interactions électron-électron et électron-phonon par exemple).

B. Image physique de la localisation - Effet d'un champ magnétique

Pour un système unidimensionnel, on a le résultat suivant⁽⁸⁾ : en présence de désordre, à toute énergie de la particule incidente, le coefficient de transmission, moyenné sur toutes les réalisations du désordre, décroît exponentiellement avec la longueur du système. L'origine de ce phénomène réside dans un mécanisme qui fait interférer de manière constructive les ondes partielles réfléchies vers l'arrière au cours de la diffusion multiple de l'onde incidente sur les impuretés de la chaîne. Pour le montrer, isolons deux impuretés A et B sur une telle chaîne :



Considérons l'amplitude de transmission de 0 en 0'. Isolons les deux séquences 0-A-B-0' et 0-B-A-0'.

La première contribue pour :

$$\mathcal{A}_{0AB0'} = e^{ik|x_A-x_0|} v_A(k,k) e^{ik|x_B-x_A|} v_B(k,k) e^{ik|x_0'-x_B|}$$

Le second trajet, lui, a la contribution :

$$\mathcal{A}_{0BA0'} = e^{ik|x_B-x_0|} v_B(-k,k) e^{ik|x_B-x_A|} v_A(k,-k) e^{ik|x_0'-x_A|}$$

Faisons pour simplifier l'hypothèse d'une diffusion élastique isotrope :

$$V(k_1, k_2) = V \delta_{k_1, k_2} + V \delta_{k_1, -k_2}$$

Dans ce cas

$$\mathcal{A}_{0AB0'} = v^2 e^{ik[|x_A-x_0|+|x_B-x_A|+|x_0'-x_B|]} = v^2 e^{ik|x_0'-x_0|} \quad \text{si } x_B > x_A$$

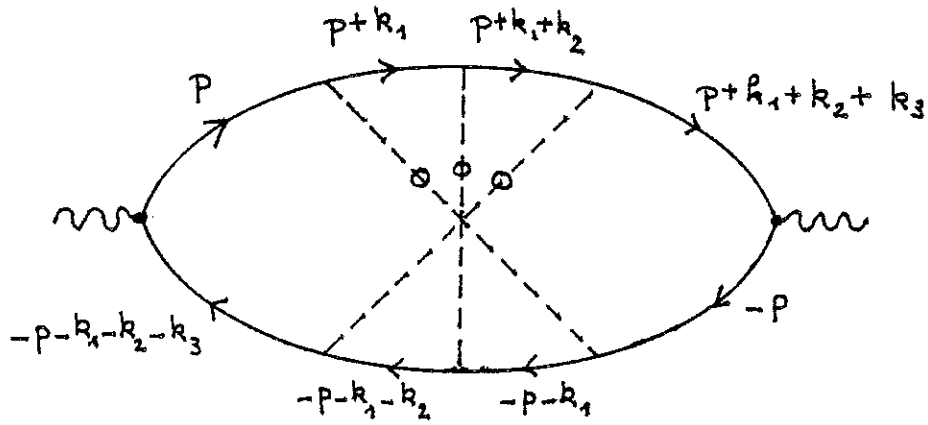
$$\mathcal{A}_{0BA0'} = v^2 e^{ik[|x_B-x_0|+|x_A-x_B|+|x_0'-x_A|]} = v^2 e^{ik[|x_0'-x_0|+2|x_B-x_A|]} \quad \text{si } x_B > x_A$$

Si la position relative de A et de B varie, la phase relative de ces deux amplitudes de diffusion varie de manière uniforme et en moyenne ces deux séquences n'interfèrent pas. Par contre, si on regarde l'intensité réfléchie

$$\mathcal{A}_{0AB0} = e^{ik|x_A-x_0|} v e^{ik|x_B-x_A|} v e^{ik|x_B-x_0|}$$

$$\mathcal{A}_{0BA0} = e^{ik|x_B-x_0|} v e^{ik|x_A-x_B|} v e^{ik|x_0-x_A|}$$

Les deux amplitudes sont toujours égales, quelle que soit la configuration des impuretés. On a donc une amplification systématique de la rétrodiffusion par un processus d'interférences. En fait, une telle interprétation se généralise en dimension supérieure. Les premières corrections quantiques au transport dans le régime de localisation faible proviennent des diagrammes croisés mis en évidence par Langer et Neal en 1966⁽⁹⁾.



Ce diagramme est exactement l'interférence entre la séquence :

$p, p+k_1, p+k_1+k_2, p+k_1+k_2+k_3$ et la séquence

$-p-k_1-k_2-k_3, -p-k_1-k_2, -p-k_1, -p$

où l'on a inversé les vitesses et l'ordre dans lequel les impuretés sont intervenues.

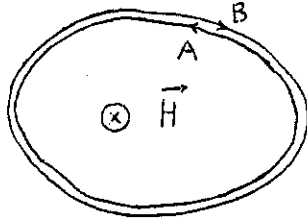
La localisation faible s'interprète donc comme le résultat de cette interférence constructive entre chemins de diffusion de même support géométrique, mais parcourus dans des sens différents⁽¹⁰⁾. Ceci permet une évaluation quantitative de la correction à la conductivité dans le régime de localisation faible : elle est proportionnelle à la probabilité que la particule diffusant dans le milieu retourne au voisinage de sa position initiale (avec une précision de $\frac{1}{k_F} = \lambda_F$), ceci dans un temps n'excédant pas le temps τ_ϕ de cohérence de phase. Soit, en dimension d :

$$\frac{\delta\sigma}{\sigma} = - \int_{\tau}^{\tau_\phi} \frac{v_F dt}{(Dt)^{d/2}} \lambda_F^{(d-1)} \quad (1)$$

Cette évaluation donne la dépendance en τ_ϕ de la correction quantique $\delta\sigma$.

Il est très important de noter que ce mécanisme d'interférences entre chemins fermés parcourus dans des sens opposés n'opère que lorsque

la dynamique est invariante par renversement du temps. En présence de champ magnétique, ce n'est plus le cas. Pour deux trajets fermés identiques effectués en sens inverse dans un champ magnétique :



l'amplitude du chemin A acquiert un facteur de phase $\exp[i \frac{e}{\hbar} \phi]$, où ϕ est le flux magnétique à travers la boucle, et celle du chemin B un facteur $\exp[-i \frac{e}{\hbar} \phi]$.

Le déphasage relatif entre A et B est donc $2\pi \frac{\phi}{\phi_0}$ où $\phi_0 = \frac{h}{2e}$. Le flux $\phi_0 = \frac{h}{2e}$ est caractéristique de la localisation faible. Dans le cas d'un système pur (quantification sur un chemin fermé), la périodicité sous-jacente est $\frac{h}{e}$, qui correspond à un changement de phase de 2π de la fonction d'onde sur un chemin fermé^(11,12).

L'effet d'un champ magnétique faible (c'est-à-dire dont l'effet consiste simplement à modifier la phase des fonctions d'onde, sans entraîner de mouvement cyclotron classique : $\omega_c \tau \ll 1$) est donc de détruire l'interférence constructive qui est à l'origine de la localisation. Expérimentalement, cela se traduit par une magnétorésistance négative à faible champ.

L'évaluation (1) peut se généraliser en présence d'un champ magnétique, en introduisant le facteur de déphasage : $\cos[\frac{4\pi e H D t}{h}]$. Soit

$$\frac{\delta\sigma(H) - \delta\sigma(H=0)}{\sigma} = \int_{\tau}^{\tau_F} \frac{v_F [1 - \cos(\frac{4\pi e H D t}{h})] \lambda_F dt}{(Dt)} \quad (2)$$

On s'est placé ici à deux dimensions.

L'effet du champ magnétique pour un système homogène s'évalue en comparant le flux dans une boucle de taille L_ϕ avec le flux typique $\frac{h}{e}$.

On a alors deux régimes :

- a) $HL_\varphi^2 \ll \frac{h}{e}$: champ faible. La magnétorésistance est en H^2 comme le montre la formule (2) dans laquelle on peut développer le cosinus.
- b) $HL_\varphi^2 \gg \frac{h}{e}$: champ fort. $\frac{\delta\sigma}{\sigma}(H)$ est alors en $\ln H$.

C. Calcul des corrections à la conductivité.

L'image physique précédente a suggéré le lien existant entre les corrections quantiques au transport dans le régime de localisation faible et la diffusion classique, ainsi que le rôle d'un champ magnétique. Ces deux ingrédients apparaissent naturellement dans le calcul de la correction $\delta\sigma$. En fait⁽¹⁰⁾ la correction à la conductivité $\delta\sigma(r)$ est donnée par

$$\delta\sigma(r) = - \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{h} C(r,r) \quad (3)$$

où $C(r,r)$ est la fonction de Green définie par :

$$\left[(-i\nabla - \frac{2e}{h} A)^2 + \frac{1}{L_\varphi^2} \right] C(r,r') = \delta(r-r') \quad (4)$$

Dans ces formules 3D, $\frac{e^2}{h}$ a la dimension d'une conductance, et $C(r,r')$ celle de l'inverse d'une longueur. On remarque que $C(r,r)$ est bien invariant de jauge. Le terme en $\frac{1}{L_\varphi^2}$ donne la coupure à longue distance et le facteur 2 devant $\frac{e}{h} A$ (A est le potentiel vecteur du champ magnétique appliqué) traduit les considérations du paragraphe précédent. Les équations (3) et (4) proviennent des diagrammes croisés introduits plus haut, et leur contenu physique est identique à l'image donnée précédemment.

D. Géométries multiconnexes - réseaux.

L'intérêt d'un réseau bidimensionnel régulier est que tous les chemins fermés qu'une particule évoluant sur ce réseau peut décrire délimitent une surface dont l'aire est un multiple de l'aire d'une cellule élémentaire du réseau. En conséquence, si ce réseau est constitué de fils métalliques quasi unidimensionnels et légèrement désordonnés, l'effet d'un champ magnétique sur la résistance, dans le régime de localisation faible, fera apparaître comme grandeur fondamentale le flux magnétique ϕ à travers une cellule élémentaire. Si ϕ est un multiple entier de $\frac{h}{2e}$, toutes les boucles existant sur le réseau ne présenteront pas de déphasage entre les deux sens de parcours possibles, et la résistance sera la même qu'en champ nul. Par conséquent, la magnétorésistance doit être une fonction périodique en ϕ , de période $\phi_0 = \frac{h}{2e}$. Cette période de $\frac{h}{2e}$ peut s'observer effectivement, si on a : $\ell \ll L < L_\phi$ où ℓ est le libre parcours moyen élastique, et L est le périmètre de la cellule élémentaire. Dans le cas $L < \ell$ (système très pur) la période devient $\frac{h}{e}$, comme l'ont noté Dingle⁽¹¹⁾ et Aharonov et Bohm⁽¹²⁾. Par contre, lorsque $\ell < L_\phi < L$, toute oscillation disparaît, car la cohérence de phase ne s'étend pas sur toute une cellule élémentaire. Pour observer des oscillations avec la période $\phi_0 = \frac{h}{2e}$, il faut donc travailler avec des conducteurs suffisamment désordonnés ($\ell \ll L$), mais pas trop car $L_\phi^2 = D\tau_\phi$ et à τ_ϕ donné, L_ϕ diminue si le coefficient de diffusion diminue. On a intérêt à se placer à très basse température pour augmenter L_ϕ . Les contraintes précédentes imposent également une échelle pour la taille de la cellule élémentaire, de l'ordre du micron.

La première expérience où la période $\frac{h}{2e}$ a été mise en évidence est celle de Sharvin et Sharvin (1981)⁽¹³⁾, qui ont travaillé sur des cylindres. Depuis, d'autres expériences ont eu lieu, sur des cylindres⁽¹⁴⁾ et sur des réseaux^(15,16). Toutes ces expériences donnent une période de $\frac{h}{2e}$. Toutefois, récemment, des expériences faites sur de simples anneaux ont montré soit $\frac{h}{e}$ ⁽¹⁷⁾, soit une superposition d'une oscillation à $\frac{h}{e}$ avec une importante harmonique à $\frac{h}{2e}$ ⁽¹⁸⁾. De telles observations tendent à montrer que les petits systèmes en question sont mal décrits par la moyenne d'ensemble sur le désordre. La théorie moyennée de la localisation faible a donc un sens pour des réseaux ou des systèmes suffisamment grands (cylindres) pour que la moyenne d'ensemble reflète les propriétés d'un seul échantillon. Nous reviendrons sur ces questions au chapitre II.

II - LOCALISATION FAIBLE SUR UN RESEAU

Notre étude a été motivée par plusieurs considérations différentes :

- les premières expériences de Sharvin et Sharvin ont donné lieu à un remarquable accord quantitatif entre les résultats expérimentaux et les prédictions de la localisation faible. Seulement, il n'existait pas de calcul pour une géométrie multiconnexes autre que celle du cylindre. Or le calcul dans une géométrie de réseau présente l'intérêt de pouvoir étudier les effets d'interactions entre différentes boucles, effets qui doivent devenir importants lorsque L_φ devient grande devant la taille des boucles.
- l'analogie avec le problème des réseaux supraconducteurs⁽¹⁹⁾. L'équation du Cooperon (4) est formellement équivalente à l'équation de Ginzburg-Landau linéarisée pour le paramètre d'ordre :

$$\left([-i\nabla - \frac{2e}{\hbar} A]^2 - \frac{1}{\xi^2} \right) \psi(r) = 0$$

La ligne critique $H_c(T)$ est déterminée par la plus petite valeur propre de l'opérateur $[-i\nabla - \frac{2e}{\hbar} A]^2$. Pour un réseau carré, cette ligne critique est donc semblable au bord du spectre calculé par Hofstadter, ce qui a été confirmé expérimentalement^(20,21).

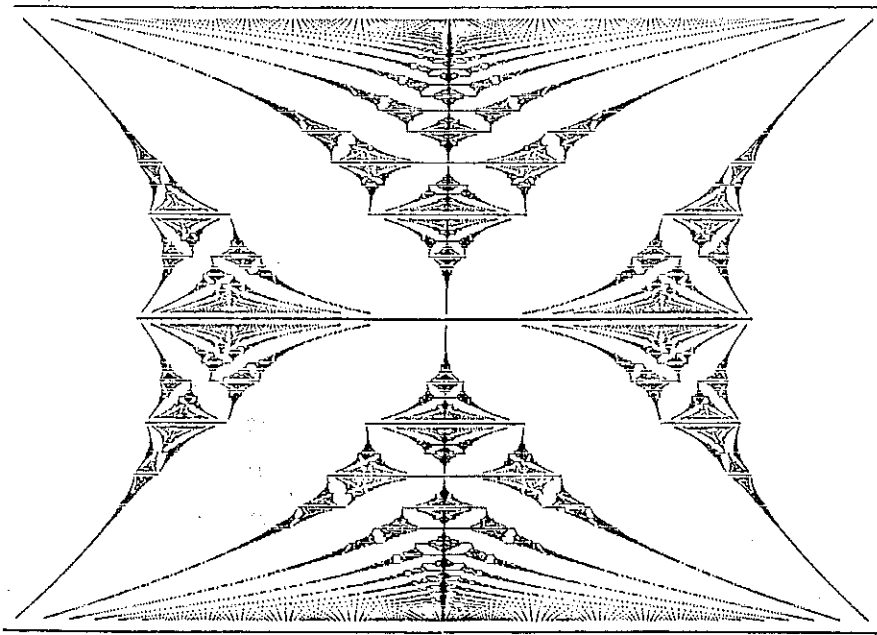


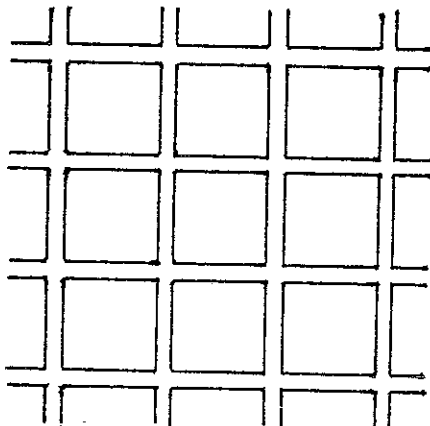
FIG. 1. Spectrum inside a unit cell. ϵ is the horizontal variable, ranging between +4 and -4, and $\mu = \{\alpha\}$ is the vertical variable, ranging from 0 to 1.

Extrait de la
ReF. 20

Il était intéressant de savoir si les fines structures visibles sur le bord du spectre allaient correspondre à des détails de la courbe de la magnéto-résistance.

Formalisme des réseaux :

Considérons un réseau de fils conducteurs :



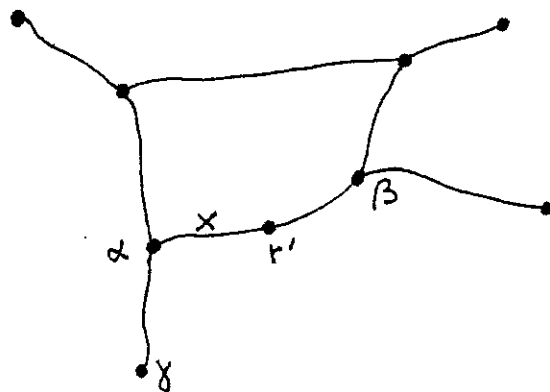
La correction de localisation faible à la conductivité est donnée par les équations (3) et (4) qui sont tridimensionnelles. Pour un réseau, les équations (3) et (4) ont un sens lorsque le libre parcours moyen élastique est petit devant les dimensions transverses des fils. Lorsque cette condition n'est pas vérifiée, la structure microscopique des fils (modes propres, nature du désordre) commence à jouer un rôle essentiel. Dans la limite où les dimensions transverses des fils sont petites devant la longueur de cohérence de phase L_φ , le Cooperon $C(r, r')$ ne va pas beaucoup varier lorsque r se déplace sur la section d'un fil. Dans cette limite, on peut donc négliger les degrés de liberté transverses du Cooperon en remplaçant l'opérateur $-i\nabla - \frac{2e}{\hbar} A$ par sa projection le long des fils : $-i \frac{d}{ds} - 2e \frac{A_t}{\hbar}$ où s désigne l'abscisse curviligne le long d'un fil et A_t est la composante tangentielle du potentiel vecteur. On remplace ainsi (4) par des équations différentielles ordinaires le long des fils. Une fois que l'on a fixé le point r' où l'on veut calculer $\delta\sigma$, il suffit de connaître $C(r, r')$ pour r situé aux emplacements des noeuds du réseau, les équations étant du 2ème ordre. En chaque noeud, on peut écrire une équation de conservation :

$$\sum [i \frac{d}{ds} + \frac{2e}{\hbar} A] C(r, r') = 0$$

On finit ainsi par se ramener à un système linéaire associé aux noeuds du réseau. Pour l'instant, le point r' où l'on calcule la correction à la conductivité joue le rôle d'un noeud supplémentaire. Il est alors possible d'exprimer $C(r', r')$ uniquement à l'aide de l'inverse d'un opérateur défini sur les noeuds du réseau initial. De manière plus explicite :

$$C(r', r') = \frac{L_\varphi}{\hbar D S} \frac{\text{sh}(\frac{x}{L_\varphi}) \text{sh}(\frac{\ell_{\alpha\beta} - x}{L_\varphi})}{\text{sh}(\frac{\ell_{\alpha\beta}}{L_\varphi})} +$$

$$+ \frac{L_\varphi}{\hbar D S} \frac{1}{\text{sh}^2(\frac{\ell_{\alpha\beta}}{L_\varphi})} [T_{\alpha\alpha} \text{sh}^2(\frac{\ell_{\alpha\beta} - x}{L_\varphi}) + T_{\beta\beta} \text{sh}^2(\frac{x}{L_\varphi}) + 2\text{Re}(T_{\beta\alpha} e^{-i\gamma_{\alpha\beta}}) \text{sh}(\frac{x}{L_\varphi}) \text{sh}(\frac{\ell_{\alpha\beta} - x}{L_\varphi})]$$



Ici S désigne l'aire de la section des fils et T est un opérateur, associé aux noeuds du réseau, qui est l'inverse de l'opérateur M défini comme suit :

$$\begin{aligned} M_{\alpha\alpha} &= \sum_{\gamma} \coth \left(\frac{\ell_{\alpha\gamma}}{L_{\varphi}} \right) \quad (\text{on somme sur les noeuds } \gamma \text{ reliés à } \alpha). \\ M_{\alpha\beta} &= - \frac{e^{-i\gamma_{\alpha\beta}}}{\text{sh} \left(\frac{\ell_{\alpha\beta}}{L_{\varphi}} \right)} \end{aligned}$$

$\gamma_{\alpha\beta}$ est le facteur de jauge lié à la présence du champ magnétique.

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{2\pi}{\phi_0} \int_{\alpha}^{\beta} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \quad , \text{ l'intégrale étant prise le long du brin } \alpha\beta.$$

$$\text{Ici } \phi_0 = \frac{h}{2e}.$$

L'opérateur M ainsi défini est hermitien, et ses valeurs propres sont strictement positives car $|T_{\alpha\alpha}| > \sum_{\beta \neq \alpha} |T_{\alpha\beta}|$. Il a la même structure que l'opérateur hamiltonien dans un modèle de liaisons fortes décrivant la propagation d'une particule de charge $2e$ sur l'ensemble des sites du réseau.

La formule précédente montre que la correction à la conductivité varie d'un point à l'autre du réseau. En général, cette correction est plus faible au voisinage des noeuds, ce qui est conforme à l'image physique : au voisinage des noeuds, la probabilité de retour à l'origine lors d'une diffusion classique est plus petite. Dans une expérience, avec des cellules de la taille du micron, on a surtout accès à la résistance globale du réseau. Celle-ci dépend en principe de l'orientation du

réseau par rapport au courant le traversant, et plus généralement, de la carte des courants. Nous avons fait l'hypothèse que la variation relative de résistance du réseau par suite des corrections quantiques s'obtient en moyennant avec un poids égal la correction en chaque point. Cette procédure, exacte pour une géométrie simple comme un parallélépipède ne doit pas introduire trop d'erreur pour un réseau quelconque. Cette moyenne $\int C(r',r')dr'$ de la correction sur le réseau s'exprime à l'aide de la fonction de Green complète T . Seulement, dans le cas où tous les brins ont la même longueur a , cette moyenne ne fait intervenir que la fonction de Green diagonale $T_{\alpha\alpha}$. Enfin, dans le cas où le nombre de coordination Z est constant on a :

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\kappa}{2} \left[\frac{\eta \cosh \eta - \sinh \eta}{\eta \sinh \eta} \left(1 - \frac{2}{Z} \right) + \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i^{-1} \right]$$

Ici, N est le nombre de noeuds du réseau, les λ_i sont les valeurs propres de M , $\eta = \frac{a}{L_\phi}$ et $\kappa = \frac{2e^2 L_\phi}{\pi \hbar \sigma_0 S}$, σ_0 étant la conductivité moyenne d'un brin. La correction de localisation faible à la conductivité est donc reliée à la fonction de Green $\sum \lambda_i^{-1}$. C'est une information globale sur le spectre de l'hamiltonien M associé, à la différence de la ligne critique $H_c(T)$ d'un réseau supra qui est reliée au bord de ce spectre.

Le formalisme ainsi décrit a été appliqué à l'étude de différentes géométries (boucles couplées, rubans, colliers, réseau carré, réseau en nid d'abeilles et tamis de Sierpinski). Cette étude est l'objet des trois articles qui suivent. Nous détaillerons ensuite la façon dont ces calculs peuvent s'appliquer à l'expérience, et permettent par exemple une détermination précise de la longueur de cohérence de phase L_ϕ et de sa dépendance en température.

III - ARTICLES

- 1) Quantum Oscillations in Normal metal networks.
- 2) Interference effects and magnetoresistance oscillations in normal-metal networks : weak-localization approach.
- 3) First observation of the universal periodic corrections to scaling : magnetoresistance of normal-metal networks.

Quantum Oscillations in Normal-Metal Networks

B. Douçot and R. Rammal

*Centre de Recherches sur les Très Basses Températures, Centre National de la Recherche Scientifique,
F-38042 Grenoble Cédex, France*

(Received 8 April 1985)

A general formalism is outlined for the calculation of the transport coefficients of a normal-metal network in the weak-localization regime. Simple circuits such as loops and ladders are used to illustrate our approach. A closed expression for the magnetoresistance of an infinite regular network is derived. We find that, in contrast with superconducting networks, no fine structure due to interference effects between adjacent loops is expected. Our results agree very well with the recently observed oscillations in normal-metal networks.

PACS numbers: 71.50.+t, 71.55.Jv, 72.15.Gd

Since the prediction¹ of a Bohm-Aharonov-type effect in disordered metals, with half-quantum flux $\phi_0 = hc/2e$, only two groups were able to observe clearly this effect in the following new multiconnected geometries: regular networks² and ladders.³ The original experiment, performed on a hollow cylinder, has been repeated by several groups.⁴ The magnetoresistance (MR) oscillations observed in these experiments are actually the manifestation of a specific and new phenomenon in disordered materials. The physical explanation in terms of coherent backscattering has been advanced⁵ in the case of electronic transport. However, the interference effect, obtained originally through an explicit diagram calculation, is really a very general phenomenon in systems with quenched disorder. Indeed, the basic origin must be traced to the amplification of the backscattering during the propagation of waves in randomly inhomogeneous media, where multiple scattering dominates. As long as $\lambda \ll l$ (λ is the wave length and l is the mean free path), the first interference corrections to the wave-field energy-transport equation are controlled by the so-called fan diagrams. This is actually the case in the weak-localization regime. The presence of a magnetic field, which couples to the phase of a wave function, is therefore the most direct method to reveal the interference effects.

Given the fundamental aspect of the interference phenomena in disordered metals, it is natural to look at the corresponding corrections in new geometries, like networks, where the recent experiments were performed. The magnitude of the MR oscillations has been calculated only for the hollow-cylinder geometry, and there is no equivalent expression for the general situation. In addition to the relevance of such a calculation for the experimental investigations, there are at least two additional motivations for our study. Firstly, how is the amplitude of the MR oscillation influenced by the experimental setup? Secondly, are there new features of the MR curve in the case of an extended network? Actually, such effects will be produced by interferences between adjacent loops in the network.

For instance, in superconducting networks, such effects were predicted and observed⁶ on the fine structure of the upper critical line. Is there a counterpart in the case of normal networks?

In this Letter, we report on a general formalism for the calculation of transport coefficients for a normal-metal network of arbitrary shape. Our formulation, illustrated below on some examples, permits us to answer the above questions and provides explicit expressions for the MR oscillations for an arbitrary network. In the following, we will limit our exposition to localization corrections in the weak-localization regime. Note, however, that corrections due to electron-electron interaction can also be calculated in the framework of the present formulation. A more detailed exposition will be given elsewhere.⁷

The localization correction to the conductivity in the weak-localization regime ($k_F l \gg 1$) is given in general by the following expression⁸:

$$\Delta\sigma(\mathbf{r}) = -(2/\pi\nu)\sigma_0 C(\mathbf{r}, \mathbf{r}), \quad (1)$$

where σ_0 is the bulk conductivity of the sample, given by Drude's formula, and ν is the density of states at the Fermi level. The equation for the Cooperon⁹ $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ in the presence of a magnetic field (vector potential $\mathbf{A}$) is

$$\begin{aligned} & [(-i\nabla_{\mathbf{r}} - (2\pi/\phi_0)\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2 + L_\phi^{-2}] C(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ & = (1/\hbar D) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (2)$$

Here D denotes the electron diffusion coefficient and $L_\phi = (D\tau\phi)^{1/2}$ is the length over which dephasing of the electron wave function results from inelastic processes or of spin-spin scattering from paramagnetic centers. Equation (2) must be supplied by a boundary condition on the surface of a given sample. In the following, we shall confine ourselves to the free boundary conditions. It is important to notice that Eqs. (1) and (2) correspond actually to a self-averaged theory, where all traces of randomness are summarized in L_ϕ .

As can be seen from Eq. (1), the correction to the conductivity depends on the coordinates. However,

since $\Delta\sigma(r)$ is a small correction to the total conductivity, the total correction to the measured resistance, for instance, is obtained by integrating $\Delta\sigma(r)$ over the volume of the system.

In order to calculate $\Delta\sigma(r)$ in a multiply connected geometry, Eq. (2) leads to formidable calculations, already in the case of simple circuits such as the hollow cylinder or single rings.¹ The situation becomes very simple in the thin-wire approximation used here. Indeed, we shall investigate networks made of thin wires, having a thickness much smaller than $L\phi$. This corresponds to wires of effective dimensionality one,

$$\sum_{\beta}' \coth\left(\frac{l_{\alpha\beta}}{L\phi}\right) C(\alpha, r') - \sum_{\beta}' \left[\frac{e^{-i\gamma_{\alpha\beta}}}{\sinh(l_{\alpha\beta}/L\phi)} \right] C(\beta, r') = \frac{L\phi}{\hbar DS} \delta_{\alpha, r'} \quad (3)$$

In this basic equation, $l_{\alpha\beta}$ refers to the length of the strand $(\alpha\beta)$ between nodes α and β of the network, and $\gamma_{\alpha\beta} = (2\pi/\phi_0) \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ denotes the circulation of the vector potential $\mathbf{A}$ along this strand. The sums in Eq. (3) are taken over nodes β connected to node α , and S is the cross-sectional area of the wires. In this equation, the point r' , where the correction to the conductivity is calculated, acts as an additional node. This remark, as well as other observations,⁷ shows the basic differences between Eq. (3) and the similar one derived for superconducting networks.¹¹ Starting from Eq. (3), one can check that we recover the known¹ result for a single loop in a normal magnetic field,

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\frac{1}{2} \kappa \sinh(L/L\phi)}{\cosh(L/L\phi) - \cos(2\pi\phi/\phi_0)}, \quad (4)$$

where $\kappa = (2e^2/\pi\hbar\sigma_0)L\phi/S$. Here L denotes the length of the loop, and ϕ the magnetic flux through its surface.

Note that Eq. (3) can also be used in the case of a thin wire with dangling side branches.⁷ In this geometry, the local character of $\Delta\sigma(r)$ is well illustrated where a nonmonotonic behavior of $\Delta\sigma(r)$ is obtained.

In general, for a network of arbitrary shape, a compact expression for $\Delta R/R$ can be derived, if we take into account the linearity of Eq. (3). For this, we shall introduce the following $N \times N$ Hermitean matrix M , where N is the number of nodes in the network:

$$M_{\alpha\alpha} = \sum_{\beta}' \coth\left(\frac{l_{\alpha\beta}}{L\phi}\right) - 2 \sum_{\text{loops}} \frac{\cos(2\pi\phi_s/\phi_0)}{\sinh(l_s/L\phi)}, \quad (5a)$$

$$M_{\alpha\beta} = - \frac{e^{-i\gamma_{\alpha\beta}}}{\sinh(l_{\alpha\beta}/L\phi)}, \quad \alpha \neq \beta. \quad (5b)$$

In Eq. (5a), the first sum is taken over nodes β connected to node α by a strand of length $l_{\alpha\beta}$. The second sum is taken over elementary loops of length l_s containing the node α and defining a magnetic flux ϕ_s .

and this condition is actually fulfilled in the experiments done on networks.² The finite width of wires can, however, be taken into account, and this results in a renormalization of $L\phi$ which becomes a function of the magnetic field (see below). This formalism breaks down in very small systems¹⁰ where there is a lack of self-averaging. If we assume that $C(r', \alpha)$ is known at two adjacent nodes of the network, it is straightforward to deduce $C(r', r)$ for any point r on the strand $(\alpha\beta)$. This remark permits us to write down a set of Kirchhoff-type equations, leading to the following network equations:

With use of the matrix M , the correction to the total resistance can be written for a network of arbitrary shape. In particular, for a regular network, such as the square lattice (see below), made of identical strands with $l_{\alpha\beta} = a$, the correction of the total resistance is given by⁷ ($\eta = a/L\phi$)

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\kappa}{2} \left[\left(1 - \frac{2}{z} \right) \frac{\eta \cosh \eta - \sinh \eta}{\eta \sinh \eta} + \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i^{-1} \right]. \quad (6)$$

Here z denotes the coordination number of the lattice, and $\lambda_i \geq 0$ denotes an eigenvalue of the matrix M .

In the following we shall illustrate the above equations in three particular cases.

(i) *Ladders*.—We have studied different networks where two or many loops are connected through arms or contact points. In general, the presence of arms damps out the MR oscillations. Furthermore, for a set of two loops, with a common node or a common edge, regular oscillations with a periodic behavior of MR is obtained for rational values of the flux ratio ϕ_1/ϕ_2 . However, for two identical square loops with a common edge, no secondary maxima (i.e., at $\phi_{1,2}/\phi_0 = \frac{1}{2}$) are obtained, in contrast with an intuitive expectation. This behavior is well illustrated in Fig. 1 for a simple strip (ladder) made of identical square loops of side a each. The absence of new features of the MR persists on a multistrip of arbitrary width.

(ii) *Infinite square lattice*.—This case can be studied either directly or as a limit ($M = \infty$) of a multistrip of width M . Both approaches lead to the same results. Let us describe the direct approach based on Eq. (6), where $z = 4$. For a magnetic field H , normal to the planar network, one can take for convenience the Landau gauge, $A_x = -Hy$, $A_y = 0$, and use the translation symmetry in direction x . The eigenvalue problem can

be written as a Harper's equation¹²:

$$\epsilon\psi_m = \psi_{m-1} + \psi_{m+1} + 2\cos(m\gamma + \theta)\psi_m, \quad (7)$$

where $\epsilon = 4\cosh\eta - \lambda\sinh\eta$, $\eta = a/L\varphi$, $\gamma = 2\pi\phi/\phi_0$, and θ denotes a Floquet factor ($0 \leq \theta \leq 2\pi$). Here, a refers to the side of elementary plaquettes and $\phi = Ha^2$. Equation (7) can be solved for rational

$\phi/\phi_0 = p/q$ (p, q integers and prime to each other). With use of Bloch's theorem, the secular equation, giving the eigenvalues ϵ , can be cast as a polynomial equation: $P_{p,q}(\epsilon) - W = 0$, where $P_{p,q}(\epsilon)$ is a polynomial of degree q in ϵ , and W denotes a parameter in the interval $[-4, +4]$. For more details, we direct the reader to Refs. 7 and 12, and Wannier, Obermair, and Ray.¹³ Here we quote just the final result for the localization correction to the total resistance

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\kappa}{4} \left[\frac{\eta \cosh\eta - \sinh\eta}{\eta \cosh\eta} + \frac{8 \sinh\eta}{\pi q} \frac{P'_{p,q}(4 \cosh\eta)}{P_{p,q}(4 \cosh\eta)} \right] K \left(\frac{4}{P_{p,q}(4 \cosh\eta)} \right). \quad (8)$$

Here $P'(x)$ denotes the derivative of the polynomial $P_{p,q}$ taken at $x = 4 \cosh\eta$ and $K(x)$ refers to the elliptic integral of first kind,

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} dt / (1 - x^2 \sin^2 t)^{1/2}.$$

In Fig. 1, we have shown Eq. (8) as a function of the reduced flux p/q for values of q up to $q = 50$. As can be seen, $\Delta R/R$ exhibits actually a periodicity at integer values of ϕ/ϕ_0 only, as was anticipated before. The whole curve is a smooth one and indeed analytical.⁷ In fact, despite the rich structure of the spectrum¹¹ associated with Eq. (7), $\Delta R/R$ is given by a regularizing sum [Eq. (6)] over the subbands of this spectrum,

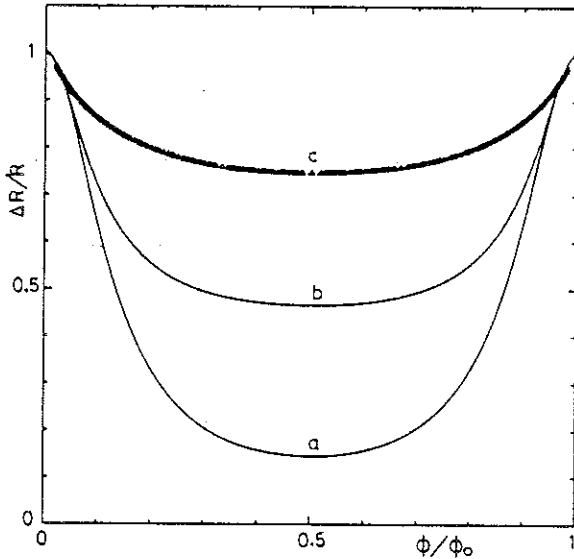


FIG. 1. $\Delta R/R$ as a function of the reduced flux ϕ/ϕ_0 shown for three networks ($a/L = 0.2$): curve *a*, single square loop of perimeter $L = 4a$ [Eq. (4)]; curve *b*, simple ladder made of identical square loops; and curve *c*, infinite regular network made of identical square loops [Eq. (8)]. For convenience, $\Delta R/R$ has been normalized to its value at zero field in each case. Triangles, corresponding to case *c*, are calculated for rational $\phi/\phi_0 = p/q$, $p \leq q$, and $q \leq 50$, according to Eq. (8) (see text).

weighted by the density of states, where logarithmic singularities occur. However, Eq. (8) is analytic, because $4 \cosh\eta$ lies outside the spectrum $|\epsilon| \leq 4$ of Eq. (7). This result is to be compared with the singular behavior of the edge of this spectrum, measured in superconducting networks.⁶

It is interesting to look at various limits of Eq. (8). Let us consider first the case of zero magnetic field. For $\eta \rightarrow 0$, i.e., $a \ll L\varphi$, one gets $\Delta R/R = (\kappa/2\pi)(a/L\varphi) \ln(L\varphi/a)$. This result reproduces the bulk expression⁸ $\Delta R = (e^2/\pi^2\hbar)R_0^2 \ln(L\varphi/l)$ with a , instead of l , as a cutoff at short length scales. Note that our formalism makes sense only for $a > l$, and it is natural to recover this result in the continuum limit. In the limit of small but finite magnetic field, the continuum results⁸ for the magnetoresistance are also recovered: $\Delta R(H) \sim H^2$ at $\phi/\phi_0 \ll \eta^2$, and $\Delta R(H) \sim \ln(H/\eta^2)$ at $\phi/\phi_0 \gg \eta^2$.

Let us conclude with two comments relative to Fig. 1, where $\Delta R/R$ oscillation is shown for three geometries. Firstly, the absence of new interference effects (e.g., secondary maxima at rational ϕ/ϕ_0) in the ladder, as well as in the infinite network, comes from the expression of $\Delta R/R$ itself. It is actually a whole integral information over the spectrum of matrix M , and the period of MR oscillation is the same. Secondly, the amplitude of the oscillations is strongly influenced by the geometry of the considered network. This is clear at $\eta \ll 1$, where for noninteger values of ϕ/ϕ_0 , $\Delta R/R \sim \eta$ in both cases. However, for integer ϕ/ϕ_0 , $\Delta R/R$ is of order η^{-1} , η^0 , and $\eta \ln(1/\eta)$, respectively, in the single loop, ladder, and infinite network.

(iii) *Honeycomb lattice*.—The same calculations have been performed⁷ on honeycomb lattices where MR oscillations have been measured.² In order to make a close contact with experiments, the width of the wires must be taken into account. This results in a renormalization of the reduced factor $\eta = a/L$:

$$\eta^2(H) = \eta^2(H=0) + \frac{4}{3\pi} \pi^2 (\phi/\phi_0)^2 (w/a)^2,$$

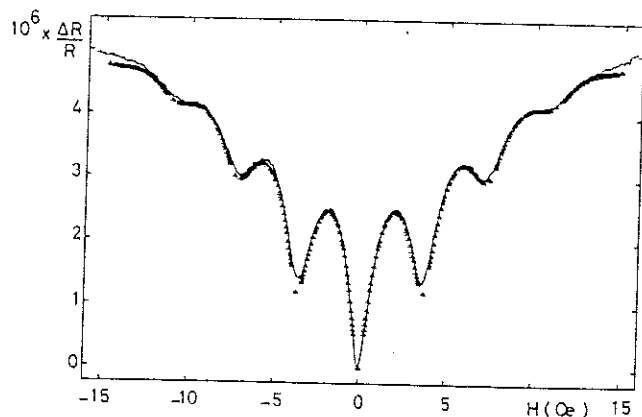


FIG. 2. Quantitative comparison between the theoretical results (triangles) and experimental data (solid line), for Cu at $T = 133$ mK, taken from Ref. 2. The hexagonal elementary cells (side $a = 1.5 \mu\text{m}$) are made of wires of width $0.42 \mu\text{m}$. In this fit, we have $L\phi = 5.36$ and $L_{\text{s.o.}} = 3.12 \mu\text{m}$, respectively ($L_{\text{s.o.}}$ is the spin-orbit length).

where ϕ denotes the magnetic flux through an elementary hexagonal cell (side a) made of wires of width w . This low-field approximation breaks down at $Haw \geq \phi_0$. The renormalization of η becomes important at large H and is actually responsible for the damping of oscillations. Our results are illustrated in Fig. 2 where spin-orbit scattering has been taken into account. Clearly, there is a fairly good agreement between theory and experimental.

The authors would like to thank Dr. J. C. Angles d'Auriac and B. Pannetier for friendly and useful discussions.

¹B. L. Altshuler, A. G. Aronov, and B. Z. Spivak, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 33, 101 (1981) [JETP Lett. 33, 94 (1981)].

²B. Pannetier, J. Chaussy, R. Rammal, and P. Gandit, Phys. Rev. Lett. 53, 718 (1984), and Phys. Rev. B 31, 3209 (1985).

³D. J. Biship, J. C. Licini, and G. J. Dolan, Appl. Phys. Lett. 46, 1000 (1985).

⁴For a recent review, see Y. V. Sharvin, Physica (Amsterdam) 126B&C, 288 (1984), and references cited therein.

⁵See D. E. Khmel'nitskii, Physica (Amsterdam) 126B&C, 235 (1984).

⁶B. Pannetier, J. Chaussy, R. Rammal, and J. Villegier, Phys. Rev. Lett. 53, 1845 (1984).

⁷B. Doucot and R. Rammal, to be published.

⁸B. L. Altshuler, A. G. Aronov, D. E. Khmel'nitskii, and A. I. Larkin, in *Quantum Theory of Solids*, edited by I. M. Lifshits (Izdatel'stvo Mir, Moscow, 1982), p. 130. See also G. Bergmann, Phys. Rep. 107, 11 (1984).

⁹The first quantum correction to the conductivity is given by a series of diagrams which closely resemble the Cooper-pair diagrams of superconductivity theory and are called Cooperons. See P. W. Anderson, Physica (Amsterdam) 117&118B, 30 (1983).

¹⁰For recent theoretical work on small systems, see M. Buttiker, Y. Imry, R. Landauer, and S. Pinhas, Phys. Rev. B 31, 6207 (1985), and references therein. Recent experimental work may be found in R. A. Webb, S. Washburn, C. P. Umbach, and R. B. Laibowitz, Phys. Rev. Lett. 54, 2696 (1985).

¹¹S. Alexander, Phys. Rev. B 27, 1541 (1983); R. Rammal, T. C. Lubensky, and G. Toulouse, Phys. Rev. B 27, 2820 (1983).

¹²D. R. Hofstadter, Phys. Rev. B 14, 2239 (1976), and references therein.

¹³G. H. Wannier, G. M. Obermair, and R. Ray, Phys. Status Solidi (b) 93, 337 (1979).

Classification

Physics Abstracts

71.50 — 71.555 — 72

Interference effects and magnetoresistance oscillations in normal-metal networks : 1-weak localization approach

B. Doucot and R. Rammal

Centre de Recherches sur les Très Basses Températures, CNRS, B.P. 166 X, 38042 Grenoble Cedex, France

(Reçu le 22 octobre 1985, accepté sous forme définitive le 20 février 1986)

Résumé. — Nous présentons un formalisme général pour calculer les coefficients de transport dans un réseau de métal normal en régime de localisation faible. Notre approche est illustrée d'abord sur des circuits simples : boucles, échelles, etc. Des expressions compactes de la magnétorésistance d'un réseau régulier infini (carré, nid d'abeilles, ...) sont obtenues. Le cas d'un réseau fractal infini (tamis de Sierpinski) est aussi étudié. On montre que dans le cas général, la correction de localisation faible à la magnétorésistance est donnée par une somme pondérée sur les valeurs propres du problème linéaire sous-jacent. En particulier, on montre l'absence d'une structure fine due aux effets d'interférence entre boucles adjacentes, et ceci par opposition avec les réseaux supraconducteurs. Nos résultats sont en parfait accord avec les mesures récentes de l'oscillation de la magnétorésistance d'un réseau de métal normal.

Abstract. — A general formalism is outlined for the calculation of the transport coefficients of a normal-metal network in the weak-localization regime. Simple circuits such as loops and ladders are used to illustrate our approach. Closed expressions for the magnetoresistance of infinite regular networks (square, honeycomb, ...) are derived. The case of an infinite fractal network (Sierpinski gasket) is also investigated. We show that the localization correction to the magnetoresistance $\Delta R/R$ is given in general by a weighted sum over the eigenvalues of the underlying linear problem. We find in particular that, in contrast with superconducting networks, no fine structure due to interference effects between adjacent loops is expected. The obtained results are shown to agree very well with recent experimental results on the magnetoresistance oscillations in normal-metal networks.

1. Introduction.

Since the prediction [1] of a Bohm-Aharonov-type effect [2] in disordered metals, with half-quantum flux $\phi_0 = hc/2e$, only three groups were able to observe clearly this effect in the following new multiconnected geometries : regular networks [3], ladders and necklaces [4] and more recently in single ring geometry [5]. The original experiment [6], performed on a hollow cylinder, has been repeated by several groups [7]. The magnetoresistance (MR) oscillations observed in these experiments are actually the manifestation of a specific and new interference phenomenon in disordered materials. Indeed, the flux periodicity $2\phi_0 = hc/e$ of Aharonov-Bohm resistance oscillations have been reported [8] on very pure single-crystal cylinders with long mean free paths. The observation of these interference effects with the period ϕ_0 (superconducting quantum flux) is therefore as fundamental as the Little-Parks experiment [9] on superconductors. The physical explanation for the factor of two in the

flux period has been given in reference [10] : the interference effect is due to two counterpropagating electron waves, each of which travels fully around the ring. However, this interference effect, obtained originally through an explicit diagram calculation, is really a very general phenomenon in systems with quenched disorder. Indeed, the basic origin must be traced to the enhancement of backscattering during the propagation of waves in randomly inhomogeneous media, where multiple scattering dominates. As long as $\lambda \ll l$ (λ is the wave length and l is the mean free path), the first interference corrections to the wave-field energy-transport equation are controlled by the so-called fan diagrams. This is actually the case of the weak localization regime. The presence of a magnetic field, which couples to the phase of a wave function, is therefore the most natural method to reveal this interference effect.

Given the fundamental aspect of the interference phenomena in disordered systems, it is natural to look at the corresponding corrections in new geome-

tries, like networks, where the recent experiments were performed. The magnitude of the MR oscillations has been calculated only for the hollow cylinder geometry [1] and, to our knowledge, there is no equivalent expression for the general situation. In addition to the relevance of such a calculation for the experimental investigations [3-5], there are at least two additional motivations for our study. First, how is the amplitude of the MR oscillations influenced by the experimental set up? Second, are there new features of the MR curve in the case of an extended network? Actually, these effects will be produced by interferences between adjacent loops in the network. For instance, in superconducting networks, such effects were predicted [11] and observed [12] on the fine structure of the upper critical line. Is there a counterpart in the case of normal networks? In this paper, the first in a series, we report on a general formalism for the calculation of transport coefficients for a normal-metal network of arbitrary shape. Our formulation, illustrated below explicitly on different examples, permits us to answer the above questions and provides explicit expressions for the MR oscillations for an arbitrary network. In the following, we will limit our exposition to localization corrections in the weak-localization regime. Note, however, that corrections due to electron-electron interaction can also be calculated in the framework of the present formulation. A more detailed exposition will be given elsewhere [13].

A short summary of this paper has been presented in reference [14]. Our aim is to present detailed calculations of the MR oscillations using the Cooperon approach [15]. In section 2, we present the basic equations for the localization correction to the conductivity in network geometry. The network equations thus obtained are illustrated in simple cases: loops with or without arms. In particular, the influence of arms and of contact geometry on the MR oscillations is discussed in this section. Similarly, the interference effects in the case of two adjacent loops are explicitly discussed. Section 3 is devoted to the calculation of $\Delta R/R$ in extended geometries: open or closed ladders, necklaces, ..., etc. Infinite regular networks and fractal networks are worked out in section 4, where simple expressions for $\Delta R/R$ are derived for each case. In order to make contact with experiment, the finite width effect of wires and the spin-orbit scattering contribution are investigated in section 5. An explicit comparison with the available experimental results is illustrated at the end of this section. Our results are discussed in section 6, where contact with other approaches is made. Some technical details are given in Appendices A, B and C.

2. Weak localization corrections to the conductivity in network geometry.

The localization correction to the conductivity in the weak-localization regime ($k_F l_e \gg 1$) is given in general

by the following expression [16]:

$$\Delta\sigma(\mathbf{r}) = -(2/\pi v) \sigma_0 C(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \quad (1)$$

where σ_0 is the bulk conductivity of the sample, given by Drude's formula, and v is the density of states at the Fermi level. The equation for the Cooperon [15], $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ in the presence of a magnetic field (vector potential $\mathbf{A}$) is

$$\left\{ \left[-i\nabla_{\mathbf{r}} - \frac{2\pi}{\phi_0} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right]^2 + L_\phi^{-2} \right\} C(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = (1/\hbar D) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2)$$

Here D denotes the electron diffusion coefficient and $L_\phi = (D\tau_\phi)^{1/2}$ is the length over which dephasing of the electron wave function results from inelastic processes. In equation (2), L_ϕ appears as the fundamental length scale in the problem, and has the same status as the coherence length scale ξ , in Ginzburg-Landau equations [11, 12] for superconductors. In general, equation (2) must be supplied by boundary conditions on the surface of a given sample. In what follows, we shall limit ourselves to the following free boundary condition:

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} - i \frac{2\pi}{\phi_0} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \right) C(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad (3)$$

where $\mathbf{n}$ is the normal unit vector to the sample surface.

It is important to notice that equations (1) and (2) actually correspond to a self-averaged theory, where all traces of randomness are summarized in L_ϕ (see section 6 for further discussions). In principle, equations (2), (3) can be used to calculate the local correction $\Delta\sigma(\mathbf{r})$ in an arbitrary geometry. This program has been carried out for bulk systems [16] (1, 2 and 3 Dimensions), as well as for semi-infinite geometries [17]. In the general case, we need the expression of the off-diagonal Green function $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ giving the response at point $\mathbf{r}$ to a source term located at point $\mathbf{r}'$. However, in the case of multiconnected geometries, equations (2), (3) can lead to heavy calculations, already in the case of simple circuits such as the hollow cylinder or single rings [1]. In order to go beyond these simple cases, a simplified formalism is of order. This is the object of this section. As will be shown below, the new formulation allows us to follow the influence of multiconnectedness on $\Delta\sigma(\mathbf{r})$ and particularly in the presence of an applied magnetic field.

2.1 WIRE APPROXIMATION AND NETWORK EQUATIONS.

— In the following, we will consider networks made of metallic wires, of width and thickness smaller than L_ϕ . In this limit, the transverse modes of the Cooperon can be neglected, and one recovers a 1D problem on each wire. Note that the weak-localization approach used here makes sense only if the transverse dimensions of wires are greater than the elastic mean free

path l_c . These two conditions are actually fulfilled in the experiments done on networks [3-5]. The finite width of wires can, however, be taken into account, and this results in a renormalization of L_φ which becomes a function of the magnetic field (see Sect. 5). Note further that this formalism may break down in very small systems [18] where there is a lack of self-averaging of the theory.

Assume, in equation (1), that the position of the source $\mathbf{r}'$ is given and let us denote by $\tilde{C}(\mathbf{r}) \equiv C(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ the corresponding solution of equations (1), (2). Using the notations of figure 1a, $\tilde{C}(\mathbf{r})$ can be written as

$$\tilde{C}(\mathbf{r}) = g(s) \exp\left(i \frac{2\pi}{\phi_0} \int_0^M \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}\right) \quad (4)$$

where the circulation of the vector potential $\mathbf{A}$ is taken along the strand, and $g(s)$ is an unknown function. In the framework of the wire approximation

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \cdot \left(-i\nabla_{\mathbf{r}} - \frac{2\pi}{\phi_0} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) \tilde{C}(\mathbf{r}) = \\ = -i \frac{dg}{ds} \exp\left(i \frac{2\pi}{\phi_0} \int_0^M \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

and then equation (1) reduces to

$$-\frac{d^2g}{ds^2} + L_\varphi^{-2} g = 0. \quad (6)$$

This gives, for points M between two given points α and β , the following solution

$$\begin{aligned} g(s) = g_\alpha \cosh(s/L_\varphi) + (g_\beta - g_\alpha \cosh(l_{\alpha\beta}/L_\varphi)) \times \\ \times \sinh(s/L_\varphi) / \sinh(l_{\alpha\beta}/L_\varphi). \end{aligned} \quad (7)$$

Here $l_{\alpha\beta}$ denotes the length of the strand between α and β .

The complete solution of equations (1), (2) in a network geometry can then be deduced from the expressions of g_α 's at nodes. In this respect, equation (7) must be supplemented by a Kirchhoff-type equation at nodes. Such an equation is implied by the continuity conditions of C 's at nodes (i.e. current conservation law) and can be written as

$$\sum_\beta \left(-i \frac{\partial}{\partial s} \right)_\alpha g = (i/\hbar DS) \delta_{\mathbf{r}, \alpha}. \quad (8)$$

Here, the sum is taken over nodes β connected to a given node α and the derivative is taken along the corresponding strand (S denotes the cross-section of wires). Note that the boundary condition of equation (3) is nothing else than equation (8), taken at the free end of a strand. In this respect, equation (8) holds in general, without reference to equation (3). Note also that equation (3) can be replaced by other boundary conditions, such as perfect contact ($C(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$) points.

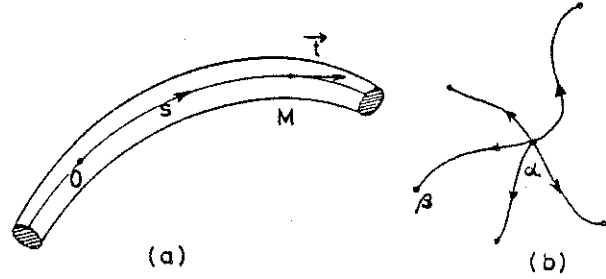


Fig. 1. — (a) A single strand of cross section S , in a normal network. Here s denotes the curvilinear coordinate of point M on the wire : $OM = \mathbf{r}$ and $OM = s$. The unit vector $\mathbf{t}$ refers to the tangential vector at point M along the wire. (b) Junction at node α of different strands ($\alpha\beta$) in a part of the network.

It appears from equation (8), that the source point $\mathbf{r}'$ can be considered as an additional node in the network and equations (7), (8) lead to the following network equations

$$\begin{aligned} \tilde{C}_\alpha \sum_\beta \coth(l_{\alpha\beta}/L_\varphi) - \sum_\beta \tilde{C}_\beta \times \\ \times e^{-i\gamma_{\alpha\beta}/\sinh(l_{\alpha\beta}/L_\varphi)} = (L_\varphi/\hbar DS) \delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \end{aligned} \quad (9)$$

In equation (9), $\gamma_{\alpha\beta} = \frac{2\pi}{\phi_0} \int_\alpha^\beta \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$, refers to the circulation of the vector potential $\mathbf{A}$ along the strand $\alpha\beta$, of length $l_{\alpha\beta}$, between two nodes α and β (Fig. 1b). Furthermore, the source term at $\mathbf{r}'$, where $\Delta\sigma$ is calculated, acts as an additional node. This remark, as well as other observations, shows the basic differences between equation (9) and the similar one derived for superconducting networks [11].

In principle, equation (9) provides the basic equation for the calculation of $\Delta\sigma(\mathbf{r}')$ at any point $\mathbf{r}'$ and for an arbitrary geometry. In what follows, we shall illustrate these calculations for simple geometries.

2.2 EXAMPLES.

2.2.1 Single wire (Fig. 2). — Consider a single wire, of length L , $0 \leq x \leq L$. In this case, equation (9) written for the two nodes $x = 0, L$ and for a current node located in between, leads to a system of three linear equations :

$$\begin{aligned} C(x) [\coth(x/L_\varphi) + \coth((L-x)/L_\varphi)] - \\ - C(0)/\sinh(x/L_\varphi) \\ - C(L)/\sinh\left(\frac{L-x}{L_\varphi}\right) = (L_\varphi/\hbar DS) \end{aligned} \quad (10a)$$

$$C(x)/\sinh(x/L_\varphi) - C(0) \cdot \coth(x/L_\varphi) = 0 \quad (10b)$$

$$C(x)/\sinh\left(\frac{L-x}{L_\varphi}\right) - C(L) \cdot \coth\frac{L-x}{L_\varphi} = 0. \quad (10c)$$

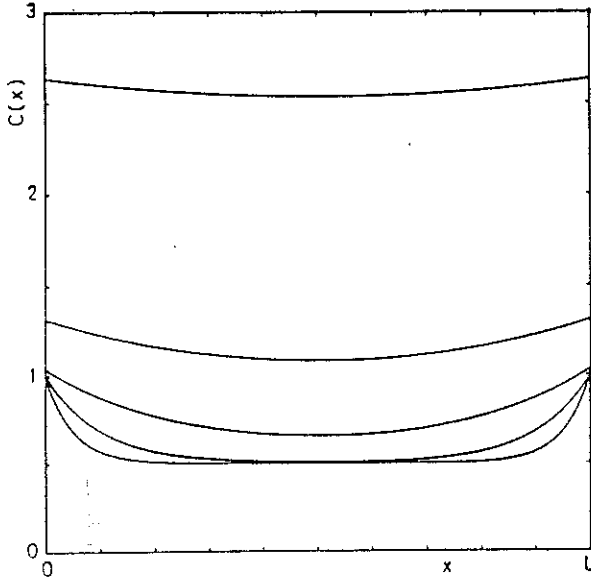


Fig. 2. — Spatial variation of the local localization correction $C(x, x) \sim \Delta\sigma(x)$ to the conductivity of a single wire of length L , equation (12), for $L/L_\phi = 0.4, 1, 2, 5$ and 10 respectively. $C(x)$ increases as L_ϕ/L increases, for fixed L .

One deduce from equations (10) the following solution

$$C(x) = \left(\frac{L_\phi}{\hbar DS} \right) \cosh \frac{x}{L_\phi} \cosh \frac{L-x}{L_\phi} / \sinh(L/L_\phi) \quad (11)$$

shown in figure 2. $C(x)$ assumes its minimal value at the mid-point $x = L/2$, and takes its maximal value at the ends of the wire ($x = 0, L$). Such a behaviour is actually a very general one: the backscattering corrections to σ are, in general, depressed at points of high coordination number (e.g. $x = L/2$). This remark becomes clearer on the next examples.

Note that the expression (Eq. (11)) found for $C(x)$ is modified when other boundary conditions are used. For instance, if the contact points at the ends are perfect: $C(0) = C(L) = 0$, equations (10) yield:

$$C(x) = \left(\frac{L_\phi}{\hbar DS} \right) \sinh \left(\frac{x}{L_\phi} \right) \sinh \left(\frac{L-x}{L_\phi} \right) / \sinh(L/L_\phi) \quad (12)$$

instead of equation (11). In the following, we shall limit our investigation to free boundary conditions (Eq. (3)). In particular, from equation (11), one deduces the integrated correction ΔR to the total resistance of the wire

$$\Delta R = \frac{1}{S} \int_0^L dx \Delta(1/\sigma(x)). \quad (13)$$

Here $\Delta\sigma(x)$ is the local correction given by equation (1). In general $\Delta\sigma(x) \ll \sigma_0$ is a small correction, and

equations (11), (13) give

$$\Delta R/R = \frac{\kappa}{2} [\coth(L/L_\phi) + L_\phi/L] \quad (14)$$

where we have introduced the dimensionless factor κ :

$$\kappa \equiv \frac{2e^2 L_\phi}{\pi \hbar \sigma_0 S} \quad (15)$$

($R = L/\sigma_0 S$).

Equation (14) exhibits the two interesting limits of the wire. The first corresponds to $L/L_\phi \ll 1$, $\Delta R/R \sim L_\phi/L$ where ΔR is independent of the wire length L : zero effective dimensionality. The second one is the classical Ohm's law: $\Delta R/R \sim \kappa/2$, recovered at $L/L_\phi \gg 1$.

Note that for $L \ll L_\phi$, our result differs from the known one [19]: $\Delta R/R = \frac{\kappa}{2} \left(\coth \left(\frac{L}{L_\phi} \right) - \frac{L_\phi}{L} \right)$. The net difference comes from the boundary conditions. Indeed, using equation (12), instead of equation (11), one gets the usual result.

2.2.2 Single wire with dangling side branches (Fig. 3a). — The local character of $\Delta\sigma(x)$ is clearly visible in the case of a single wire, when N dangling side branches are attached to it. The compact expression of $\Delta\sigma(x)$ for this geometry is given in Appendix A. In figure 3b, the spatial variations of $C(x, x)$ along the strand are shown, for typical values of a/L_ϕ and b/L_ϕ , and for $N = 12$. For non vanishing values of b , the localization correction is modulated with a net depression of $C(x, x)$ at junctions. Two general features are to be noticed, regarding the shape and the amplitude of the modulation. Side branches are responsible for the strong modifications of $C(x, x)$ in the limit $a/L_\phi \gg 1$, whereas the zero dimension behaviour $a/L_\phi \ll 1$ is slightly affected. In both cases, the net effect of arms saturates at $b \gg L_\phi$. Therefore, starting from the single wire behaviour at $b = 0$ (Fig. 2), small and smooth modulations appear near the middle of the wire. Increasing b gives rise to sharper and sharper oscillations of $C(x, x)$ over the whole range of the wire. The magnitude of oscillations increase monotonically with the ratio b/L_ϕ .

2.2.3 Single loop in a normal magnetic field (Fig. 4). — In this geometry, the source position $\mathbf{r}'$ is arbitrary, and equation (9) reduces to

$$\left[-2 \coth(L/L_\phi) + 2 \cos \left(2\pi \frac{\phi}{\phi_0} \right) / \sinh(L/L_\phi) \right] \times C(\mathbf{r}', \mathbf{r}') = -L_\phi / \hbar DS. \quad (16)$$

Here L denotes the length of the loop and ϕ is the magnetic flux through its surface. Equation (16) leads

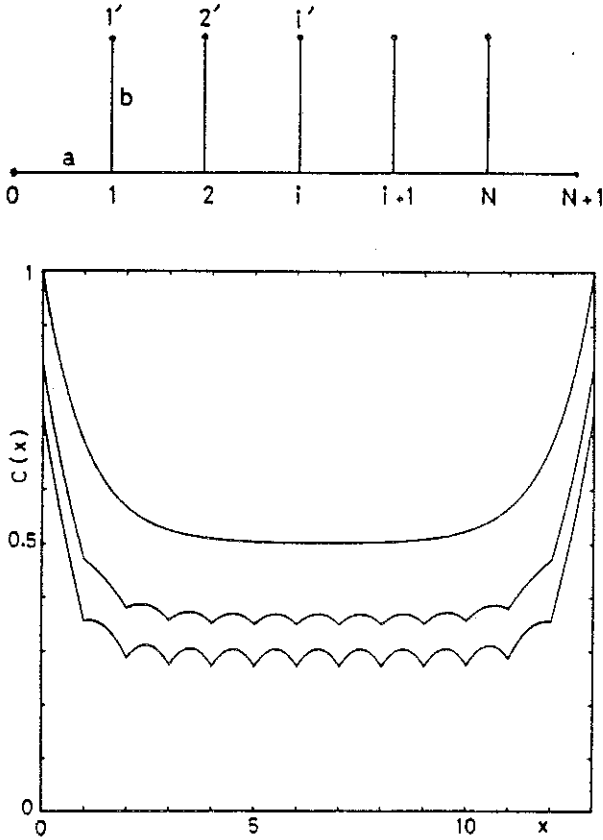


Fig. 3. — (a) A single wire geometry with dandling side branches. (b) The dimensionless local correction to the conductivity as a function of x along the wire. The modulation of $C(x)$ along the wire corresponds to the attenuation of backscattering corrections at junctions of large coordination number ($z = 3$). Here $N = 12$, $a/L_\phi = 0.5$ and $b/L_\phi = 0.05$ and 10 respectively. $C(x)$ decreases as b increases.

to

$$C(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \frac{L_\phi}{2\hbar DS} \sinh(L/L_\phi) / [\cosh(L/L_\phi) - \cos(2\pi\phi/\phi_0)] \quad (17)$$

reproducing the result of reference [1] in a somewhat elementary way. From equation (17), it is easy to deduce the following expression for the resistance correction $\Delta R/R$, between two opposite points on the loop :

$$\Delta R/R = \frac{\kappa}{2} \sinh(L/L_\phi) / [\cosh(L/L_\phi) - \cos(2\pi\phi/\phi_0)]. \quad (18)$$

As expected, $\Delta R/R$ exhibits a periodic behaviour in the reduced flux ϕ/ϕ_0 . The amplitude of oscillation is $\sim 1/\sinh(L/L_\phi)$ and then exponentially damped at $L \gg L_\phi$. In the limit $L/L_\phi \equiv \eta \ll 1$, one obtains : $\Delta R/R = \kappa/\eta$ at zero field and the width of the maxima

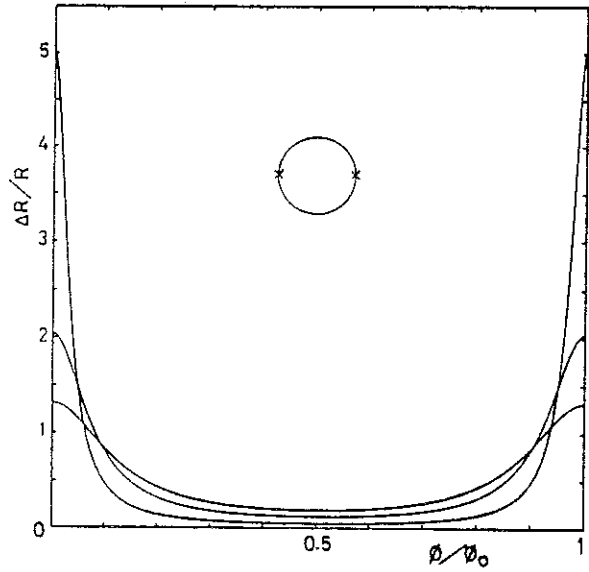


Fig. 4. — Variation of the relative correction $\Delta R/R$ measured in unit of κ (Eq. (15)) between two opposite points A and B on a single ring of circumference L , as a function of the reduced flux $f = \phi/\phi_0$ ($\eta \equiv L/L_\phi = 0.2, 0.5$ and 0.8 respectively). The maximum of $\Delta R/R$ at integer values of f becomes sharper for smaller η .

at integer ϕ/ϕ_0 is of order of η (sharp maxima). On the other hand, for $\phi/\phi_0 = 1/2$ one obtains $\Delta R/R \sim \eta$, which appears to be quite general : all the networks we studied actually show this behaviour. Note however that at small ϕ/ϕ_0 , the single loop exhibits the sharpest behaviour among all networks. Indeed, in more complex geometries (loop with arms, strips, etc.) $\Delta R/R$ at zero field increases more slowly than $1/\eta$ as η goes to zero and the width of the maxima is actually greater than η . The origin of this behaviour must be found in the exponential damping of the Cooperon $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, equation (7), over the length scale L_ϕ . In this respect, the single loop geometry is a useful reference for further comparisons.

2.3 EFFECT OF ARMS ON THE RESISTANCE OSCILLATIONS.

— Usually the resistance of a ring is measured through two arms attached to it [5]. In the following we shall investigate the influence of such arms on the localization correction to the measured resistance.

2.3.1 Single ring with one arm (Fig. 5a). — Using equation (9), it is not difficult to obtain the following expressions for the Cooperon $C(x)$ according to the position of the source node. For M located on the arm, one finds

$$C(x) = \frac{L_\phi}{\hbar DS} \left[\sinh \frac{L}{L_\phi} \cosh \frac{x}{L_\phi} \cosh \frac{b-x}{L_\phi} + 2 \left(\cosh \frac{L}{L_\phi} - \cos 2\pi \frac{\phi}{\phi_0} \right) \cosh \frac{x}{L_\phi} \sinh \frac{b-x}{L_\phi} \right] / \Delta \quad (19)$$

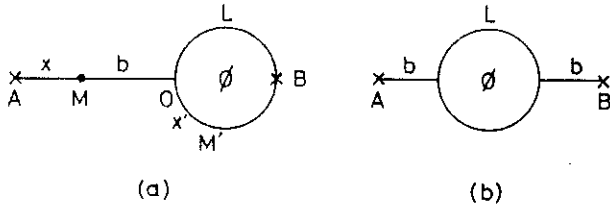


Fig. 5. — (a) A single ring geometry with one arm. ΔR is measured between A and B. (b) A single ring geometry with two arms.

where

$$\Delta = \sinh \frac{b}{L_\phi} \sinh \frac{L}{L_\phi} + 2 \cosh \frac{b}{L_\phi} \left(\cosh \frac{L}{L_\phi} - \cos 2\pi \frac{\phi}{\phi_0} \right).$$

Similarly, for M' on the loop, one finds

$$C(x') = \frac{L_\phi}{\hbar D S} \left[\sinh \frac{b}{L_\phi} \sinh \frac{x'}{L_\phi} \sinh \frac{L - x'}{L_\phi} + \cosh \frac{b}{L_\phi} \sinh \frac{L}{L_\phi} \right] / \Delta. \quad (20)$$

Note that $C(x)$, as given by equation (19), assumes its maximal value at $x = 0$, i.e. at the free end of the arm (point A in Fig. 5a). Similarly, $C(x' = 0)$ is smaller than $C(x' = L/2)$ corresponding to point B. This result agrees with our previous remarks on the depression of C at junction nodes of large coordination numbers. Using equations (19)-(20), it is not difficult to deduce the integrated correction to the resistance R_{AB} measured between points A and B. One gets

$$\Delta R_{AB}/R_{AB} = \kappa \frac{1}{2b + L} \left\{ (b \cosh b + \sinh b) \sinh L + 2b \sinh b \left(\cosh L - \cos 2\pi \frac{\phi}{\phi_0} \right) + L \cosh b \sinh L + \frac{1}{2} \sinh b (L \cosh L - \sinh L) \right\} / \Delta. \quad (21)$$

For convenience, we have replaced b/L_ϕ and L/L_ϕ by b and L respectively (b = arm length, L = loop length). The previously obtained results (Eqs. (14), (18)) are recovered for $L = 0$ and $b = 0$ respectively. Furthermore, $\Delta R_{AB}/R_{AB}$ exhibits the expected oscillations as for the single loop. However the magnitude of the oscillations is affected by the presence of the arm. Indeed, for $L \sim b \leq L_\phi$, the correction along the arm (Eq. (19)) and that along the loop (Eq. (20)) become comparable. More precisely, if η denotes the smallest ratio b/L_ϕ or L/L_ϕ , then $C(x) \sim 1/\eta$ at $\phi/\phi_0 \sim 0$ and $C(x) \sim \eta$ elsewhere, and this either on the arm or on the loop. In this limit, the maximal correction ΔR_{AB} takes place at $\phi \ll \phi_0$, with a width of order η .

The presence of the arm becomes more and more interesting in the limit $L \ll L_\phi < b$. In such a case the oscillations are still present because of $L \ll L_\phi$. However, from equation (20), $C(x)$ becomes independent of η at small $\eta = L/L_\phi$ for $\phi/\phi_0 \sim 0$ but $C(x) \sim \eta$ for $\phi/\phi_0 \geq \eta^{1/2}$. This new behaviour contrasts sharply with the η^{-1} regime found in the absence of the arm. This leads to a damping of the resistance oscillation, when compared with the $b = 0$ case. Furthermore, the sharp maxima at integer values of ϕ/ϕ_0 are broadened by the presence of the arm.

2.3.2 Single ring with two arms (Fig. 5b). — The same calculations can be carried out in the case of two arms attached to the loop, as shown in figure 5b. The expression of $\Delta R_{AB}/R_{AB}$ is given by

$$\Delta R_{AB}/R_{AB} = \frac{\kappa}{4b + \frac{L}{2}} \left\{ (b + \tanh b) \left(2 \cosh \frac{L}{2} + \sinh \frac{L}{2} \tanh b \right) \sinh \frac{L}{2} + b \tanh b \left[\sinh L \tanh b + 2 \left(\cosh L - \cos 2\pi \frac{\phi}{\phi_0} \right) \right] + \frac{1}{4} \left[L \sinh L + (L \cosh L - \sinh L) \tanh b + \left(\frac{L}{2} \cosh \frac{L}{2} - \sinh \frac{L}{2} \right) \sinh \frac{L}{2} \tanh^2 b \right] \right\} / \Delta. \quad (22)$$

Here, Δ is given by

$$\Delta = \cosh L - \cos 2\pi \frac{\phi}{\phi_0} + \sinh L \tanh b + \frac{1}{2} \sinh^2 \frac{L}{2} \tanh^2 b. \quad (23)$$

The variations of $\Delta R/R$ as functions of the reduced flux ϕ/ϕ_0 for different values of b/L_ϕ and L/L_ϕ are shown in figure 6. The qualitative results found above for one arm, hold also in the present case.

2.3.3 Two-loop geometries. — Given the oscillations of the resistance with magnetic field, it is natural to ask for interference effects for two adjacent loops enclosing different magnetic fluxes. For this, it is useful to consider the simple geometries shown in figure 7.

2.3.3.1 Two articulated loops (Fig. 7a). — Using equation (9), it is not difficult to calculate the Cooperon at point x , as shown in figure 7a :

$$C(x) = \frac{L_\phi}{2\hbar D S} \left[\sinh L_1 \sinh L_2 + 2 \left(\cosh L_2 - \cos 2\pi \frac{\phi_2}{\phi_0} \right) \sinh x \sinh (L_1 - x) \right] / \Delta. \quad (24)$$

Here, the denominator Δ is given by

$$\Delta = \sinh L_1 (\cosh L_2 - \cos 2\pi \phi_2/\phi_0) + \sinh L_2 (\cosh L_1 - \cos 2\pi \phi_1/\phi_0). \quad (25)$$

In equations (24), (25), L_i and ϕ_i ($i = 1, 2$) denote respectively the length (divided by L_ϕ) and the enclosed magnetic flux associated to the loop i . The corresponding integrated correction to the resistance between A and B, can be written as

$$\Delta R_{AB}/R_{AB} = \frac{\kappa}{2} \frac{1}{L_1 + L_2} \left[(L_1 + L_2) \sinh L_1 \sinh L_2 + (L_1 \cosh L_1 - \sinh L_1) \left(\cosh L_2 - \cos 2\pi \frac{\phi_2}{\phi_0} \right) + \right. \\ \left. + (L_2 \cosh L_2 - \sinh L_2) \left(\cosh L_1 - \cos 2\pi \frac{\phi_1}{\phi_0} \right) \right] / \Delta. \quad (26)$$

As it should be, the single loop result (Eq. (18)) is recovered for $L_i = 0$ and $\phi_i = 0$ ($i = 1$ or 2). In general, equation (26) shows the presence of two periodic contributions. For rational ϕ_i/ϕ_0 , a periodic behaviour is obtained (Fig. 8a). The resulting period is fixed by the smallest flux. On the contrary, for irrational ϕ_i/ϕ_0 no strictly periodic behaviour is observed, but some sharp maxima can appear in the limit where both ϕ_1/ϕ_0 and ϕ_2/ϕ_0 are very close to integer values. This resonance-like behaviour is illustrated in figure 8b.

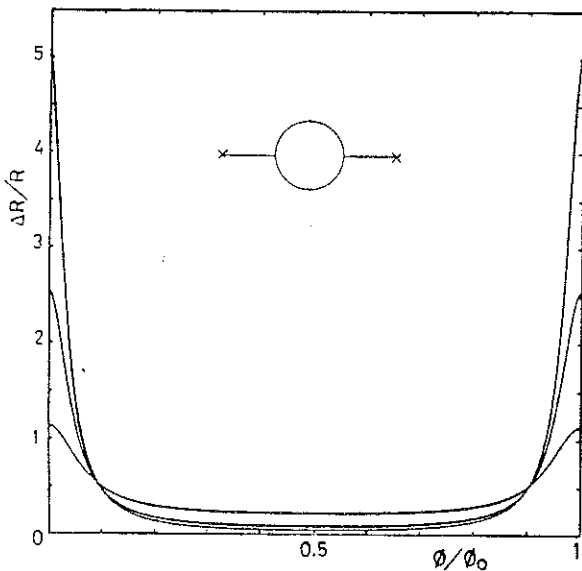


Fig. 6. — $\Delta R_{AB}/R_{AB}$ in unit of κ as a function of the reduced flux ϕ/ϕ_0 . The length of the loop is kept fixed at $L/L_\phi = 0.2$. The length of the arms is gradually increased : $b/L_\phi = 0; 0.5; 2.0$ and this leads to a net damping of the resistance oscillations.

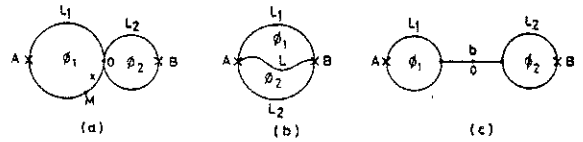


Fig. 7. — Different ways of connecting two loops. (a) two articulated loops; (b) two adjacent loops; (c) two rings with one arm. Here the resistance is measured between points A and B and ϕ_i and L_i correspond to loop i ($i = 1, 2$).

It is important to notice that, for two identical loops ($\phi_1 = \phi_2 \equiv \phi$), no secondary maxima at $\phi/\phi_0 = 1/2$ are obtained. The corresponding behaviour is depicted in figure 9. At first sight this result may appear to be paradoxical. Indeed, on the basis of a naive intuitive argument, new features of $\Delta R/R$ can be expected to occur because of interference effects between adjacent loops. The absence of a new period in the present case must be attributed to the « weak coupling » between the two loops. As will be shown below, a new structure of $\Delta R/R$ may be found in the « strong-coupling » limit.

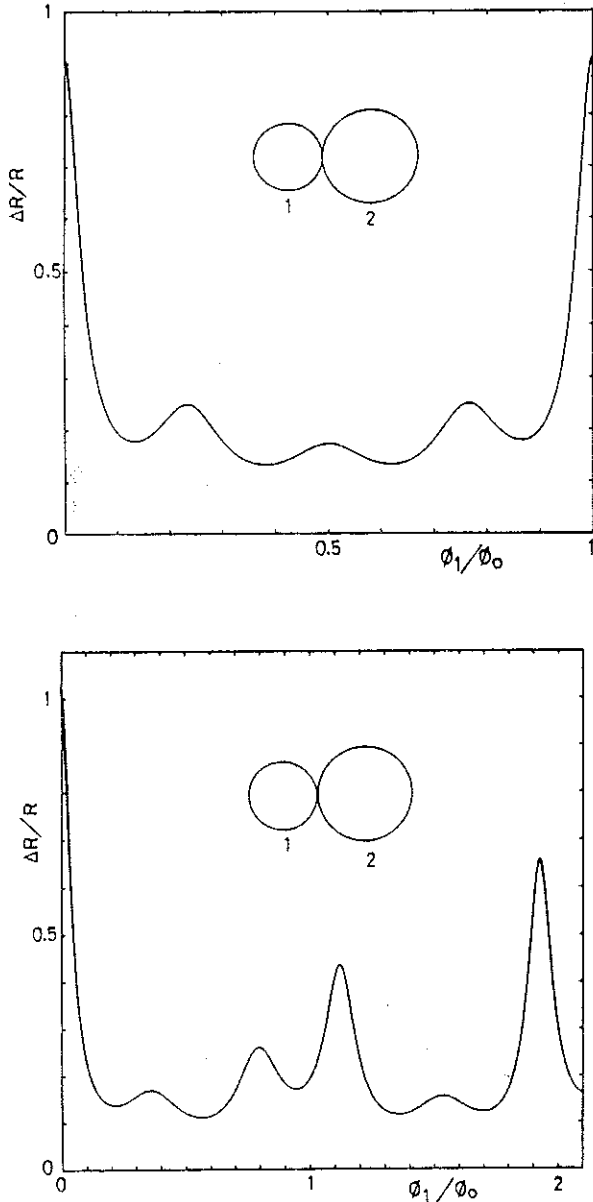


Fig. 8. — (a) $\Delta R_{AB}/R_{AB}$ in units of κ for the system shown on figure 7a, as a function of reduced flux through the smallest loop, which control the period of oscillations. Here $L_1/L_\varphi = 0.4$ and $L_2/L_\varphi = 0.8$. (b) The same plot as in figure 8a but with $L_1/L_\varphi = 0.4$ and $L_2/L_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ the golden mean. The non periodic behaviour is due to the non commensurability of the length ratio L_1/L_2 .

Note that in the zero dimension limit $L \ll L_\varphi$, equation (26) reduces to the expression corresponding to two identical loops :

$$\Delta R_{AB}/R_{AB} = \frac{\kappa}{4} \sinh(L/L_\varphi) / [\cosh(L/L_\varphi) - \cos(2\pi\phi/\phi_0)]$$

which is exactly equation (18) divided by a factor of 2.

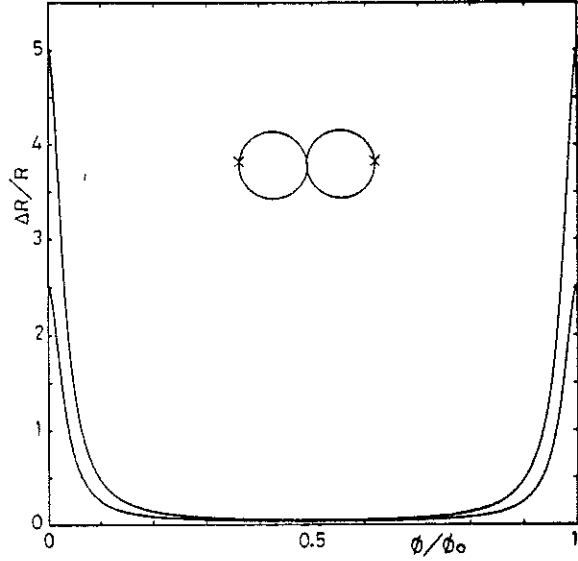


Fig. 9. — $\Delta R/R$ for two identical articulated loops (the lower curve). The upper curve is the result for a single loop of the same size. Note the decrease in the magnitude of the correction when two loops are tied together, as well as the absence of secondary maxima for $\phi/\phi_0 = 1/2$. Here ϕ denotes the magnetic flux through each of the two loops.

This is actually a general property of zero dimensional systems (ΔR is independent of the system size), given the used boundary conditions.

2.3.3.2 Two adjacent loops (Fig. 7b). — A new feature appears in this case, particularly for $L \gg L_1, L_2$ which can be considered as a strong coupling limit between the two adjacent loops. As shown in figure 10, new maxima appear at $\phi/\phi_0 = 1/2$ in the case of two identical loops. This new behaviour, which is absent in the limit $L \sim L_1 \sim L_2$, must be traced to the reduction of the network into a single loop. In fact, because of the strong coupling, the backscattering is inhibited in the long common strand and this holds for arbitrary values of L_φ .

2.3.3.3 Two rings with arms (Fig. 7c). — In addition to the main features found above, an interesting situation appears for two identical loops ($L_1 = L_2 \equiv L$, $\phi_1 = \phi_2 \equiv \phi$) in the zero dimensionality limit $L \ll L_\varphi$. In this case, the local correction is minimal at the middle of the arm (point 0), and this for small values of the reduced flux ϕ/ϕ_0 . This is reminiscent to the case of a single wire (Fig. 2), and the presence of loops does not noticeably alter the spatial variation of the local correction on the arm. However, at $\phi/\phi_0 \sim 1/2$, a kind of antibackscattering takes place in the loops, leading to a maximal correction at point 0. This inversion phenomenon can be viewed, in comparison with the single wire case, as an effective modification of the boundary conditions : for small ϕ/ϕ_0 , the two loops act as free ends, whereas at half flux, they behave as perfect point contacts.

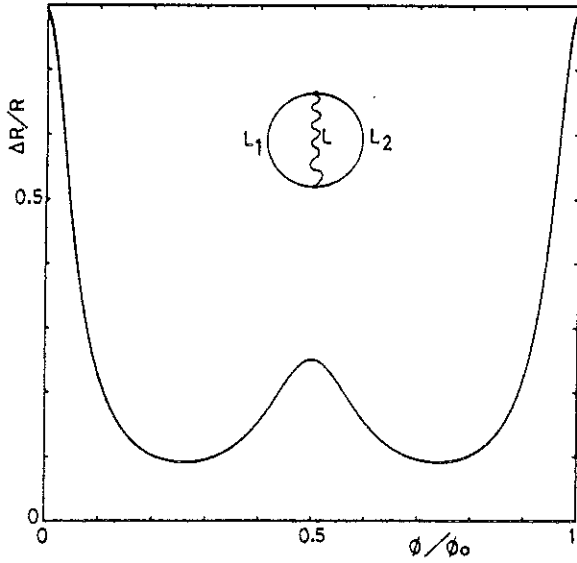


Fig. 10. — $\Delta R_{AB}/R_{AB}$ for two adjacent loops in the « strong coupling limit » $L_1/L_\phi = L_2/L_\phi = 0.2$ and $L/L_\phi = 1.0$. ϕ denotes the magnetic flux across each of the two loops. In this case, a secondary maximum at $\phi/\phi_0 = 1/2$ occurs (compare with Fig. 9).

We have studied other simple geometries, following the same lines of ideas. Some relevant results are summarized in Appendix B. Let us close this section with a few general remarks, which are specific to the backscattering phenomenon in network geometries.

First, the magnitude of the local correction to conductivity, at a given node of the network, decreases when its coordination number increases. This is a very general feature due to the diffusive character of the Cooperon.

Second, the resistance oscillations under an applied magnetic field are damped in the presence of arms. This is also a general feature arising from the inertia of the arms which act as mass terms in the network equations.

Finally, for identical adjacent loops, no new periodic oscillations, coming from interference effects, are expected to occur on $\Delta R/R$. The precise origin of this somewhat puzzling result will become transparent in the next section.

3. General formulation of the magnetoresistance calculation

3.1 BASIC EQUATIONS. — For a given network, with N nodes, we need for the calculation of the Cooperon $C(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ the solution of the $(N + 1) \times (N + 1)$ linear system of equation (9). Because of the linearity of equation (9), a somewhat more compact formulation of this problem can be obtained. Let us consider a point $\mathbf{r}'$, along the strand between two nodes α and β (Fig. 11). According to equation (9), one deduces :

$$C(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \frac{L_\phi}{\hbar DS} \left[\sinh \frac{x}{L_\phi} \sinh \frac{l_{\alpha\beta} - x}{L_\phi} \Big/ \sinh \frac{l_{\alpha\beta}}{L_\phi} \right] + C(\alpha, \mathbf{r}') e^{-i\gamma_{r'\alpha}} \sinh \frac{l_{\alpha\beta} - x}{L_\phi} \Big/ \sinh \frac{l_{\alpha\beta}}{L_\phi} + C(\beta, \mathbf{r}') e^{-i\gamma_{r'\beta}} \sinh \frac{x}{L_\phi} \Big/ \sinh \frac{l_{\alpha\beta}}{L_\phi} \quad (27)$$

When (27) is used in (9), written for nodes α and β , one obtains :

$$C(\alpha, \mathbf{r}') \left(\sum_\delta \coth l_{\alpha\delta}/L_\phi \right) - \sum_\delta \left(e^{-i\gamma_{\alpha\delta}} / \sinh \frac{l_{\alpha\delta}}{L_\phi} \right) \cdot C(\delta, \mathbf{r}') = \frac{L_\phi}{\hbar DS} e^{-i\gamma_{\alpha r'}} \frac{\sinh \frac{l_{\alpha\beta} - x}{L_\phi}}{\sinh \frac{l_{\alpha\beta}}{L_\phi}} \quad (28)$$

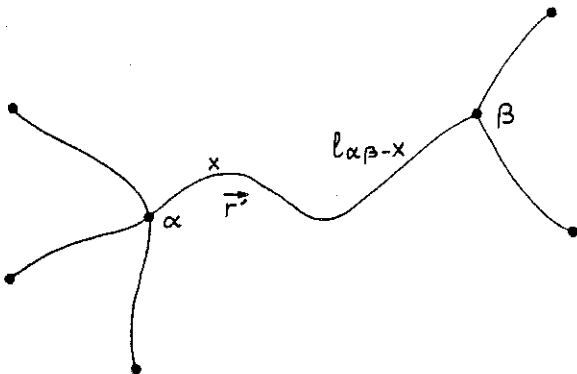


Fig. 11. — A strand ($\alpha\beta$) on a typical network. $\mathbf{r}'$ denotes the position of the point where $\Delta\sigma$ is calculated and x is its curvilinear coordinate from node α along ($\alpha\beta$).

as well as a similar equation, obtained by the substitutions : $\alpha \leftrightarrow \beta$, $l_{\alpha\beta} - x \leftrightarrow x$ in equation (28). It is natural to introduce the following Hermitian $N \times N$ matrix M , which is independent of the considered point $\mathbf{r}'$:

$$M_{\alpha\alpha} = \sum_{\beta} \coth(l_{\alpha\beta}/L_{\varphi}) - 2 \sum_{\text{loops}} \cos(2\pi\phi_s/\phi_0)/\sinh(l_s/L_{\varphi}) \quad (29a)$$

$$M_{\alpha\beta} = -\exp(-i\gamma_{\alpha\beta})/\sinh(l_{\alpha\beta}/L_{\varphi}), \quad \alpha \neq \beta. \quad (29b)$$

In equation (29a), the first sum is taken over nodes β connected to the node α by strands of lengths $l_{\alpha\beta}$. The second sum is taken over the elementary loops, of length l_s , containing the node α and enclosing a magnetic flux ϕ_s .

According to (28), the expressions of $C(\beta, \mathbf{r}')$ and $C(\alpha, \mathbf{r}')$ can be written down using the matrix elements $T_{\alpha\beta}$ of $T = M^{-1}$, the inverse of the matrix M . This leads to the following expression for $C(\mathbf{r}', \mathbf{r}')$:

$$C(\mathbf{r}', \mathbf{r}') = \frac{L_{\varphi}}{\hbar D S} \left\{ \frac{\sinh x/L_{\varphi} \cdot \sinh(l_{\alpha\beta} - x)/L_{\varphi}}{\sinh(l_{\alpha\beta}/L_{\varphi})} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sinh^2 \frac{l_{\alpha\beta}}{L_{\varphi}}} \cdot \left[T_{\alpha\alpha} \sinh^2 \frac{l_{\alpha\beta} - x}{L_{\varphi}} + T_{\beta\beta} \sinh^2 \frac{x}{L_{\varphi}} + 2 \operatorname{Re}(T_{\beta\alpha} e^{-i\gamma_{\alpha\beta}}) \sinh \frac{x}{L_{\varphi}} \sinh \frac{l_{\alpha\beta} - x}{L_{\varphi}} \right] \right\} \quad (30)$$

and then to the integrated correction along the strand ($\alpha\beta$)

$$\Delta R_{\alpha\beta}/R_{\alpha\beta} = \frac{\kappa}{2} \frac{L_{\varphi}}{l_{\alpha\beta}} \left[\left(\frac{l_{\alpha\beta}}{L_{\varphi}} \cosh \frac{l_{\alpha\beta}}{L_{\varphi}} - \sinh \frac{l_{\alpha\beta}}{L_{\varphi}} \right) \left(1 + 2 \operatorname{Re}(T_{\beta\alpha} e^{-i\gamma_{\alpha\beta}})/\sinh \frac{l_{\alpha\beta}}{L_{\varphi}} \right) / \sinh \frac{l_{\alpha\beta}}{L_{\varphi}} + \right. \\ \left. + \left(\sinh \frac{l_{\alpha\beta}}{L_{\varphi}} \cosh \frac{l_{\alpha\beta}}{L_{\varphi}} - \frac{l_{\alpha\beta}}{L_{\varphi}} \right) (T_{\alpha\alpha} + T_{\beta\beta}) / \sinh^2 \frac{l_{\alpha\beta}}{L_{\varphi}} \right]. \quad (31)$$

Depending on the specific configuration, used in the measurement of the resistance, the different $\Delta R_{\alpha\beta}$ will be weighted differently, in the calculation of the overall resistance correction ΔR . In what follows, we will choose a uniform weight, which corresponds to the integration of $C(\mathbf{r}', \mathbf{r}')$ over the whole network. The main physical results are not very sensitive to this choice of weights.

3.2 REGULAR NETWORKS. — Assume that all the N_B strands of a regular network have the same length a . The N nodes are assumed to have the same coordination number Z . For such a regular network, one obtains :

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\kappa}{2} \frac{1}{N_B \eta \sinh \eta} \left[(\eta \cosh \eta - \sinh \eta) \sum_{(\alpha\beta)} \left(1 + \frac{T_{\beta\alpha} e^{-i\gamma_{\alpha\beta}} + T_{\alpha\beta} e^{-i\gamma_{\beta\alpha}}}{\sinh \eta} \right) + \right. \\ \left. + (\sinh \eta \cosh \eta - \eta) \sum_{(\alpha\beta)} \left(\frac{T_{\alpha\alpha} + T_{\beta\beta}}{\sinh \eta} \right) \right]. \quad (32)$$

In equation (32), the sums are taken over the $N_B = \frac{1}{2} ZN$ strands of the network ($\eta = a/L_{\varphi}$). This expression can be simplified further by noting that $M_{\alpha\alpha} = Z \coth \eta$:

$$\Delta R/R = \frac{\kappa}{2} \left[\frac{\eta \cosh \eta - \sinh \eta}{\eta \sinh \eta} \left(1 - \frac{2}{Z} \right) + \frac{2}{N} \sum_{\alpha=1}^N T_{\alpha\alpha} \right]. \quad (33)$$

Furthermore, M is Hermitian, of positive eigenvalues λ_i (because of $M_{\alpha\alpha} > \sum_{\beta(\neq\alpha)} |M_{\alpha\beta}|$). Therefore, the final result becomes

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\kappa}{2} \left[\frac{\eta \cosh \eta - \sinh \eta}{\eta \sinh \eta} \left(1 - \frac{2}{Z} \right) + \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i^{-1} \right]. \quad (34)$$

This equation shows that the calculation of the magnetoresistance (MR) reduces finally to a trace over the spectrum of the operator M . The result thus obtained can be generalized trivially to the case of node-dependent

coordination numbers Z_α :

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\kappa}{2} \left[\frac{\eta \cosh \eta - \sinh \eta}{\eta \sinh \eta} \left(1 - \frac{N}{N_B} \right) + \frac{1}{N_B} \sum_{\alpha=1}^N Z_\alpha T_{\alpha\alpha} \right]. \quad (35)$$

3.3 EXAMPLES : NECKLACES AND LADDERS.

3.3.1 *Open necklace of loops* (Fig. 12). — Following the notations of figure 12, the non-vanishing elements of the $(N+1) \times (N+1)$ matrix M , are given by ($\eta \equiv a/L_\varphi$) :

$$\begin{aligned} M_{1,1} &= 2 \coth \eta, & M_{N+1,N+1} &= 2 \coth \eta \\ M_{\alpha,\alpha} &= 4 \coth \eta, & (1 < \alpha < N+1) \\ M_{\alpha,\alpha+1} &= -2 \cos(\pi\phi/\phi_0)/\sinh \eta, & (1 \leq \alpha \leq N) \end{aligned} \quad (36)$$

and $M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha}^*$

The explicit expression of $\Delta R/R$ is obtained by following the same procedure used as that in Appendix A.

$$\Delta R/R = \frac{\kappa}{2} \left\{ \frac{\eta \cosh \eta - \sinh \eta}{\eta \sinh \eta} \frac{N-1}{2N} + \frac{1}{2N} \left[\sum_{k=2}^N \frac{2 \sinh \eta}{2 \cosh \eta - (V_{k-1} + V_{N-k+1}) \cos \pi\phi/\phi_0} \right] + \frac{1}{N} \frac{\sinh \eta}{\cosh \eta - V_N \cos \pi\phi/\phi_0} \right\}. \quad (37)$$

In equation (37), the sequence $\{V_k\}$ is defined recursively by :

$$V_1 = \cos(\pi\phi/\phi_0)/\sinh \eta \quad (38a)$$

$$V_{k+1} = \cos(\pi\phi/\phi_0) \left(2 \cosh \eta - V_k \cos \pi \frac{\phi}{\phi_0} \right). \quad (38b)$$

In the limit $N = \infty$, V_k can be replaced by its limiting value :

$$V_\infty = \left[\cosh \eta - \left(\cosh^2 \eta - \cos^2 \pi \frac{\phi}{\phi_0} \right)^{1/2} \right] \cos \pi\phi/\phi_0,$$

and equation (37) reduces to

$$\Delta R/R = \frac{\kappa}{4} \left[\frac{\eta \cosh \eta - \sinh \eta}{\eta \sinh \eta} + \sinh \eta \cdot \left(\cosh^2 \eta - \cos^2 \pi \frac{\phi}{\phi_0} \right)^{-1/2} \right]. \quad (39)$$

The effect of the increasing of N is illustrated in figure 13. Note the absence of fine structure of $\Delta R/R$ in this geometry.

In the case $L_\varphi \ll a$, one would expect that $\Delta R/R$ is the same as for a single loop. Actually it is not true, because a given ring inside the necklace is not described by the same boundary conditions as the single ring considered in section 2.2. Indeed, the whole structure has an influence similar to arms on a given ring, and then a damping of the magnitude of the MR oscillations is actually expected as the number of connected rings increases. This phenomenon can be illustrated by considering the first harmonic of the MR curve, in the $\eta = a/L_\varphi \gg 1$ limit. Indeed, for

$$\begin{aligned} \text{a single loop :} & \quad \frac{\Delta R}{R} = \kappa \exp\left(-\frac{L}{L_\varphi}\right) \cos 2\pi\phi/\phi_0 \\ \text{two articulated loops :} & \quad \frac{\Delta R}{R} = \frac{\kappa}{2} \exp\left(-\frac{L}{L_\varphi}\right) \cos 2\pi\phi/\phi_0 \\ \text{three articulated loops :} & \quad \frac{\Delta R}{R} = \frac{5}{12} \kappa \exp\left(-\frac{L}{L_\varphi}\right) \cos 2\pi\phi/\phi_0 \end{aligned}$$

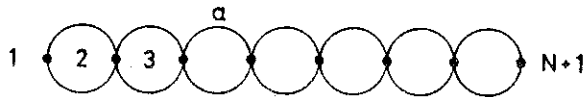


Fig. 12. — An open necklace made of N identical loops, with $N+1$ nodes. The length of the wire between two nodes is a which is half the length of a loop. We set $\eta = a/L_\varphi$ and ϕ is the magnetic flux through an elementary loop.

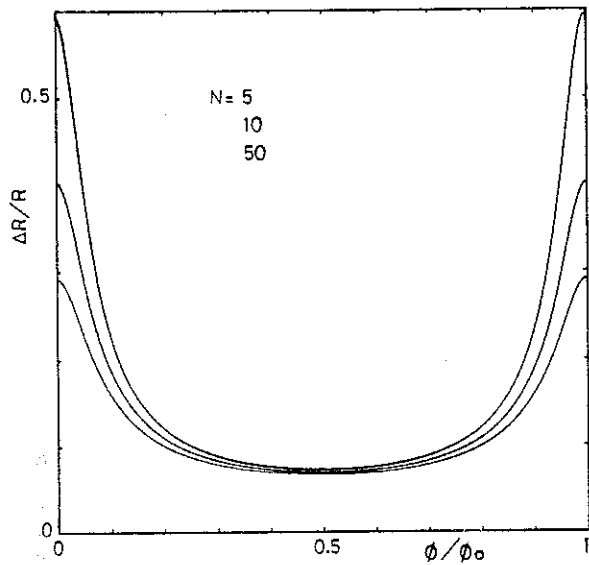


Fig. 13. — $\Delta R/R$ for the necklace of figure 12, in units of κ . The parameters are : $a/L_\phi = 0.2$ and $N = 5; 10; 50$ respectively. Note that $\Delta R/R$ decreases as N increases as well as the absence of fine structure.

an infinite open necklace :
$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\kappa}{4} \exp\left(-\frac{L}{L_\phi}\right) \cos 2\pi\phi/\phi_0.$$

Here $L (= 2a)$ denotes the length of elementary loops.

As $\eta \gg 1$, the first harmonic becomes predominant because the backscattering selects only the smallest available loops; then, the functional dependence in ϕ/ϕ_0 is the same for any size of the necklace. However the prefactor decreases as N increases, showing a non-trivial collective effect : the MR oscillations of a given ring are very sensitive to its coupling to the external world, even when L_ϕ becomes much smaller than its size.

3.3.2 Closed necklace (Fig. 14a). — This geometry is worth studying because it will help us to understand the behaviour of a single ring, with finite width. Let us denote ϕ the magnetic flux through each of the N loops and ψ

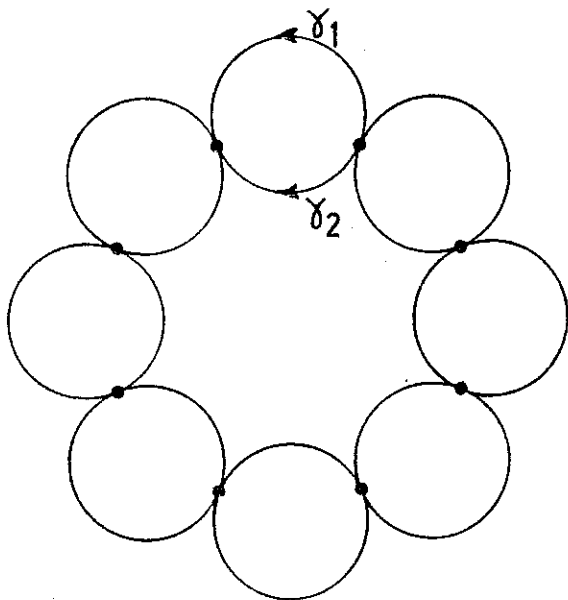


Fig. 14a. — A closed Necklace. γ_1 (resp. γ_2) denotes the phase factor along an external (resp. internal) strand of length a . ψ denotes the magnetic flux through the whole structure defined by taking the mean value $\frac{1}{2} \frac{1}{2\pi N} (\gamma_1 + \gamma_2)$.

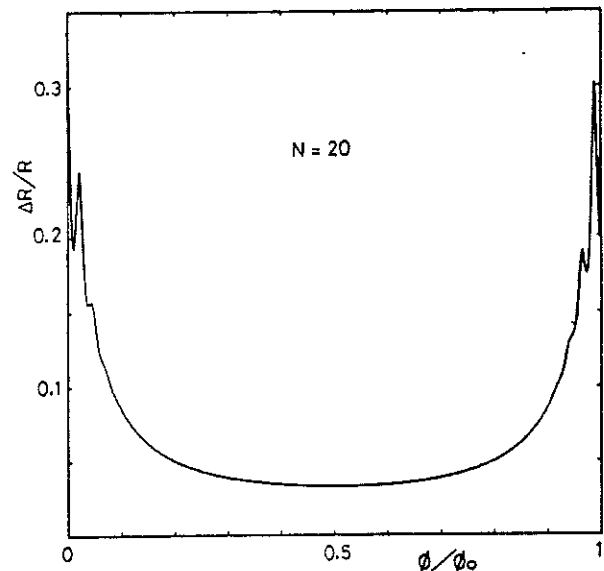


Fig. 14b. — $\Delta R/R$ for a closed necklace of $N = 20$ elementary loops. The elementary loops are located on the circumference of a large ring. Within the main period $0 \leq \phi/\phi_0 \leq 1$, there are new oscillations due to the presence of the large ring. This system can be viewed as a large ring with a small width simulated by elementary loops. This width is responsible for the attenuation of the oscillations corresponding to the large ring.

the total average flux across the whole network. More precisely

$$\gamma_1 - \gamma_2 = 2\pi\phi/\phi_0, \quad N\gamma_1 = 2\pi\psi_{\text{ext}}/\phi_0, \quad N\gamma_2 = 2\pi\psi_{\text{int}}/\phi_0$$

and $\psi = \frac{1}{2}(\psi_{\text{ext}} + \psi_{\text{int}})$.

Due to the rotation symmetry, the eigenvalues λ_k in equation (34) can be easily obtained from the eigenvalue equations :

$$4 \cosh \eta \cdot C_n - (e^{-i\gamma_1} + e^{-i\gamma_2}) \cdot C_{n-1} - (e^{i\gamma_1} + e^{i\gamma_2}) C_{n+1} = \lambda_k \sinh \eta$$

C_n can be taken as $C_n = \alpha_k \exp(2\pi i k n / N)$ and then

$$\lambda_k = 4 \left[\cosh \eta - \cos \pi \frac{\phi}{\phi_0} \cos \frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{\psi}{\phi_0} \right) \right] \sinh \eta \quad (0 \leq k \leq N-1). \quad (40)$$

Equation (34) leads to

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\kappa}{4} \left[\frac{\eta \cosh \eta - \sinh \eta}{\eta \sinh \eta} + \sinh \eta \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \left(\cosh \eta - \cos \pi \frac{\phi}{\phi_0} \cos \frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{\psi}{\phi_0} \right) \right)^{-1} \right]$$

which can be written as :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta R}{R} = \frac{\kappa}{4} \left[\frac{\eta \cosh \eta - \sinh \eta}{\eta \sinh \eta} + (z_1^N - z_2^N) \sinh \eta \left(\cosh^2 \eta - \cos^2 \pi \frac{\phi}{\phi_0} \right)^{1/2} \times \right. \\ \left. \times \left(z_1^N + z_2^N - 2 \left(\cos \pi \frac{\phi}{\phi_0} \right)^N \cos 2\pi \frac{\psi}{\phi_0} \right) \right]. \quad (41) \end{aligned}$$

Here

$$z_{1,2} = \cosh \eta \pm \left(\cosh^2 \eta - \cos^2 \pi \frac{\phi}{\phi_0} \right)^{1/2}. \quad (42)$$

If the curvature of the ring, in the neighbourhood of an elementary loop, is neglected, one gets $\psi \simeq \frac{N^2}{\pi^2} \phi$.

Two limiting procedures are actually of order.

First, one can keep the size of the loops fixed (η fixed) and look at $\Delta R/R$ as a function of ϕ/ϕ_0 . In this case, a quasi-periodic modulation is obtained, at $\phi/\phi_0 = n \frac{\pi^2}{N^2}$ (n = integer). Such an interference effect disappears at $Na \gg L_\phi$ as one could expect. The limit $N = \infty$ reproduces equation (39) relative to the open necklace network. An important difference with the single loop case (parameter 2η) appears, however in this limit. In fact, for $\phi/\phi_0 \sim 0$ and $\eta \ll 1$, $\Delta R/R$ is no longer of order η^{-1} , but reduces to η^0 , whereas the width of the maxima remains of order of η as for the single loop case.

Second, one can keep the network size ηN fixed. In the limit $N = \infty$, we recover the expression $\Delta R/R$ for a single ring with parameter ηN , at least for $\phi/\phi_0 \ll 1$. For finite N , the oscillations characterized by $\psi/\phi_0 = \text{integer}$ are modulated. The envelope and the damping (as ϕ increases) are actually caused by the « penetration » of a non-zero flux ϕ into the elementary loops, leading to a decreasing backscattering in the whole structure. This qualitative picture

remains true for a real ring of finite width : the non-zero width is modelled here by the presence of a large number of elementary loops, which take into account the large number of diffusion paths within the width.

3.3.3 Open ladder (Fig. 15). — Let $\phi = Ha^2$ be the magnetic flux through each of the N elementary square loops, as shown in figure 15. The inversion of the matrix M can be carried out, following the same iterative procedure described above, where the running variable is now a 2×2 matrix. For this, it is useful to define the following matrices :

$$E = \begin{bmatrix} 3 \cosh \eta - 1 & 0 \\ 0 & 3 \cosh \eta + 1 \end{bmatrix},$$

$$F(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\theta = \pi\phi/\phi_0).$$

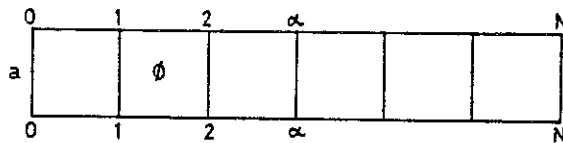


Fig. 15. — A simple open ladder with N elementary loops of side a each ($\eta = a/L_\phi$).

Two sequences U_i and V_i of 2×2 matrices are defined recursively by :

$$U_i = (E - F(-\phi/\phi_0) U_{i-1})^{-1} F(\phi/\phi_0), \quad 1 \leq i \leq N \quad (43)$$

$$V_i = (E - F(\phi/\phi_0) V_{i+1})^{-1} F(-\phi/\phi_0), \quad 0 \leq i \leq N-1$$

with

$$U_0 = \begin{bmatrix} \cos \theta / (2 \cosh a - 1) & -\sin \theta / (2 \cosh a - 1) \\ \sin \theta / (2 \cosh a + 1) & \cos \theta / (2 \cosh a + 1) \end{bmatrix} \quad (44)$$

and V_0 is obtained from U_0 by replacing $\theta = \pi\phi/\phi_0$ by $-\theta$ (here a refers to a/L_φ). Using these notations, the expressions of $T_{\alpha\alpha}$'s to be used in equation (35) are given by

$$T_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} \sinh \eta \cdot \text{Trace} [E - F(-\theta) U_{\alpha-1} - F(\theta) V_{\alpha+1}]^{-1}. \quad (45)$$

This expression holds also for $\alpha = 0$ or N , using the convention $U_{-1} = 0$, $V_{N+1} = 0$ and replacing, in equation (45), E by E' defined by

$$E' = \begin{bmatrix} 2 \cosh \eta - 1 & 0 \\ 0 & 2 \cosh \eta + 1 \end{bmatrix}.$$

The final result is

$$\Delta R/R = \frac{\kappa}{2} \left[\frac{\eta \cosh \eta - \sinh \eta}{\eta \sinh \eta} \frac{N-1}{3N+1} + \frac{2}{3N+1} \left(2 T_{0,0} + 2 T_{N,N} + 3 \sum_{\alpha=1}^{N-1} T_{\alpha\alpha} \right) \right]. \quad (46)$$

The variations of $\Delta R/R$ as a function of the reduced flux ϕ/ϕ_0 are shown in figure 16.

3.3.4 Closed ladder (Fig. 17). — For this geometry, in addition to the principal period, corresponding to ϕ/ϕ_0 integer, secondary oscillations appear at low

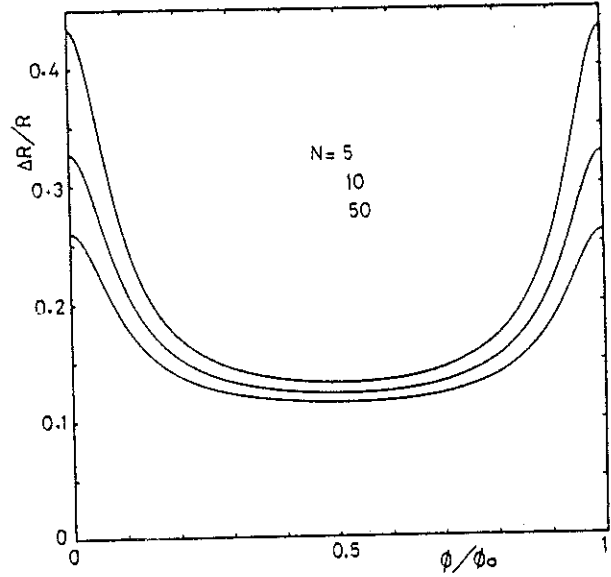


Fig. 16. — $\Delta R/R$ for the open ladder of figure 15. Here $\eta = 0.2$ and N is set equal to 5, 10, 50 respectively. The qualitative features are the same as in the open necklace case (Fig. 13).

ϕ/ϕ_0 . The number of these oscillations, which are due to the two enclosed fluxes ϕ_1 and ϕ_2 by the internal and external major loops, increases for increasing N , but their magnitude decreases.

4. Infinite regular networks.

In order to study the case of an infinite network, two approaches can be used. The first one is based on equation (34) and the second one is the multistrip approach.

4.1 MULTISTRIP GEOMETRIES (Fig. 18). — In addition to their own interest, multiple strip networks can be used to investigate two limiting problems. The first is the 1D-2D crossover of the magnetoresistance, obtained by increasing the width M of the strip. The second one is the strict limit $M = N = \infty$ of the infinite network.

Let us denote by ϕ the magnetic flux through the elementary square loop. Using the radial gauge, $\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{H} \times \mathbf{r}$, the circulation of the vector potential $\mathbf{A}$ is given by $\gamma_m = \left(\frac{N}{2} + 2\pi(m-1) \right) \phi/\phi_0$ at level m . Here N denotes the number of loops in each of the M shells. The solution of equation (35) leads to the following result ($\eta = a/L_\varphi$) :

$$\Delta R/R = \frac{\kappa}{2} \left[\frac{\eta \cosh \eta - \sinh \eta}{\eta \sinh \eta} \frac{M-1}{2M-1} + \frac{\sinh \eta}{N(2M-1)} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=1}^M \frac{4 - \delta_{m,1} - \delta_{m,M}}{E_k(m) - v_k(m-1) - w_k(m+1)} \right]. \quad (47)$$

Here,

$$\begin{aligned} E_k(m) &= 4 \cosh \eta - 2 \cos(\gamma_m + 2\pi k/N), & 2 \leq m \leq M-1 \\ &= 3 \cosh \eta - 2 \cos(\gamma_m + 2\pi k/N), & m = 1 \text{ or } M \end{aligned} \quad (48)$$

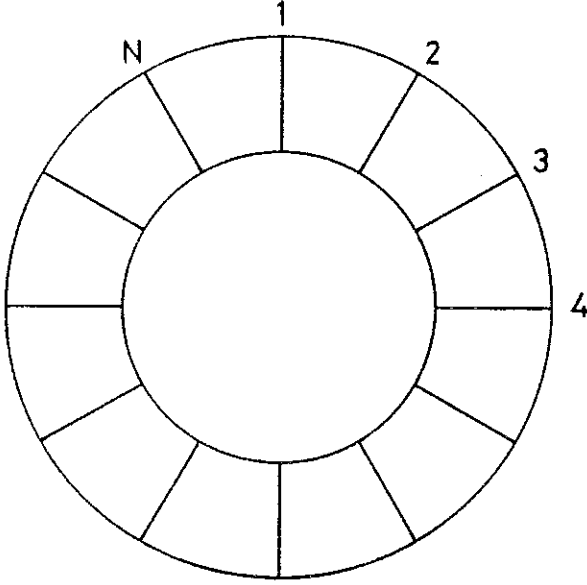


Fig. 17. --- A closed ladder geometry with N elementary cells.

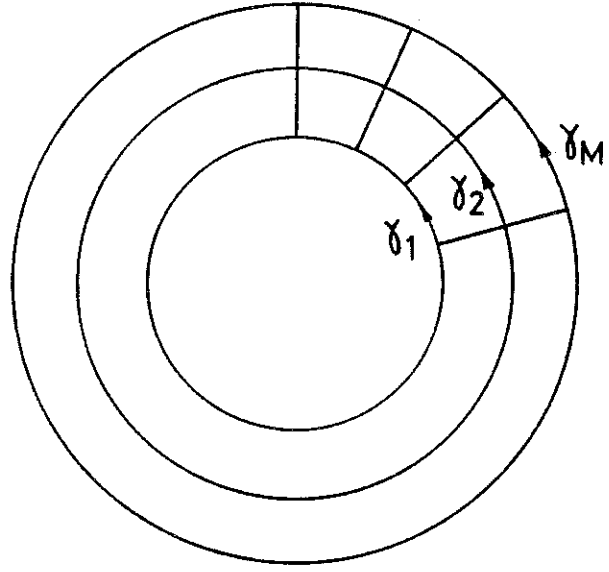


Fig. 18. --- A multiple strip geometry. Here ϕ denotes the magnetic flux across an elementary loop and γ_m is the dephasing factor along a strand in a radial gauge. a is the side of an elementary loop. $\eta = a/L_\phi$.

and

$$\begin{aligned} v_k(1) &= 1/E_k(1), & v_k(m) &= 1/(E_k(m) - v_k(m-1)) \\ w_k(M) &= 1/E_k(M), & w_k(m) &= 1/(E_k(m) - w_k(m+1)). \end{aligned} \quad (49)$$

Qualitatively, the behaviour of $\Delta R/R$ is identical to that of the single strip network. Let us just discuss the limit of large N and M . For the sake of clarity, we shall only consider the limit of zero magnetic field $H = 0$. In this case, for finite N , the sequences $v_k(m)$ and $w_k(m)$ converge rapidly to their common limit $v_k(\infty)$ as $M \rightarrow \infty$. In this limit, equation (47) becomes

$$\Delta R/R = \frac{\kappa}{4} \left[\frac{\eta \cosh \eta - \sinh \eta}{\eta \sinh \eta} + \sinh \eta \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{4}{E_k - 2 v_k(\infty)} \right] \quad (50)$$

where E_k denotes the common value of $E_k(m)$ at zero field, related to $v_k(\infty)$ by $E_k - (E_k^2 - 4)^{1/2} = 2 v_k(\infty)$. Taking now the limit $N = \infty$, one obtains :

$$\Delta R/R = \frac{\kappa}{4} \left[\frac{\eta \cosh \eta - \sinh \eta}{\eta \sinh \eta} + \frac{2}{\pi} \sinh \eta \int_0^{2\pi} \frac{dx}{[(4 \cosh \eta - 2 \cos x)^2 - 4]^{1/2}} \right]. \quad (51)$$

The integration in equation (51) can easily be performed, and leads to

$$\Delta R/R = \frac{\kappa}{4} \left[\frac{\eta \cosh \eta - \sinh \eta}{\eta \sinh \eta} + \frac{2}{\pi} \tanh \eta \cdot \mathbb{K}(1/\cosh \eta) \right] \quad (52)$$

where $\mathbb{K}(\cdot)$ denotes the complete elliptic integral of first kind $\mathbb{K}(k) = \int_0^{\pi/2} dx (1 - k^2 \sin^2 x)^{-1/2}$. The continuum limit of equation (52), given by $\eta = a/L_\phi \ll 1$, reproduces the 2D bulk behaviour, as it should be. Indeed, for $\eta \ll 1$, $\mathbb{K}(1/\cosh \eta) \simeq \ln(4/\tanh \eta)$ and equation (52) yields

$$\Delta R/R \simeq \frac{\kappa}{2\pi} \frac{a}{L_\phi} \ln \left(\frac{L_\phi}{a} \right) \quad (53)$$

(we recall that $\kappa = \frac{2 e^2}{\pi \hbar \sigma_0} \frac{L_\phi}{S}$).

The final expression, equation (53) corresponds to the known one [16] :

$$\Delta R = \frac{e^2}{\pi^2 \hbar} R_{\square}^2 \ln(L_{\phi}/l) \quad (54)$$

where, instead of the elastic mean free path l , the lattice spacing a appears in the network result. The occurrence of a as a short length scale cutoff is actually not surprising. The continuum limit of the network calculation is actually valid up to $a \gtrsim l$. For a lattice spacing $a < l$, the wire approximation breaks down because σ_0 cannot be defined properly in this limit.

4.2 INFINITE SQUARE NETWORK. — The calculation of $\Delta R/R$ can be performed directly, using the result of equation (34) :

$$\Delta R/R = \frac{\kappa}{2} \left[\frac{1}{2} \frac{\eta \cosh \eta - \sinh \eta}{\eta \sinh \eta} + \frac{2}{N^2} \sum_{i=1}^{N^2} 1/\lambda_i \right] \quad (55)$$

where λ_i are the (positive) eigenvalues of the $N^2 \times N^2$ matrix M . Here N^2 is the number of elementary square loops in the network. For large N and finite L_{ϕ} , boundary effects can be neglected and one recovers the calculation of the spectrum of matrix M . For convenience, it is useful to take a Landau gauge : $A_x = -Hy$, $A_y = 0$ and $A_z = 0$. Let us denote by $\gamma_m = 2\pi \frac{\phi}{\phi_0} m$ the dephasing factor between nodes (m, n) and $(m, n-1)$ (for the notation, see Fig. 19). The eigenvalue problem, associated to the matrix M , can be written ($\eta = a/L_{\phi}$) :

$$(4 \cosh \eta - \lambda \sinh \eta) C_{m,n} = e^{-i\gamma_m} C_{m,n-1} + e^{i\gamma_m} C_{m,n+1} + C_{m-1,n} + C_{m+1,n} \quad (56)$$

(λ refers in Eq. (56) to the eigenvalues of M).

Using the translation symmetry in x direction, one can find the solutions of equation (56), as plane waves in x direction : $\tilde{C}_m e^{ikn}$, $0 \leq k \leq 2\pi/a$. Therefore, equation (56) reduces to Harper's well-known equation :

$$(4 \cosh \eta - \lambda \sinh \eta) \tilde{C}_m = 2 \cos(\gamma_m + ka) \tilde{C}_m + \tilde{C}_{m-1} + \tilde{C}_{m+1} \quad (57)$$

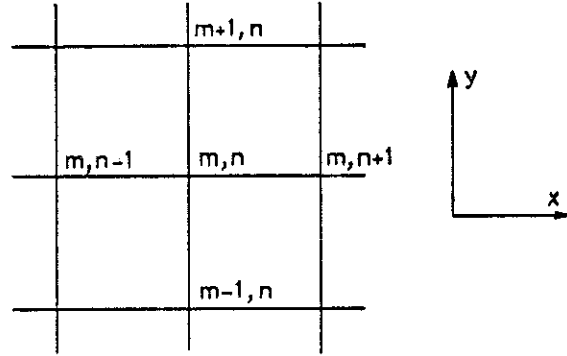


Fig. 19. — Notations for the infinite square network geometry. The side of a loop is denoted by a and $\eta = a/L_{\phi}$.

which can also be cast as

$$\varepsilon \psi_m = \psi_{m-1} + \psi_{m+1} + 2 \cos \left(2\pi \frac{\phi}{\phi_0} m + \theta \right) \psi_m \quad (58)$$

where $\varepsilon = 4 \cosh \eta - \lambda \sinh \eta$ and $\theta = ka$ is a factor of Floquet.

The spectrum of equation (58) has been previously worked out by various authors [20, 21]. The explicit calculation of the eigenvalues ε can be carried out for rational flux $\phi/\phi_0 = p/q$. For these values of the flux, the solution ψ_m can be chosen as $\psi_m = \exp(i \frac{m}{q} \varphi) \cdot v_m$,

where φ denotes a phase factor. Due to the q -periodicity in m direction, one can limit the search for solutions to those such that $v_{m+q} = v_m$. In this way, the eigenvalues ε are given by the solutions of a secular equation : $\det D = 0$, where D is a $q \times q$ Hermitian matrix, of non-vanishing elements :

$$\begin{aligned} D_{l,l} &= 2 \cos \left(2\pi \frac{p}{q} \cdot l + \theta \right) - \varepsilon, \quad 1 \leq l \leq q \\ D_{l,l+1} &= D_{l+1,l} = 1, \quad 1 \leq l \leq q-1 \\ D_{1,q} &= D_{q,1}^* = \exp(-i\varphi). \end{aligned}$$

The secular equation actually assumes a very simple form [21] :

$$P_{p,q}(\varepsilon) = 2 \cos \varphi + 2 \cos q\theta \equiv W \quad (59)$$

where $P_{p,q}(\varepsilon) = \varepsilon^q + \dots$ is a polynomial of degree q in ε and W is a current variable, $-4 \leq W \leq 4$. In general, there are q subbands in the spectrum of equation (58), contained in the interval $|\varepsilon| \leq 4$, the subband edges are given by : $P_{p,q}(\varepsilon) = \pm 4$. Therefore, equation (55) becomes

$$\Delta R/R = \frac{\kappa}{2} \left[\frac{\eta \cosh \eta - \sinh \eta}{2 \eta \sinh \eta} + \frac{\sinh \eta}{2 \pi^2 q} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\mu \sum_{i=1}^q (4 \cosh \eta - \varepsilon_i(\varphi, \mu))^{-1} \right] \quad (60)$$

where $\varepsilon_i(\varphi, \mu)$ refers to the q ($1 \leq i \leq q$) subbands and $\mu = q\theta$. Note that $4 \cosh \eta \geq 4$ lies outside the spectrum

$|\varepsilon| \leq 4$ and the sum in equation (60) is very well behaved. The above result can be simplified further, by performing the sum over the q subbands. Indeed, from equation (59), one deduces

$$\sum_{i=1}^q \frac{1}{4 \cosh \eta - \varepsilon_i(\varphi, \mu)} = \frac{P'_{p,q}(4 \cosh \eta)}{P_{p,q}(4 \cosh \eta) - W(\varphi, \mu)}. \quad (61)$$

Furthermore, the integration is quite trivial and leads to the final result

$$\Delta R/R = \frac{\kappa}{4} \left[\frac{\eta \cosh \eta - \sinh \eta}{\eta \sinh \eta} + \frac{8 \sinh \eta}{\pi q} \frac{P'_{p,q}(4 \cosh \eta)}{P_{p,q}(4 \cosh \eta)} \mathbb{K} \left(\frac{4}{P_{p,q}(4 \cosh \eta)} \right) \right]. \quad (62)$$

In equations (61) and (62), $P'_{p,q}$ refers to the derivative of the polynomial $P_{p,q}(\varepsilon)$, defined by equation (59), and taken at $\varepsilon = 4 \cosh \eta$. Note that, because $4 \cosh \eta \geq 4$, the argument $k \equiv 4/P_{p,q}(4 \cosh \eta)$ of the complete elliptic integral, lies inside the interval (0, 1) and equation (62) is well defined for all p, q and η . This rather simple and compact expression (Eq. (62)) can then be used to calculate $\Delta R/R$ for arbitrary η and every rational flux p/q . Indeed, one has just to calculate the polynomial $P_{p,q}(\varepsilon)$ and there is no need for further information such as the eigenvalues, the density of states or the ordering of the subbands. Let us mention that in superconducting networks [11-12], it is the edge of the spectrum which is involved. Here, $\Delta R/R$ gives additional spectral information, taking into account the whole structure of the spectrum. This remark is at the origin of the difference between these two problems, although very close to each other. Furthermore, the absence of fine structure in the $\Delta R/R$ curve, has its origin on the expression equation (62) so obtained. In fact, despite the rich structure of the spectrum associated with equation (58), $\Delta R/R$ is given by a regularizing sum (Eq. (55)) over the subbands of this spectrum, weighted by the density of states. Furthermore, equation (62) is analytic, because $4 \cosh \eta$ lies outside the spectrum $|\varepsilon| \leq 4$ of equation (55).

Before discussing the numerical results, it is useful to discuss the behaviour of $\Delta R/R$ in some limiting cases.

4.2.1 Zero field limit. — For $\phi/\phi_0 = 0$, one can take $q = 1$ and $P(\varepsilon) = \varepsilon$. The eigenvalues are given by $\varepsilon = 2 \cos \varphi + 2 \cos \mu$ and the multistrip result (Eq. (52)) is simply recovered. In this limit as well as for integer ϕ/ϕ_0 , one obtains : $\Delta R/R \sim \eta \ln 1/\eta$ at $\eta \ll 1$, to be compared with the single loop behaviour : $\Delta R/R \sim \eta^{-1}$ and the simple ladder one : $\Delta R/R \sim \eta^0$. Therefore, by increasing the effective dimensionality of the network ($d = 0, 1$ and 2), $\Delta R/R$ decreases at zero field and small $\eta = a/L_\varphi$. On the contrary, for non integer values of ϕ/ϕ_0 , $\Delta R/R \sim \eta$ in the three cases. A direct comparison is shown in figure 20.

4.2.2 Small field limit. — In the limit of vanishing magnetic field, the width of subbands becomes smaller and smaller, giving rise to Landau levels. For instance,

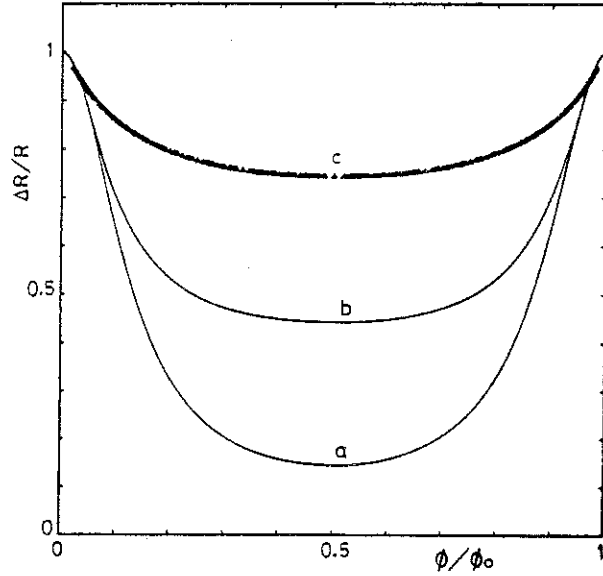


Fig. 20. — $\Delta R/R$ as a function of the reduced flux ϕ/ϕ_0 shown for three networks ($a/L_\varphi = 0.2$) : curve a, single square loop of perimeter $L = 4a$ (Eq. (18)); curve b, simple ladder made of identical square loops, of side a ; and curve c, infinite regular network made of identical square loops (Eq. (62)). For convenience, $\Delta R/R$ has been normalized to its value at zero field in each case. Triangles, corresponding to case c, are calculated for rational $\phi/\phi_0 = p/q$, $p < q \leq 50$, according to equation (62). Note the absence of fine structure as well as the broadening of the maxima as the effective dimensionality of the network increases.

at $\phi/\phi_0 = 1/q$, one obtains, close to the lower edge ($\varepsilon = -4$) :

$$\varepsilon = -4 + \left(\frac{1}{2} + n \right) \frac{4\pi}{q}, \quad n = \text{integer}.$$

In this case, the band structure can be well approximated by a central subband $|\varepsilon| < \varepsilon^*$ and a discrete set of Landau levels, with $n \lesssim n^*$ and $n^* \sim q$. Here ε^* and n^* are chosen such as to secure the normalization of the total density of states. Using this approxi-

mation, one obtains :

$$\frac{\Delta R}{R}(H=0) - \frac{\Delta R}{R}(H) \sim \frac{\kappa}{4\pi} \left[\int_{4-\varepsilon}^4 d\varepsilon \frac{8 \cosh \eta}{16 \cosh^2 \eta - \varepsilon^2} - \frac{4\pi}{q} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8 \cosh \eta}{16 \cosh^2 \eta - \left(4 - \frac{4\pi}{q} \left(n + \frac{1}{2}\right)\right)^2} \right] \quad (63)$$

Note that the integrand in equation (63) has a width $\sim \eta^2$ at $\eta \sim 0$ and $\varepsilon \lesssim 4$. In order to discuss the limiting behaviours of equation (63), it is useful to introduce the magnetic length l_H , defined by : $l_H = a(\phi_0/\phi)^{1/2}$, and giving the spatial extension, in units of a , of a region enclosing one quantum flux ϕ_0 .

a) Case $l_H \gg L_\phi$: In this case, $\eta^2 \gg \phi/\phi_0$ and the difference between the discrete sum and the integral in equation (63) behaves as q^{-2} , i.e. H^2 as expected [16].

b) Case $l_H \ll L_\phi$: The discrete sum is a poor approximation and this particularly near $\varepsilon = 4$. This is due mainly to the discreteness of the Landau levels, where their relative separation is very large compared to the width $\sim \eta^2$ of the integrand. In this case, the leading contribution is controlled by the singularity at $\varepsilon = 4$ and then

$$\frac{\Delta R}{R}(H=0) - \frac{\Delta R}{R}(H) \simeq \ln(1 + L_\phi^2/l_H^2) \sim \ln H.$$

Therefore, in both limits, the continuum results [16] for a 2D bulk system are recovered from the network calculations. In figure 20, some results for the infinite square lattice network are shown together with the single loop and the simple ladder results. Here $\phi/\phi_0 = p/q$, with $p < q \leq 50$ have been used in the numerical calculation. As was anticipated before, the variation of $\Delta R/R$ as a function of the reduced flux does not exhibit any singularity or fine structure. Only the usual logarithmic singularity arises in the limit of small fields $q \gg 1$ and $\eta \sim 0$. Therefore the results for the infinite network geometry confirm all the characteristic features exhibited by finite networks.

4.3 INFINITE HONEYCOMB NETWORK (Fig. 21). — In principle other infinite regular networks can be studied as above. The main features, found for the square network remain present on the other networks (triangular, honeycomb) : a proper continuum limit, absence of fine structure, etc. In what follows, we shall derive the analogous of equation (62), but for the

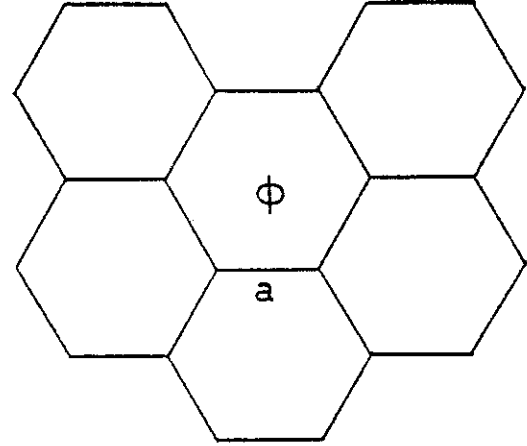


Fig. 21. — A honeycomb network geometry. Here a denotes the length of a strand and ϕ the magnetic flux through a hexagonal elementary cell. $\eta = a/L_\phi$.

honeycomb networks where experimental results are available [3]. In this case, the spectrum is also given by a dispersion equation which has the same structure as equation (59). Actually, we have [22] a similar polynomial equation :

$$P_{p,q}(\varepsilon^2 - 3) + W(\theta_1, \theta_2) = 0 \quad (64)$$

where

$$W(\theta_1, \theta_2) = (-2)^{pq} \cos q\theta_1 + (-1)^{q+1} (2 \cos q\theta_2 + 2(-1)^{pq} \cos q(\theta_1 + \theta_2)). \quad (65)$$

For more details, we direct the reader to reference [22]. Note, however that the polynomial in equation (64) is not identical to that used in the square network case. The sum over the spectrum (Eq. (34)) can be cast in the following simple form :

$$\Delta R/R = \frac{\kappa}{6} \left\{ \frac{\eta \cosh \eta - \sinh \eta}{\eta \sinh \eta} - \frac{36 \sinh \eta \cosh \eta \cdot P'_{p,q}(9 \cosh^2 \eta - 3)}{\pi q [A^2 - 12 + 8(3 - A)^{1/2}]^{1/2}} \mathbb{K} \left(\frac{4(3 - A)^{1/4}}{[A^2 - 12 + 8(3 - A)^{1/2}]^{1/2}} \right) \right\}$$

for $A < 0$, and

$$\Delta R/R = \frac{\kappa}{6} \left\{ \frac{\eta \cosh \eta - \sinh \eta}{\eta \sinh \eta} + \frac{18 \sinh \eta \cosh \eta \cdot P'_{p,q}(9 \cosh^2 \eta - 3)}{\pi q (uv)^{1/2}} \mathbb{K} \left(\left(\frac{4 - (u - v)^2}{4 uv} \right)^{1/2} \right) \right\} \quad (66)$$

for $A > 0$.

Here $A = P_{p,q}(9 \cosh^2 \eta - 3)$ and for $A > 0$, u and v are defined by

$$u = \frac{1}{2}(A^2 + 4A - 12)^{1/2}$$

$$v = \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 4)^{1/2}.$$

This expression for $\Delta R/R$ has been used in reference [14] and compared with the experimental data [3]. The agreement was excellent and this will be discussed in section 5.

4.4 INFINITE SELF-SIMILAR NETWORKS (Fig. 22). — It appears now that the magnetoresistance does not exhibit any fine structure in an infinite network geometry. It is then natural to ask whether such a fine structure exists in a self-similar network such as the Sierpinski gasket. In fact, for such a network a whole hierarchy of loops, at all length scales, is present and may favour the appearance of an infinitely countable set of singularities at small magnetic field.

As was shown previously, $\Delta R/R$ is directly related to the tight-binding Hamiltonian, on the underlying network, under an applied magnetic field. This problem has been studied recently by different authors [11, 23, 24], but a compact solution is not yet available. However, the scale invariance of this network allows a recursive calculation of $\Delta R/R$, using equation (34). Actually, the sum in equation (34) is taken at an energy lying outside the spectrum and then $\Delta R/R$ can be obtained numerically after a few iterations. Details are given in Appendix C. Here we shall discuss some limiting cases.

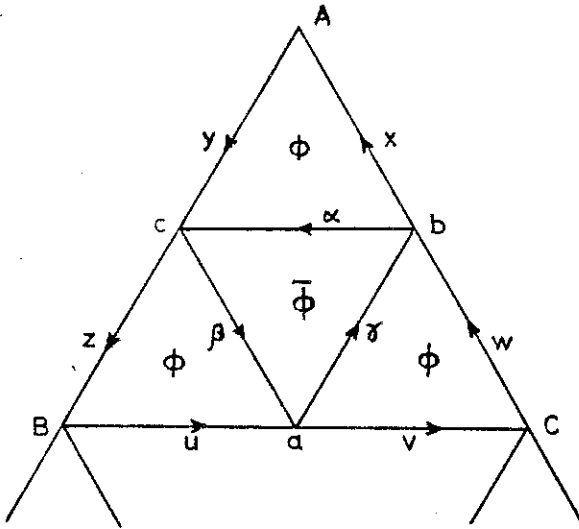


Fig. 22. — A Sierpinski gasket geometry and the corresponding decimation procedure. At a given step, the renormalized magnetic flux is denoted by ϕ , the flux through a corner triangle and $\bar{\phi}$, the flux through a central triangle. Any choice of dephasing factors $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu, \dots, z$ compatible with ϕ and $\bar{\phi}$ can be used. One must imagine that the fractal is infinite, with a finite lowest length scale.

4.4.1 Zero field limit. — The expected scaling law for $\Delta R/R$ as a function of the phase breaking time τ_ϕ , is obtained through an argument, similar to that of reference [25]. One gets :

$$\Delta R/R \sim \tau_\phi^{(2-\bar{d})/2} \quad (\bar{d} < 2) \quad (67)$$

where $\bar{d}$ denotes the spectral dimensionality of the structure [26, 27]. However, because of the anomalous diffusion on fractal structure, the definition of the phase coherence length has to be modified. If L_ϕ denotes the « bare » phase coherence length $L_\phi = (D\tau_\phi)^{1/2}$, then the true phase coherence length ξ_ϕ must be defined by

$$\xi_\phi/a = (L_\phi/a)^{\bar{d}/\bar{d}} \quad (68)$$

($\bar{d}$ = fractal dimensionality).

From equations (67), (68), one deduces the following result

$$\Delta R/R \sim L_\phi^{(2-\bar{d})} \sim \xi_\phi^{-\beta_L} \quad (69)$$

where $-\beta_L = (2 - \bar{d})\bar{d}/\bar{d}$ denotes the localization exponent of the fractal structure. Note that this result agrees with the prediction of reference [27], obtained through a different argument. In figure 23 are shown some numerical results : $\Delta R/R$ vs. $\eta = a/L_\phi$ at zero magnetic field. Clearly, the scaling behaviour (Eq. (69)) is well obeyed.

4.4.2 Finite magnetic field. — Following the scaling arguments of reference [25], one expects two different regimes

weak fields ($H\xi_\phi^2 \ll \phi_0$) :

$$\Delta R/R(H=0) - \Delta R/R(H) \sim H^2 \quad (70)$$

typical fields ($H\xi_\phi^2 \gg \phi_0$) :

$$\Delta R/R(H) \sim H^{+\beta_L/2} \quad (71)$$

Note that equations (70), (71) are simply the extension to fractals, of the known results on Euclidean networks (at $d = 2$, $\beta_L = 0$ and one gets the usual logarithmic regime). This behaviour is actually well observed on the numerical results shown in figure 24. The slope of $\Delta R/R$ vs. ϕ/ϕ_0 in a log-log plot is given by $\beta_L/2$.

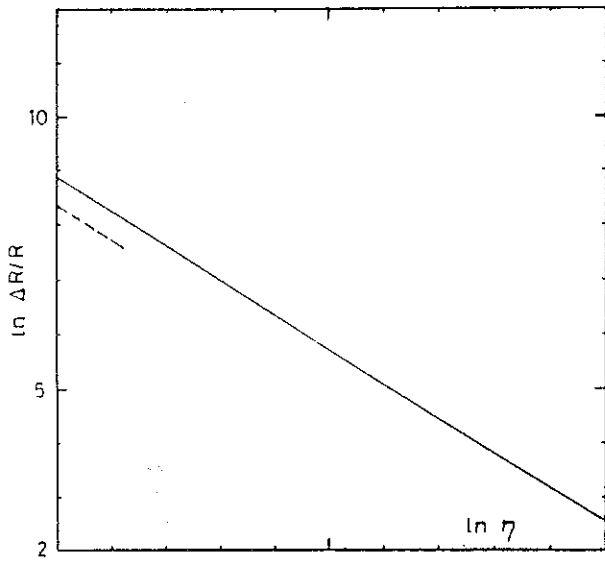


Fig. 23. — $\ln \Delta R/R$ as a function of $\ln \eta$ for the Sierpinski gasket. The expression of $\Delta R/R$ (Eq. (C.1)) has been divided by η in order to take into account the L_p dependence of the factor κ . For comparison, a dashed line of slope $\bar{d} - 2 = \frac{2 \ln 3}{\ln 5} - 2 \simeq 0.6348$ is drawn. The scaling behaviour, equation (69) is well obeyed.

However, the power law (Eq. (71)) so obtained is actually modulated by a small periodic function. The period of this oscillation is $\ln 4$, i.e. the ratio of the areas of two consecutive triangles on the gasket. The physical origin of this phenomenon is the following. As was shown in Appendix C, the gasket breaks down into independent pieces after m^* iterations of the renormalization procedure. This gives rise to equation (69) in zero magnetic field. The magnetic field H controls actually this long range cut-off. Decreasing the magnetic field by a factor of four corresponds to an increase by a factor of two of the long range cut-off and this is equivalent to iterating one more step. Therefore, the obtained modulations are the consequence of the dilation invariance of the gasket only under a discrete subgroup of the dilation group. Therefore, we expect that this fine structure will disappear in random fractal structures such as the percolation clusters.

The scaling behaviour of equations (70), (71) can be derived in the present case using the formulation of Appendix C. Indeed, in strong field regime the long range cut-off is no longer given by ξ_p . We can then set $\mu \sim \lambda$ as if $\xi_p = \infty$, and then obtain :

$$\phi_n/\phi_{n=0} = 4^n \left(4 + 13 \left(\frac{3}{20} \right)^n \right) / 17. \quad (72)$$

The maximal modulations of $\Delta R/R$ are obtained for ϕ/ϕ_0 corresponding to integer values of the renormalized fluxes ϕ and ϕ . According to equation (72), ϕ_n is the same for : $(n \gg 1) (\phi, n)$ and $(\phi/4, n+1)$. This

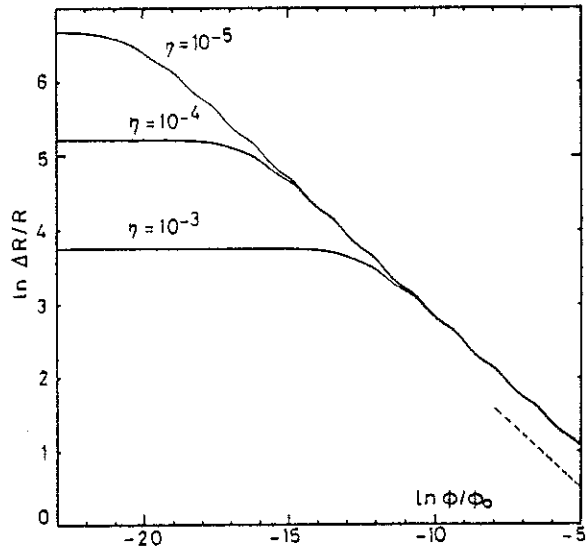


Fig. 24. — Log-log plot of $\Delta R/R$ as a function of the reduced flux ϕ/ϕ_0 through the elementary triangular cell of the Sierpinski gasket, for $\eta = 10^{-5}, 10^{-4}$ and 10^{-3} respectively. The figure shows clearly the crossover between weak and large field regimes. The crossover field increases when L_p decreases. In addition to the main power-like behaviour predicted by equation (71), one observes modulations of $\Delta R/R$, with a period of $\ln 4$. The dashed line of slope $-\beta_L/2 = \bar{d}(2 - \bar{d})/2 \simeq 0.36848$ has been drawn for comparison.

explains quantitatively the « period » $\ln 4$ of the modulation.

At low magnetic fields, $\Delta R/R$ as given by equation (34), is controlled by the spectrum of the tight-binding model on the gasket. This problem, with obvious notations, can be written as

$$4x_i - \sum_j e^{-i\eta_{ij}} x_j = \omega^2 x_i \quad (73)$$

ω^2 is actually an eigenvalue of equation (73). Therefore, equation (34) implies :

$$\Delta R/R \sim \sum_{\omega} \frac{1}{4(\cosh \eta - 1) + \omega^2} \quad (74)$$

where $\eta = a/L_p$. As was shown for the square network case, $\Delta R/R$ is dominated by the low energy modes in the spectrum. Let us denote by $\omega_e(H)$ the lower edge spectrum, and assume a power law form : $\omega_e(H) \sim H^s$ as for Euclidean networks. In the limit $\eta = a/L_p \ll 1$, equation (74) reduces to

$$\frac{\Delta R}{R}(H=0) - \frac{\Delta R}{R}(H) \simeq \int_0^{\omega_e(H)} d\omega \omega^{\bar{d}-1} / (2\eta^2 + \omega^2) \quad (75)$$

and then

$$\Delta R/R(H=0) - \Delta R/R(H) \sim \text{Const.} - H^{s(\bar{d}-2)}. \quad (76)$$

However, in the regime where $H\ell_\phi^2 \gg 1$, the long range cut-off length is given by H and then $\Delta R/R(H)$ is only a function of H . Therefore, we obtain :

$$\Delta R/R(H) \sim H^{s(d-2)}. \quad (77)$$

The comparison with equation (71) leads to :

$$s = \bar{d}/2 \bar{d}. \quad (78)$$

For the Sierpinski gasket, $\bar{d} = \ln 3/\ln 2$ and $\bar{d} = 2 \ln 3/\ln 5$, leading to $s = \frac{\ln 5}{4 \ln 2} = 0.580$. This detailed analysis of the gasket confirms the expected scaling laws for the weak-localization corrections in non Euclidean structures. These results are relevant for the experiments done on metal-insulator mixtures, close to the percolation threshold [28, 29].

5. Comparison with experimental data.

Presently, a certain number of experiments have been performed on multiconnected networks [3-5]. In order to make a close comparison with the weak-localization theory predictions, we should take into account three effects, which have been neglected in the previous sections.

The first one is the finite width of wires, which is responsible for the damping of the MR oscillations at large field : the backscattering loops are no longer around a very well defined flux.

The second one is the spin-orbit and spin-flip scatterings which are responsible for a change in both the sign and the magnitude of the MR oscillations [16]. The third effect is given by electron-electron interactions. Indeed, the mutual influence between impurity scattering and screened Coulomb interactions of electrons is known [30, 31] to give important corrections to the conductivity at low temperatures. In the multiconnected networks considered here, the interaction effects on the Cooper channel have to be taken into account, at least for high enough perpendicular magnetic fields : $eH > k_B T/D$. However in the available experiments, $L_T \equiv (\hbar D/k_B T)^{1/2}$ is very small when compared to L_ϕ . This allows a good distinction between weak localization effects at small fields and interaction effect at large fields [31]. Therefore, we will assume that $L_T \ll L_\phi$ and then neglect here the interaction effects.

5.1 FINITE WIDTH OF WIRES. — The finite width of wires can be taken into account, through a simple renormalization of the phase coherence length, which becomes a quadratic function of the applied magnetic field [32] :

$$L_\phi(H) = L_\phi(H=0) \left[1 + \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{HwL_\phi}{\phi_0} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (79)$$

Here w denotes the finite width of wires. The original calculation, leading to equation (79) has been per-

formed for a single wire, in the limit of small enough magnetic fields. However, equation (79) is no longer valid when the magnetic flux through the area of a network node ($\sim w^2$) becomes of order $\sim \phi_0$: there the MR becomes sensitive to the detailed shape of the nodes and our approach cannot be used. But, this occurs at very high fields and equation (79) breaks down before such fields are reached. Actually equation (79) is a good approximation as long as : $HwL_\phi/\phi_0 \lesssim 1$. We have checked numerically the renormalization of L_ϕ , by comparing the multistrip expression (Eq. (47)) with the single loop result after the renormalization of L_ϕ . The obtained results are very satisfactory, supporting the validity of equation (79), in the field interval of interest.

5.2 SPIN-ORBIT AND SPIN-FLIP SCATTERING. — The presence of these processes can be taken into account by separating the singlet and triplet contributions to the Cooperon [16]. The spin-orbit interaction affects only the triplet one. Formally, L_ϕ has to be replaced by a combination [10] of L_ϕ , L_{so} and L_s :

$$L_{\text{triplet}} = \left[L_\phi^{-2} + \frac{4}{3} L_{so}^{-2} + \frac{2}{3} L_s^{-2} \right]^{-1/2}$$

$$L_{\text{singlet}} = [L_\phi^{-2} + 2 L_s^{-2}]^{-1/2}. \quad (80)$$

The resulting Cooperon is then given by [16] :

$$C = -\frac{1}{2} C_{\text{singlet}} + \frac{3}{2} C_{\text{triplet}} \quad (81)$$

where C_{singlet} and C_{triplet} are obtained as before by replacing L_ϕ by L_{singlet} and L_{triplet} respectively.

A quantitative comparison between the theoretical results and experimental data is shown in figure 25. The solid line corresponds to Cu, at $T = 133$ mK, in a honeycomb network geometry. Here the spin-orbit

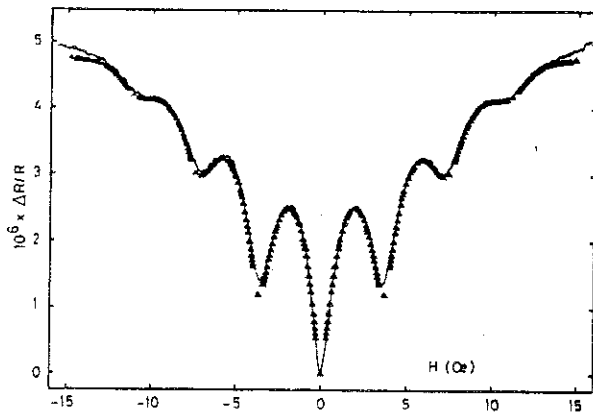


Fig. 25. — Quantitative comparison between the theoretical results (triangles) and experimental data (solid line), for Cu at $T = 133$ mK, taken from reference [3]. The hexagonal elementary cells (side $a = 1.5 \mu\text{m}$) are made of wires of width $w = 0.42 \mu\text{m}$. In this fit, we have $L_\phi = 5.36 \mu\text{m}$ and $L_{so} = 3.12 \mu\text{m}$ respectively (L_{so} is the spin-orbit length).

coupling has been taken into account. In this situation the field renormalization of $\eta = a/L_\phi$ gives

$$\eta^2(H) = \eta^2(H=0) + \frac{4}{81} \pi^2 (\phi/\phi_0)^2 (w/a)^2 \quad (82)$$

where ϕ denotes the magnetic flux through an elementary hexagonal cell (side a) made of wires of width w . This low-field approximation breaks down at $Haw \gtrsim \phi_0$. The renormalization of η becomes important at large H and is actually responsible for the damping of oscillations. Other experimental data [3] obtained for different metals, on square and honeycomb networks have also been analysed following the same scheme. This allowed in particular the calculation of the temperature variations of L_ϕ . The observed deviations, appearing at large H , have also been investigated. Detailed results will be given elsewhere [33].

Note that the results obtained on necklaces and ladders [4] also agree with our general results. For these geometries, a reduction of the MR oscillations has been found, in comparison with the single ring behaviour, when L_ϕ is large. Furthermore, the MR curve does not exhibit any fine structure in agreement with our conclusions.

6. Conclusions.

Our main results are summarized in the introduction. Let us conclude this paper with some remarks relative to our approach. The network formalism used in this paper assumes the validity of the Cooperon's equation (Eqs. (1), (2)) for the calculation of the magnetoresistance $\Delta R/R$ corrections. As can be seen, this approach gives a set of reliable results for extended networks as well as for the single ring [5] geometries. In this approach, all traces of randomness are summarized in the phase coherence length L_ϕ , and the theory is an averaged one [10]. In this respect, fluctuations from sample to sample are neglected and $\Delta\sigma(\mathbf{r})$ refers actually to an averaged correction to the conductivity. However recent numerical calculations, done on 1D ladders [35], suggest the existence of such fluctuations on the magnetoresistance behaviour. This problem of the probability distribution of the magnetoresistance is still open and some relevant results will be reported in a forthcoming paper [35].

In addition to the self averaging question, the possibility of the coexistence of two harmonics (ϕ_0 and

$2\phi_0$) has been raised recently [5, 18] on small systems. For instance, magnetoresistance oscillations with the expected period ϕ_0 have been observed recently [5] on thin-film rings (1-2 μm in diameter). This is the first observation in single rings of oscillations with flux period ϕ_0 at low fields. Small periodic oscillations (period $2\phi_0$) have also been observed at higher fields [5, 18] in such small systems. These results provide strong evidence that these two types of oscillations, seen on the same ring, arise from different interference mechanisms. Therefore, it is of importance to produce a unified theory for both types of oscillations using a single theoretical framework.

Acknowledgments.

The authors would like to thank Dr J. C. Angles d'Auriac and Dr B. Pannetier for friendly and useful discussions.

Appendix A.

Using the formalism developed in section 3, the matrix M for the single wire with N side branches, shown on figure 3a, can be written as

$$\begin{aligned} M_{0,0} &= M_{N+1,N+1} = \coth(a/L_\phi) \\ M_{i,i} &= 2 \coth(a/L_\phi) + \coth(b/L_\phi), \quad 1 \leq i \leq N \\ M_{i',i'} &= \coth(b/L_\phi), \quad 1 \leq i' \leq N \\ M_{i,i+1} &= 1/\sinh(a/L_\phi), \quad 0 \leq i \leq N \\ M_{i,i'} &= 1/\sinh(b/L_\phi), \quad 1 \leq i, i' \leq N. \end{aligned}$$

The matrix M is a Jacobi-like one and then can be inverted recursively. The calculation of the cofactors T_{ii} of M can be done through the definition of the sequence $u_i = C_i/C_{i+1}$ giving the ratio of $C(x)$ at two successive nodes for the homogeneous equation. It is easy to show the following recursion equation for u_i 's :

$$\begin{aligned} u_0 &= 1/\cosh(a/L_\phi) \\ u_{i+1} &= \left[2 \cosh \frac{a}{L_\phi} + \tanh \frac{b}{L_\phi} \sinh \frac{a}{L_\phi} - u_i \right]^{-1}. \end{aligned}$$

The coefficients T_{ii} can be expressed simply from the solution $\{u_i\}$:

$$\begin{aligned} T_{0,0} &= T_{N+1,N+1} = \sinh(a/L_\phi)/(\cosh(a/L_\phi) - u_N), \\ T_{i,i} &= \sinh(a/L_\phi)/[2 \cosh(a/L_\phi) + \tanh(b/L_\phi) \sinh(a/L_\phi) - u_{i-1} - u_{N-i}], \quad (1 \leq i \leq N) \\ T_{i,i+1} &= u_{N-i} T_{ii}, \quad (0 \leq i \leq N) \\ T_{i',i'} &= \tanh(b/L_\phi) + T_{ii}/\cosh^2(b/L_\phi), \quad (1 \leq i \leq N) \\ T_{i,i'} &= T_{ii}/\cosh(b/L_\phi), \quad (1 \leq i \leq N) \end{aligned}$$

The local correction to the conductivity is obtained from equation (30) and the above expressions for T_{ij} 's.

In order to calculate the global correction $\Delta R/R$, only the local correction along the principal axis of the wire has to be taken into account : current does not flow along the dandling branches. We obtain ($\eta = a/L_\varphi$) :

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\kappa}{2} \left[\frac{\eta \cosh \eta - \sinh \eta}{\eta \sinh \eta} + \frac{2}{(N+1)} \left(\frac{\sinh \eta \cosh \eta - \eta}{\eta \sinh^2 \eta} \right) \sum_{\alpha=0}^N T_{\alpha\alpha} + \right. \\ \left. + \frac{2}{(N+1)} \frac{\eta \cosh \eta - \sinh \eta}{\eta \sinh^2 \eta} \sum_{\alpha=0}^N T_{\alpha, \alpha+1} \right].$$

In the limit $N \gg 1$, it is possible to simplify the result, replacing $T_{\alpha\alpha}$ by its limit :

$$u_\infty = \frac{1}{2} \left\{ \left(2 \cosh \eta + \tanh \frac{b}{L_\varphi} \sinh \eta \right) - \left[\left(2 \cosh \eta + \tanh \frac{b}{L_\varphi} \sinh \eta \right)^2 - 4 \right]^{1/2} \right\}$$

$$T_{\infty\infty} = \frac{\sinh \eta}{\left[\left(2 \cosh \eta + \tanh \frac{b}{L_\varphi} \sinh \eta \right)^2 - 4 \right]^{1/2}}.$$

Then

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\kappa}{2 \eta \sinh \eta} \left[\eta \cosh \eta - \sinh \eta + \frac{2[(\sinh \eta \cosh \eta - \eta) + (\eta \cosh \eta - \sinh \eta) u_\infty]}{\left[\left(2 \cosh \eta + \tanh \frac{b}{L_\varphi} \sinh \eta \right)^2 - 4 \right]^{1/2}} \right].$$

Note that for $b = 0$ we have $\frac{\Delta R}{R} = \frac{\kappa}{2}$, as is the case for an infinite wire.

Appendix B.

In this Appendix, we shall summarize some results relative to two networks, not discussed in the text, which can be of some experimental interest.

1) SINGLE RING WITH DANGLING SIDE BRANCHES (Fig. 26). — Let us denote by ϕ the magnetic flux through the loop (length = Na) and by b the common length of side branches. Using the notation of figure 26, one finds

$$C(x) = \frac{L_\varphi}{\hbar D S} \left(\sinh \frac{a}{L_\varphi} + \tanh \frac{b}{L_\varphi} \sinh \frac{x}{L_\varphi} \sinh \frac{a-x}{L_\varphi} \right) \cdot G$$

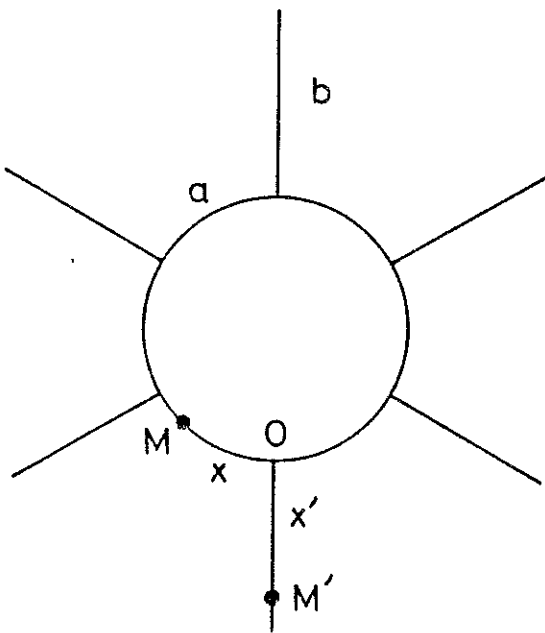


Fig. 26. — A closed ring geometry with dangling side branches.

for points x on the loop, and

$$C(x') = \frac{L_\phi}{\hbar D S \sinh b/L_\phi} \left\{ \sinh \frac{x'}{L_\phi} \sinh \frac{b-x'}{L_\phi} + \frac{\sinh^2 x'/L_\phi}{\cosh b/L_\phi} + \right. \\ \left. + G \cdot \frac{\sinh a/L_\phi}{\sinh b/L_\phi} \left[\frac{\sinh^2 x'/L_\phi}{\cosh^2 b/L_\phi} + \sinh^2 \frac{b-x'}{L_\phi} + 2 \frac{\sinh x'/L_\phi \sinh \frac{b-x'}{L_\phi}}{\cosh b/L_\phi} \right] \right\}$$

on a branch. Here G refers to the sum

$$G = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\cosh \frac{a}{L_\phi} + \frac{1}{2} \sinh \frac{a}{L_\phi} \tanh \frac{b}{L_\phi} - \cos \frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{\phi}{\phi_0} \right) \right]^{-1}.$$

In practice, it is convenient to use the following compact expression for G :

$$G = (z^2 - 1)^{-1/2} (\alpha^N - \beta^N) / (\alpha^N + \beta^N - 2 \cos 2\pi \frac{\phi}{\phi_0})$$

where

$$z = \cosh \frac{a}{L_\phi} + \frac{1}{2} \sinh \frac{a}{L_\phi} \tanh \frac{b}{L_\phi}, \quad \alpha = z + (z^2 - 1)^{-1/2}, \quad \beta = z - (z^2 - 1)^{-1/2}.$$

Note that $C(x' = 0) \leq C(x' = b)$ holds in general and the difference $C(x' = b) - C(x' = 0)$ is larger at $\phi/\phi_0 = 1/2$ than at $\phi/\phi_0 = 0$.

2) CHAIN OF RINGS (Fig. 27). — For N identical rings, of length $2a$ each, articulated with identical strands (of length a each), the integrated correction to the total resistance R_{AB} is given by

$$\Delta R_{AB}/R_{AB} = \frac{\kappa}{2} \frac{1}{3N+1} \left\{ (N-1) \frac{\eta \cosh \eta - \sinh \eta}{\eta \sinh \eta} + \frac{2 \sinh \eta}{\cosh \eta - u_{2N+1}} + \right. \\ \left. + 6 \sinh \eta \cdot \sum_{p=1}^N \left[3 \cosh \eta - \left(u_{2p-1} + 2 \cos \pi \frac{\phi}{\phi_0} \cdot u_{2(N-p)+2} \right) \right]^{-1} \right\}.$$

Here $\eta = a/L_\phi$ and $\{u_p\}$ denotes the sequence, defined recursively by :

$$u_1 = 1/\cosh \eta \\ u_{2p} = 2 \cos(\pi\phi/\phi_0)/(3 \cosh \eta - u_{2p-1}) \\ u_{2p+1} = 1/(3 \cosh \eta - 2 \cos(\pi\phi/\phi_0) \cdot u_{2p})$$

Appendix C.

In this appendix we shall outline the recursion procedure, used for the calculation of $\Delta R/R$ on the Sierpinski gasket. The notations are given in figure 22. The length L_ϕ refers to the bare coherence length. From equation (35), one has

$$\Delta R/R = \frac{\kappa}{4} \left\{ \frac{\eta \cosh \eta - \sinh \eta}{\eta \sinh \eta} + 4 \sinh \eta \frac{1}{N} \sum_i J_{ii} \right\}. \quad (C.1)$$

For convenience, we have replaced M by $\sinh \eta \cdot M$.

The idea of the decimation procedure is the following. It is actually possible to express J_{AA} , J_{aa} , J_{AB} , ..., as functions of the inverse matrix elements J_{AA}^R ,

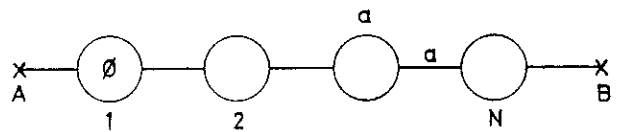


Fig. 27. — An open chain of rings with arms.

J_{BB}^R , J_{CC}^R of a renormalized operation J^R associated to the renormalized gasket (decimation by a factor 2). During this renormalization procedure, non diagonal matrix elements (e.a. J_{AB}^R) are introduced. At each step m of the recursion, $\Delta R/R$ is given as a linear combination of three gauge-invariant terms :

$$J(m) = \frac{1}{N_s(m)} \sum_\mu J_{\mu\mu}^{(m)}$$

$$J_+(m) = \frac{1}{N_b(m)} \sum_{(\mu\nu)} J_{\mu\nu}^{(m)} e^{i\gamma_{\mu\nu}^{(m)}} \quad (C.2)$$

and

$$J_-(m) = J_+^*(m).$$

Here, $N_s(m)$ and $N_b(m)$ are respectively the number of sites and bonds of the gasket, at step m . The sum in $J_+(m)$ is taken over positively oriented bonds $(\mu\nu)$: the orientation of a bond is defined from that of the corresponding elementary triangle. The expression of $\Delta R/R$ can be written as

$$\Delta R/R = \frac{\kappa}{2} [X(m) + Y(m) J(m) + Z(m) J_+(m) + Z^*(m) J_-(m)]$$

where X , Y and Z are defined recursively (see below), and

$$X(0) = \frac{1}{2} (\eta \cosh \eta - \sinh \eta) / (\eta \sinh \eta)$$

$$Y(0) = 2 \sinh \eta, \quad Z(0) = 0.$$

1) RENORMALIZATION OF THE OPERATOR M . — At step m , the matrix elements of the operator $M \equiv M^{(m)}$ are given by

$$M_{\mu\mu}^{(m)} = 4 \lambda_m \quad \text{and} \quad M_{\mu\nu}^{(m)} = -\mu_m e^{-i\gamma_{\mu\nu}}$$

(μ and ν connected by a single link). It is actually necessary to distinguish two effective fluxes through: corner triangles ϕ_m and central triangle $\bar{\phi}_m$. The recursion relations for $\lambda_m, \mu_m, \dots$ etc., can be written as

$$\lambda_{m+1} = \lambda - \frac{\mu^2}{\Delta} [16 \lambda^2 - \mu^2 + 4 \lambda \mu \cos 2 \pi \phi + \mu^2 \cos 2 \pi (\phi + \bar{\phi})]$$

$$[\mu e^{-i\gamma_{\mu\nu}}]_{m+1} = \mu_{m+1} e^{-i\gamma_{\mu\nu}} e^{i\theta} \quad (C.3)$$

and

$$\mu_{m+1} e^{i\theta} = \frac{\mu^2}{\Delta} [16 \lambda^2 - \mu^2 + 4 \lambda \mu (e^{2i\pi(2\phi + \bar{\phi})} + 2 e^{2i\pi\phi} + \mu^2 (2 e^{2i\pi(\phi + \bar{\phi})} + e^{4i\pi\phi})].$$

Here $\lambda, \mu, \phi, \bar{\phi}, \dots$ refer to $\lambda_m, \mu_m, \phi_m, \bar{\phi}_m, \dots$, etc., at step m . Δ is given by

$$\Delta = 64 \lambda^3 - 2 \mu^3 \cos 2 \pi \bar{\phi} - 12 \lambda \mu^2.$$

The phase factor θ is related to the reduced fluxes ϕ and $\bar{\phi}$ through:

$$\phi_{m+1} = 3 \phi_m + \bar{\phi}_m - \frac{3}{2 \pi} \theta. \quad (C.4)$$

Note that ϕ_m and $\bar{\phi}_m$ are related by $\phi_m + \bar{\phi}_m = 2.4^\pi \phi_{m=0}$. The set of equations (C.3) and (C.4) defines actually the new operator M , on the renormalized gasket.

2) RENORMALIZATION OF THE OPERATOR $J = M^{-1}$. — Using the renormalized operator M^R , one can write down the renormalization equations for $J(m)$, $J_+(m)$ and $J_-(m)$. Assume that we want to calculate J_{aa} for instance. J_{aa} is actually equal to x_a , where $x_a, x_b, x_c, x_A, \dots$ are the solutions of the linear system associated to matrix M , the source term being located at node a . Therefore, in order to calculate J_{aa} , we start by calculating x_a, x_b and x_c as functions of x_A, x_B and x_C . The next step would be the calculation of x_A, x_B and x_C in terms of the inverse matrix $J^R = (M^R)^{-1}$. Coming back to x_a, x_b, x_c , one can deduce the desired quantities $J_{aa}, J_{ab}, \dots$ etc. In order to perform such calculations, it is useful to introduce the 3×3 matrix D and the vector A :

$$\begin{bmatrix} J(m) \\ J(m) \\ J_-(m) \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} J(m+1) \\ J(m+1) \\ J_-(m+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A(m) \\ A(m) \\ A_-(m) \end{bmatrix}.$$

The matrix elements of D are given by:

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{1}{3} \left[1 + \frac{2\mu^2}{\Delta^2} (2G + H e^{2i\pi\phi} + H^* e^{-2i\pi\phi}) \right], \\ D_{12} &= \frac{2}{3} \frac{\mu^2}{\Delta^2} e^{i\theta} [G + H e^{-2i\pi(2\phi + \bar{\phi})} + 2 H^* e^{-2i\pi\phi}], \\ D_{13} &= D_{12}^*, \\ D_{21} &= \frac{2\mu}{3\Delta} [E + F e^{2i\pi\phi}] + \frac{\mu^2}{3\Delta^2} [G e^{2i\pi\phi} + H e^{-2i\pi(\phi + \bar{\phi})} + 2 H^*], \\ e^{-i\theta} \cdot D_{22} &= \frac{2\mu}{3\Delta} [E + F^* e^{-2i\pi\phi}] + \frac{\mu^2}{3\Delta^2} [G e^{-2i\pi(2\phi + \bar{\phi})} + 2 H e^{-2i\pi(\phi + \bar{\phi})} + H^*], \\ e^{i\theta} \cdot D_{23} &= \frac{2\mu}{3\Delta} [F e^{2i\pi\phi} + F^* e^{2i\pi(2\phi + \bar{\phi})}] + \frac{\mu^2}{3\Delta^2} [2 G e^{2i\pi\phi} + H e^{4i\pi\phi} + H^*], \\ D_{31} &= D_{21}^*; \quad D_{32} = D_{23}^*; \quad D_{33} = D_{22}^*. \end{aligned}$$

Here we have used the following notation :

$$\begin{aligned} E &= 16 \lambda^2 - \mu^2, & F &= 4 \lambda \mu + \mu^2 e^{i2\pi\bar{\phi}} \\ G &= 256 \lambda^4 + 3 \mu^4 + 16 \lambda \mu^3 \cos 2 \pi \bar{\phi} \\ H &= 128 \mu \lambda^3 + 48 \mu^2 \lambda^2 e^{2i\pi\bar{\phi}} + \mu^4 (e^{-2i\pi\bar{\phi}} - 2 e^{2i\pi\bar{\phi}}). \end{aligned}$$

Similarly, the vector elements of A are given by

$$A(m) = \frac{2}{3\Delta} E; \quad A_+(m) = \frac{1}{3\Delta} F^*, \quad A_-(m) = \frac{1}{3\Delta} F.$$

Using the above notations, one deduces the recursion relations :

$$\begin{aligned} X(m+1) &= X(m) + \frac{2}{3\Delta} E \cdot Y(m) + \frac{1}{3\Delta} F^* \cdot Z(m) + \frac{1}{3\Delta} F \cdot Z^*(m) \\ \begin{bmatrix} Y(m+1) \\ Z(m+1) \\ Z^*(m+1) \end{bmatrix} &= {}^tD \begin{bmatrix} Y(m) \\ Z(m) \\ Z^*(m) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Here tD denotes the transpose of the matrix D .

During the iteration, μ_m converges very rapidly towards zero. Therefore M can be approximated, after m^* iterations, by a diagonal matrix and this leads to : $\frac{\Delta R}{R} \simeq \frac{\kappa}{2} [X(m^*) + Y(m^*)/4 \lambda_m^*]$.

References

- [1] ALTSHULER, B. L., ARONOV, A. G. and SPIVAK, B. Z., *JETP Lett.* **33** (1981) 94.
- [2] AHARONOV, Y. and BOHM, D., *Phys. Rev.* **115** (1959) 485.
- [3] PANNETIER, B., CHAUSSY, J., RAMMAL, R. and GANDIT, P., *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984) 718; *Phys. Rev. B* **31** (1985) 3209.
- [4] BISHOP, D. J., LICINI, J. C. and DOLAN, G. J., *Appl. Phys. Lett.* **46** (1985) 1000; AT and T. Bell Laboratories preprints (1985).
- [5] CHANDRASEKHAR, V., ROOKS, M. J., WIND, S. and PROBER, D. E., *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 1610.
- [6] SHARVIN, D. Y. and SHARVIN, Y. V., *JETP Lett.* **34** (1981) 272.
- [7] For a recent review, see SHARVIN, Y. V., *Physica* **126B-C** (1984) 288, and references to previous work therein.
- [8] BRANDT, N. B., BOGACHEK, E. N., GITSU, D. V., GOGADZE, G. A., KULIK, I. O., NIKOLAEVA, A. A. and PONOMAREV, Y. G., *Sov. Phys. J. Low Temp. Phys.* **8** (1982) 358.
- [9] LITTLE, W. A. and PARKS, R. D., *Phys. Rev. Lett.* **9** (1962) 9.
- [10] KHMELNITSKII, D. E., *Physica* **126B-C** (1984) 235. See also BERGMANN, G., *Phys. Reports* **107** (1984) 1. LEE, P. A. and RAMAKRISHNAN, T. V., *Rev. Mod. Phys.* **57** (1985) 287.
- [11] ALEXANDER, S., *Phys. Rev.* **B27** (1983) 1541. RAMMAL, R., LUBENSKY, T. C. and TOULOUSE, G., *Phys. Rev. B* **27** (1983) 2820.
- [12] PANNETIER, B., CHAUSSY, J., RAMMAL, R. and VILLEGIER, J., *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984) 1845.
- [13] DOUCOT, B. and RAMMAL, R., *Phys. Rev. B* (1986). To be published.
- [14] DOUCOT, B. and RAMMAL, R., *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 1148.
- [15] The first quantum correction to the conductivity is given by a series of diagrams which closely resemble the cooper-pair diagrams of Superconductivity theory and are called Cooperons. See ANDERSON, P. W., *Physica* **117-118B** (1983) 30.
- [16] ALTSHULER, B. L., ARONOV, A. G., KHMELNITSKII, D. E. and LARKIN, A. I., in *Quantum Theory of solids*, edited by I. M. Lifshitz (Izdatelstvo Mir, Moscou) 1982, p. 130.
- [17] VOLKOV, V. A., *JETP Lett.* **36** (1982) 475.
- [18] For recent theoretical works on small systems, see BUTTIKER, M., IMRY, Y., LANDAUER, R. and PINHAS, S., *Phys. Rev. B* **31** (1985) 6207 and references therein. Recent experimental work may be found in WEBB, R., WASHBURN, S., UMBACH, C. P. and LAIBOWITZ, R. B., *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 2696.
- [19] ALTSHULER, B. L., ARONOV, A. G. and ZYUZIN, A. Y., *Sov. Phys. JETP* **59** (1984) 415.
- [20] See for instance HOFSTADTER, D. R., *Phys. Rev. B* **14** (1976) 2239 and references therein.
- [21] CLARO, F. and WANNIER, G. H., *Phys. Status Solidi* (b) **88** (1978) K147.
- [22] RAMMAL, R., *J. Physique* **46** (1985) 1345.
- [23] RAMMAL, R. and TOULOUSE, G., *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 1194.
- [24] BANAVAR, J. R., KADANOFF, L. P. and PRUISKEN, A. M. M., *Phys. Rev. B* **31** (1985) 1388.
- [25] KHMELNITSKII, D. E., *JETP Lett.* **32** (1980) 229.

- [26] ALEXANDER, S. and ORBACH, R., *J. Physique Lett.* **43** (1982) L-625.
- [27] RAMMAL, R. and TOULOUSE, G., *J. Physique Lett.* **44** (1983) L-13.
- [28] ARONOV, A. G., GERSHENZON, M. E. and ZHURAVLEV, Y. E., *Sov. Phys. JETP* **60** (1984) 554.
- [29] DEUTSCHER, G., GOLDMAN, A. M. and MICKLITZ, H., *Phys. Rev. B* **31** (1985) 1679.
- [30] FUKUYAMA, H., *J. Phys. Soc. Jpn.* **48** (1980) 2169.
- [31] LIN, B. J. F., PAALANEN, M. A., GOSSARD, A. C. and TSUI, D. C., *Phys. Rev. B* **29** (1984) 927.
- [32] ALTSHULER, B. L. and ARONOV, A. G., *JETP Lett.* **33** (1981) 499.
- [33] DOUCOT, B. and PANNETIER, B., *Phys. Rev. B* (1986). To be published.
- [34] FOURCADE, B., preprint (1985).
- [35] DOUCOT, B. and RAMMAL, R., submitted to *Phys. Rev. Lett.* (1986).
-

FIRST OBSERVATION OF THE UNIVERSAL PERIODIC CORRECTIONS
TO SCALING : MAGNETORESISTANCE OF NORMAL-METAL SELF-
SIMILAR NETWORKS

B. DOUCOT, W. WANG, J. CHAUSSY, B. PANNETIER, R. RAMMAL
Centre de Recherches sur les Très Basses Températures, Centre
National de la Recherche Scientifique, BP 166 X, 38042 GRENOBLE
Cédex, FRANCE

A. VAREILLE, D. HENRY
Centre National d'Etude des Télécommunications, BP 42,
38240 MEYLAN, FRANCE.

ABSTRACT

In many physical problems where renormalization group transformations are exact, periodic oscillating corrections to power law behaviors are usually expected. The magnetoresistance of a normal-metal self-similar network, which exhibits such behavior in the weak localization regime, is shown to provide the first experimental evidence for this phenomenon.

PACS numbers : 64.60.Ak, 71.55.Jv, 73.60.-n.

In many physical problems where scaling properties play an important role, it is now well established that renormalization group (RG) transformations are the natural tool for a detailed interpretation of the observed phenomena. In this context, self similar structures appear as the ideal models for a simple and transparent illustration of scaling concepts. The most interesting feature of self-similar structures is probably the possibility to have exact RG transformations, which allow for a detailed study of the RG flow. The powerful method of RG has been extended in recent years, to various fields including a wide range of physical problems (Condensed Matter, Statistical and Quantum Mechanics, Fluid Dynamics, disordered Systems, etc.). In general, when a RG transformation holds exactly, there are two basic equations. The first one gives the transformation law of parameters under a scale change (length or time scale for instance). The second one is simply the transformation equation of a given physical quantity (free energy, Green's function,...). In order to illustrate the purpose of this letter, let us consider the case of one parameter (x) RG and one physical observable $F(x)$. A simple example of a RG transformation is provided by the following functional equation, for F :

$$\mu F(x) = F[\varphi(x)] \quad (1)$$

Here $F(x)$ is assumed to be a very well behaved function and μ denotes a positive real number. The function $\varphi(x)$, which generates the RG flow, is usually used to extract the

qualitative behavior as well as the stability of fixed points and critical exponents. For example if $x = 0$ denotes a fixed point ($\varphi(0) = 0$) and $\varphi(x) = \lambda x + \dots$ is the corresponding linearized transformation, then $\omega = \ln \mu / \ln \lambda$ is the critical exponent describing the power law solution $F_0(x) = x^\omega$ of Eq. 1 near this fixed point.

Aside from this sort of local analysis of the RG flow near fixed points, one can be interested by the general solutions of Eq. 1. It appears that there is actually a large number of simple but non trivial such solutions. Indeed, if we assume, that $F_0(x)$ is a particular solution, then the general solution $F(x)$ is related to $F_0(x)$ in terms of a periodic function $p(x)$, with a period $\ln \mu$, through

$$F(x) = F_0(x) \cdot p(\ln F_0(x)) \quad (2)$$

Using the Fourier expansion of $p(x)$, and assuming the following expansion for the function $F_0(x)$: $F_0(x) = x^\omega \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n$, one ends up with the general solution (F real)

$$F(x) = \sum_{n,m=0}^{\infty} F_{m,n} x^{\omega+n} \cos[2\pi m \ln x / \ln \mu + \theta_{m,n}] \quad (3)$$

where $F_{m,n}$ and $\theta_{m,n}$ denote constant numbers.

The occurrence of these universal oscillations is actually a quite general phenomenon related to functional equations like Eq. 1, where $\varphi(x)$ is an analytical function. In statistical mechanics⁽¹⁾, this corresponds to critical "complex exponents" which are usually rejected for translationally

invariant systems since they imply a length scale, or a finite size. However, these oscillations, although of a rather small amplitude, can appear in general when an exact RG transformation occurs as is the case of self-similar structures, and this will be shown below. For a much more rigorous discussion of this point, we direct the reader to Ref. 2.

In order to highlight these periodic oscillations, we have used a regular self similar network made of submicronic Al wires : the Sierpinski gasket^(3,4) which is a 2D array of triangles (see Fig. 1 of Ref. 4) exhibiting a perfect dilation symmetry. The gasket structure has been realized by direct writing of the pattern on PMMA (polymethyl-metacrylate) resist using an electron beam microfabricator (Cambridge EBMF6). Then the Al was deposited in the open lines of PMMA mask by thermal evaporation followed by a lift off of the resist. The Al lines are 0.1 μm thick and $\sim 0.3 \mu\text{m}$ wide. The elementary triangles, at the lowest length scale, are isocèles triangles of equal height and base : 3.2 μm . In order to optimize the signal to noise ratio in our resistance measurements, the structure was restricted to 6 stages of iterations : $0 \leq n \leq 5$ and this corresponds to the basic cell. The measured sample is a lattice of 1024 basic cells, the overall size of the network is $3.2 \times 3.2 \text{ mm}^2$.

The resistance measurements were performed between the top node of the lattice and the two other nodes. The resistivity ratio of the Al film, between room temperature and 4.2 K was found to be 6.4. The resistance of the sample above the superconducting critical temperature ($T_c = 1.23 \text{ K}$) was 2.47 Ω .

Measurement of the magnetoresistance $R(H)$ were performed at $T = 1.30$ K (above T_c) with a maximum current of 1 mA, using a four-probe ac bridge.

In the temperature range of interest, weak localization effects have been studied recently on 1D and 2D clean Al films by different groups⁽⁵⁾. Above T_c , the low field magnetoresistance is governed by both localization effects and by Maki-Thomson superconducting fluctuations. The contribution of the Maki-Thomson term can be understood by means of a simple temperature dependent parameter $\beta(T/T_c)$, which is independent of the localization dimension⁽⁶⁾. The factor $\beta(T/T_c)$, which is field independent in the low field regime has no effect on the fine structure of the magnetoresistance (MR). However, due to its divergence as T_c is approached, $\beta(T/T_c)$ provides an enhancement factor to the weak localization effect which allows a large improvement of the experimental accuracy.

Typical magnetic fields range between 1 mOe and 10 Oe. Within this range, the critical temperature $T_c(H)$ of the network has been found to exhibit a very rich structure, as shown in the insert of figure 1⁽⁷⁾. This curve, which will be described elsewhere⁽⁸⁾, shows five levels of self-similarity and provides an accurate calibration of the flux quantization⁽⁹⁾ at the different hierarchy stages of the Sierpinski gasket. In our sample, the magnetic field which corresponds to one superconducting flux quantum $\phi_0 = hc/2e$ in the elementary triangles is 4.4 Oe, and the fine structure was observed down to $\phi_0/512$.

The MR, shown in Fig. 1, was measured at $T = 1.30 \text{ K}$: $R(H) - R(0)$ vs H in a log-log plot. We see that the fine structure, which was observed on the $T_c(H)$ line is no longer present. Only remain peaks at integer values of ϕ/ϕ_0 (not shown here), where ϕ is the magnetic flux through an elementary triangle. This is the manifestation of Altshuler-Aronov-Spivak effect, observed also on regular Euclidean networks⁽¹⁰⁾. The limiting value of the slope of this curve is two in the very (Fig. 2) low field regime, and this agrees with the expected value (see below). However, close inspection of the MR curve reveals kinks at precise values of the magnetic flux. This behavior contrasts with the MR behavior on regular Euclidean networks⁽¹⁰⁾, where no structure occurs at $\phi < \phi_0$. Fig. 2 shows the variation of the slope i.e. the logarithmic derivative : $\partial \ln \Delta R(H) / \partial \ln H$. As the field is lowered, the slope increases up to two but exhibits periodic oscillations in this log plot : the associated period of these oscillations is exactly $\ln 4$.

The oscillations of the slope of the MR curve are actually a clear signature of the phenomena discussed in the introduction. Furthermore, the experimental data can be analyzed up to a high level of accuracy using the weak localization theory for normal-metal networks⁽¹¹⁾. For a regular network of identical strands of length a , with a coordination number z , the integrated correction to the resistance is given by

$$\Delta R/R = \frac{\kappa}{2} \left[\left(1 - \frac{2}{z}\right) \frac{\eta \text{ch} \eta - \text{sh} \eta}{\eta \text{sh} \eta} + \frac{2}{N} \text{sh} \eta \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha}^{-1} \right] \quad (4)$$

In Eq. 4, $\eta = a/L_{\varphi}$ where $L_{\varphi} \equiv (D\tau_{\varphi})^{1/2}$ is the length over which dephasing of the electron wave function results from inelastic processes (D = diffusion constant). The dimensionless factor is given by $\kappa = 2e^2 L_{\varphi} / \pi \hbar \sigma_0 S$, where σ_0 is the bulk conductivity of wires and S is their transverse section area. The sum in Eq. 4 is taken over the N eigenvalues λ_{α} of the Hermitian matrix Q , defined as follows : $Q_{\alpha\alpha} = z \text{ch} \eta$ and $Q_{\alpha\beta} = -e^{-i\gamma_{\alpha\beta}}$ for nearest-neighboring nodes α, β on the network where $\gamma_{\alpha\beta} = \frac{2\pi}{\phi_0} \int_{\alpha}^{\beta} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$ is the magnetic phase factor induced by the vector potential $\vec{A}$.

In the case of the Sierpinski gasket ($z = 4$), it is not easy to find a closed expression for the sum involved in Eq. 4. However, it is possible to write down an exact RG transformation (scaling factor $b = 2$), which can be used to perform a numerical calculation of $\Delta R/R$, up to any desirable precision. Rather cumbersome algebra is involved in this decimation procedure and the details can be found in Ref. 11. The results for the logarithmic derivative of the MR are shown in Fig. 2. The only adjustable parameter in these calculations is the ratio $\eta = a/L_{\varphi}$, and a perfect agreement is obtained for $\eta = 0.195 \pm 0.005$. Here we have neglected minor corrections due to unequal lengths of the sides of the elementary triangle. We note that the number of maxima on Fig. 2 is very sensitive to the value of η and this is illustrated in the insert. The

period of oscillation is equal to $\ln 4$, as expected, and corresponds to the ratio of the enclosed fluxes by elementary cells at two successive stages.

The main features of the localization corrections to resistance can be summarized as follows. At zero magnetic field, one has $\Delta R/R \sim \tau_\varphi^{(2-\tilde{d})/2}$ ($\tilde{d} < 2$) in the scaling regime, where τ_φ is the phase coherence breaking time and $\tilde{d}$ is the spectral dimensionality of the structure⁽¹¹⁾. However because of anomalous diffusion, this result can be cast in a more familiar form $\Delta R/R \sim \ell_\varphi^{-\beta}$, where $\ell_\varphi/a = (L_\varphi/a)^{\tilde{d}/\bar{d}}$ is the true phase coherence length on the gasket and $\bar{d}$ is the fractal dimensionality. Here $\beta = \bar{d}(\tilde{d}-2)/\tilde{d}$ denotes the localization exponent, as defined in Ref. 12. In finite magnetic fields, the MR exhibits a crossover between a quadratic dependence $\frac{\Delta R}{R}(H) - \frac{\Delta R}{R}(0) \sim H^2$ at low fields ($H \ell_\varphi^2 \ll \phi_0$) and a power law behavior : $\Delta R/R(H) \sim H^{\beta/2}$ at larger fields ($H \ell_\varphi^2 \gg \phi_0$). We note that for Euclidean structure ($\bar{d} = \tilde{d} = d$) the known results are recovered⁽¹³⁾, in particular the logarithmic behavior for 2D films where $\beta = 0$.

The power law behavior $\Delta R/R \sim H^{\beta/2}$ is actually the manifestation of the singular shape of the spectrum edge $\varepsilon(H)$ of the operator Q , at low magnetic field^(3,11) : $\varepsilon(0) - \varepsilon(H) \sim H^{\bar{d}/\tilde{d}}$, ($\varepsilon(0) = z = 4$). Such a behavior is reflected on the line $T_c(H)$ shown on Fig. 1 (see also Ref. 4). On the other hand, the RG calculation reproduces⁽¹¹⁾ this overall behavior, with $\bar{d} = \ln 3 / \ln 2$, $\tilde{d} = 2 \ln 3 / \ln 5$ as it should be. Periodic modulations

are superposed on the power law, with a period $\ln 4$ in a log-log plot.

The physical origin of the oscillation can be traced back to the fact that the considered structure exhibits a dilation symmetry only under a discrete subgroup of the dilation group. Indeed, at low fields, the magnetic flux renormalizes as⁽¹¹⁾ :

$$\phi_n / \phi_{n=0} \approx 4^n [4 + 13 (\frac{3}{20})^n] / 17 \quad (5)$$

at stages n of decimation and $L_\varphi = \infty$ (scaling regime). The maximal modulations are obtained for reduced fluxes ϕ/ϕ_0 corresponding to integer values of the renormalized flux. According to Eq. 5, ϕ_n is the same for (ϕ, n) and $(\phi/4, n+1)$ and this leads to the observed period of $\ln 4$. Another approach to this result involves a careful study of the RG flow, which leads to the following equation for $\Delta R/R$:

$$\frac{\Delta R}{R} (\phi/\phi_0) = \frac{5}{3} \frac{\Delta R}{R} (4 \phi/\phi_0) \quad (6)$$

Eq. 6 has the same form as Eq. 1 and the general solution can be written as

$$\frac{\Delta R}{R} (\phi/\phi_0) = (\phi/\phi_0)^{\beta/2} p(2\pi \frac{\ln \phi/\phi_0}{\ln 4}) \quad (7)$$

where p denotes a periodic function, with period 1. Eq. 7 shows that $\eta \equiv a/L_\varphi$ governs just the low field cut off and does not play any role in the self-similar regime⁽¹¹⁾ where the predicted oscillations are observed. It is important to notice that in Fig. 2, we have plotted $\frac{\Delta R}{R}(0) - \frac{\Delta R}{R}(H)$ instead of $\frac{\Delta R}{R}(H)$.

We note that this behavior is due again to the singular self-similar edge of the spectrum of the operator Q , which reflects the self-similarity of the structure. Furthermore, there is no such oscillations at zero magnetic field, as function of temperature for instance. Of course, the lack of exact self-similarity can lead to the disappearance of the obtained periodic oscillations.

To summarize, we believe that the periodic corrections to scaling reported in this letter, are the manifestation of a very general phenomenon observed here for the first time. Such corrections are associated in a natural way to an exact RG transformation, which generate a singular measure. In the present case, this can also be seen on the spectral measure as well as the spectrum (Cantor-like set) of the operator Q . The existence of such a RG transformation depends of course on the validity of the weak localization theory. Thus the observation of both the predicted power law and the periodic corrections should be viewed as a strong evidence for weak localization theory.

REFERENCES

1. Th. NIEMEIJER and J.M.J. Van LEEUWEN, "Phase transition and critical phenomena", vol. 6, C. Domb and M.S. Green Editors (Academic Press, 1976), p. 425.
2. D. BESSIS, J.S. GERONIMO and P. MOUSSA, J. Physique Lett. (Paris), 44, 977 (1983).
3. R. RAMMAL and G. TOULOUSE, Phys. Rev. Lett. 49, 1194 (1982).
4. J.M. GORDON, A.M. GOLDMAN, J. MAPS, D. COSTELLO, R. TIBERIO and B. WHITEHEAD, Phys. Rev. Lett. 56, 2280.
5. P. SANTHANAN, S. WIND and D.E. PROBER, Phys. Rev. Lett. 53, 1179 (1984) ; J.M. GORDON, Phys. Rev. B30, 6770 (1984).
6. A.I. LARKIN, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 31, 239 (1980) (J.E.T.P. Lett. 31, 219 (1980)).
7. Similar structure has been found in Ref. 4 for the Sierpinski gasket. The results obtained for other structures : Sierpinski carpet, Fibonacci quasi-periodic network and Penrose pattern, will be reported elsewhere (Ref. 8).
8. B. PANNETIER et al., to be published.
9. For a comparison with the corresponding line on Euclidean networks, see B. PANNETIER, J. CHAUSSY, R. RAMMAL and J. VILLEGIER, Phys. Rev. Lett. 53, 1845 (1984).
10. B. PANNETIER, J. CHAUSSY, R. RAMMAL and P. GANDIT, Phys. Rev. Lett. 53, 718 (1984) ; Phys. Rev. B31, 3209 (1985).
G.I. DOLAN, J.C. LICINI and D.J. BISHOP, Phys. Rev. Lett. 56, 1493 (1986).

11. B. DOUCOT and R. RAMMAL, Phys. Rev. Lett. 55, 1148 (1985) ;
J. de Physique (Paris) 47, xxx (1986) and references therein.
12. R. RAMMAL and G. TOULOUSE, J. Physique Lett. (Paris), 44, 13
(1983).
13. P. LEE and T.V. RAMAKRISHNAN, Rev. Mod. Phys. 57, 287 (1985).

FIGURE CAPTIONS

Figure 1 : Magnetoresistance (MR) of a Sierpinski gasket of Al submicronic wires. The insert shows the normal-superconducting phase boundary $T_c(H)$ of the same network. The magnetic field scale corresponds to the range of one superconducting quantum flux ϕ_0 through the elementary triangular cell. Arrows indicate the positions of reduced fluxes $\phi/\phi_0 = 4^{-n}$, $n = 1, 2, \dots$

Figure 2: Logarithmic derivative $\partial \ln[\Delta R(0) - \Delta R(H)] / \partial \ln(\phi/\phi_0)$ of the magnetoresistance. The upper part corresponds to the experimental data. The lower part is the result of the RG calculation of the same quantity ($\eta = 0.195$). On the same plot, these two parts cannot be distinguished and they are separated for the sake of clarity. In the insert, the same curve is reproduced, in reduced scales, with another one corresponding to a smaller value of $\eta = a/L_\phi$ ($\eta = 0.005$) which leads to more and more periodic oscillations. Here ϕ/ϕ_0 denotes the reduced flux through the elementary triangular cell.

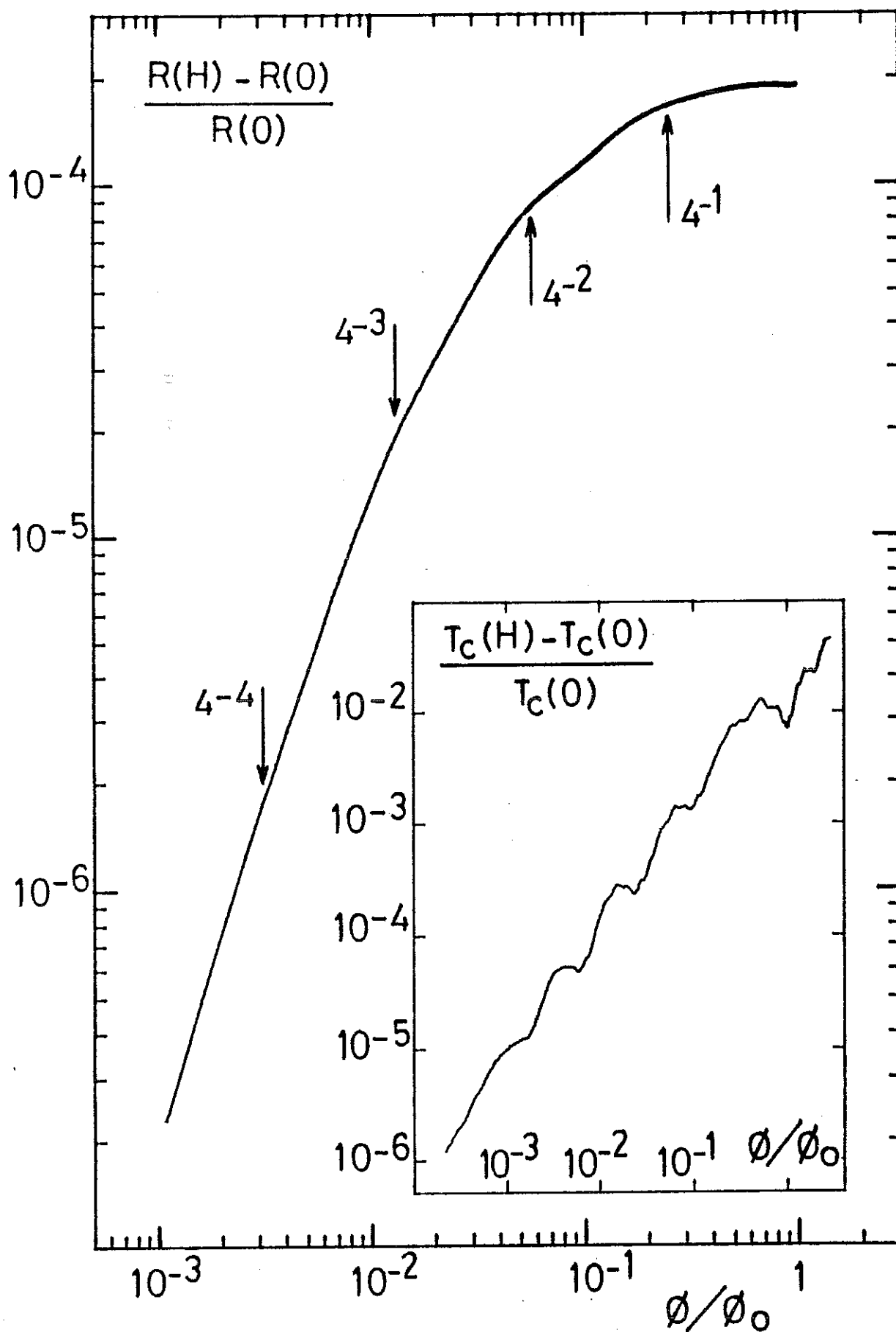


Fig 1

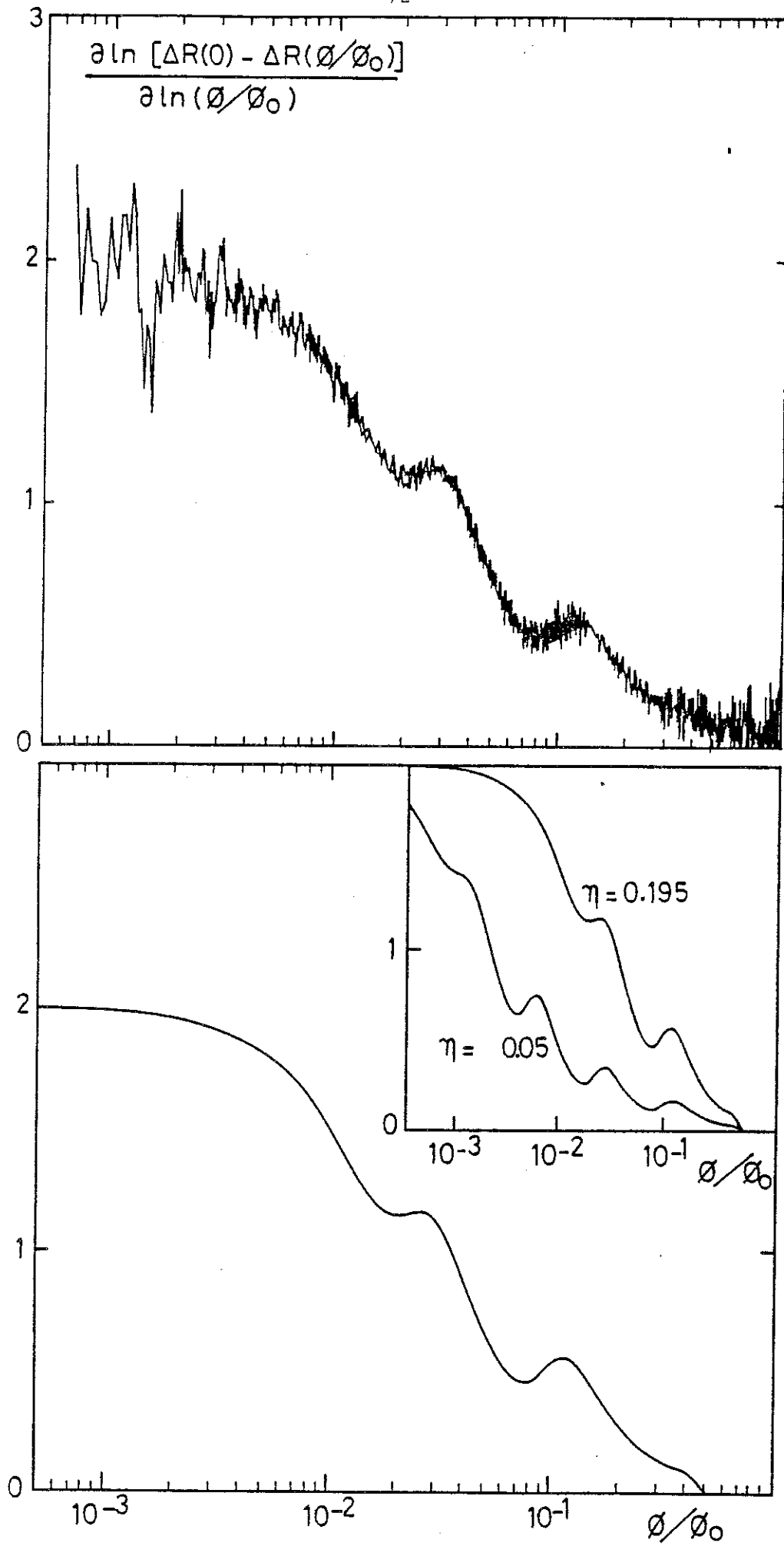


Fig 2

IV - APPLICATION DE L'APPROCHE PRECEDENTE AUX EXPERIENCES

L'application de notre formalisme présente quelques difficultés liées au fait que la largeur des fils constituant les réseaux expérimentaux n'est pas complètement négligeable. Le but de ce paragraphe est de préciser les problèmes qui se posent ainsi que quelques moyens d'y remédier. Mais tout d'abord nous souhaitons présenter quelques indications sur le mode de fabrication des réseaux qui ont suscité les calculs précédents, afin d'insister sur les possibilités qu'offre maintenant la physique à l'échelle du micron...

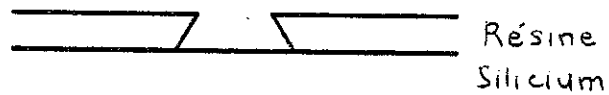
A. Fabrication des réseaux conducteurs.

(B. Pannetier, CRTBT, en collaboration avec le CNET, Meylan)

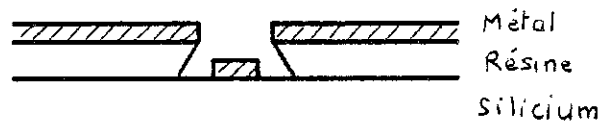
Nous décrivons brièvement le procédé dit de "lift-off", qui consiste à écrire directement les motifs sur de la résine électrosensible, en envoyant un faisceau d'électrons. La résine ici employée est du PMMA (polyméthylmétacrylate). Le faisceau d'électrons (diamètre 1000 Å, pour un courant de 5 nA) est piloté par un ordinateur (masqueur électronique, Cambridge EBMF6 au CNET à Meylan). La préparation se déroule en 5 étapes :

- 1°) Dépôt de résine positive, d'épaisseur 0,6 μm sur une plaque de silicium, mise en rotation rapide (4000 tr/mn) ;
- 2°) Impression de la résine par le faisceau d'électrons aux emplacements futurs des fils. En dosant bien l'exposition, une certaine quantité d'électrons diffuse dans le silicium, si bien que la région exposée a un profil pyramidal, avec une large base ;

- 3°) Développement de la résine : les parties exposées sont dissoutes dans un solvant (par exemple : MIBK : Méthyl isobutyl ketone ou IPA : isopropyl Alcool). On obtient des sillons avec le profil pyramidal requis ;

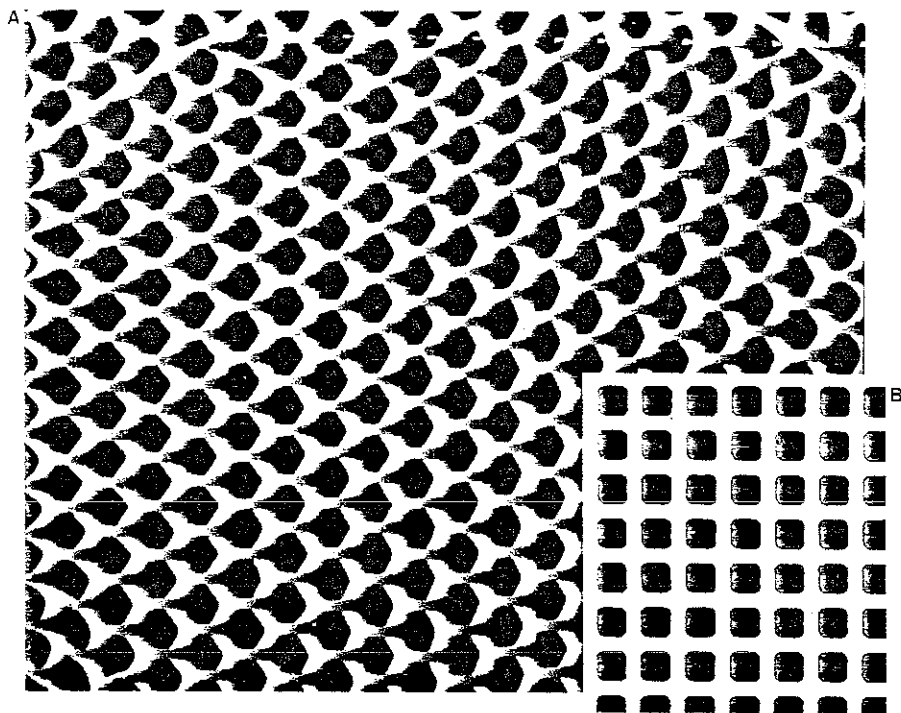


- 4°) Dépôt du métal par évaporation sous vide sur le substrat de silicium à travers les ouvertures pratiquées dans la résine.



- 5°) Lift-off, on dissout le reste de résine (dans du trichloréthylène), et il ne reste que les fils sur la plaque de silicium.

En fait, cette technique n'est pas la seule et nous reproduisons la photographie de deux échantillons fabriqués auparavant avec d'autres procédés.



Pour le réseau hexagonal de la figure, chaque boucle fait $1,5 \mu\text{m}$ de côté et les fils ont une largeur de $0,5 \mu\text{m}$.

B. Effet de la largeur du ruban sur sa magnétorésistance.

Altshuler et Aronov ont calculé⁽⁴¹⁾ l'effet d'un champ magnétique faible sur les corrections à la conductivité d'un fil étroit (dimensions transverses $\ll L_\varphi$). Leur calcul montre que la magnétorésistance est obtenue en substituant à L_φ dans la formule à une dimension une longueur de cohérence de phase effective dépendant du champ :

$$L_\varphi(H) = L_\varphi \left[1 + \left(\frac{2eH}{\hbar c} \right)^2 \frac{w^2 L_\varphi^2}{12} \right]^{-1/2} \quad (1)$$

Cette relation peut être testée numériquement, comme le montre la figure 1 où l'on compare l'expression de $\frac{\Delta R}{R}$ d'un ruban obtenue par intégration numérique de l'équation du Cooperon, avec la formule à une dimension, en tenant compte de la substitution (1). Notons un problème important : si l'on traite un ruban de manière bidimensionnelle, l'expression de $\frac{\Delta R}{R}$ diverge en l'absence de cut-off à courte distance (la dépendance est logarithmique, en $\ln(L_\varphi/\ell)$ où ℓ est ce cut-off microscopique, que l'on prend en général égal au libre parcours moyen élastique). Dans un calcul numérique comme celui que nous présentons, le pas de discrétisation joue ce rôle d'un cut-off. Une fois celui-ci fixé, à la limite $L_\varphi \rightarrow \infty$, le Cooperon ne sélectionne qu'un seul mode transverse (au lieu d'une infinité en l'absence de cut-off) et l'expression bidimensionnelle converge vers la formule unidimensionnelle avec la longueur effective donnée par (1).

Dans le cas du réseau, nous avons également repris la formule (1). Physiquement, la substitution $L_\varphi \rightarrow L_\varphi(H)$ conduit à développer une approximation unidimensionnelle plus réaliste, où au lieu de supposer le Cooperon constant dans la direction transverse, on lui permet de sélectionner le mode transverse de plus grande longueur d'onde.

C. Effet de largeur propre au réseau.

Il existe un autre effet de largeur des fils, qui n'apparaît que dans un réseau : l'effet précédent existait également pour un simple fil constituant la structure. La question intéressante est de savoir si dans la limite $a \ll L_\varphi$, le réseau est équivalent, du point de vue de sa magnétorésistance, à un film bidimensionnel continu.

Considérons pour simplifier la discussion un réseau carré, constitué de brins métalliques dont la largeur est égale à w et l'épaisseur à L_z . Considérons la limite $a \ll L_\varphi$, soit $\eta \rightarrow 0$. Dans cette limite, la formule générale donnée au début de ce chapitre devient :

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\kappa}{N} \eta \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} \quad \text{où les } \lambda_i \text{ sont les valeurs propres de}$$

l'opérateur de liaisons fortes :

$$M_{\alpha\alpha} = 4ch\eta \approx 4 + 2a^2/L_\varphi^2$$

$$M_{\alpha\beta} = -1 \quad \alpha, \beta \text{ proches voisins}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\Delta R}{R} \Big|_{\text{réseau}} = \frac{2e^2}{\pi\hbar\sigma_0} \frac{a}{L_z w} < \frac{1}{\lambda_i} > \quad (2)$$

Dans le cas du continuum, nous partons de l'équation du Cooperon mise sous sa forme discrète ($a \ll L_\varphi$) sur un réseau carré :

$$(4 + \frac{a^2}{L_\varphi^2})\psi(m,n) - \psi(m+1,n) - \psi(m-1,n) - \psi(m,n+1) - \psi(m,n-1) = \frac{1}{\hbar D L_z} \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (3)$$

(nous supposons qu'il n'y a pas de champ magnétique pour simplifier).

L'équation (3) fait également intervenir un opérateur de liaisons fortes que nous définissons par :

$$M'_{\alpha\alpha} = 4 + a^2/L_\varphi^2$$

$$M'_{\alpha\beta} = -1 \quad \alpha, \beta \text{ proches voisins.}$$

On tire de là :

$$\frac{\Delta R}{R} \Big|_{\text{continuum}} = \frac{2e^2}{\pi\hbar\sigma_0} \frac{1}{L_z} < \frac{1}{\lambda'_i} > \quad (4)$$

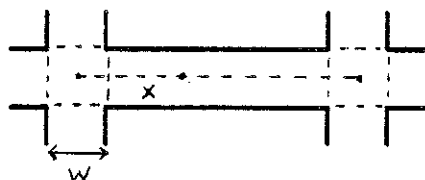
Considérons le réseau et faisons $a = w$ (remplissage complet).

$$\text{On a : } \frac{\Delta R}{R} (\text{réseau}, L_\varphi \sqrt{2}) = \frac{\Delta R}{R} (\text{continuum}, L_\varphi)$$

Donc pour obtenir la même correction à la conductivité pour le réseau que dans le cas du continuum, la longueur de cohérence de phase doit être plus grande sur le réseau. Ceci est dû au fait que les chemins de diffusion accessibles sur un grillage restent de toute façon limités, même lorsque la maille du grillage tend vers zéro.

Cela produit une "renormalisation" de la constante de diffusion lorsque l'on passe d'un continuum (même discrétisé) à un vrai réseau. Nous avons pu vérifier (les calculs sont un tout petit peu moins simples) que la même relation subsiste pour un réseau en nid d'abeilles.

Il devient intéressant de chercher une formule permettant d'interpoler (cas réel) entre un facteur de remplissage nul (vrai réseau) et un remplissage complet (continuum). Pour cela, il faut reprendre la dérivation des équations de Kirchoff aux noeuds, en tenant compte de la taille finie de ces noeuds. Considérons toujours un réseau carré et soit w la largeur des brins.



L'équation du Cooperon s'écrit :

$$(-\nabla^2 + \frac{1}{L_\varphi^2})C(r, r') = \frac{1}{\hbar D} \delta(r - r') \quad (5)$$

En prenant l'intégrale sur la surface du noeud A dessinée en pointillés, et en supposant que r' est à l'extérieur de cette surface, on obtient :

$$w \sum_B \nabla C_{A \rightarrow B} - \frac{w^2}{L_\varphi^2} C(A) = 0 \quad (6)$$

La somme dans l'équation (6) porte sur tous les courants partant du noeud A.

Le long des brins,

$$C(x) = C_A \text{ch}(x/L_\varphi) + \frac{C_B - C_A \text{ch}(a/L_\varphi)}{\text{sh}(a/L_\varphi)} \text{sh}(x/L_\varphi) \quad (7)$$

De là, on tire le courant, au point $x = \frac{w}{2}$ (limite du noeud)

$$\left. \frac{dc}{dx} \right|_{x=\frac{w}{2}} = \frac{1}{L_\varphi} \left[C_A \frac{w}{2L_\varphi} + \frac{C_B - C_A \operatorname{ch}(a/L_\varphi)}{\operatorname{sh}(a/L_\varphi)} \right] \quad (8)$$

(on a développé au premier ordre en w).

L'équation (6) devient l'équation des noeuds (dans la limite $a \ll L_\varphi$) :

$$\left(4 + a \frac{(2a-w)}{L_\varphi^2} \right) C_A - \sum_B C_B = 0 \quad (9)$$

Si l'on fait $w = 1$ (remplissage complet), on retrouve le cas du continu. L'équation (9) permet donc une interpolation raisonnable entre les deux cas limites.

En conclusion, nous avons signalé deux effets dus à la largeur non nulle des fils. Le premier, discuté au paragraphe précédent est lié à la pénétration d'un certain flux magnétique dans les fils. Il affecte la propagation du Coopéron le long des fils en modifiant la longueur d'atténuation. On en tient compte en introduisant $L_\varphi(H)$. Le second effet modifie les conditions de raccordement aux noeuds. Il provoque une "renormalisation" de L_φ pilotée par le taux de remplissage w/a . Ces deux effets peuvent être pris en compte simultanément. Le deuxième effet est important si l'on cherche à déterminer de manière précise la longueur de cohérence de phase à partir d'un fit des données expérimentales. Quant au premier, il est indispensable pour obtenir un fit sur plusieurs oscillations.

D. Limite $L_\varphi \rightarrow 0$.

En fort champ, $L_\varphi(H)$ décroît et peut devenir inférieure à la taille des boucles. Par ailleurs, dans les expériences de Pannetier et coll.⁽¹⁵⁾, la longueur de cohérence de la partie triplet (associée aux effets spin-orbite) est de l'ordre de a . $L_\varphi \rightarrow 0$ décrit également la limite haute température. Il est notamment intéressant de comparer dans cette limite l'amplitude des oscillations résiduelles avec celle pour une boucle seule de même périmètre que les boucles du réseau.

Pour un réseau régulier :

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\kappa}{2} \left[\frac{n \operatorname{ch} \eta - \operatorname{sh} \eta}{n \operatorname{sh} \eta} \left(1 - \frac{2}{Z} \right) + \frac{2}{N} \operatorname{sh} \eta \sum_{i=1}^N \mu_i^{-1} \right] \quad (10)$$

où les μ_i sont les valeurs propres de l'opérateur M défini par :

$$\begin{aligned} M_{\alpha\alpha} &= Z \operatorname{ch} \eta & Z : \text{nombre de coordination du réseau} \\ M_{\alpha\beta} &= e^{-i\gamma_{\alpha\beta}} & \alpha, \beta \text{ proches voisins} \end{aligned} \quad (11)$$

Dans la limite $\eta \gg 1$, on peut calculer la fonction de Green en perturbation jusqu'à l'ordre égal au nombre de côtés d'une boucle, afin d'avoir le premier harmonique décrivant les oscillations.

Ce développement donne pour différentes géométries :

a) Réseau carré :

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\kappa}{4} \left[\frac{n \operatorname{ch} \eta - \operatorname{sh} \eta}{n \operatorname{sh} \eta} + \operatorname{th} \eta \left(1 + \frac{1}{4 \operatorname{ch}^2 \eta} + \frac{7}{64 \operatorname{ch}^4 \eta} + \frac{1}{32 \operatorname{ch}^4 \eta} \cos(2\pi\phi/\phi_0) \right) \right]$$

le terme oscillant est de l'ordre de $\frac{\kappa}{8} e^{-4\eta} \cos(2\pi\phi/\phi_0)$.

b) Réseau en nid d'abeilles :

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\kappa}{6} \left[\frac{n \operatorname{ch} \eta - \operatorname{sh} \eta}{n \operatorname{sh} \eta} + 2 \operatorname{th} \eta \left(1 + \frac{1}{3 \operatorname{ch}^2 \eta} + \frac{5}{27 \operatorname{ch}^4 \eta} + \frac{1}{9 \operatorname{ch}^6 \eta} + \frac{2}{243 \operatorname{ch}^6 \eta} \cos(2\pi\phi/\phi_0) \right) \right]$$

le terme oscillant est de l'ordre de $\kappa 2 \left(\frac{2}{3}\right)^6 e^{-6\eta} \cos(2\pi\phi/\phi_0)$.

c) Echelle :

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\kappa}{6} \left[\frac{\eta \text{ch} \eta - \text{sh} \eta}{\eta \text{sh} \eta} + 2 \text{th} \eta \left(1 + \frac{1}{3 \text{ch}^2 \eta} + \frac{5}{27 \text{ch}^4 \eta} + \frac{4}{81 \text{ch}^6 \eta} \cos(2\pi\phi/\phi_0) \right) \right]$$

le terme oscillant est de l'ordre de $\kappa \frac{64}{243} e^{-4\eta} \cos(2\pi\phi/\phi_0)$.

d) Collier de boucles :

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\kappa}{4} \left[\frac{\eta \text{ch} \eta - \text{sh} \eta}{\eta \text{sh} \eta} + \text{th} \eta \left(1 + \frac{(1+\cos\gamma)}{4 \text{ch}^2 \eta} \right) \right]$$

le terme oscillant est de l'ordre de $\frac{\kappa}{4} e^{-4\eta} \cos(2\pi\phi/\phi_0)$.

Comparaison avec la boucle seule :

Pour une boucle de périmètre L :

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\kappa}{2} \frac{\text{sh}(L/L_\varphi)}{\text{ch}(L/L_\varphi) - \cos(2\pi\phi/\phi_0)}$$

le terme oscillant est de l'ordre de $\kappa e^{-L/L_\varphi} \cos(2\pi\phi/\phi_0)$.

Les expressions ci-dessus montrent toutes une réduction du pré-facteur dans ce premier harmonique. Cette réduction peut paraître a priori surprenante dans la limite $L_\varphi \rightarrow 0$ où l'on s'attendrait à ce que les boucles soient découplées. Mais en fait, la présence des noeuds a tendance à faire diminuer le Coopéron à leur emplacement, ce qui revient à changer de conditions aux limites. C'est ce changement qui est à l'origine du pré-facteur.

Dans la limite des forts champs magnétiques, le système oublie pratiquement l'existence du réseau et la magnétorésistance se ramène pratiquement à celle des fils. Toutefois, la discussion ci-dessus nous

montre qu'il faut faire attention au choix des conditions aux limites pour les fils. En fait, à l'ordre le plus bas du développement à η grand de l'équation (10), et en identifiant les expressions de $\frac{\Delta R}{R}$ d'un fil de longueur a avec différentes conditions aux limites, on a :

$$\frac{\Delta R}{R} \eta \rightarrow \infty = (1 - \frac{2}{Z}) \frac{\Delta R}{R} (\text{fil, contact parfait}) + \frac{2}{Z} \frac{\Delta R}{R} (\text{fil, conditions périodiques}) \quad (12)$$

le contact parfait correspond au choix d'annuler le Cooperon aux extrémités du fil. Cette formule a été établie dans l'hypothèse de fils sans largeur. On peut cependant supposer qu'elle reste vraie pour des fils de largeur non nulle. Le $\frac{\Delta R}{R}$ d'un fil avec différentes conditions aux limites peut s'évaluer en discrétisant les équations du Cooperon (cette discrétisation sert de cut-off à courte distance). Les formules sont les suivantes :

$$\frac{\Delta R}{R} (\text{fil, conductions périodiques}) = \frac{2e^2}{\pi \hbar \sigma_0 L_z} \frac{1}{MN} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\alpha_n(k) - u_{n-1}(k) - v_{n+1}(k)}$$

$$\frac{\Delta R}{R} (\text{fil, contact parfait}) = \frac{2e^2}{\pi \hbar \sigma_0 L_z} \frac{1}{MN} \sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} \cdot$$

$$\left(\frac{1}{\alpha_n^+(k) - u_{n-1}^+(k) - v_{n+1}^+(k)} + \frac{1}{\alpha_n^-(k) - u_{n-1}^-(k) - v_{n-1}^-(k)} \right)$$

où M et N sont la longueur et la largeur du fil en unité égale au pas de discrétisation a ,

$$\alpha_n(k) = 4 + \frac{a^2}{L_\varphi^2} - 2\cos\left(\frac{2\pi k}{M}\right) + 4\pi^2 \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^2 \left(n - \frac{N+1}{2}\right)^2 + 4\pi \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right) \left(n - \frac{N+1}{2}\right) \sin\left(\frac{2\pi k}{M}\right)$$

$\alpha_n^+(k)$ est donné par la même expression avec la substitution : $\frac{2\pi k}{M} \rightarrow \frac{\pi k}{M+1}$

$$\alpha_n^-(k) = \alpha_n^+(-k)$$

Pour k fixé, on définit $u_n(k)$ et $v_n(k)$ par :

$$u_1(k) = \frac{1}{\alpha_1(k) - 1} \quad u_{p+1}(k) = \frac{1}{\alpha_{p+1}(k) - u_p(k)}$$

$$v_N(k) = \frac{1}{\alpha_N(k) - 1} \quad v_{p-1}(k) = \frac{1}{\alpha_{p-1}(k) - v_p(k)}$$

les suites $u_n^+(k)$, $v_n^+(k)$ sont définies de la même façon à partir de $\alpha^+(k)$ et de même pour $u_n^-(k)$, $v_n^-(k)$ à partir de $\alpha^-(k)$.

La figure 2 montre le résultat de calculs numériques à partir de ces expressions de $\frac{\Delta R}{R}$ et met en évidence le rôle non négligeable joué par le choix des conditions aux limites.

E. Discussion des résultats expérimentaux.

(Pannetier et Collaborateurs, CRTBT)

Dans une expérience, en plus de la longueur de cohérence de phase L_φ , deux autres longueurs interviennent dans la détermination de la correction de localisation faible à la conductivité : la longueur associée au retournement du spin, par diffusion sur des impuretés magnétiques L_s , et la longueur associée au retournement du spin par effet spin orbite L_{so} , effet qui est important pour les métaux lourds. Le Cooperon est la superposition d'une contribution singulet et d'une contribution triplet, seule la dernière étant sensible à l'interaction spin-orbite⁽¹⁰⁾.

$$C = -\frac{1}{2} C_{\text{sing}} + \frac{3}{2} C_{\text{triplet}}$$

Ces deux contributions peuvent se calculer en utilisant notre formalisme, à condition de poser :

$$\eta_{\text{singulet}}^2 = \eta^2 + 2\eta_s^2$$

$$\eta_{\text{triplet}}^2 = \eta^2 + \frac{4}{3} \eta_{so}^2 + \frac{2}{3} \eta_s^2$$

où $\eta_s = \frac{a}{L_s}$ et $\eta_{so} = \frac{a}{L_{so}}$

En fait, dans les fits que nous allons montrer, on pose $\eta_o^2 = \eta^2 + 2\eta_s^2$ et $\eta_{\text{triplet}}^2 = \eta_o^2 + \frac{4}{3}(\eta_{so}^2 - \eta_s^2)$.

Dans cette dernière formule, il est souvent légitime de négliger η_s devant η_{so} qui peut être assez grand. On absorbe ainsi la diffusion par les impuretés magnétiques dans la définition de la longueur de cohérence de phase. Pour tenir compte de la largeur des fils, nous faisons la substitution (Eq. (1)) :

$$\eta^2 \rightarrow \eta^2 + \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{Haw}{\phi_o} \right)^2$$

La figure 3 présente des données expérimentales pour un réseau nid d'abeilles à faible champ et basse température ($T = 0,16$ K). Les fils sont en magnésium. Les points représentent la courbe théorique pour un réseau en nid d'abeilles, pour des fils sans largeur (η indépendant de H). On détermine $L_\phi = 13,6 \mu\text{m}$ par un fit sur les données à faible champ. Mais on ne peut pas rendre compte du reste de la courbe, et notamment de l'atténuation des oscillations successives en négligeant la largeur des fils. Cet effet est pris en compte, avec $w/a = 0,36$ dans la courbe en triangles.

Comme L_ϕ est grand ($\eta_o = 0,11$), on est tenté d'appliquer la formule de la magnétorésistance d'un film continu bidimensionnel. Seulement, comme le suggère la section C. de ce paragraphe, il faut diviser la longueur L_ϕ précédente par un facteur de l'ordre de $\sqrt{2}$.

En général, les fits obtenus sont très sensibles à la valeur de L_φ , surtout dans la région haute température où l'amplitude des oscillations est en e^{-6a/L_φ} (pour le réseau nid d'abeilles). Cependant, même si la détermination de L_φ par le fit est précise, l'interprétation de ce résultat est moins sûre, à cause de la largeur des fils qui modifie la relation entre L_φ et l'opérateur de liaisons fortes associé. Toutefois, on obtient un bon ordre de grandeur, et surtout, cela n'empêche pas l'étude de la dépendance de L_φ en fonction de la température. La longueur spin-orbite déterminée pour ce réseau de magnésium est petite, correspondant à $\eta_{so} = 1$. Cette détermination repose sur la partie de la courbe à plus fort champ (région où la résistance est maximum).

La figure 4 montre un fit obtenu avec un réseau nid d'abeilles en cuivre à $T = 0,29$ K (température des électrons, supérieure à la température de l'échantillon à la suite d'effets de chauffage). Ici $a = 1,5 \mu\text{m}$ et l'on détermine : $\eta_0 = 0,28$ et $\eta_{so} = 1,05$.

Sur la figure 5 se trouvent les résultats pour un réseau nid d'abeilles en magnésium à haute température $T = 5,498$ K. On a $a = 1,5 \mu\text{m}$, $w/a = 0,36$, $\eta_0 = 0,88$ et $\eta_{so} = 1$.

La figure 6 montre la dépendance en température de L_φ pour le réseau en magnésium précédent. En pointillés est tracée la courbe qui résulte d'un ajustement polynomial : $L_\varphi^{-2} = 0,0045 + 0,01 T + 1,77 \cdot 10^{-3} T^3$. Le terme constant donne la quantité L_s^{-2} , le terme en T est susceptible de représenter un temps électron-électron et le terme en T^2 un terme électron-phonon. Cette analyse reste pour l'instant à l'étape préliminaire.

Enfin, la figure 7 présente la dépendance en température de L_φ pour le réseau de cuivre (triangles), pour le réseau d'or (doubles triangles) et pour le même réseau d'or recuit sous oxygène (carrés). Le réseau d'or non recuit présente une remontée logarithmique importante de la résistivité pour des températures en dessous de 1 K. Cette remontée est attribuée à de l'effet Kondo, lié à la présence d'impuretés de fer (l'amplitude de la remontée logarithmique permet

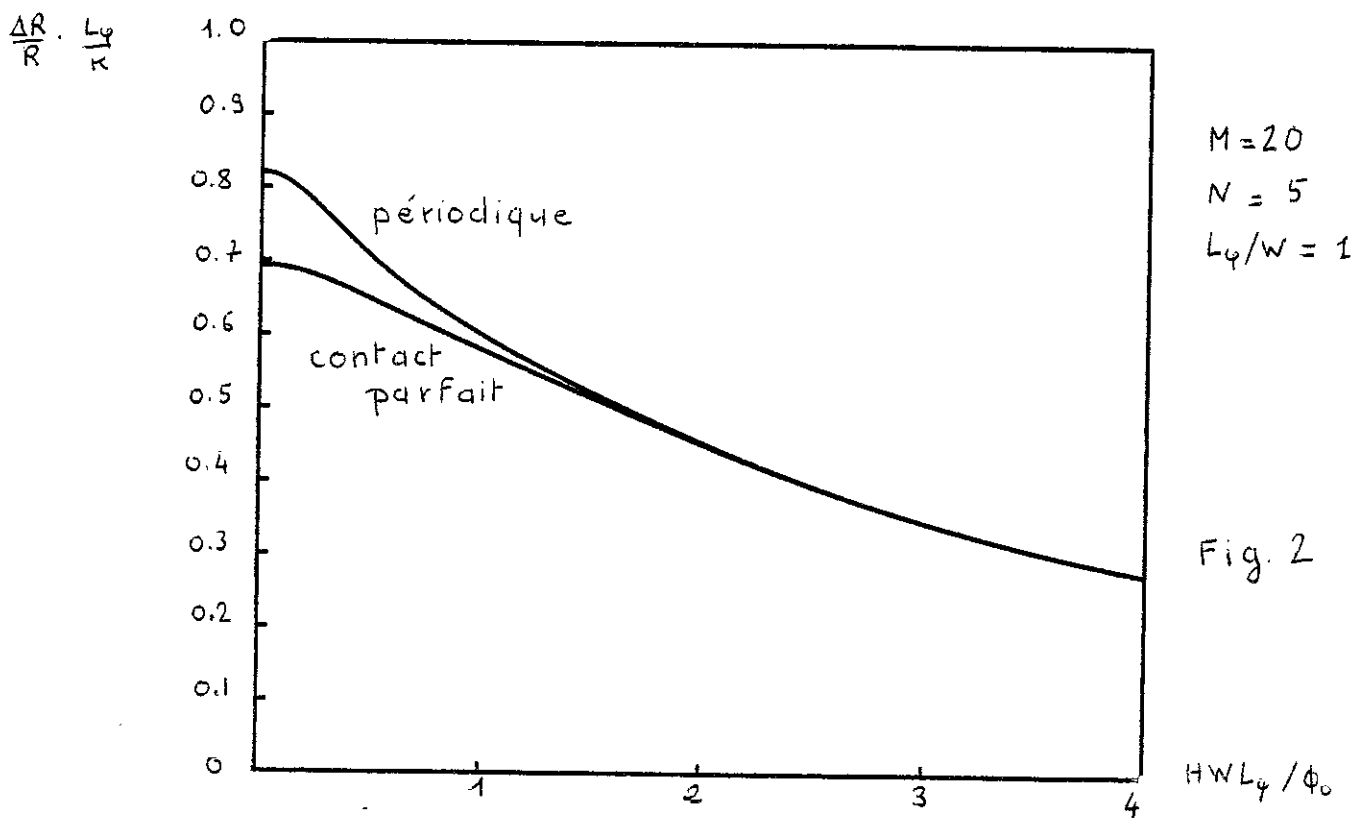
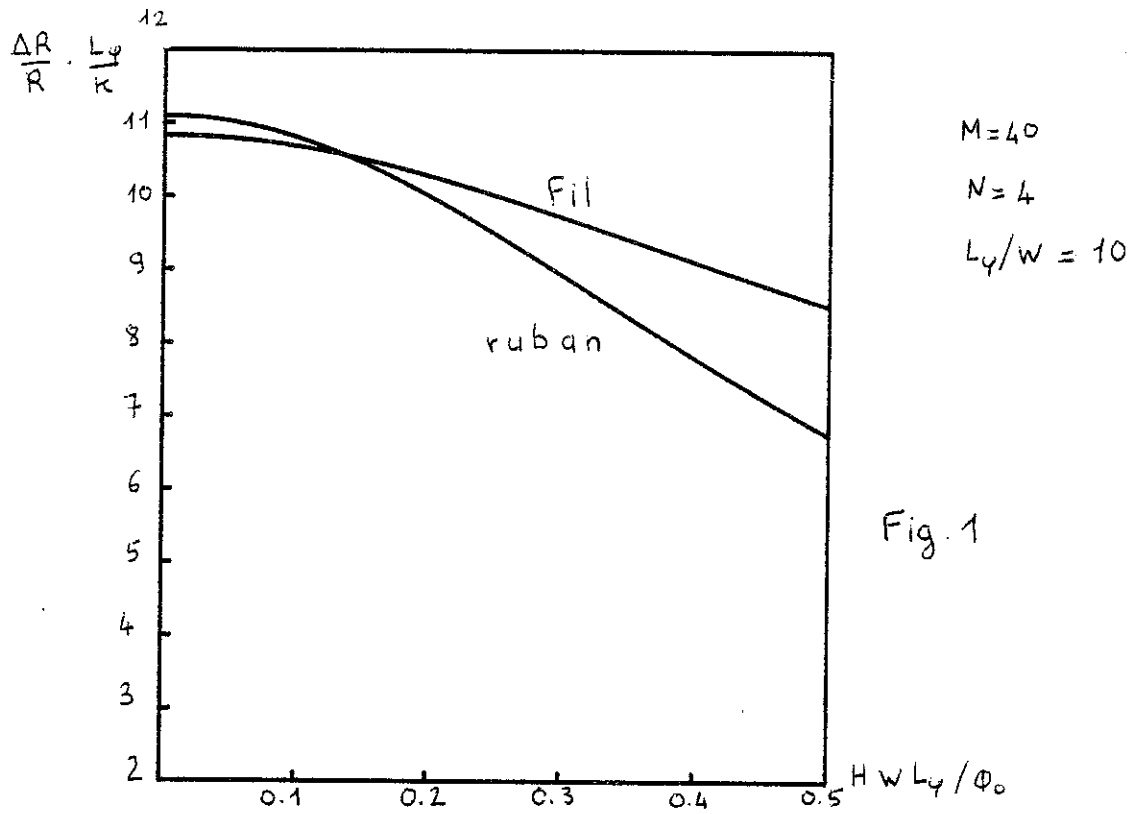
de donner une estimation de la concentration de ces impuretés, de l'ordre de 1 ppm). Cette interprétation est soutenue par l'influence du recuit qui supprime pratiquement cette remontée à basse température. Il ne subsiste que l'effet de localisation faible, qui est plus d'un ordre de grandeur en dessous de l'effet Kondo.

Pour terminer cette discussion sur les résultats expérimentaux, nous mentionnerons le travail de Dolan, Licini et Bishop⁽¹⁶⁾ qui porte sur des géométries linéaires (échelles, colliers de boucles) avec des fils de lithium. L'intérêt de leurs mesures est de permettre une détermination indépendante de la longueur de cohérence de phase L_ϕ , de L_S et L_{SO} . Pour cela un ruban test est déposé sur le même substrat, l'analyse de sa magnétorésistance et de sa dépendance en température donnant effectivement ces trois longueurs caractéristiques. La comparaison avec nos calculs est plutôt bonne à basse température (longueur de cohérence de phase un peu plus grande que la taille des boucles). Par contre, lorsque η devient supérieur à 1, ils n'observent pas la réduction prévue dans un réseau pour la première harmonique de l'oscillation comparée à celle d'une simple boucle. Cette réduction est un fait important dans un réseau, résultant du changement de conditions aux limites lors de la diffusion autour d'une boucle. La non-visibilité ici mérite certainement considération. Toutefois, d'un point de vue qualitatif, cet écart à haute température peut être absorbé par une correction modérée (25 % au pire) de L_ϕ . Par contre, nos calculs rendent compte d'effets d'interférences entre boucles à basse température, qui ne sont pas décrits par la formule de l'anneau simple, en particulier la réduction de l'amplitude des oscillations dans une géométrie à 1 ou 2 dimensions, par rapport au cas à 0 dimension (anneau simple).

En conclusion, ce formalisme des réseaux permet une analyse détaillée de la localisation faible dans ces géométries multiconnexes. Si la longueur de cohérence de phase est un paramètre libre dans le fit, celui-ci peut être excellent. Des écarts sont obtenus dans le cas où la détermination de L_ϕ se fait indépendamment, mais de manière encourageante, les phénomènes liés à l'interférence entre boucles ($\eta < 1$) demeurent assez bien décrits. Nous avons montré que cette

méthode de calcul sera utile en vue d'étudier de manière systématique la dépendance en température de la longueur de cohérence de phase, information intéressante qui nous renseigne sur la nature de la dynamique des électrons de conduction à basse température (interaction électron-électron et électron-phonon).

F. Figures



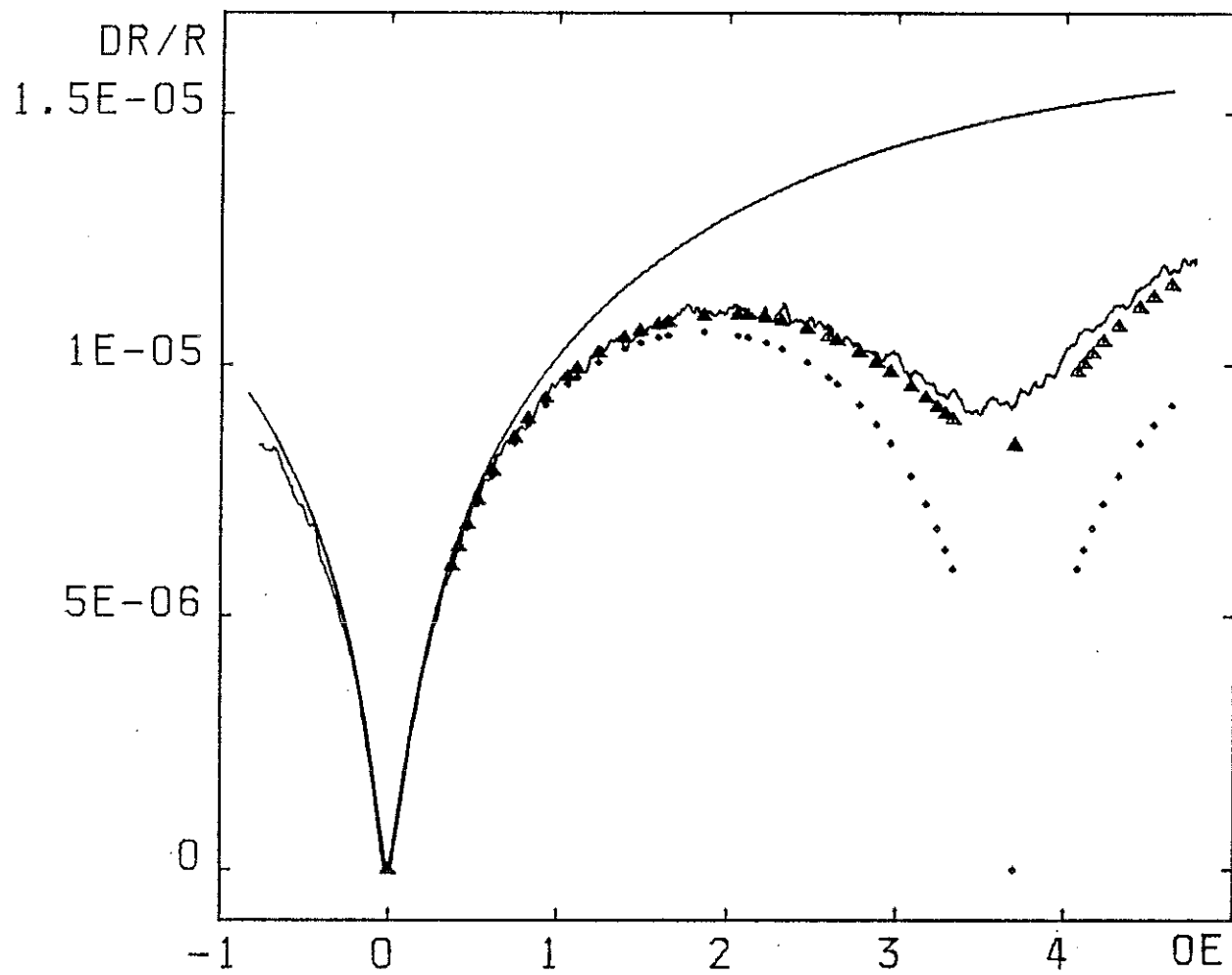


Fig. 3

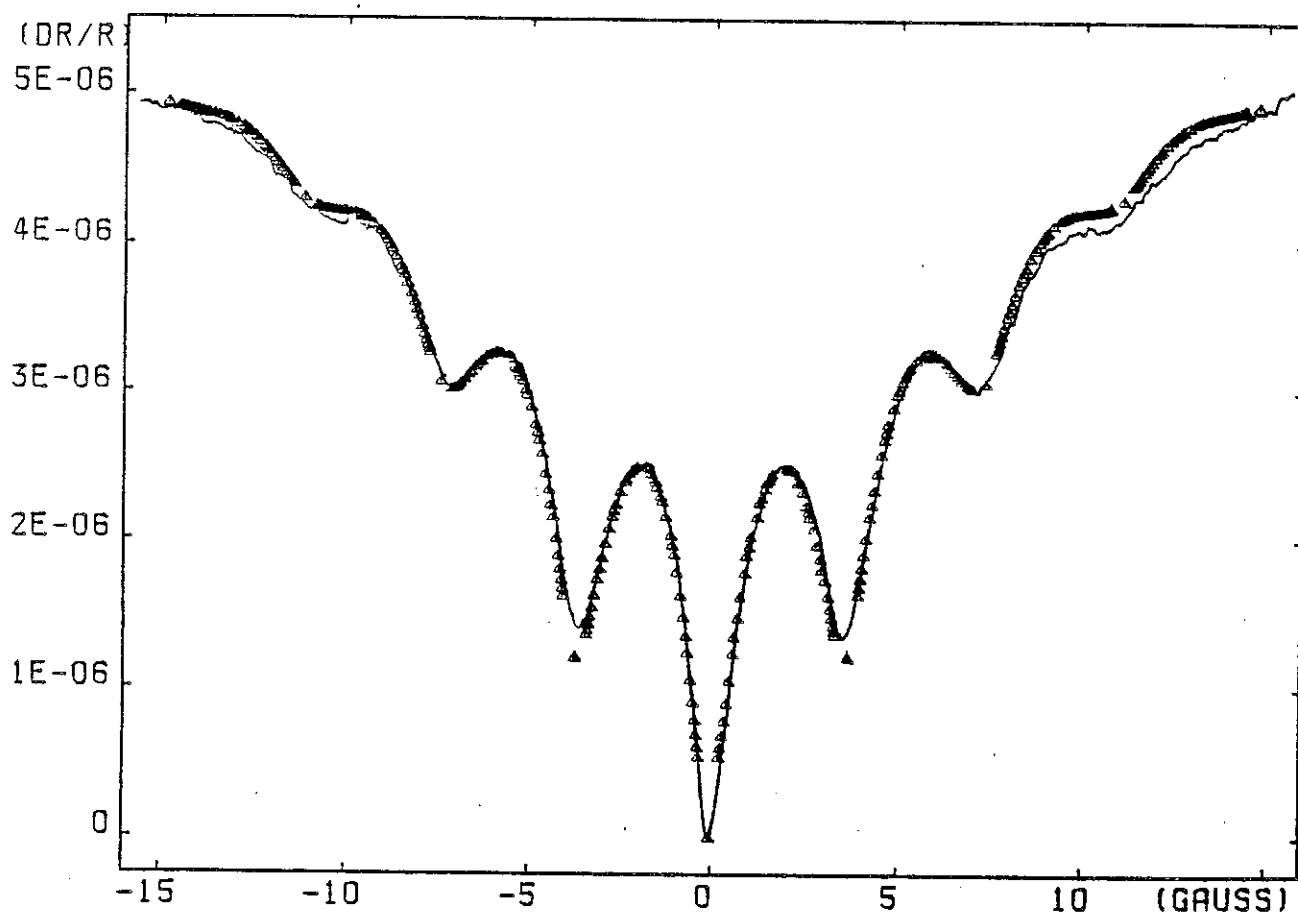


Fig. 4

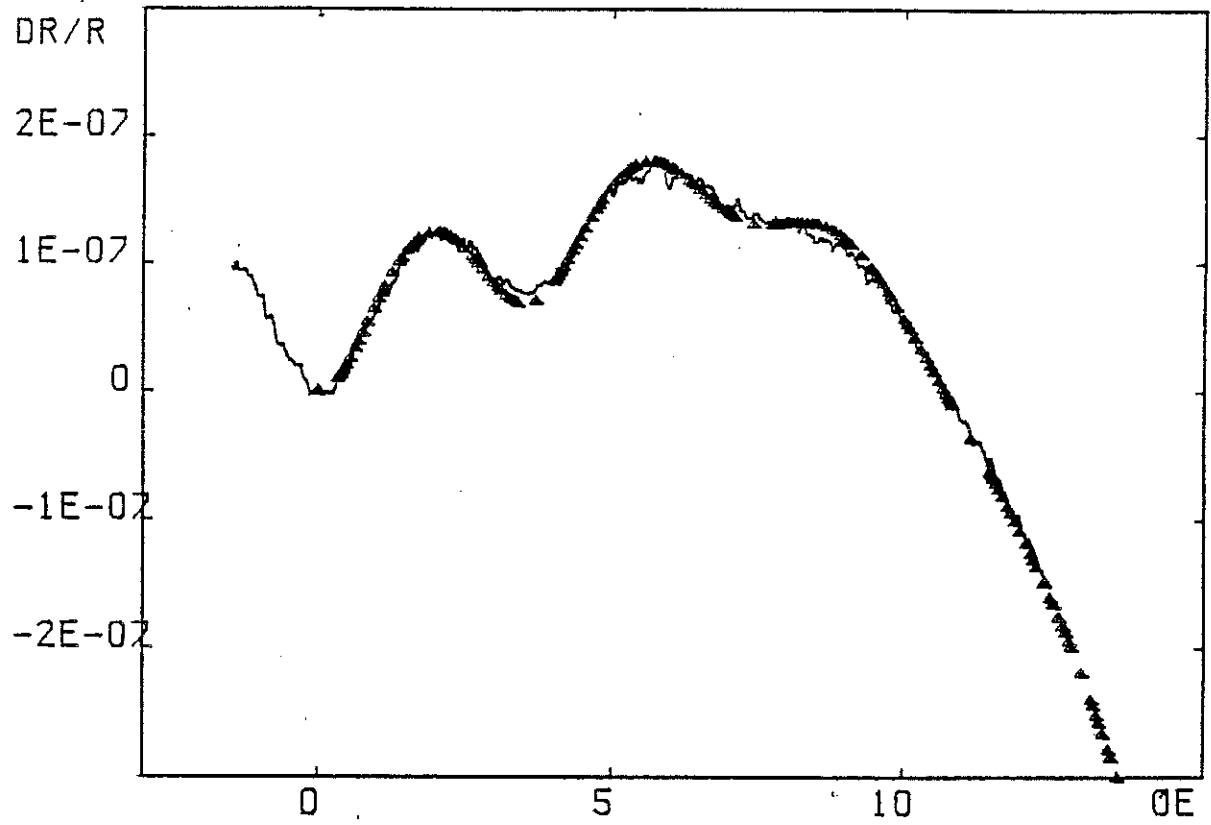


Fig. 5

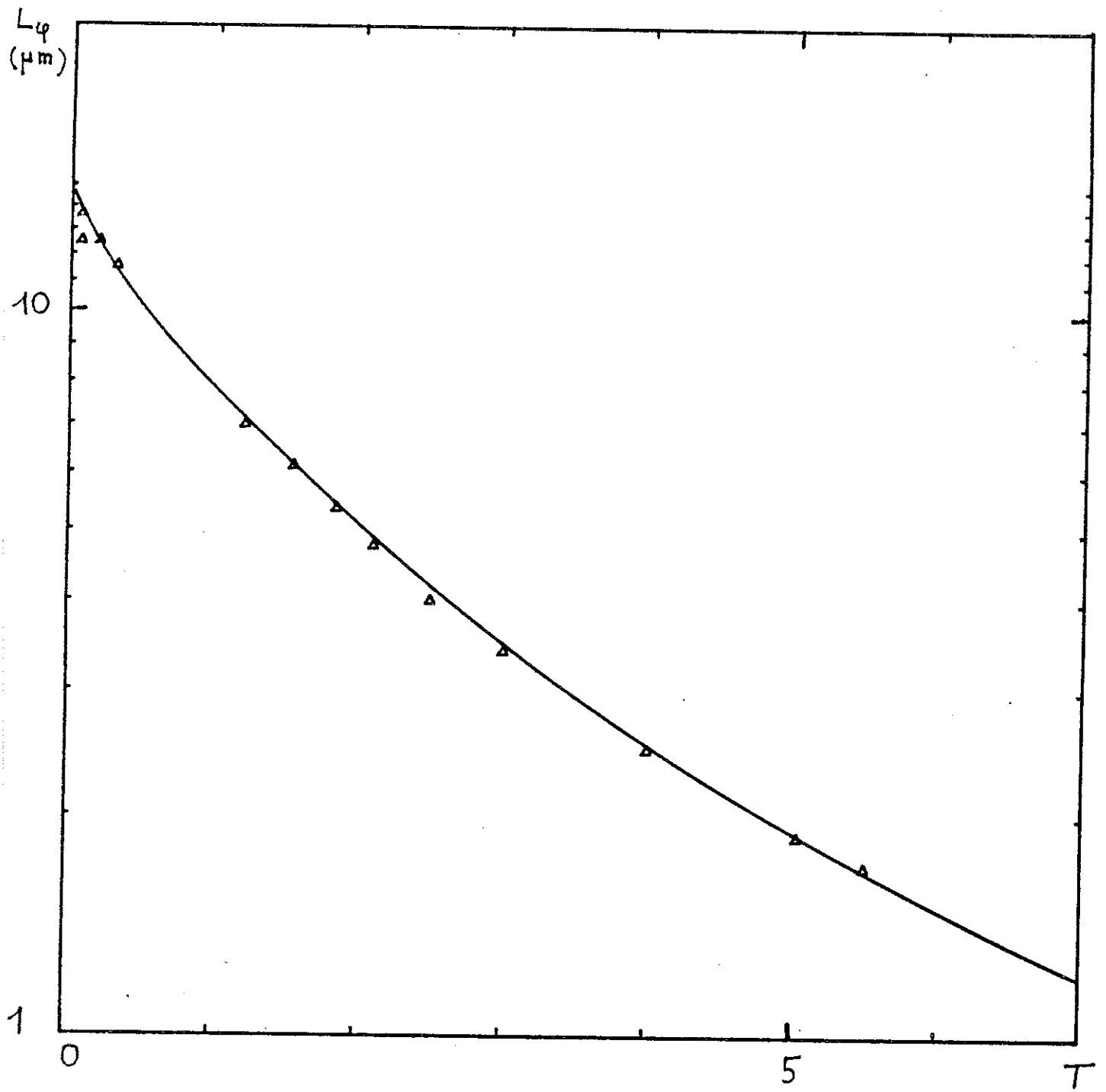


Fig. 6

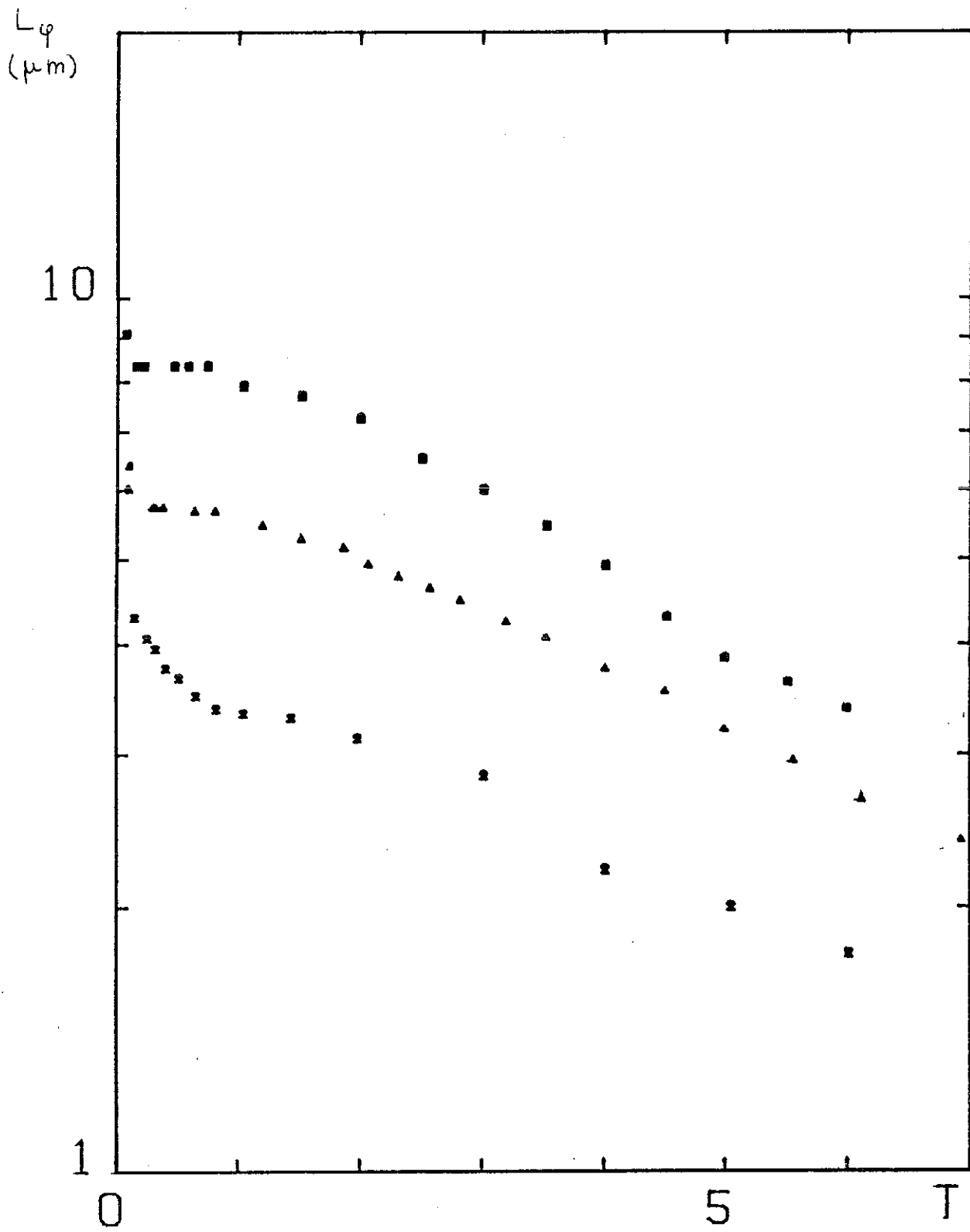


Fig. 7

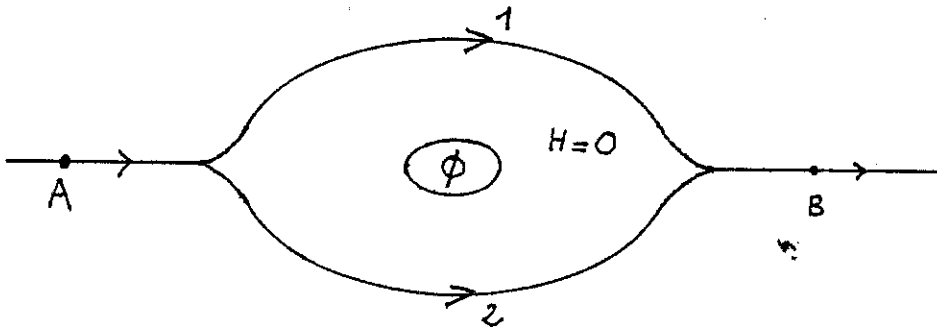
C H A P I T R E I I

PERIODE DES OSCILLATIONS DE MAGNETORESISTANCE DANS DES
SYSTEMES DESORDONNES QUASI UNIDIMENSIONNELS

I - INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, nous avons eu l'occasion de souligner qu'une des signatures étonnantes du mécanisme d'interférence entre les deux sens de parcours d'un chemin fermé, mécanisme à la base de la localisation, est bien la périodicité en $\frac{h}{2e}$ des oscillations de résistance en fonction du flux magnétique traversant les boucles d'un réseau. Seulement les prédictions de la localisation faible portent sur la conductivité moyennée sur toutes les réalisations du désordre. Dans certains cas, comme celui de très petits anneaux, et comme les expériences l'ont montré^(17,18), le comportement d'un échantillon est différent.

Considérons par exemple une géométrie Aharonov-Bohm : un faisceau d'électrons se propage dans une région sans champ magnétique, autour d'un cylindre à l'intérieur duquel règne un champ H .



Evaluons l'amplitude d'aller de A en B dans l'hypothèse où seuls deux chemins sont possibles

$$\mathcal{A}_{AB} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$$

Le potentiel vecteur non nul existant à l'extérieur du cylindre agit sur la phase des amplitudes de probabilité, de sorte que

$$\mathcal{A}_1(H) = \mathcal{A}_1(H=0) \exp \left[\frac{ie}{\hbar} \int_A^B \vec{A} \cdot d\vec{x} \right]_{(1)}$$

$$\mathcal{A}_2(H) = \mathcal{A}_2(H=0) \exp \left[\frac{ie}{\hbar} \int_A^B \vec{A} \cdot d\vec{x} \right]_{(2)}$$

La probabilité de transition est alors :

$$P_{AB} = |\mathcal{A}_{AB}|^2 = |\mathcal{A}_1(H=0)|^2 + |\mathcal{A}_2(H=0)|^2 + 2 \operatorname{Re} [\mathcal{A}_1(H=0) \mathcal{A}_2^*(H=0) e^{(-i \frac{e}{\hbar} \Phi)}]$$

Φ est le flux magnétique traversant la boucle délimitée par les chemins 1 et 2. Soit θ la différence de phase entre $\mathcal{A}_1(H=0)$ et $\mathcal{A}_2(H=0)$.

On a : $P_{AB} = |\mathcal{A}_1(H=0)|^2 + |\mathcal{A}_2(H=0)|^2 + 2 |\mathcal{A}_1(H=0)| |\mathcal{A}_2(H=0)| \cos(\theta - 2\pi \frac{e}{\hbar} \Phi)$.

Imaginons que l'on puisse modéliser une sorte de désordre en donnant à θ une distribution de probabilité uniforme. Pour un échantillon donné (θ donné) P_{AB} oscille avec la période $\frac{h}{e}$ de l'effet Aharonov-Bohm. La phase à l'origine de ces oscillations est uniformément répartie.

Par contre, si on prend la moyenne d'ensemble $\langle P_{AB} \rangle$ on a :

$\langle P_{AB} \rangle = |\mathcal{A}_1(H=0)|^2 + |\mathcal{A}_2(H=0)|^2$ indépendant de H . Ici donc, la moyenne d'ensemble ne décrit pas le comportement d'un échantillon. De plus, celle-ci n'a pas vraiment pour période $\frac{h}{2e}$ (elle est constante en H), ce qui n'est pas surprenant puisque ce modèle trop simple ne permet pas aux électrons de parcourir des boucles fermées.

Imaginons maintenant N systèmes statistiquement identiques au précédent connectés en série. L'amplitude totale de transmission, si on fait l'approximation brutale de ne garder que les chemins de longueur N , est le produit des amplitudes de transmission de chacun des systèmes. Le logarithme du coefficient de transmission global est une somme de variables aléatoires indépendantes et de même loi, par conséquent lorsque $N \rightarrow \infty$, il obéit à une distribution centrale limite. Pour le modèle ici envisagé $\ln T(N, H)$ est donc bien décrit par la moyenne d'ensemble $\langle \ln T(N, H) \rangle$ qui sera indépendante de H . Pour un échantillon à N grand $\ln T(H)$ sera indépendant de H , avec toutefois des fluctuations de l'ordre de l'écart type $[\langle (\ln T(N))^2 \rangle - \langle \ln T(N) \rangle^2]^{1/2}$, la variation relative s'éteignant en $N^{-1/2}$ lorsque N devient grand.

Ces considérations simples nous conduisent à poser deux questions qui feront l'objet de ce chapitre :

a) Pour un modèle donné de système désordonné, présentant des boucles où règne un champ magnétique, quelle est la période des oscillations de la distribution de probabilité des coefficients de transmission de ce système, en fonction du flux traversant les boucles ? Dans quelles conditions retrouve-t-on la période caractéristique de la localisation faible ($\frac{h}{2e}$) ?

b) Pour un modèle donné, quelle est l'importance des fluctuations d'échantillon à échantillon ? Dans quelle mesure les propriétés de la distribution de probabilité comme la périodicité se reflètent-elles sur le comportement d'un échantillon ?

De telles fluctuations d'échantillon à échantillon sont attendues pour des systèmes unidimensionnels dans lesquels la distribution de probabilité de la résistance présente bien des pathologies (les moments successifs de la résistance divergent plus vite que la résistance moyenne, à la limite d'une chaîne infinie). Dans les situations expérimentales, on peut dégager trois mécanismes qui tendent à réaliser un automoyennage :

- a) la connection dans un réseau d'éléments identiques en grand nombre. C'est le cas des expériences décrites au chapitre précédent. Notons qu'à une dimension, cela ne suffit pas, il faut également choisir de bonnes variables, automoyennantes, comme le logarithme de la résistance⁽²²⁾.
- b) le fait que les fils constituant les boucles ne sont pas rigoureusement unidimensionnels, mais de largeur finie, et par suite, à une énergie incidente donnée présentent plusieurs canaux de propagation. Ces différents canaux sont couplés par le désordre, et ce degré de liberté supplémentaire doit favoriser l'automoyennage.
- c) la température qui interdit à l'énergie d'être définie à mieux que $k_B T$. On doit alors faire une moyenne du coefficient de transmission

sur cette plage d'énergie⁽²³⁾ dont la largeur augmente avec la température. Dans certaines conditions, cette moyenne a le même résultat qu'une moyenne sur le désordre. Nous commencerons par décrire un certain nombre de résultats connus avant de présenter nos calculs sur différents modèles.

II - $\frac{h}{e}$ OU $\frac{h}{2e}$. QUELQUES TRAVAUX RECENTS

Notre introduction a voulu souligner que beaucoup de situations intéressantes sont envisageables, et que la magnétorésistance est sensible à leurs différences. Beaucoup de modèles ont donc été étudiés.

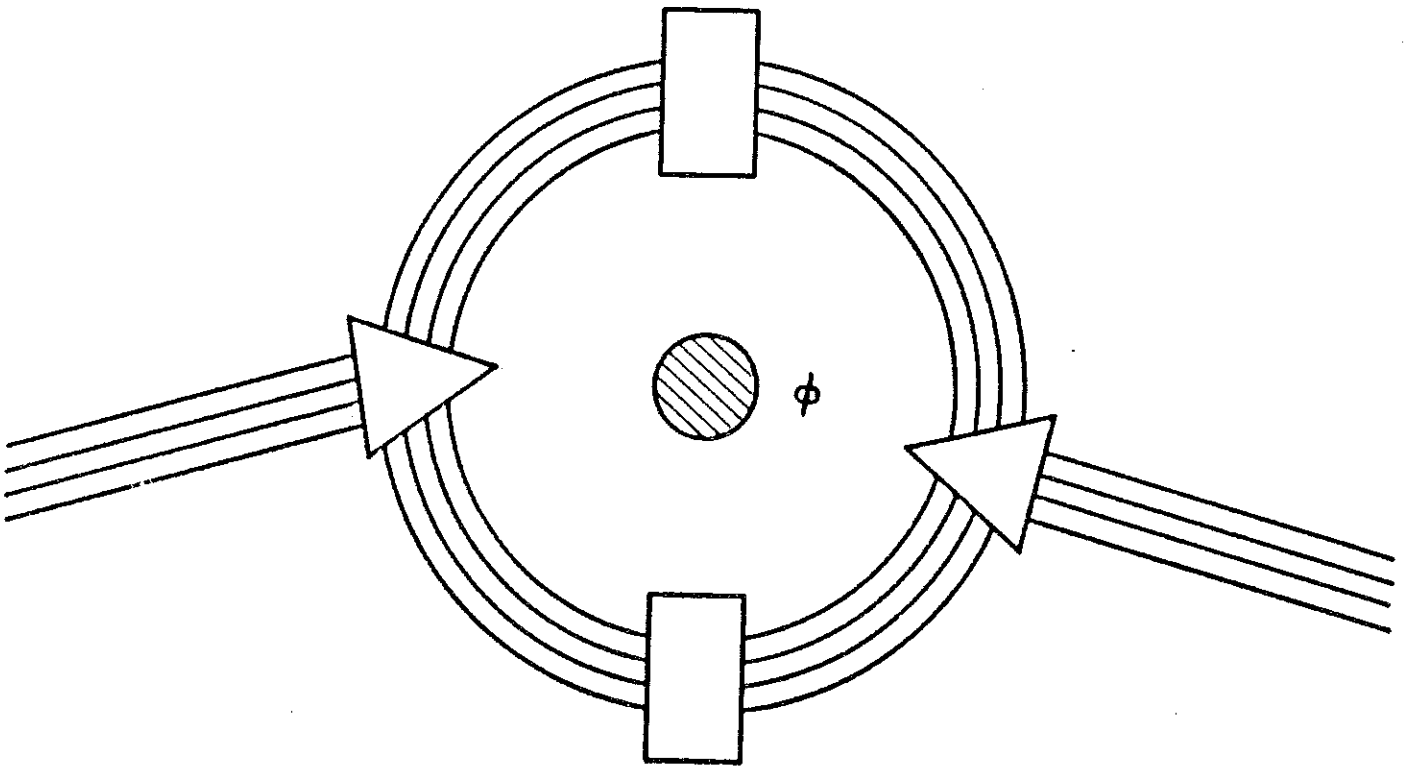
A. Anneaux désordonnés.

Après l'approche en localisation faible⁽²⁴⁾, le problème a été abordé en utilisant l'approche de Landauer pour la conductance d'un système quasi 1D⁽²⁾. Landauer a établi une relation entre la conductance G d'un élément de circuit placé entre deux réservoirs d'électrons, et le coefficient de transmission T de l'élément de circuit pour l'énergie correspondant au potentiel chimique des réservoirs. Pour un système rigoureusement unidimensionnel :

$$G = \frac{e^2}{\pi h} \frac{T}{1-T}$$

Cette formule a été récemment généralisée pour un système ayant plusieurs canaux de transmission⁽²⁵⁾. Dans la limite des faibles transmissions, $G = \frac{e^2}{\pi h} \text{Tr}(tt^+)$ où t est la matrice de transmission de l'élément de circuit.

On peut de la sorte modéliser des anneaux désordonnés, comme l'indique schématiquement la figure suivante.



Un tel système présente la période $\frac{h}{e}$ pour un échantillon donné^(26,27). Récemment Li et Soukoulis⁽²⁸⁾ se sont intéressés à la distribution de probabilité de la transmission d'un tel anneau désordonné, dans le cas où les brins supérieur et inférieur n'ont qu'un seul canal de propagation. Ils prennent les expressions suivantes pour les coefficients de transmission et de réflexion dans les brins supérieur et inférieur :

$$t_{1(2)} = T_s^{1/2} e^{i\phi} 1(2) \quad \text{et} \quad r_{1(2)} = (1 - T_s)^{1/2} e^{i\phi} 1(2) e^{-i\pi/2}$$

Le désordre est introduit par l'intermédiaire des phases ϕ_1 et ϕ_2 qui sont des variables aléatoires indépendantes, avec une distribution uniforme. Dans ce modèle la distribution de probabilité du coefficient de transmission de l'anneau a pour période $\frac{h}{2e}$ dans le cas où T_s est très voisin de 1 (faible diffusion dans les brins). Sinon, en diminuant T_s , la périodicité de la distribution de probabilité devient $\frac{h}{e}$. Ces résultats dépendent très fortement de l'hypothèse qui est faite sur la forme de r_1 , t_1 , r_2 , t_2 , à savoir une différence de phase constante

égale à $\frac{\pi}{2}$ entre le coefficient de transmission et le coefficient de réflexion. Cette hypothèse nous paraît arbitraire, dans la mesure où par exemple une translation d'une longueur L du diffuseur entraîne la substitution

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t \\ r &\rightarrow re^{i2kL} \end{aligned}$$

On s'attend en fait à un brouillage de la phase relative entre r et t . Ce point sera abordé ultérieurement.

Le groupe d'IBM^(17,23) a beaucoup contribué à l'étude, expérimentale et théorique de cette géométrie de l'anneau. Notamment les expériences ont montré à basse température de nettes oscillations à $\frac{h}{e}$, subsistant à des champs magnétiques élevés (8 T soit un millier d'oscillations pour les mesures effectuées par Webb et collaborateurs⁽¹⁷⁾). La dépendance en température de l'amplitude des oscillations est compatible avec une loi en $T^{-1/2}$, que l'on obtient en faisant l'hypothèse que l'on moyenne différentes figures d'interférence pour diverses valeurs d'énergie sur une plage de largeur $k_B T$. Une évaluation assez suggestive de l'amplitude de l'oscillation à $\frac{h}{e}$ pour un anneau constitué de plusieurs canaux de propagation a été donnée par Büttiker et coll.⁽²⁷⁾. Désignons par N le nombre de canaux. D'après la formule de Landauer généralisée :

$$G = \frac{e^2}{\pi h} \sum_{ij} T_{ij} \quad \text{où } T_{ij} \text{ est la probabilité de transmission}$$

dans le canal i pour une onde incidente j . Une évaluation semblable à celle que nous avons décrite dans le paragraphe précédent nous conduit à poser :

$$T_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \cos \theta_{ij} + c_{ij} \cos(2\pi \frac{e}{h} \phi - \varphi_{ij})$$

Dans cette formule, a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} sont des variables aléatoires, positives, du même ordre de grandeur, et θ_{ij} et φ_{ij} sont des phases que l'on suppose uniformément réparties. La conductance totale est alors une somme de N^2 telles contributions, elle est donc de l'ordre de $N^2 a$.

La superposition des termes oscillants donne une oscillation globale en $N\alpha$, puisque les phases φ_{ij} sont a priori décorréliées. L'amplitude de l'oscillation à $\frac{h}{e}$ est donc en $\frac{G}{N}$ soit typiquement de l'ordre de la conductance universelle $\frac{e^2}{h}$.

Notons que cette contribution à $\frac{h}{e}$ a une moyenne d'ensemble égale à zéro. Pour un échantillon donné, on doit cependant pouvoir l'observer.

D'autre part, le calcul d'Altshuler, Aronov et Spivak⁽²⁴⁾, en localisation faible prévoit :

$$\Delta g = - \frac{e^2}{\pi h} L_\varphi \frac{\text{sh}(L/L_\varphi)}{\text{ch}(L/L_\varphi) - \cos(2\pi \frac{2e}{h} \phi)}$$

Δg est la correction à la conductance moyenne par unité de longueur. Il résulte de cette formule que l'oscillation à $\frac{h}{2e}$ de la localisation faible est du même ordre de grandeur que l'oscillation à $\frac{h}{e}$ caractéristique d'un échantillon pour lequel les différents chemins ne se moyennent pas complètement. En fait, les expériences de Chandrasekhar et coll.⁽¹⁸⁾ montrent une superposition des deux périodes sur un anneau. Ces deux périodicités ont toutefois des propriétés très différentes :

- a) la phase des oscillations à $\frac{h}{e}$ est arbitraire, tandis que l'oscillation à $\frac{h}{2e}$ est une fonction paire du champ magnétique, dont la concavité correspond à une magnétorésistance négative pour les faibles champs.
- b) en champ magnétique très fort ($\phi \sim 10^3 \frac{h}{e}$), l'oscillation à $\frac{h}{e}$ subsiste, en tant que résidu d'une superposition aléatoire non complètement moyennée. Par contre, la pénétration du champ dans les brins tue l'oscillation à $\frac{h}{2e}$ lorsque le flux dans les brins constituant la boucle est de l'ordre de quelques $\frac{h}{e}$. Ce dernier effet a été discuté en détail dans le premier chapitre.
- c) la température est très nocive pour l'observation de l'oscillation à $\frac{h}{e}$: la moyenne sur les énergies joue le rôle d'une moyenne d'ensemble comme le suggèrent des simulations numériques de Stone et

Imry⁽²³⁾. Par contre, tant que la longueur de cohérence de phase L_ϕ reste supérieure au périmètre de l'anneau, l'oscillation à $\frac{h}{2e}$ est visible.

Les expériences spectaculaires réalisées sur des anneaux de taille inférieure au micron sont ainsi un bel exemple de système désordonné présentant des effets cohérents, effets décrits seulement de manière partielle par la moyenne d'ensemble (localisation faible).

B. Anneaux disposés en série - Echelles.

Nous avons déjà eu l'occasion, au premier chapitre, de commenter les résultats de Dolan, Licini et Bishop⁽¹⁶⁾ sur des échelles, résultats en assez bon accord avec les prédictions quantitatives de la localisation faible. Afin d'étudier l'automoyennage dans les grands systèmes, Umbach et coll.⁽²⁹⁾ ont réalisé des réseaux de boucles submicroniques mises en série. Ils ont alors étudié l'évolution des courbes de magnétorésistance obtenues lorsque le nombre de boucles assemblées augmente. La température est choisie de manière à ce que la longueur de cohérence de phase soit de l'ordre du périmètre d'une boucle, afin de limiter les interférences sur plusieurs boucles. Ils observent une décroissance en $N^{-1/2}$ de l'amplitude de la composante de Fourier correspondant à $\frac{h}{e}$, N étant le nombre de boucles. Par contre, l'amplitude de la composante à $\frac{h}{2e}$ est indépendante de N . Ces résultats tendent à confirmer l'idée que l'on observe la superposition incohérente de N effets à une boucle, et une convergence vers la valeur moyenne donnée par la localisation faible, lorsque N augmente. Ces expériences sont tout à fait compatibles avec l'absence d'oscillation à $\frac{h}{e}$ qui se manifeste dans des réseaux bidimensionnels comme ceux que nous avons considérés dans le premier chapitre.

La géométrie de l'échelle a également été l'objet d'un travail numérique de B. Fourcade⁽³⁰⁾. Le modèle considéré est un modèle de liaisons fortes, avec des énergies aléatoires aux noeuds de l'échelle. La quantité $\tilde{\rho} = \frac{1}{N} \ln(1 + \frac{1}{T})$ (logarithme de la résistance par unité de longueur) est calculée et moyennée sur un grand nombre de réalisations

du désordre, en fonction du flux ϕ par boucle élémentaire. On constate alors, à faible désordre, une oscillation avec la période $\frac{h}{e}$. Puis lorsque le désordre augmente, de sorte que la longueur de localisation devient comparable à la distance entre sites, une forte harmonique à $\frac{h}{2e}$ se dessine et devient prépondérante à fort désordre. Nous devons ici noter qu'un tel modèle correspond physiquement à des champs magnétiques extrêmement élevés. En effet, pour créer un flux de $\frac{h}{e}$ sur un carré dont le côté est une distance atomique, que nous prendrons égale à $1 \text{ \AA}$, il faut un champ magnétique de $\approx 4 \cdot 10^5 \text{ T}$. Cependant son intérêt est de montrer que la nature de la distribution de probabilité de la résistance, sa périodicité notamment peut dépendre des détails microscopiques du modèle considéré.

C. Le modèle de Nguyen, Spivak et Shklovskii⁽³¹⁾.

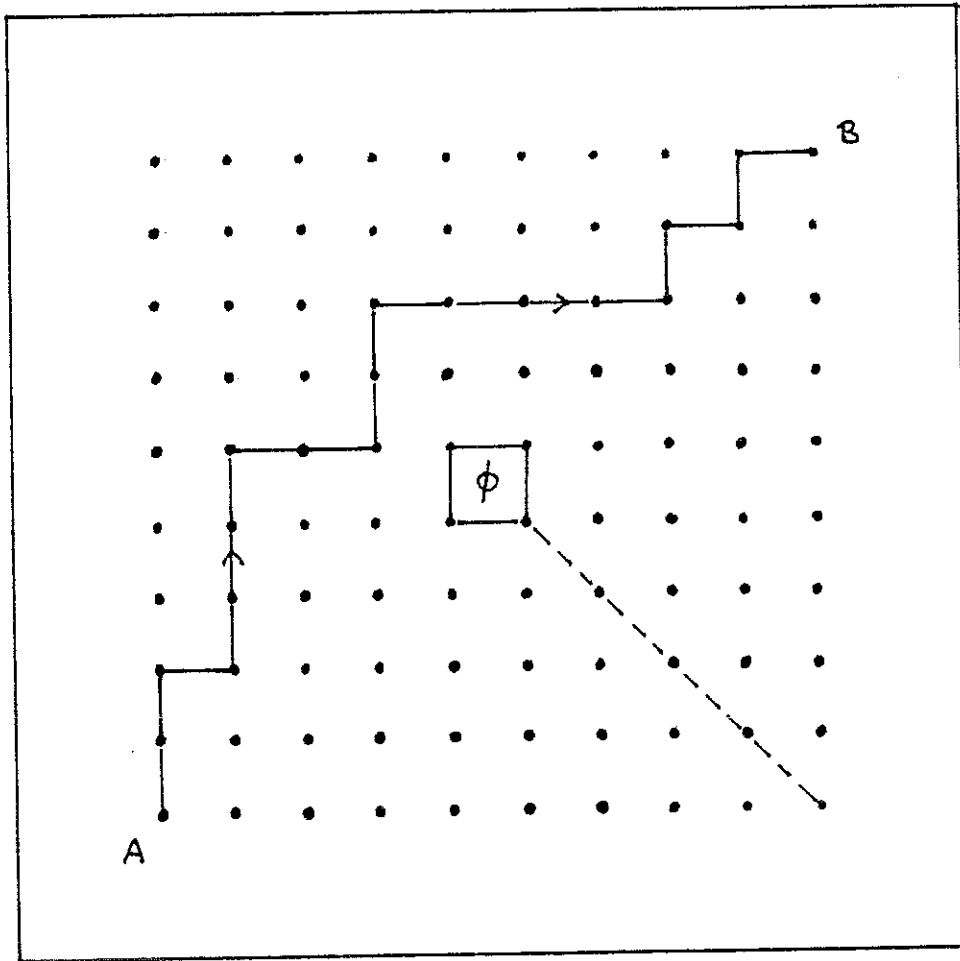
Il s'agit d'un modèle bidimensionnel de liaisons fortes, sur un réseau carré, constitué de $(n+1)^2 = N$ sites. On choisit l'hamiltonien

$$H = \sum_{i=1}^N \epsilon_i a_i^+ a_i + \sum_{i \neq j} V_{ij} a_i^+ a_j$$

où $V_{ij} = V$ lorsque i et j sont deux sites plus proches voisins et $V_{ij} = 0$ sinon. Les ϵ_i sont des énergies aléatoires, avec la loi de probabilité suivante :

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= -W \text{ avec probabilité } x \\ \epsilon_i &= W \text{ avec probabilité } 1-x \end{aligned}$$

On se place dans une situation où $W \gg V$, c'est-à-dire que l'on traite la possibilité de saut d'un site à l'autre comme une perturbation. L'amplitude de probabilité pour aller d'un sommet A du carré au sommet opposé B (voir figure) est la somme des amplitudes associées à chacun des chemins sur le réseau joignant A et B. Dans cette limite où la probabilité de saut est petite, il est raisonnable de ne retenir que les chemins de longueur minimale ($2n$), c'est-à-dire les chemins se dirigeant constamment soit vers le haut soit vers la droite.



La contribution d'un chemin est :

$$\frac{1}{\epsilon - \epsilon_B} V \frac{1}{\epsilon - \epsilon_{2n-1}} V \dots V \frac{1}{\epsilon - \epsilon_1} V \frac{1}{\epsilon - \epsilon_A}$$

où ϵ est l'énergie de Fermi et $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{2n-1}$ sont les énergies des sites visités. Cette contribution s'écrit plus simplement lorsque $|\epsilon| \ll W$ sous la forme :

$$\frac{1}{\epsilon - \epsilon_A} V \frac{1}{\epsilon - \epsilon_B} \left(-\frac{V}{W}\right)^{2n-1} \prod_{i=1}^{2n-1} \alpha_i \quad \text{où} \quad \begin{cases} \alpha_i = 1 & \text{si } \epsilon_i = W \\ \alpha_i = -1 & \text{si } \epsilon_i = -W \end{cases}$$

L'amplitude de probabilité de transition de A vers B est donc proportionnelle à la quantité

$$J = \sum_{\{\Gamma\}} \prod_{\{i_\Gamma\}} \alpha_i$$

$\{\Gamma\}$ désigne l'ensemble des chemins dirigés de A vers B, et $\{i_\Gamma\}$ pour un chemin donné est l'ensemble des sites visités, à l'exception de A et B. Le nombre total de ces chemins est C_{2n}^n . Pour un chemin donné, on peut calculer facilement la valeur moyenne de $\pi_{\{i_\Gamma\}} \alpha_i$ sur les différentes réalisations du désordre :

$$\langle \pi_{\{i_\Gamma\}} \alpha_i \rangle = \sum_{p=0}^{2n-1} C_{2n-1}^p (-1)^p x^p (1-x)^{2n-1-p} = (1-2x)^{2n-1}.$$

Par suite

$$\langle J \rangle = C_{2n}^n (1-2x)^{2n-1}$$

Il est intéressant de connaître le signe de J pour un échantillon donné. Dans la mesure où J est une somme de variables aléatoires (non indépendantes) prenant les valeurs +1 ou -1, on s'attend à des fluctuations importantes. En négligeant la corrélation, la fluctuation de J est proportionnelle au nombre de chemins, donc

$$\frac{\langle (\Delta J)^2 \rangle^{1/2}}{\langle J \rangle} = \frac{\text{cte}}{[C_{2n}^n]^{1/2} (1-2x)^{2n-1}} \quad \text{proportionnel à}$$

$$\frac{1}{[2(1-2x)^2]^n}$$

A la limite $n \rightarrow \infty$ cette fonction est discontinue et cet argument donne une transition du 1er ordre.

$$\text{si } x < \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle (\Delta J)^2 \rangle^{1/2}}{J} = 0$$

$$\text{si } x > \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle (\Delta J)^2 \rangle^{1/2}}{\langle J \rangle} = \infty$$

La valeur $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est de l'ordre de 0,15. Pour une concentration inférieure, le signe de la fonction de Green G_{AB} est très bien défini. Pour une concentration supérieure, le signe de G_{AB} peut être + ou - avec des probabilités voisines. L'augmentation de la concentration de

de défauts x provoque une cassure de la cohérence mutuelle entre les différents chemins. En fait, les simulations numériques présentées dans l'article semblent indiquer une transition du 2ème ordre pour $x = x_c \approx 0,05$. Le paramètre d'ordre choisi est $2p_+ - 1$ où p_+ est la probabilité que J soit positif.

Une éventuelle transition sur le signe de J conduit à un changement de comportement de la magnéto-résistance d'un tel modèle dans la géométrie du type Aharonov-Bohm. On peut introduire dans ce modèle l'équivalent d'un champ magnétique à l'intérieur de la plaquette centrale en multipliant par un facteur de phase $e^{i\varphi}$ la contribution des chemins passant d'un côté déterminé. Sur la figure, la ligne en pointillés indique que les chemins la traversant doivent effectivement recevoir ce facteur de phase. $\varphi = 2\pi$ est l'équivalent d'un quantum de flux normal $\frac{h}{e}$. Lorsque $x < x_c$, les chemins ont avec une grande probabilité une contribution de même signe, par conséquent le déphasage φ tend à diminuer la probabilité de transition de A en B. Celle-ci a un minimum pour $\varphi = \pi$. La distribution de probabilité et la transmission d'un échantillon oscillent donc avec la même période $\frac{h}{e}$.

Lorsque $x > x_c$ les signes associés aux différents chemins sont répartis de manière quasi uniforme, si bien que la distribution de probabilité de J est la même à flux moitié ($\varphi = \pi$) qu'en l'absence de flux. En effet $\varphi = \pi$ conduit simplement à changer de signe la contribution des chemins passant par le bas, contribution dont le signe était déjà aléatoire.

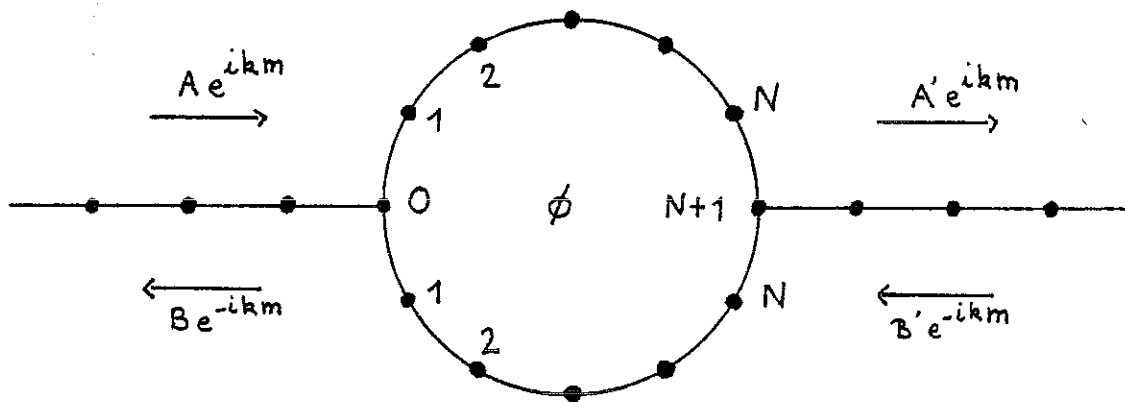
Ce modèle semble donc présenter un changement de comportement de la distribution de probabilité de la transmission, dont la périodicité est $\frac{h}{e}$ à faible concentration de défauts, et $\frac{h}{2e}$ au-delà d'une concentration critique. Dans la deuxième région, le comportement d'un échantillon toutefois doit faire apparaître la période $\frac{h}{e}$. Notons également que dans cette région à $\frac{h}{2e}$, la magnéto-résistance moyenne est négative, bien que le mécanisme soit très différent de l'interférence entre les deux sens de parcours d'une boucle fermée, invoqué dans le cadre de la localisation faible.

La grande diversité des comportements décrits par les modèles précédemment évoqués nous a conduit à examiner des systèmes quasi unidimensionnels (échelles ou boucles en série) pour lesquels il existe des méthodes permettant un calcul de la distribution de probabilité du coefficient de transmission. La connaissance de la distribution de probabilité semble requise pour une meilleure compréhension de l'influence d'un champ magnétique sur la propagation d'une particule dans un milieu désordonné. De plus, les détails microscopiques des modèles (concentration des impuretés, amplitude des fluctuations de potentiel, nombre de canaux dans les boucles) semblent jouer un grand rôle. Ce chapitre est consacré à l'étude de quelques géométries simples. Nous verrons que quelques conclusions générales peuvent se dégager de l'analyse de ces modèles.

III - BOUCLE DESORDONNEE ISOLEE

A. Formules générales pour la transmission.

Considérons le système suivant :



Il s'agit d'un anneau unidimensionnel, dans un modèle de liaisons fortes, relié à deux réservoirs d'électrons par des chaînes semi-infinies ordonnées. La conductance G de l'anneau est donnée par $G = \frac{e^2}{\pi h} \frac{T}{1-T}$ où T est le coefficient de transmission de l'anneau. Une telle géométrie a déjà été beaucoup étudiée^(26,27,28). Nous cherchons ici à donner une description plus "réaliste" de l'anneau lui-même. L'hamiltonien considéré est le suivant :

$$H = \sum_i \epsilon_i a_i^+ a_i + \sum_{ij} V_{ij} a_i^+ a_j$$

où $V_{ij} = 1$ si i et j sont proches voisins et $V_{ij} = 0$ sinon. Le terme de couplage inter-sites sera choisi comme énergie-unité. Dans les fils ordonnés reliant l'anneau aux réservoirs, $\epsilon = 0$. On en tire la relation de dispersion $E = 2 \cos k$ pour les modes se propageant dans ces chaînes. Les coefficients de transmission t, t' et de réflexion r, r' sont introduits par :

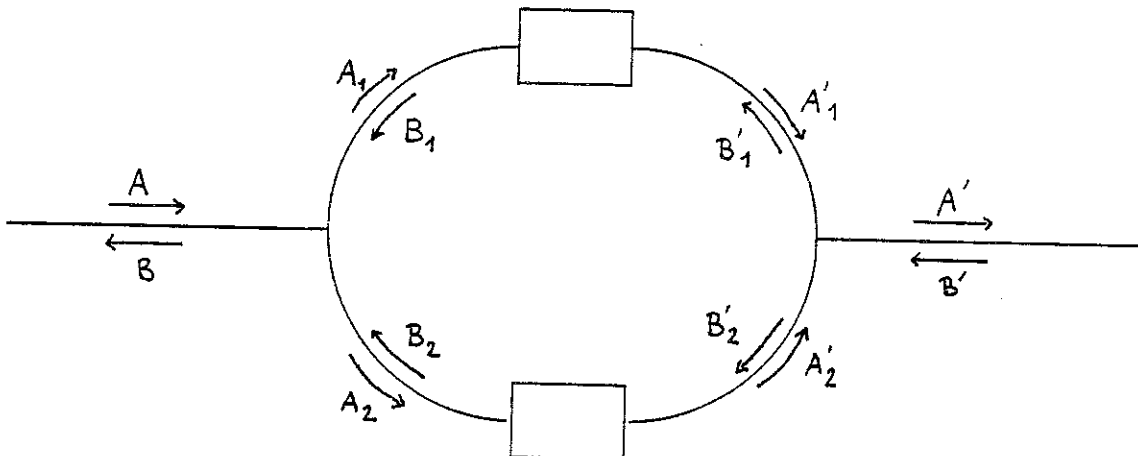
$$\begin{bmatrix} A' \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & r' \\ r & t' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B' \end{bmatrix}$$

La conservation du courant entraîne l'unitarité de cette matrice S. En particulier : $|t|^2 = |t'|^2 = T = 1 - |r|^2 = 1 - |r'|^2 = 1 - R$. On en tire

$$\begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t^*} & -\frac{r^*}{t^*} \\ -\frac{r}{t'} & \frac{1}{t'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

En l'absence de champ magnétique, l'hamiltonien est invariant par renversement du temps et $t = t'$ dans ce cas.

Notons que lorsque $t \neq t'$, la matrice de transmission précédente peut s'écrire comme le produit d'un facteur de phase par une matrice analogue, vérifiant cette fois $t = t'$. Ceci traduit le fait qu'il n'y a pas de champ magnétique pour un système rigoureusement unidimensionnel (il s'élimine dans une transformation de jauge). Le désordre présent aux sites $1, 2, \dots, N$ des brins supérieur et inférieur de l'anneau est résumé par la donnée des coefficients t_1, r_1, t_2, r_2 décrivant la propagation d'une onde dans ces brins. On introduit un flux magnétique dans l'anneau en multipliant la matrice de transmission du brin supérieur par $e^{-i\gamma/2}$ et celle du brin inférieur par $e^{i\gamma/2}$. $\gamma = 2\pi \frac{\phi}{\phi_0}$ où $\phi_0 = \frac{h}{e}$ (quantum de flux normal). La propagation des ondes dans l'anneau est décrite par le schéma suivant :



Le calcul de la matrice de transmission globale de l'anneau revient à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} E(A+B) - (Ae^{-ik} + Be^{ik}) - (A_1e^{ik} + B_1e^{-ik}) - (A_2e^{ik} + B_2e^{-ik}) = 0 \\ A + B = A_1 + B_1 \\ A + B = A_2 + B_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} A'_1 \\ B'_1 \end{bmatrix} = e^{-i \frac{\gamma}{2}} \begin{bmatrix} 1/t_1^* & -r_1^*/t_1^* \\ -r_1/t_1 & 1/t_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A'_2 \\ B'_2 \end{bmatrix} = e^{i \frac{\gamma}{2}} \begin{bmatrix} 1/t_2^* & -r_2^*/t_2^* \\ -r_2/t_2 & 1/t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} E(A'e^{ik(N+1)} + B'e^{-ik(N+1)}) - (A'_1e^{ikN} + B'_1e^{-ikN}) - (A'_2e^{ikN} + B'_2e^{-ikN}) = 0 \\ A'e^{ik(N+1)} + B'e^{-ik(N+1)} = A'_1e^{ik(N+1)} + B'_1e^{-ik(N+1)} \\ A'e^{ik(N+1)} + B'e^{-ik(N+1)} = A'_2e^{ik(N+1)} + B'_2e^{-ik(N+1)} \end{cases}$$

On obtient ainsi :

$$m = \frac{1}{2iG \sin k} \begin{bmatrix} -[|G|^2 + (A-i \sin k)(B+i \sin k)] & -[|G|^2 + (A-i \sin k)(B-i \sin k)] \\ [|G|^2 + (A+i \sin k)(B+i \sin k)] & [|G|^2 + (A+i \sin k)(B-i \sin k)] \end{bmatrix}$$

où m désigne la matrice de transmission du système global.

Soit :

$$T = \frac{4 |G|^2 \sin^2 k}{|G|^4 + 2(AB + \sin^2 k) |G|^2 + (A^2 + \sin^2 k)(B^2 + \sin^2 k)}$$

A, B et G sont reliés à t_1 , r_1 , t_2 , r_2 et γ . Seul G dépend du flux γ .
Pour cela, posons :

$$t_1 = \sqrt{T_1} e^{i\varphi_1} \quad \frac{r_1}{t_1} = \frac{\sqrt{1-T_1}}{\sqrt{T_1}} e^{i\psi_1}$$

(de même pour t_2 et r_2).

$$A = \cos k - \sin k \left[\frac{\cos(k(N+1)+\varphi_1) + \sqrt{1-T_1} \cos(k(N+1)-\psi_1)}{\sin(k(N+1)+\varphi_1) + \sqrt{1-T_1} \sin(k(N+1)-\psi_1)} + (1 \leftrightarrow 2) \right]$$

$$B = \left[\frac{\cos(k(N+1)+\varphi_1) - \sqrt{1-T_1} \cos(k(N+1)-\psi_1)}{\sin(k(N+1)+\varphi_1) + \sqrt{1-T_1} \sin(k(N+1)-\psi_1)} + (1 \leftrightarrow 2) \right] \sin k - \cos k$$

Il est commode d'introduire les notations suivantes :

$$\alpha_1 = \cos(k(N+1)+\varphi_1) + \sqrt{1-T_1} \cos(k(N+1)-\psi_1)$$

$$\beta_1 = \cos(k(N+1)+\varphi_1) - \sqrt{1-T_1} \cos(k(N+1)-\psi_1)$$

$$\Delta_1 = \sin(k(N+1)+\varphi_1) + \sqrt{1-T_1} \sin(k(N+1)-\psi_1)$$

et de définir α_2 , β_2 , Δ_2 de la même manière.

On a alors :

$$G = \sin k \left[\sqrt{T_1} \frac{e^{i\frac{\gamma}{2}}}{\Delta_1} + \sqrt{T_2} \frac{e^{-i\frac{\gamma}{2}}}{\Delta_2} \right]$$

Ceci entraîne

$$T = 4 \left(\frac{T_1}{\Delta_1^2} + \frac{T_2}{\Delta_2^2} + \frac{2\sqrt{T_1 T_2}}{\Delta_1 \Delta_2} \cos \gamma \right) / D$$

avec

$$D = \left(\frac{T_1}{\Delta_1^2} + \frac{T_2}{\Delta_2^2} + 2 \frac{\sqrt{T_1 T_2}}{\Delta_1 \Delta_2} \cos \gamma \right)^2 + 2 \left\{ \left[\cot g k - \left(\frac{\alpha_1}{\Delta_1} + \frac{\alpha_2}{\Delta_2} \right) \right] \left[\left(\frac{\beta_1}{\Delta_1} + \frac{\beta_2}{\Delta_2} \right) - \cot g k \right] + 1 \right\} \times$$

$$\times \left(\frac{T_1}{\Delta_1^2} + \frac{T_2}{\Delta_2^2} + 2 \frac{\sqrt{T_1 T_2}}{\Delta_1 \Delta_2} \cos \gamma \right) + \left[\left(\frac{\alpha_1}{\Delta_1} + \frac{\alpha_2}{\Delta_2} - \cot g k \right)^2 + 1 \right] \left[\left(\frac{\beta_1}{\Delta_1} + \frac{\beta_2}{\Delta_2} - \cot g k \right)^2 + 1 \right]$$

Cette expression est de la forme :

$$T = \frac{a + b \cos \gamma}{c + d \cos \gamma + e \cos^2 \gamma}$$

Le terme en $\cos^2 \gamma$ au dénominateur tire son origine de l'interférence entre les deux sens de parcours d'un chemin fermé. En effet, son intensité est proportionnelle à $T_1 T_2$, ce qui correspond à une propagation complète autour de l'anneau.

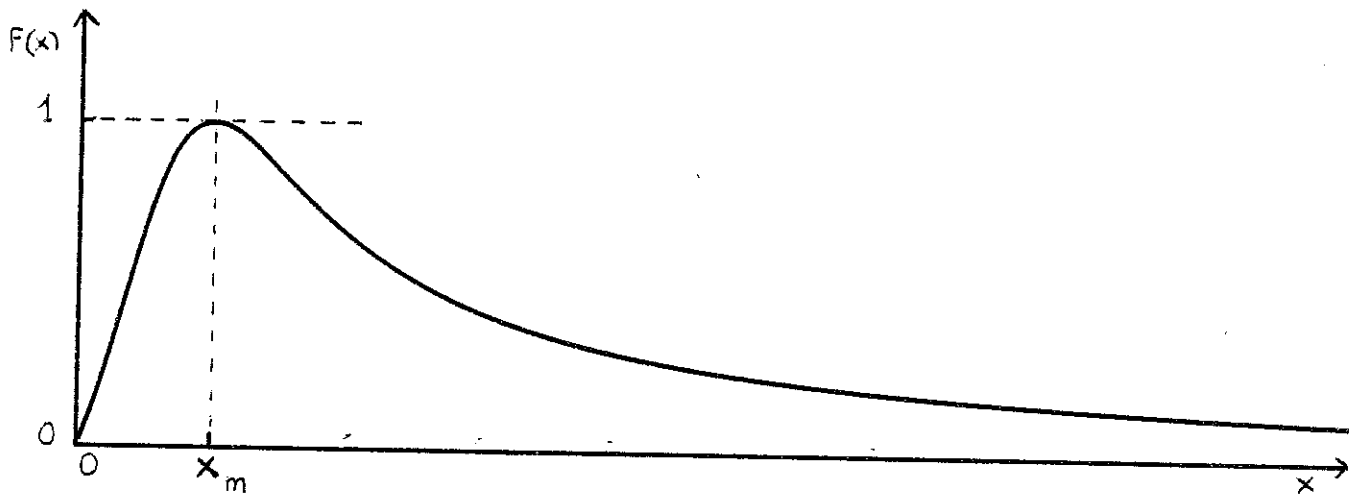
B. Cas d'un système pur.

Dans ce cas $t_1 = 1$, $r_1 = 0$, $t_2 = 1$, $r_2 = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$.
Nous obtenons :

$$T = \frac{8(1 + \cos \gamma) \sin^2 k(N+1)}{\{4(1 + \cos \gamma)^2 + 4 \sin^2 k(N+1) (1 - (\cot g k - 2 \cot g k(N+1))^2) (1 + \cos \gamma) + \sin^4 k(N+1)\}}$$

$$\times [(\cot g k - 2 \cot g k(N+1))^2 + 1]^2$$

Dans ce cas $T = f(1 + \cos \gamma)$ où f est une fraction rationnelle dont les variations sont données par :

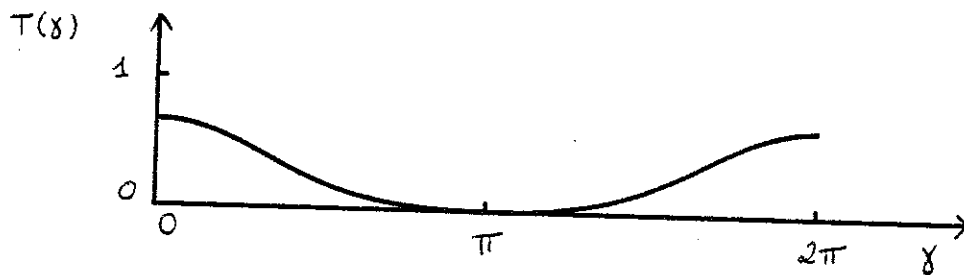


$$x_m = \frac{1}{2} \sin^2 k(N+1) [(\cot gk - 2\cot gk(N+1))^2 + 1]$$

Deux cas se présentent :

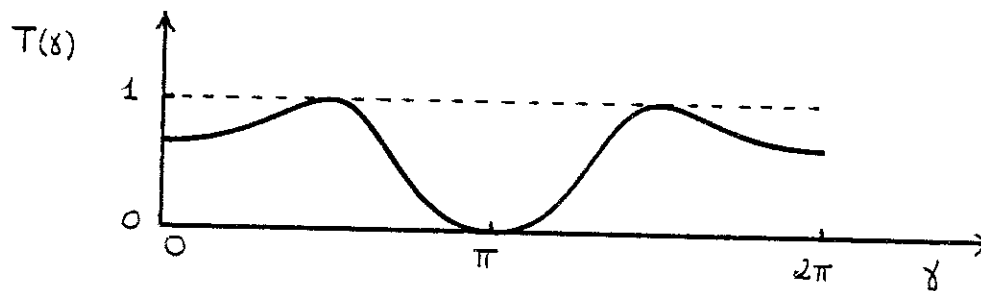
a) $\sin^2 k(N+1) [(\cot gk - 2\cot gk(N+1))^2 + 1] > 4$

$T(\gamma)$ a l'allure suivante :



b) $\sin^2 k(N+1) [(\cot gk - 2\cot gk(N+1))^2 + 1] < 4$

On a une résonance parfaite :

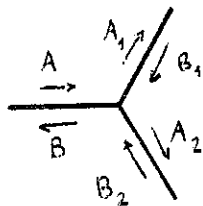


Notons que lorsque $k \rightarrow 0$, on est toujours dans la première situation, alors que lorsque $k \rightarrow \frac{\pi}{2}$,

$$\sin^2 k(N+1) [(\cotg k - 2\cotg k(N+1))^2 + 1] = 1 + 3\cos^2 k(N+1) \leq 4$$

et l'on a le second comportement avec une magnétorésistance négative pour γ voisin de 0. Ce changement de comportement s'explique par le fait que lorsque $k \approx 0$, une onde parvenant à un des deux noeuds a une probabilité voisine de 1 d'être réfléchi. Par conséquent, la particule n'effectue en général pas beaucoup de tours dans l'anneau. Au contraire, à $k \approx \frac{\pi}{2}$, la probabilité que l'onde traverse le noeud est maximale ($\frac{8}{9}$). La particule reste longtemps dans l'anneau et les phénomènes d'interférences entre boucles fermées peuvent jouer. Toutefois, on a toujours $T = 0$ ($\gamma = \pi$) à flux moitié $\phi = \frac{h_i}{2e}$.

Remarque : la transmission à travers les noeuds peut se décrire par une matrice $S^{(26)}$



$$\begin{bmatrix} B \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} A \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } S = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$$

$$\text{et } a = -\frac{e^{ik}}{2e^{ik} - e^{-ik}} \quad |a|^2 = \frac{1}{1+8\sin^2 k}$$

$$b = \frac{e^{ik} - e^{-ik}}{2e^{ik} - e^{-ik}} \quad |b|^2 = \frac{4\sin^2 k}{1+8\sin^2 k}$$

Ceci précise la remarque ci-dessus sur l'influence de k sur le couplage entre les différents brins de l'anneau.

C. Cas d'un système désordonné.

On suppose que la longueur des brins, N , est supérieure à la longueur de localisation à l'énergie E . Il en résulte que T_1 et T_2 sont en moyenne très petits devant 1. Mais la conséquence importante est le brouillage des phases φ_1, ψ_1 et φ_2, ψ_2 . Nous préciserons ce point un peu plus loin. Pour l'instant, nous admettons qu'il en est bien ainsi.

De l'expression générale de T , on tire le résultat suivant : T est inchangé lorsque l'on effectue les substitutions :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &\rightarrow \varphi_1 + \pi & \varphi_2 &\rightarrow \varphi_2 & \gamma &\rightarrow \gamma + \pi \\ \psi_1 &\rightarrow \psi_1 + \pi & \psi_2 &\rightarrow \psi_2 \\ T_1 &\rightarrow T_1 & T_2 &\rightarrow T_2 \end{aligned}$$

L'hypothèse de brouillage des phases entraîne l'invariance de la loi de probabilité conjointe de $\varphi_1, \psi_1, T_1, \varphi_2, \psi_2, T_2$ dans la transformation précédente. Par suite, la distribution de probabilité de T est périodique, avec la période π dans la variable γ , ce qui correspond à une période de $\frac{h}{2e}$ en flux. En particulier, tous les moments de T oscillent avec la période $\frac{h}{2e}$.

Dans la limite où T_1 et T_2 sont très petits devant 1, on peut faire l'approximation :

$$T \approx \frac{4 \left[\frac{T_1}{\Delta_1^2} + \frac{T_2}{\Delta_2^2} + 2 \frac{\sqrt{T_1 T_2}}{\Delta_1 \Delta_2} \cos \gamma \right]}{\left[\left(\frac{\alpha_1}{\Delta_1} + \frac{\alpha_2}{\Delta_2} - \cot g k \right)^2 + 1 \right] \left[\left(\frac{\beta_1}{\Delta_1} + \frac{\beta_2}{\Delta_2} - \cot g k \right)^2 + 1 \right]}$$

Une telle approximation n'est pas valable pour toutes les réalisations du désordre. Certaines donnent des résonances parfaites ($T = 1$). Cela se produit lorsque :

$$\frac{\sqrt{1-T_1} \cos(k(N+1)-\psi_1)}{\sin(k(N+1)+\varphi_1)+\sqrt{1-T_1} \sin(k(N+1)-\psi_1)} + \frac{\sqrt{1-T_2} \cos(k(N+1)-\psi_2)}{\sin(k(N+1)+\varphi_2)+\sqrt{1-T_2} \sin(k(N+1)-\psi_2)} = 0$$

et

$$\frac{T_1}{\Delta_1^2} + \frac{T_2}{\Delta_2^2} + 2 \frac{\sqrt{T_1 T_2}}{\Delta_1 \Delta_2} \cos \gamma = 1 + (\cot g k - (\frac{\alpha_1}{\Delta_1} + \frac{\alpha_2}{\Delta_2}))^2$$

Lorsque T_1 et T_2 sont petits, ces conditions peuvent toujours être satisfaites, car Δ_1 et Δ_2 peuvent s'annuler. Cependant la largeur de la résonance tend vers zéro lorsque T_1 et T_2 tendent vers zéro.

On peut écrire plus simplement :

$$T = \lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu \cos \gamma, \quad \langle \lambda\mu \rangle = 0$$

$$\langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2 = \langle (\lambda^2 + \mu^2)^2 \rangle - \langle \lambda^2 + \mu^2 \rangle^2 + 4\langle \lambda^2 \mu^2 \rangle \cos^2 \gamma$$

Les valeurs de γ multiples de π présentent donc les plus grandes fluctuations. Ceci parce que pour un échantillon $\gamma = 0$ et $\gamma = \pi$ sont des extréma (locaux) pour la fonction $T(\gamma)$.

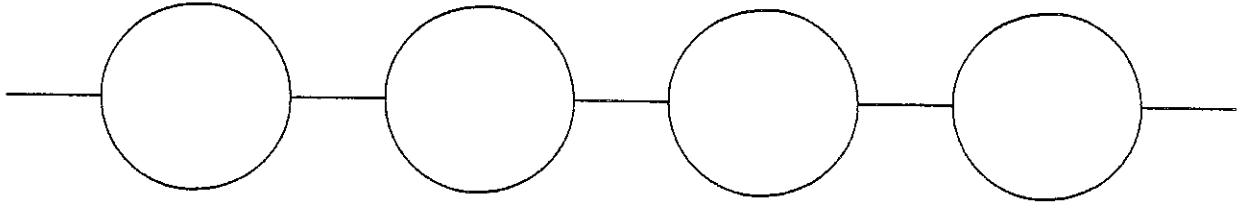
L'amplitude de l'oscillation à $\frac{h}{e}$ peut être évaluée à partir de $T(\gamma=0) - T(\gamma=\pi)$. En fait

$$\frac{\langle (T(\gamma=0) - T(\gamma=\pi))^2 \rangle}{\langle T(\gamma=0) + T(\gamma=\pi) \rangle^2} = 4 \frac{\langle \lambda^2 \mu^2 \rangle}{\langle \lambda^2 + \mu^2 \rangle^2} \approx 1$$

si on peut négliger les corrélations entre λ et μ . Ceci indique que la période observée sur un échantillon sera toujours $\frac{h}{e}$, ce qui est conforme à des calculs numériques que nous avons effectués sur ce modèle.

En conclusion, le résultat important est la période $\frac{h}{2e}$ pour la distribution de T . Le calcul rigoureux des différents moments paraît extrêmement difficile à cause de la complexité de l'expression de T . De plus, on s'attend à des fluctuations d'échantillon à échantillon énormes, à cause des fluctuations sur les matrices de transmission des brins, et

des résonances propres à l'anneau. Par contre, dans l'esprit du travail de Anderson et coll.⁽²²⁾ sur une chaîne unidimensionnelle de résistances, on peut imaginer une chaîne de boucles semblables en série :



Lorsque l'on met deux barrières en série



le coefficient de transmission de l'ensemble est :

$$t = \frac{t_1 t_2}{1 - r'_1 r_2}$$

Par suite $\ln T = \ln T_1 + \ln T_2 - \ln [1 - 2 \sqrt{R_1 R_2} \cos \varphi + R_1 R_2]$
où φ est la phase de $r_2 r'_1$.

Si φ est une variable aléatoire dont la distribution est uniforme :

$$\langle \ln T \rangle = \langle \ln T_1 \rangle + \langle \ln T_2 \rangle$$

(car $\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2a \cos \theta + a^2) d\theta = 0$ lorsque $|a| \leq 1$).

Pour la chaîne de boucles envisagée, avec un nombre total de boucles égal à M

$$\langle \ln T(M) \rangle = M \langle \ln T(M=1) \rangle$$

$$\text{et } \langle (\ln T(M) - \langle \ln T(M) \rangle)^2 \rangle^{1/2} = M^{1/2} \langle (\ln T(1) - \langle \ln T(1) \rangle)^2 \rangle^{1/2}$$

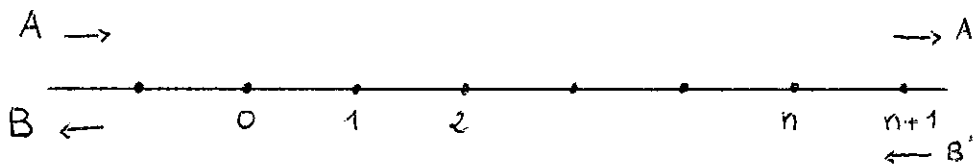
Donc à la limite des M grands, la distribution de probabilité de T(H) oscille avec la période $\frac{h}{2e}$, et pour un échantillon, $\ln T$ qui est la

variable auto-moyennante possède cette périodicité.

Il s'agit d'un résultat identique à celui obtenu par Fourcade⁽³⁰⁾ dans ses simulations d'échelles à forte amplitude des fluctuations de potentiel. Dans les deux cas, la périodicité à $\frac{h}{2e}$ provient d'un brouillage des phases, qui apparaît lorsque la longueur associée au désordre (longueur de localisation) devient inférieure au périmètre des boucles.

D. Répartition des phases.

Nous avons eu besoin du fait que les événements (φ_1, ψ_1, T_1) et $(\varphi_1 + \pi, \psi_1 + \pi, T_1)$ ont la même probabilité lorsque la longueur d'un brin devient grande par rapport à la longueur de localisation. Pour justifier ce point, il nous sera utile de revenir sur le problème de la transmission d'une chaîne désordonnée.



On suppose que les sites m pour $m \leq 0$ ont un potentiel $\epsilon_m = 0$. Calculons la matrice de transmission d'une impureté située au site $n \geq 1$. Le potentiel au site n est ϵ_n .

L'équation de Schrödinger donne :

$$E \varphi_n = \varphi_{n-1} + \varphi_{n+1} + \epsilon_n \varphi_n$$

soit $(E - \epsilon_n)(Ae^{ikn} + Be^{-ikn}) = Ae^{ik(n-1)} + Be^{-ik(n-1)} + A'e^{ik(n+1)} + B'e^{-ik(n+1)}$

et : $Ae^{ikn} + Be^{-ikn} = A'e^{ikn} + B'e^{-ikn}$: équation de continuité.

En utilisant la relation de dispersion $E = 2 \cos k$, il vient :

$$\begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + \frac{i\epsilon_n}{2\sin k} \begin{bmatrix} 1 & e^{-i2kn} \\ -e^{i2kn} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

Introduisons la matrice de transmission par le système des $n-1$ premières impuretés :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{t^*} & -\frac{r^*}{t^*} \\ -\frac{r}{t} & \frac{1}{t} \end{bmatrix}$$

Après l'introduction de l'impureté au site n , la matrice de transmission du système devient :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{t'^*} & -\frac{r'^*}{t'^*} \\ -\frac{r'}{t'} & \frac{1}{t'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{i\varepsilon_n}{2\sin k} & \frac{i\varepsilon_n}{2\sin k} e^{-i2kn} \\ -\frac{i\varepsilon_n}{2\sin k} e^{i2kn} & 1 - \frac{i\varepsilon_n}{2\sin k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{t^*} & -\frac{r^*}{t^*} \\ -\frac{r}{t} & \frac{1}{t} \end{bmatrix}$$

$$t = \sqrt{T} e^{i\varphi} ; \quad \frac{r}{t} = \frac{\sqrt{1-T}}{\sqrt{T}} e^{i\psi}$$

$$\frac{1}{\sqrt{T'}} e^{i\varphi'} = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i\varphi} + \frac{i\varepsilon_n}{2\sin k} \left[\frac{1}{\sqrt{T}} e^{i\varphi} - \frac{\sqrt{1-T}}{\sqrt{T}} e^{i(\psi-2kn)} \right]$$

$$\frac{\sqrt{1-T'}}{\sqrt{T'}} e^{i\psi'} = \frac{\sqrt{1-T}}{\sqrt{T}} e^{i\psi} - \frac{i\varepsilon_n}{2\sin k} \left[\frac{\sqrt{1-T}}{\sqrt{T}} e^{i\psi} - \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i(\varphi+2kn)} \right]$$

Aux courtes distances $T \approx 1$. Faisons $T = 1$ dans les équations précédentes. Il vient :

$$\frac{1}{\sqrt{T'}} e^{i\varphi'} = e^{i\varphi} + \frac{i\varepsilon_n}{2\sin k} e^{i\varphi}$$

$$\frac{\sqrt{1-T'}}{\sqrt{T'}} e^{i\psi'} = \frac{i\varepsilon_n}{2\sin k} e^{i(\varphi+2kn)}$$

L'évolution aux courtes distances de φ et de ψ est donc très différente: φ varie de manière très régulière, alors que ψ lié à la phase du

coefficient de réflexion voisin de 0 à courte distance a une variation beaucoup plus singulière. Dans un modèle de désordre dilué, la distribution de probabilité de $e^{i\psi}$ est uniforme sur le cercle unité dès la diffusion par la première impureté (après la première diffusion $\psi = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \epsilon + 2kn_1$ ($\varphi \approx 0$) où n_1 est l'emplacement de la première impureté).

. A longue distance, très supérieure à la longueur de localisation, T est très voisin de 0 et dans les équations précédentes on peut faire l'approximation $1-T \approx 1$.

Les équations deviennent

$$\sqrt{\frac{T}{1-T}} e^{i(\varphi' - \varphi)} = 1 + \frac{i\epsilon_n}{2\sin k} [1 - e^{i(\psi - \varphi - 2kn)}]$$

$$\sqrt{\frac{T}{1-T}} e^{i(\psi' - \psi)} = 1 - \frac{i\epsilon_n}{2\sin k} [1 - e^{i(\varphi - \psi + 2kn)}]$$

Ceci montre que $\varphi' - \varphi = -(\psi' - \psi)$. Toutefois, à cause du brouillage relatif à courte distance entre φ et ψ , on garde l'indépendance entre les variables aléatoires φ et ψ .

Montrons que la longueur sur laquelle la phase φ se brouille est de l'ordre de la longueur de localisation. Pour cela, nous nous plaçons dans la limite de faible désordre ($\langle \epsilon^2 \rangle \ll 1$). Introduisons la quantité $\rho = \frac{1}{\sqrt{T}}$. On peut écrire des équations d'évolution au 2ème ordre en $\sqrt{T}$ pour ρ et φ :

$$\rho' = \rho - \frac{\epsilon_n}{2\sin k} \frac{\sqrt{\rho^2 - 1}}{\rho} \sin \chi_n + \frac{\epsilon_n^2}{8\sin^2 k} \left(2\rho - \frac{1}{\rho} - 2\sqrt{\rho^2 - 1} \cos \chi_n - \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) \sin^2 \chi_n \right)$$

$$\varphi' = \varphi + \frac{\epsilon_n}{2\sin k} \left(1 - \frac{\sqrt{\rho^2 - 1}}{\rho} \cos \chi_n \right) \left(1 + \frac{\epsilon_n}{2\sin k} \frac{\sqrt{\rho^2 - 1}}{\rho} \sin \chi_n \right)$$

où $\chi_n = 2kn + \varphi - \psi$.

De là, on peut tirer une équation de Fokker-Planck pour l'évolution de la distribution de probabilité $W(\rho, \varphi)$, en supposant que la répartition de ψ est uniforme :

$$\frac{\partial W(\rho, \varphi)}{\partial L} = - \frac{\langle \epsilon^2 \rangle}{16 \sin^2 k} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\left(3\rho - \frac{1}{\rho} \right) W \right] + \frac{\langle \epsilon^2 \rangle}{16 \sin^2 k} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left[(\rho^2 - 1) W \right] \\ + \frac{\langle \epsilon^2 \rangle}{16 \sin^2 k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left[\left(3 - \frac{1}{\rho^2} \right) W \right]$$

Posons $\ell^{-1} = \frac{\langle \epsilon^2 \rangle}{4 \sin^2 k}$ (longueur de localisation).

On trouve $\langle \ln \frac{1}{T} \rangle = \frac{L}{\ell}$.

($x \equiv L/\ell$)

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle \varphi^2 \rangle = \frac{1}{2} \left[3 - \langle \frac{1}{\rho^2} \rangle \right] = \frac{1}{2} \left[3 - \langle T \rangle \right] \geq 1.$$

Donc $\langle \varphi^2 \rangle \geq x$

Par ailleurs, $\langle \varphi \rangle = 0$. D'où le résultat : $\langle \varphi^2 \rangle - \langle \varphi \rangle^2 \geq x$.

Par conséquent, dès que L devient comparable à la longueur de localisation, la distribution de probabilité s'élargit au point que φ peut être considérée comme brouillée.

Remarque : En toute rigueur, il n'est pas légitime de négliger les corrélations entre φ et ψ . Sulem, dans une étude détaillée⁽³²⁾, a montré que, dans la limite d'un bruit blanc et lorsque le désordre augmente, la distribution de probabilité de la phase du coefficient de réflexion présente un maximum marqué autour de $\theta = \pi$.

Ce phénomène apparaît pour la raison suivante : dans la limite des fortes résistances, au 2ème ordre en ϵ :

$$\sqrt{\frac{T}{T'}} e^{(\varphi' - \psi' - (\varphi - \psi))} = \left[1 + \frac{i\epsilon_n}{2 \sin k} (1 - e^{-i(\varphi - \psi + 2kn)}) \right]^2$$

La diffusion de $\varphi - \psi$ se ralentit lorsque $\varphi - \psi + 2kn = 2\pi m$. Par suite, la distribution de probabilité de $\varphi - \psi + 2kn$ aura des maxima pour les valeurs

multiples de 2π . Or, par unitarité, le coefficient de réflexion pour les ondes venant de droite est $r' = -\sqrt{1-T} e^{i(\varphi-\psi)}$. Par un changement d'origine, de façon à la faire coïncider avec l'extrémité droite de la chaîne désordonnée : $r' = -\sqrt{1-T} e^{i[\varphi-\psi+2kn]}$. La remarque précédente exprime donc que la phase de r' est plus souvent proche des valeurs $\pi+2\pi n$. Dans la limite de désordre très fort ($\langle \epsilon^2 \rangle \rightarrow \infty$) :

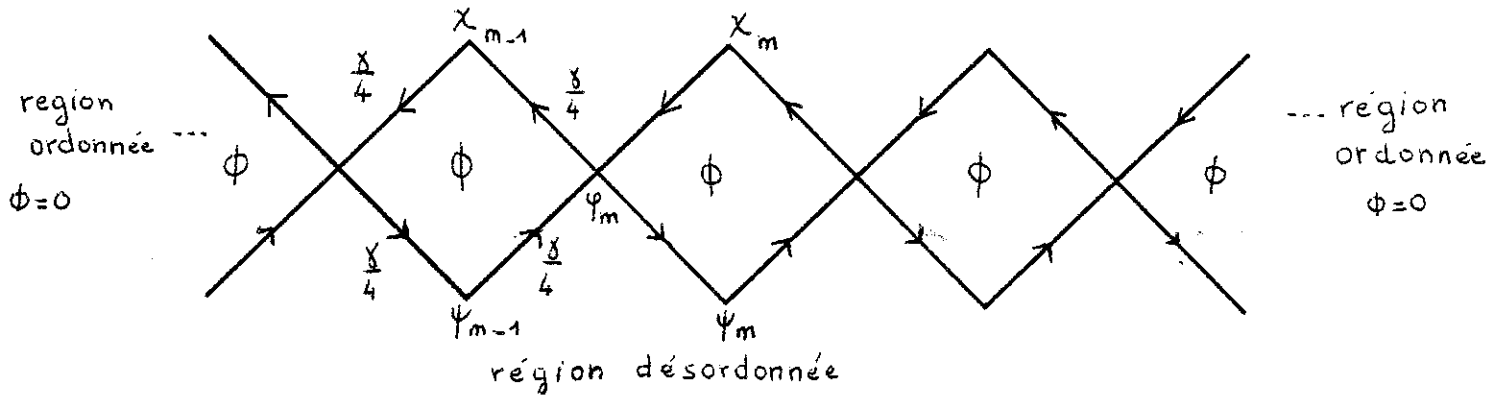
$$\varphi + \psi = \pi + 2\pi n$$

$$\varphi - \psi = 2\pi n' - 2kn$$

Il existe donc des corrélations très fortes entre φ et ψ : φ et ψ ont tendance à se répartir sur un réseau discret. Cependant faire la substitution $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$ et $\psi \rightarrow \psi + \pi$ provoque : $\varphi + \psi \rightarrow \varphi + \psi + 2\pi$ et $\varphi - \psi \rightarrow \varphi - \psi$. Une telle opération doit donc laisser invariante la distribution de probabilité. . Notons que cette asymétrie de la distribution de probabilité des phases disparaît lorsque $\langle \epsilon^2 \rangle \rightarrow 0$. Par ailleurs, si l'on change la valeur de n (longueur de la chaîne), le réseau se translate dans son ensemble. Lorsqu'on moyenne également sur les valeurs de n comprises entre $n_0 - \frac{\pi}{2k}$ et $n_0 + \frac{\pi}{2k}$, on restaure l'uniformité de la distribution de probabilité de φ et ψ et leur indépendance. Ce type de moyenne est souvent utilisé⁽³³⁾, dans la mesure où dans la pratique, il peut être difficile de déterminer la longueur d'un système avec une précision de $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Seulement un tel moyennage perd une information non triviale sur les phases, essentielle notamment dans le cas où la longueur d'onde est commensurable avec le pas du réseau. On observe alors des corrections à la longueur de localisation, la plus forte étant l'anomalie de Kappus et Wegner au centre de la bande⁽³⁴⁾. Ces corrections ne sont pas accessibles lorsque l'on fait l'hypothèse de phases uniformément réparties.

IV - CHAÎNE DE BOUCLES

Considérons le système suivant :



L'intérêt d'un tel système est de rester à un seul canal de propagation, tout en permettant d'introduire un champ magnétique.

A. Modes propres du système infini.

Posons $2\pi \frac{e\phi}{h} = \gamma$. Le choix de jauge est précisé sur la figure. L'équation de Schrödinger s'écrit :

$$E\varphi_m - e^{-i\gamma/4} X_{m-1} - e^{i\gamma/4} \psi_{m-1} - e^{i\gamma/4} X_m - e^{-i\gamma/4} \psi_m = 0$$

$$EX_m - e^{-i\gamma/4} \varphi_m - e^{i\gamma/4} \varphi_{m+1} = 0$$

$$E\psi_m - e^{i\gamma/4} \varphi_m - e^{-i\gamma/4} \varphi_{m+1} = 0$$

$$EX_{m-1} - e^{-i\gamma/4} \varphi_{m-1} - e^{i\gamma/4} \varphi_m = 0$$

$$E\psi_{m-1} - e^{i\gamma/4} \varphi_{m-1} - e^{-i\gamma/4} \varphi_m = 0$$

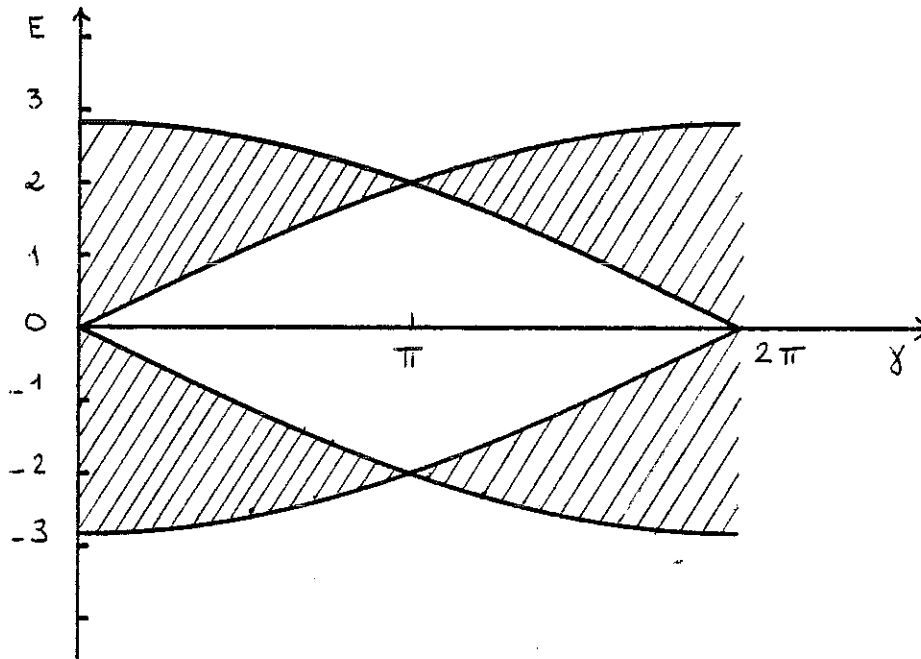
On obtient alors :

$$(E - \frac{4}{E})\varphi_m - \frac{2}{E} \cos \frac{\gamma}{2} \varphi_{m-1} - \frac{2}{E} \cos \frac{\gamma}{2} \varphi_{m+1} = 0$$

D'où la relation de dispersion :

$$E^2 = 4 [1 + \cos \frac{\gamma}{2} \cos k]$$

Le spectre en fonction de γ a l'allure suivante :



On remarque que seule l'énergie 2 est commune à toutes les valeurs du champ magnétique. Elle correspond à $k = \frac{\pi}{2}$.

B. Transmission d'une zone non désordonnée traversée par un champ magnétique.

Il s'agit de la géométrie de la figure, la région traversée par le champ magnétique étant de longueur n .

Désignons par k et k_1 les vecteurs d'onde associés à la propagation à l'énergie E dans la région sans champ et la région où règne le champ respectivement. $E^2/4 - 1 = \cos k = \cos \gamma/2 \cos k_1$.

L'expression du coefficient de transmission de l'ensemble est donnée par :

$$T = \frac{4\cos^2 \frac{\gamma}{2} \sin^2 k \sin^2 k_1}{4\cos^2 \frac{\gamma}{2} \sin^2 k \sin^2 k_1 + (1 + \cos^2 \frac{\gamma}{2} - 2\cos \frac{\gamma}{2} \cos(k+k_1))(1 + \cos^2 \frac{\gamma}{2} - 2\cos \frac{\gamma}{2} \cos(k-k_1)) \sin k_1 r}$$

La dépendance en γ est assez compliquée du fait que k_1 dépend de γ . On remarque le fait important que $T = 0$ lorsque $\gamma = \pi$, quelle que soit la longueur de la zone ($n \geq 1$). Ceci a une conséquence intéressante. Si l'on introduit dans la chaîne un désordre dilué (chaque site a une probabilité x d'avoir une impureté, comme dans le modèle de Nguyen, Spivak et Shklovski présenté au début de ce chapitre), la probabilité pour que dans chaque boucle, l'un au moins des deux sites inférieur et supérieur soient occupés par une impureté est $[2x - x^2]^n$. Tant que x n'est pas égal à 1, cette probabilité tend vers zéro à la limite $n \rightarrow \infty$. Donc lorsque $n \rightarrow \infty$ la probabilité tend vers 1 pour qu'il existe une boucle sans impureté aux sites inférieur et supérieur. Une telle boucle a un coefficient de transmission égal à 0 lorsque $\gamma = \pi$. Par conséquent, avec une probabilité supérieure à : $1 - [2x - x^2]^n$, le coefficient de transmission de la chaîne complète est nul lorsque $\gamma = \pi$. Dans cette situation de désordre dilué, la distribution de probabilité a donc la période complète $\gamma = 2\pi$, même si le potentiel des impuretés devient infini. On voit ainsi apparaître l'influence de la concentration des impuretés. Si la périodicité $\frac{h}{2e}$ peut exister, cela sera nécessairement à $x = 1$ et pour une forte amplitude du potentiel des impuretés. Nous nous intéresserons aux deux cas limites suivants

- faible désordre dilué ($x \ll 1$)
- fort désordre et concentration maximale ($x = 1$).

C. Faible désordre dilué.

L'hypothèse de faible désordre signifie que $\langle \epsilon^2 \rangle \ll 1$. Quant à l'hypothèse de dilution ($x \gg 1$), nous l'introduisons parce que le modèle étudié est équivalent à une simple chaîne, avec un désordre sur les termes de couplage entre sites plus proches voisins. Lorsque la

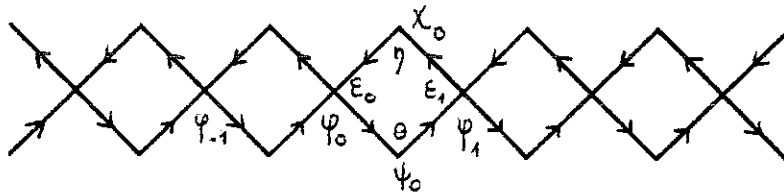
concentration des impuretés est grande (x voisin de 1), ces termes de couplage présentent des corrélations qui compliquent beaucoup le problème. Nous reviendrons sur ce point au paragraphe suivant.

Dans ce paragraphe, nous calculerons la longueur de localisation. De ce point de vue, il est légitime de considérer que le même champ magnétique est également présent dans les régions ordonnées. Cela revient à oublier les deux résistances d'interface aux limites de la région centrale, résistances qui n'introduisent qu'une correction à la partie imaginaire de la longueur de localisation, tant que l'énergie E imposée reste à l'intérieur du spectre.

Fixons donc l'énergie

$$E = 4 \left[1 + \cos \frac{\gamma}{2} \cos k \right]$$

Calculons la matrice de transmission associée à une boucle désordonnée.



Dans l'hypothèse d'un désordre dilué $x \ll 1$, la probabilité pour que deux boucles successives aient des impuretés est en x^2 . Nous négligeons de tels événements dans un calcul à l'ordre x .

On a alors :

$$(E - \epsilon_0 - \frac{2}{E} - \frac{1}{E - \eta} - \frac{1}{E - \theta}) \varphi_0 - \frac{2}{E} \cos \frac{\gamma}{2} \varphi_{-1} - \left(\frac{e^{i\gamma/2}}{E - \eta} + \frac{e^{-i\gamma/2}}{E - \theta} \right) \varphi_1 = 0$$

$$(E - \epsilon_1 - \frac{2}{E} - \frac{1}{E - \eta} - \frac{1}{E - \theta}) \varphi_1 - \left(\frac{e^{-i\gamma/2}}{E - \eta} + \frac{e^{i\gamma/2}}{E - \theta} \right) \varphi_0 - \varphi_2 = 0$$

La matrice m de transmission de la boucle est définie par :

$$\begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \varphi_{-1} &= A e^{-ik} + B e^{ik} & \varphi_1 &= A' e^{ik} + B' e^{-ik} \\ \varphi_0 &= A + B & \varphi_2 &= A' e^{i2k} + B' e^{-i2k} \end{aligned}$$

En l'absence de désordre $m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Développons m au 2ème ordre dans les potentiels d'impuretés $\epsilon_0, \epsilon_1, \eta, \theta$.
Il vient :

$$m = \frac{1}{2i\sin k(1+\beta)} \begin{bmatrix} -|1+\beta|^2 e^{-ik} + (e^{ik} - \alpha_0)(1 - \alpha_1 e^{-ik}) & -|1+\beta|^2 e^{-ik} + (e^{-ik} - \alpha_0)(1 - \alpha_1 e^{ik}) \\ |1+\beta|^2 e^{ik} - (e^{ik} - \alpha_0)(1 - \alpha_1 e^{ik}) & |1+\beta|^2 e^{ik} - (e^{-ik} - \alpha_0)(1 - \alpha_1 e^{ik}) \end{bmatrix}$$

On a posé :

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\cos(\frac{\gamma}{2})} (E\epsilon_0 + \frac{\eta+\theta}{E} + \frac{\eta^2+\theta^2}{E^2})$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\cos(\frac{\gamma}{2})} (E\epsilon_1 + \frac{\eta+\theta}{E} + \frac{\eta^2+\theta^2}{E^2})$$

$$\beta = \frac{1}{2\cos(\frac{\gamma}{2})} ((\frac{\eta}{E} + \frac{\eta^2}{E^2})e^{i\gamma/2} + (\frac{\theta}{E} + \frac{\theta^2}{E^2})e^{-i\gamma/2})$$

Si M est la matrice de transmission globale du système, il est intéressant de poser $J = MM^+$ (33).

$$J = \begin{bmatrix} \frac{1+R}{T} & \frac{2r'}{T} \\ \frac{2r'^*}{T} & \frac{1+R}{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & Be^{i\varphi} \\ Be^{-i\varphi} & A \end{bmatrix} \quad \text{avec } A^2 - B^2 = 1$$

Posons $m = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$

Dans le cas où la boucle sur laquelle l'onde diffuse est placée à une position n , la matrice de transmission associée devient :

$$m(n) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} e^{-i2kn} \\ m_{21} e^{i2kn} & m_{22} \end{bmatrix}$$

Cette diffusion provoque la modification suivante de A :

$$A_{n+2} = [|m_{11}|^2 + |m_{12}|^2] A_n + [m_{11} m_{12}^* e^{i(\varphi_n + 2kn)} + m_{11}^* m_{12} e^{-i(\varphi_n + 2kn)}] \sqrt{A_n^2 - 1}$$

Suivant le même procédé que Melnikov⁽³³⁾ on peut alors écrire une équation de Fokker-Planck pour l'évolution de la distribution de probabilité de A. La relation précédente permet de passer de A_n à A_{n+2} . Dans le cas d'un désordre très dilué $x \ll 1$, on commet une erreur de l'ordre de x^2 si on remplace A_{n+2} par A_{n+1} dans la relation. On peut obtenir une équation de Fokker-Planck pour la seule variable A en effectuant une moyenne dans l'équation de Fokker-Planck complète, sur les termes de phase en $2kn$ dont l'oscillation spatiale est très rapide. Nous avons déjà précisé qu'une telle procédure est justifiée dans la limite de faible désordre.

Nous obtenons alors les développements au 2ème ordre dans les variables $\alpha_0, \alpha_1, \beta$ décrivant la diffusion :

$$|m_{11}|^2 + |m_{12}|^2 = 1 + \frac{1}{2\sin^2 k} [\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + 4(\text{Re}\beta)^2 + 4(\text{Re}\beta)(\alpha_0 + \alpha_1)\cos k + (4\cos^2 k - 2)\alpha_0\alpha_1]$$

$$|m_{11}|^2 |m_{12}|^2 = \frac{1}{4\sin^2 k} [\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + 4(\text{Re}\beta)^2 + 4\text{Re}\beta(\alpha_0 + \alpha_1)\cos k + (4\cos^2 k - 2)\alpha_0\alpha_1]$$

Il est nécessaire de prendre les moyennes de ces quantités sur la distribution des potentiels $\epsilon_0, \epsilon_1, \eta, \theta$. Soit x la probabilité qu'un site soit occupé par une impureté, et $\langle \epsilon^2 \rangle$ la variance du potentiel d'une impureté.

$$\langle |m_{11}|^2 + |m_{12}|^2 \rangle = 1 + \frac{x \langle \epsilon \rangle^2}{4\sin^2 k \cos^2 \frac{\gamma}{2}} [E^2 + \frac{4}{E^2} (\cos \frac{\gamma}{2} + \cos k)^2] = 1 + 2\lambda$$

$$\langle |m_{11}|^2 |m_{12}|^2 \rangle = \frac{x \langle \epsilon \rangle^2}{8\sin^2 k \cos^2 \frac{\gamma}{2}} [E^2 + \frac{4}{E^2} (\cos \frac{\gamma}{2} + \cos k)^2] = \lambda$$

$$\frac{\partial W}{\partial L} = - 2\lambda \frac{\partial W}{\partial A} + \lambda \frac{\partial}{\partial A^2} (A^2 - 1)W$$

$W(L,A)$ est la distribution de probabilité de A , en fonction de la longueur L . Posons $x = L/\ell$, avec $\ell^{-1} = \lambda$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial A} [(A^2 - 1) \frac{\partial W}{\partial A}]$$

Il s'agit de la même équation que celle donnée par Melnikov⁽³³⁾. On en déduit la longueur de localisation

$$\ell = \frac{8 \sin^2 k \cos^2 (\frac{\gamma}{2})}{x \langle \epsilon^2 \rangle [E^2 + \frac{4}{E^2} (\cos \frac{\gamma}{2} + \cos k)^2]}$$

Il est facile de vérifier à partir de la relation de dispersion que ℓ est strictement décroissante lorsque γ varie de 0 à la plus grande valeur pour laquelle l'énergie E apparaît au spectre. Dans le cas où $E = 2$, E appartient au spectre pour toute valeur de γ .

$$\ell(E = 2) = \frac{8 \cos^2 \frac{\gamma}{2}}{x \langle \epsilon^2 \rangle (4 + \cos^2 \frac{\gamma}{2})}$$

La distribution de probabilité oscille donc avec la période $\frac{h}{e}$. L'effet de la structure de bande est donc prépondérant. La diminution de la longueur de localisation lorsque l'on introduit le champ, équivaut à une magnéto-résistance positive, et résulte du rétrécissement du spectre en présence d'un champ magnétique. Par suite de ce rétrécissement, la vitesse de groupe diminue, et l'effet de la diffusion sur chaque impureté est amplifié. Il est maintenant naturel de se demander si le fait d'introduire un désordre fort (amplitude des fluctuations de potentiel très grande devant la largeur de la bande) ne va pas modifier cette périodicité. Les remarques du paragraphe IV.B nous conduisent à prendre $x = 1$, sinon presque sûrement $T = 0$ à $\gamma = \pi$.

D. Désordre fort à $x = 1$.

Dans ce cas, il n'est plus possible d'écrire une équation de Fokker-Planck pour la distribution de probabilité du coefficient de transmission. Nous utiliserons ici une méthode de matrices de transfert.

Partons de l'équation de Schrödinger :

$$(E - \epsilon_n - \frac{1}{E - \eta_n} - \frac{1}{E - \theta_n} - \frac{1}{E - \eta_{n-1}} - \frac{1}{E - \theta_{n-1}}) \varphi_n - (\frac{e^{-i \gamma/2}}{E - \eta_{n-1}} + \frac{e^{i \gamma/2}}{E - \theta_{n-1}}) \varphi_{n-1} - (\frac{e^{i \gamma/2}}{E - \eta_n} + \frac{e^{-i \gamma/2}}{E - \theta_n}) \varphi_{n+1} = 0$$

Les notations sont les mêmes que précédemment.

Le modèle se simplifie beaucoup lorsque $\epsilon_n = 0$ pour tout n et que $\eta_n = \pm W$, $\theta_n = \pm W$ avec probabilité $1/2$ pour chaque signe. De plus nous supposons que $W \gg E$. Dans cette limite, le coefficient diagonal de l'hamiltonien sera pris égal à E dans la région désordonnée. L'équation de Schrödinger se réécrit :

$$\varphi_n - a_{n-1}^* \varphi_{n-1} - a_n \varphi_{n+1} = 0$$

avec

$$a_n = \frac{1}{E} \left[\frac{e^{i \gamma/2}}{E - \eta_n} + \frac{e^{-i \gamma/2}}{E - \theta_n} \right]$$

La relation précédente s'écrit à l'aide d'une matrice de transfert :

$$\begin{bmatrix} \varphi_{n+1} \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{n-1}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_n \\ \varphi_{n-1} \end{bmatrix}$$

Posons $J = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Supposons que seules les boucles 0, 1, ..., N-1 soient désordonnées :

$$\begin{bmatrix} \varphi_{N+2} \\ \varphi_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cos k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} 1/a_N & 0 \\ 0 & a_N^* \end{bmatrix} \dots J \begin{bmatrix} 1/a_{-1} & 0 \\ 0 & a_{-1}^* \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2 \cos k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{-1} \\ \varphi_{-2} \end{bmatrix}$$

Remarque : les matrices formées avec a_{-1} et a_N sont en fait légèrement différentes, car à la frontière entre la région ordonnée et la région désordonnée, les coefficients diagonaux de l'hamiltonien effectif associé aux φ passent de $E - \frac{4}{E}$ à $E - \frac{2}{E}$ puis à E . Ces détails n'ont aucune influence sur la longueur de localisation : nous les négligerons par la suite.

En multipliant

$$\begin{bmatrix} \varphi_{N+2} \\ \varphi_{N+1} \end{bmatrix} \quad \text{par} \quad \prod_{m=-1}^N \frac{|a_m|}{a_m^*},$$

les matrices considérées deviennent réelles, et le coefficient de transmission T est inchangé.

Lorsque le système est ordonné,

$$J \begin{bmatrix} 1/a_m & 0 \\ 0 & a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cos k & -\frac{1}{2 \cos k} \\ 2 \cos k & 0 \end{bmatrix}$$

cette matrice s'écrit sous la forme

$$Q \begin{bmatrix} e^{ik} & 0 \\ 0 & e^{-ik} \end{bmatrix} Q^{-1} \quad \text{où} \quad Q = \begin{bmatrix} e^{ik} & e^{-ik} \\ 2 \cos k & 2 \cos k \end{bmatrix}$$

Par ailleurs on introduit la transformation unitaire suivante :

$$\begin{bmatrix} \varphi_{n+1} \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{ik} & e^{-ik} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix}$$

Il vient :

$$\begin{bmatrix} A_{N+1} \\ B_{N+1} \end{bmatrix} = M_N M_{N-1} \dots M_{-1} \begin{bmatrix} e^{ik} & 0 \\ 0 & e^{-ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{-2} \\ B_{-2} \end{bmatrix}$$

où
$$M_m = Q^{-1} J \begin{bmatrix} 1/|a_m| & 0 \\ 0 & |a_m| \end{bmatrix} Q$$

Soit :

$$M_m = \frac{1}{2i \sin 2k} \begin{bmatrix} \frac{e^{i2k}}{|a_m|} - 4 \cos^2 k |a_m| & \frac{1}{|a_m|} - 4 \cos^2 k |a_m| \\ -\frac{1}{|a_m|} + 4 \cos^2 k |a_m| & -\frac{e^{-i2k}}{|a_m|} + 4 \cos^2 k |a_m| \end{bmatrix}$$

Cette matrice vérifie les conditions habituelles pour une matrice de transmission liées à la conservation du courant (matrice unitaire pour la forme $xx^* - yy^*$).

Pour le modèle envisagé ($W \rightarrow \infty$), $|a| \rightarrow 0$, $\frac{1}{|a|}$ est donc le paramètre important.

$$\frac{1}{|a|} = \frac{EW}{2|\cos(\frac{\gamma}{2})|} \quad \text{avec probabilité } 1/2$$

$$\frac{1}{|a|} = \frac{EW}{2|\sin \frac{\gamma}{2}|} \quad \text{avec probabilité } 1/2$$

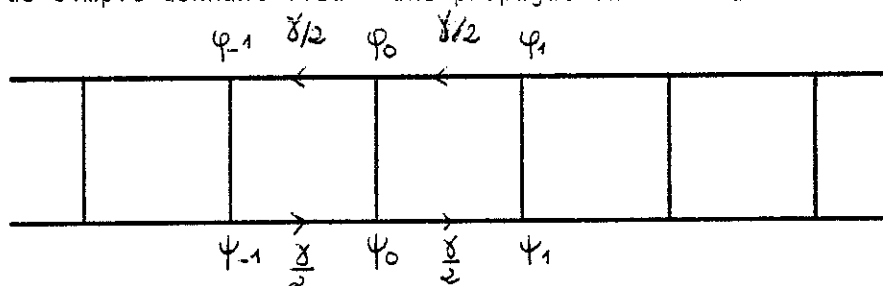
Nous reprenons alors la méthode de Kirkman et Pendry⁽³⁵⁾ qui nous permet d'obtenir la longueur de localisation

$$\ell^{-1} = \langle \ln \frac{1}{|a|} \rangle = \ln \left\{ \frac{EW}{(2|\sin\gamma|)^{1/2}} \right\}$$

La longueur de localisation oscille avec une période $h/2e$ en flux, et augmente à bas champ, ce qui correspond à une magnétorésistance négative.

V - ECHELLE

Pour l'instant, nous avons simplement regardé des systèmes ne possédant qu'un seul canal de propagation. L'échelle est le système le plus simple donnant lieu à une propagation sur deux canaux.



A. Modes propres du système pur.

Il sera intéressant de faire varier le paramètre de couplage entre les chaînes que nous désignerons par t .

On recherche des modes de la forme
$$\begin{cases} \varphi_n = \phi e^{ikn} \\ \psi_n = \psi e^{ikn} \end{cases}$$

L'équation aux valeurs propres s'écrit :

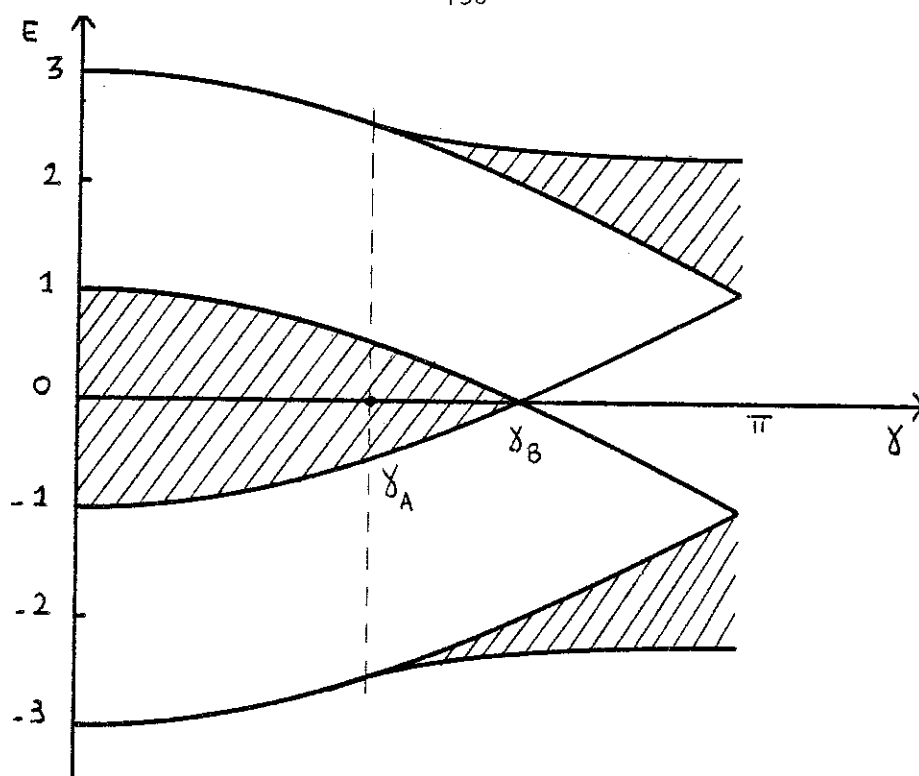
$$\begin{cases} E\varphi_n - e^{-i\gamma/2} \varphi_{n-1} - e^{i\gamma/2} \varphi_{n+1} - t\psi_n = 0 \\ E\psi_n - e^{i\gamma/2} \psi_{n-1} - e^{-i\gamma/2} \psi_{n+1} - t\varphi_n = 0 \end{cases}$$

soit
$$\begin{cases} [E - 2 \cos(k + \frac{\gamma}{2})] \phi - t \psi = 0 \\ -t \phi + [E - 2 \cos(k - \frac{\gamma}{2})] \psi = 0 \end{cases}$$

La relation de dispersion est par conséquent :

$$E = 2 \cos k \cos \frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{t^2 + 4 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin^2 k}$$

Le nombre de canaux de propagation dépend de l'énergie incidente. Nous avons le schéma suivant ($t = 1$).



Les régions hachurées représentent le domaine où deux canaux de propagation existent.

$$\gamma_A \text{ est défini par : } \cos\left(\frac{\gamma_A}{2}\right) = \frac{2}{t} \sin^2\left(\frac{\gamma_A}{2}\right)$$

$$\text{et } \gamma_B \text{ par : } \cos\left(\frac{\gamma_B}{2}\right) = \frac{t}{2}$$

Les courbes C_1 , C_2 , C_3 ont pour équation :

$$C_1 : E = \sqrt{t^2 + 4 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} / \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$C_2 : E = 2 \cos \frac{\gamma}{2} + t$$

$$C_3 : E = 2 \cos \frac{\gamma}{2} - t$$

A la limite où $t \rightarrow 0$, la région à un seul canal tend à diminuer pour disparaître à $t = 0$ (chaînes découplées).

Dans la suite nous nous intéresserons à la limite $t \rightarrow 0$ (couplage faible) et au cas $t = 1$ qui représente un couplage isotrope.

B. Expression du courant et normalisation des canaux.

La conservation du courant se traduit par l'unitarité de la matrice S et par des contraintes équivalentes sur la matrice de transmission. Il est utile de choisir la normalisation des fonctions d'onde représentant les différents canaux de manière à ce que ces contraintes s'expriment le plus simplement possible.

Supposons que les valeurs de E et de γ permettent l'existence de deux canaux, avec les vecteurs d'onde k_1 et k_2 .

Les ondes planes associées sont :

$$\begin{bmatrix} \phi_n \\ \psi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{bmatrix} e^{ik_1 n} ; \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} e^{-ik_1 n} ; \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix} e^{ik_2 n} \text{ et } \begin{bmatrix} \mu_2 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} e^{-ik_2 n}$$

avec par exemple $\lambda_1 = [t^2 + (E - 2 \cos(k_1 + \frac{\gamma}{2}))^2]^{-1/2}$

et $\mu_1 = [t^2 + (E - 2 \cos(k_1 - \frac{\gamma}{2}))^2]^{-1/2}$

en général $|\lambda_1| \neq |\mu_1|$, ce qui traduit la brisure d'invariance par renversement du temps dans un champ magnétique. $|\lambda| \neq |\mu|$ peut également se voir comme de l'effet Hall.

Considérons un état propre d'énergie E :

$$\begin{bmatrix} \phi_n \\ \psi_n \end{bmatrix} = A_1 e^{ik_1 n} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{bmatrix} + B_1 e^{-ik_1 n} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} + A_2 e^{ik_2 n} \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + B_2 e^{-ik_2 n} \begin{bmatrix} \mu_2 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Le courant traversant la section (ϕ_n, ψ_n) (ϕ_{n+1}, ψ_{n+1}) de l'échelle s'exprime par :

$$J = \frac{1}{i} [\phi_n^* \phi_{n+1} e^{i\gamma/2} + \psi_n^* \psi_{n+1} e^{-i\gamma/2} - \text{complexe conjugué}]$$

Il vient, en utilisant plusieurs fois, les propriétés des états propres :

$$J = 2[|A_1|^2 - |B_1|^2][\lambda_1^2 \sin(k_1 + \frac{\gamma}{2}) + \mu_1^2 \sin(k_1 - \frac{\gamma}{2})] \\ + 2[|A_2|^2 - |B_2|^2][\lambda_2^2 \sin(k_2 + \frac{\gamma}{2}) + \mu_2^2 \sin(k_2 - \frac{\gamma}{2})]$$

Avec le choix de $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ fait précédemment, on fait apparaître les vitesses de groupe

$$v_1 = \left| \frac{dE}{dk} \right|_{k=k_1}, \quad \text{et} \quad v_2 = \left| \frac{dE}{dk} \right|_{k=k_2}$$

On a alors

$$J = [|A_1|^2 - |B_1|^2] v_1 + [|A_2|^2 - |B_2|^2] v_2$$

$$\text{Si} \quad A'_i = \sqrt{\gamma_i} A_i \quad \text{et} \quad B'_i = \sqrt{\gamma_i} B_i$$

$$J = |A'_1|^2 - |B'_1|^2 + |A'_2|^2 - |B'_2|^2$$

Par la suite, nous choisirons de normaliser de cette façon les différents canaux.

C. Propagation dans un seul canal ($t = 1$). Développement autour de $\gamma = 0$.

Cette situation ne se rencontre jamais lorsque $\gamma = \frac{\pi}{2}$; où l'on a toujours deux canaux. Par contre, au voisinage de $\gamma = 0$, la région en énergie $2 \cos \frac{\gamma}{2} - t < |E| < 2 \cos \frac{\gamma}{2} + t$ ne présente qu'un seul canal propagatif, le second étant évanescant (vecteur d'onde imaginaire). Dans ce paragraphe, nous allons calculer à l'ordre 2 en γ la longueur de localisation de l'échelle, pour ces valeurs de l'énergie, dans la limite de faible désordre.

A $\gamma = 0$, la relation de dispersion s'écrit $E - 2 \cos k = \pm 1$.

Prenons E telle que $1 < |E| < 3$. Pour simplifier nous poserons $E > 0$, le cas $E < 0$ pouvant être ramené sans difficulté au cas précédent.

Posons

$$k_1 = \text{Arc cos} \left(\frac{E-1}{2} \right)$$

et $\frac{1}{\delta} = \text{Arg ch} \left(\frac{E+1}{2} \right)$

δ est la longueur d'atténuation associée au mode évanescent: $k_2 = \pm \frac{i}{\delta}$. En présence de γ petit, les vecteurs d'onde et les vecteurs propres subissent une correction qui vaut, à l'ordre γ^2 :

$$k_1 \rightarrow k_1 + \Delta k_1 ; \Delta k_1 = \frac{\gamma^2}{4 \sin k_1} [\sin^2 k_1 - \frac{1}{2} \cos k_1]$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\mu_1 = 1 + \gamma \sin k_1 + \frac{\gamma^2}{2} \sin^2 k_1$$

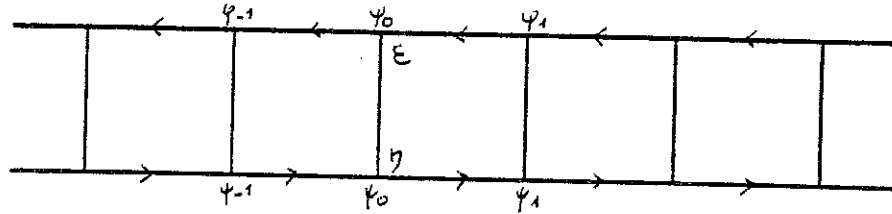
$$k_2 = -\frac{i}{\delta} \rightarrow k_2 + \Delta k_2 ; \Delta k_2 = \frac{i}{4 \text{sh}(\frac{1}{\delta})} \gamma^2 [\text{sh}^2(1/\delta) - \frac{1}{2} \text{ch}(1/\delta)]$$

$$\lambda_2 = 1$$

$$\mu_2 = -1 - i\gamma \text{sh}(\frac{1}{\delta}) + \frac{\gamma^2}{2} \text{sh}^2(1/\delta)$$

Considérons un modèle de désordre dilué, où avec probabilité x , une impureté est présente en un site donné. Le potentiel ε de l'impureté est lui-même une variable aléatoire telle que $\langle \varepsilon \rangle = 0$. Dans la limite de faible désordre, seule la variance $\langle \varepsilon^2 \rangle$ intervient. Lorsqu'une onde arrive sur une impureté, elle réémet une onde propagative transmise et réfléchiée à laquelle se superpose une fonction d'onde localisée avec la longueur δ . Si δ est bien plus petite que la distance moyenne entre impuretés ($x\delta \ll 1$), nous pouvons négliger le recouvrement mutuel de ces fonctions d'onde localisées. Ceci revient à ne calculer que le premier terme d'une série dont le

paramètre de perturbation est en $\exp(-\frac{1}{x\delta})$. Dans un développement perturbatif du coefficient de transmission, ceci consiste à ne retenir que la partie réellement propagative dans le propagateur.



Considérons la diffusion par une impureté située à l'abscisse $n = 0$.

$$\text{Pour } n \leq 0 \quad \begin{bmatrix} \phi_n \\ \psi_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{bmatrix} e^{i(k_1 + \Delta k_1)n} + B \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} e^{-i(k_1 + \Delta k_1)n} + C \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix} e^{i(k_2 + \Delta k_2)n}$$

$$n \geq 0 \quad \begin{bmatrix} \phi_n \\ \psi_n \end{bmatrix} = A' \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{bmatrix} e^{i(k_1 + \Delta k_1)n} + B' \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} e^{-i(k_1 + \Delta k_1)n} + C' \begin{bmatrix} \mu_2 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} e^{-i(k_2 + \Delta k_2)n}$$

On impose à la fonction d'onde d'être bornée à l'infini.

On obtient alors la matrice de transmission par l'impureté au deuxième ordre en γ et au premier ordre dans les potentiels ϵ et η :

$$A' = A + \frac{i(\epsilon + \eta)}{4\sin k_1} (A+B) - i \frac{\gamma(\epsilon - \eta)A}{4} + \frac{i\gamma^2}{32\sin k_1} (\epsilon + \eta) [(1 + \cotg^2 k_1 + 2\cos k_1)A +$$

$$+ (1 + \cotg^2 k_1 + 2\cos k_1 - 4\sin^2 k_1)B]$$

$$B' = B - \frac{i(\epsilon + \eta)}{4\sin k_1} (A+B) - i \frac{\gamma(\epsilon - \eta)B}{4} - \frac{i\gamma^2}{32\sin k_1} (\epsilon + \eta) [(1 + \cotg^2 k_1 + 2\cos k_1 - 4\sin^2 k_1)A$$

$$+ (1 + \cotg^2 k_1 + 2\cos k_1)B]$$

Cette relation peut se mettre sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \Delta A \\ \Delta B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + i\alpha & i\beta \\ -i\beta & 1 - i\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} \Delta A &= A' - A \\ \Delta B &= B' - B \\ (\alpha, \beta \text{ et } \delta \text{ réels}). \end{aligned}$$

La brisure d'invariance par renversement du temps en présence du champ magnétique se manifeste par le fait que $\alpha \neq \delta$. Cette brisure de symétrie est assurée par le terme du premier ordre en champ $\gamma(\epsilon-\eta)$.

Dans le cas d'une impureté située à l'abscisse n :

$$\begin{bmatrix} \Delta A \\ \Delta B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+i\alpha & i\beta e^{-i2k_1 n} \\ -i\beta e^{i2k_1 n} & 1-i\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

Si M est la matrice de transmission globale du système, comme nous l'avons vu, il est intéressant de considérer

$$J = MM^+ = \begin{bmatrix} F & G e^{i\varphi} \\ G e^{-i\varphi} & F \end{bmatrix}, \quad F^2 - G^2 = 1$$

La modification de F due à l'impureté située à l'abscisse n est :

$$\Delta F = (\alpha^2 + \beta^2) F_n + [2\alpha\beta \cos(\varphi_n + 2k_1 n) + 2\beta \sin(2k_1 n + \varphi_n)] G_n$$

On en tire une équation de Fokker-Planck pour l'évolution de la distribution de probabilité de F : $W(F, L)$:

$$\frac{\partial}{\partial L} W(F) = - \frac{\partial}{\partial F} [\langle \alpha^2 + \beta^2 \rangle F W] + \frac{\partial^2}{\partial F^2} [\langle \beta^2 \rangle (F^2 - 1) W]$$

$$\alpha = \frac{\epsilon + \eta}{4 \sin k_1} - \frac{\gamma(\epsilon - \eta)}{4} + \frac{\gamma^2}{32 \sin k_1} (\epsilon + \eta) (1 + \cotg^2 k_1 + 2 \cos k_1)$$

$$\langle \alpha^2 \rangle = \frac{x \langle \epsilon^2 \rangle}{8 \sin^2 k_1} \left[1 + \frac{\gamma^2}{4} (1 + \cotg^2 k_1 + 2 \cos k_1 + 4 \sin^2 k_1) \right]$$

$$\beta = \frac{\epsilon + \eta}{4 \sin k_1} + \frac{\gamma^2 (\epsilon + \eta)}{32 \sin k_1} (1 + \cotg^2 k_1 + 2 \cos k_1 - 4 \sin^2 k_1)$$

$$\langle \beta^2 \rangle = \frac{x \langle \epsilon^2 \rangle}{8 \sin^2 k_1} \left[1 + \frac{\gamma^2}{4} (1 + \cotg^2 k_1 + 2 \cos k_1 - 4 \sin^2 k_1) \right]$$

Dans la limite des grandes tailles, $L \rightarrow \infty$, $F \rightarrow \infty$.

$$\langle \ln F \rangle = \langle \alpha^2 \rangle L$$

$$\langle \ln^2 F \rangle - \langle \ln F \rangle^2 = 2 \langle \beta^2 \rangle L$$

$$F = \frac{1+R}{T} \approx \frac{2}{T} \text{ dans la limite } L \rightarrow \infty.$$

On en déduit la longueur de localisation.:

$$\ell = \frac{8 \sin^2 k_1}{\gamma \langle \varepsilon^2 \rangle [1 + \frac{\gamma^2}{4} (1 + \cotg^2 k_1 + 2 \cos k_1 + 4 \sin^2 k_1)]}$$

ℓ diminue à bas champ. On obtient donc une magnétorésistance positive, d'autant plus forte que l'on se trouve en bord de bande ($k \rightarrow 0$). Ce résultat est analogue à celui obtenu pour la chaîne de boucles. Le champ magnétique a pour effet principal de rétrécir le spectre, et donc d'augmenter la sensibilité du système à un désordre faible.

D. Propagation dans deux canaux. Matrice de transmission par une impureté.

Notre attention dans cette étude s'est portée essentiellement sur le problème de la période de l'oscillation de la distribution de probabilité de la transmission. Dans la suite, nous allons nous restreindre aux cas

$$\begin{array}{ll} \gamma = 0 & \text{et} \quad \gamma = \pi \\ t \approx 0 & \text{et} \quad t = 1 \end{array}$$

Les calculs pour une valeur quelconque du champ magnétique sont beaucoup plus lourds. Cette restriction nous conduit à étudier des systèmes qui gardent l'invariance par renversement du temps (en changeant de jauge, on peut décrire $\gamma = \pi$ par des couplages réels, de signes alternés). Briser l'invariance par renversement du temps

semble par exemple nécessaire pour expliquer la tendance à la délocalisation dans un système quasi unidimensionnel (ruban de N chaînes couplées), en présence d'un faible champ magnétique. Cet effet a notamment été vu dans des simulations numériques de Mac Kinnon et coll.⁽³⁶⁾.

a) $t = 1, \gamma = 0$

$E = 1 + 2 \cos k_1 \quad \phi = \psi \quad \text{mode symétrique}$

$E = -1 + 2 \cos k_2 \quad \phi + \psi = 0 \quad \text{mode antisymétrique.}$

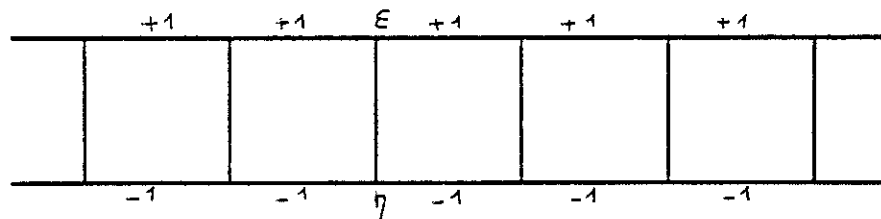
Avec les conventions de normalisation précisées plus haut, la matrice de transmission par une impureté (ϵ, η) à l'abscisse 0 s'écrit :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} A_1, A_2 \rightarrow \\ \left[\begin{array}{c} \Delta A_1 \\ \Delta A_2 \\ \Delta B_1 \\ \Delta B_2 \end{array} \right] \\ B_1, B_2 \leftarrow \end{array} \\
 = i \begin{bmatrix} a & b & a & b \\ b & c & b & c \\ -a & -b & -a & -b \\ -b & -c & -b & -c \end{bmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow B'_1, B'_2 \\ \left[\begin{array}{c} A'_1 \\ A'_2 \\ B'_1 \\ B'_2 \end{array} \right] \end{array} \\
 \begin{array}{c} \epsilon \\ \eta \end{array}
 \end{array}$$

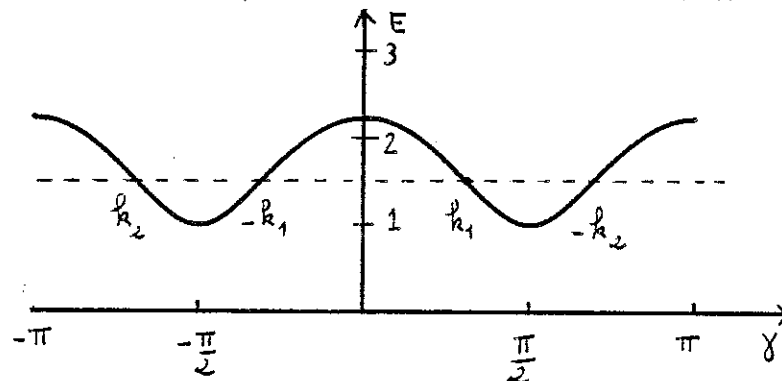
avec $a = \frac{\epsilon + \eta}{4 \sin k_1}$, $b = \frac{\epsilon - \eta}{4 \sqrt{\sin k_1 \sin k_2}}$, $c = \frac{\epsilon + \eta}{4 \sin k_2}$

b) $t = 1, \gamma = \pi$

Prenons une jauge dans laquelle l'invariance par renversement du temps est manifeste.



La relation de dispersion s'écrit $E^2 = 1 + 4\cos^2 k$.



Le choix $k_2 = k_1 - \pi$ est fait de manière à garder le même signe de la vitesse de groupe entre k_1 et k_2 .

$$\begin{aligned} k_1 \text{ correspond à un mode } \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} \text{ avec } \lambda = (E + \sqrt{E^2 - 1})^{-1} \\ \text{et } k_2 \text{ correspond à } \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matrice de transmission sur l'impureté, garde la même forme que dans le cas précédent, avec

$$a = \frac{\epsilon + \eta \lambda^2}{2 \sin k_1 (1 - \lambda^2)} ; \quad b = \frac{(\epsilon + \eta) \lambda}{2 \sin k_1 (1 - \lambda^2)} ; \quad c = \frac{\epsilon \lambda^2 + \eta}{2 \sin k_1 (1 - \lambda^2)}$$

c) $|t| \ll 1, \gamma = 0$

$$E = t + 2 \cos k_1 \quad \phi = \psi \quad : \text{ mode symétrique}$$

$$E = -t + 2 \cos k_2 \quad \phi + \psi = 0 \quad : \text{ mode antisymétrique}$$

La matrice de transmission est définie de la même manière qu'en a).

d) $|t| \ll 1, \gamma = \pi$

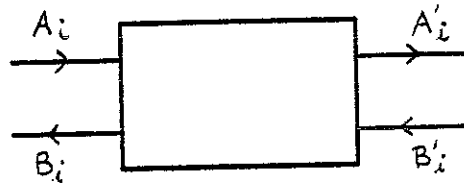
Avec le même choix de jauge qu'en b), la relation de dispersion devient : $E^2 = 4 \cos^2 k + t^2$. La matrice de transmission est la

même qu'en b), avec $\lambda = \frac{t}{2E}$. Nous garderons seulement le terme du premier ordre en t , ce qui donne :

$$a = \frac{\varepsilon}{2\sin k_1} \quad ; \quad b = \frac{\varepsilon + \eta}{2\sin k_2} \frac{t}{2E} \quad ; \quad c = \frac{\eta}{2\sin k_1}$$

E. Equation de Fokker-Planck pour les coefficients de transmission d'un système multicanaux.

La connaissance de la matrice de transmission par une impureté permet comme dans le cas d'une simple chaîne, d'écrire une équation de Fokker-Planck pour l'évolution le long de l'échelle des paramètres décrivant la transmission. Ce programme a été mis en oeuvre par Dorokhov⁽³⁷⁾ dont nous allons reprendre ici la méthode. Considérons un système à N canaux pour une valeur donnée de l'énergie.



A , B , A' , B' sont des vecteurs à N composantes complexes donnant les amplitudes des ondes entrantes, sortantes, à droite et à gauche dans les différents canaux. La matrice de transmission m est définie par :

$$\begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

m est une matrice complexe de taille $2N \times 2N$ soit $8N^2$ paramètres réels. La conservation du courant ramène le nombre de paramètres réels indépendants à $4N^2$ (unitarité de la matrice S). Dans ce cas, il existe des matrices unitaires de taille $N \times N$: u, v, X, Y et une matrice diagonale réelle Γ de taille $N \times N$ telles que

$$m = \begin{bmatrix} u \operatorname{ch} \left(\frac{\Gamma}{2} \right) X & -u \operatorname{sh} \left(\frac{\Gamma}{2} \right) Y \\ v \operatorname{sh} \left(\frac{\Gamma}{2} \right) X & v \operatorname{ch} \left(\frac{\Gamma}{2} \right) Y \end{bmatrix}$$

Cette paramétrisation met en jeu $4N^2 + N$ paramètres. On a donc N paramètres supplémentaires qui correspondent à la possibilité de faire les transformations suivantes sans changer m :

$$X \rightarrow \Delta X \quad u \rightarrow u \Delta^{-1}$$

$$Y \rightarrow \Delta Y \quad v \rightarrow v \Delta^{-1}$$

Δ désigne une matrice diagonale et unitaire.

Lorsque l'hamiltonien possède l'invariance par renversement du temps, le nombre de paramètres indépendants est réduit à $2N^2$. Dans ce cas $v = u^*$ et $Y = X^*$. Il est possible de restreindre encore le nombre de paramètres en s'intéressant à l'évolution de la matrice $M = mm^+$. Compte tenu de la forme donnée ci-dessus pour m :

$$M = \begin{bmatrix} u \operatorname{ch} \Gamma & u^+ & u \operatorname{sh} \Gamma & v^+ \\ v \operatorname{sh} \Gamma & u^+ & v \operatorname{ch} \Gamma & v^+ \end{bmatrix}$$

En général, M s'exprime avec $2N^2 + N$ paramètres réels, et en cas d'invariance par renversement du temps, ce nombre devient $N^2 + N$.

La signification des coefficients Γ_i de la matrice diagonale Γ s'obtient en considérant une onde venant de droite. L'onde transmise à gauche est donnée par :

$$B = Y^+ \frac{1}{\operatorname{ch} \left(\frac{\Gamma}{2} \right)} v^+ B' \quad , \text{ ce qui correspond à un courant}$$

transmis :

$$J = B^+ B = (v^+ B')^+ \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \left(\frac{\Gamma}{2} \right)} (v^+ B')$$

Dans la base des vecteurs colonne de v , le courant transmis est une forme quadratique diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les coefficients de transmission :

$$T_i = \frac{1}{\text{ch}^2(\frac{\Gamma_i}{2})}$$

On en tire : $\text{ch} \Gamma_i = \frac{2}{T_i} - 1$, qui généralise la relation $A = \frac{2}{T} - 1$ introduite au paragraphe II. Le système possède donc N coefficients de transmission. Pour une onde venant de droite, on aurait :

$$A' = u \frac{1}{\text{ch}(\frac{\Gamma}{2})} \times A$$

et

$$J = (XA)^+ \frac{1}{(\text{ch} \frac{\Gamma}{2})^2} (XA)$$

. Dans les situations envisagées au paragraphe précédent, la matrice de transmission due à une impureté isolée est de la forme :

$$m = \mathbb{I} + i \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ -\alpha & -\alpha \end{bmatrix} \text{ où } \alpha \text{ est une matrice } 2 \times 2, \text{ symétrique}$$

et réelle.

Lorsque l'abscisse de l'impureté est n , on a, par translation :

$$m(n) = \mathbb{I} + i \begin{bmatrix} e^{-iKn} \alpha e^{iKn} & e^{-iKn} \alpha e^{-iKn} \\ -e^{iKn} \alpha e^{iKn} & -e^{iKn} \alpha e^{-iKn} \end{bmatrix}$$

$$\text{où } K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

Il sera utile de poser $\beta = e^{-iKn} \alpha e^{iKn}$; $\gamma = e^{-iKn} \alpha e^{-iKn}$ si bien que $m(n) = \mathbb{I} + i \begin{bmatrix} \beta & \gamma \\ -\gamma^+ & -\beta^* \end{bmatrix}$

Lorsque l'on ajoute une impureté, la matrice M est modifiée et devient M' :

$$M' = \begin{bmatrix} 1 + i\beta & i\gamma \\ -i\gamma^+ & 1 - i\beta^* \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 1 - i\beta & i\gamma \\ -i\gamma^+ & 1 + i\beta^* \end{bmatrix}$$

En particulier :

$$\begin{aligned} u^+(u'ch\Gamma'u'^+)u &= ch\Gamma + i[Qch\Gamma - ch\Gamma Q] + i[Rsh\Gamma - sh\Gamma R^+] \\ &+ Qch\Gamma Q + Rch\Gamma R^+ + Qsh\Gamma R^+ + Rsh\Gamma Q \end{aligned} \quad (1)$$

On a posé $Q = u^+\beta u$ et $R = u^+\gamma v$.

En vue d'obtenir une équation de Fokker-Planck, il est nécessaire de calculer $ch\Gamma'_1$ et $ch\Gamma'_2$ au second ordre dans les potentiels d'impureté. Q et R sont des matrices du premier ordre dans ces potentiels, avec une différence importante : lorsque k est grand ($k/x < \epsilon^2 \gg 1$), Q oscille lentement avec n, alors que R oscille très rapidement. Dans la formule (1) ci-dessus, nous négligeons les deux derniers termes qui sont du deuxième ordre, avec une oscillation spatiale très rapide.

L'équation (1) peut se voir comme décrivant le passage d'un hamiltonien non perturbé $ch\Gamma$, diagonal, à un hamiltonien $u^+M'u$ sous l'effet d'une perturbation hermitienne. Nous pouvons exprimer la perturbation sous la forme :

$$u^+M'u = ch\Gamma + \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \quad (2)$$

où $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}$ est la perturbation

$$A = i(R_{11} - R_{11}^*)sh\Gamma_1 + [(Q_{11}^2 + |R_{11}|^2)ch\Gamma_1 + (|Q_{12}|^2 + |R_{12}|^2)ch\Gamma_2] \quad (3a)$$

$$C = i(R_{22} - R_{22}^*)sh\Gamma_2 + [(|Q_{12}|^2 + |R_{21}|^2)ch\Gamma_1 + (Q_{22}^2 + |R_{22}|^2)ch\Gamma_2] \quad (3c)$$

$$\begin{aligned}
 B = & iQ_{12}(ch\Gamma_2 - ch\Gamma_1) + i(R_{12}sh\Gamma_2 - R_{21}^*sh\Gamma_1) \\
 & + (Q_{11}Q_{12} + R_{11}R_{21}^*)ch\Gamma_1 + (Q_{12}Q_{22} + R_{12}R_{22}^*)ch\Gamma_2
 \end{aligned} \quad (3b)$$

La théorie des perturbations au deuxième ordre donne par ailleurs :

$$\begin{aligned}
 ch\Gamma_1' &= ch\Gamma_1 + A + \frac{|B|^2}{ch\Gamma_1 - ch\Gamma_2} \\
 ch\Gamma_2' &= ch\Gamma_2 + C - \frac{|B|^2}{ch\Gamma_1 - ch\Gamma_2}
 \end{aligned} \quad (4)$$

Paramétrisation des matrices u et v :

u et v sont unitaires. Posons

$$u = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ -\sin \theta e^{i\varphi} & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Ceci est possible à condition de compenser le choix de la phase des coefficients diagonaux de u par l'introduction de deux phases D_1 et D_2 de sorte que

$$v = u^* \begin{bmatrix} e^{-iD_1} & 0 \\ 0 & e^{-iD_2} \end{bmatrix}$$

Dans la suite, il sera utile de connaître l'évolution de θ . θ est facilement accessible à partir de $u ch\Gamma u^+$. En effet

$$u ch\Gamma u^+ = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta ch\Gamma_1 + \sin^2 \theta ch\Gamma_2 & \sin \theta \cos \theta e^{-i\varphi}(ch\Gamma_2 - ch\Gamma_1) \\ \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi}(ch\Gamma_2 - ch\Gamma_1) & \cos^2 \theta ch\Gamma_2 + \sin^2 \theta ch\Gamma_1 \end{bmatrix}$$

Evolution de $ch\Gamma_1$, $ch\Gamma_2$ et θ :

Comme au paragraphe précédent, nous prenons $\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ où a, b, c sont 3 variables aléatoires réelles, reliées au potentiel diffuseur.

Il est alors possible d'exprimer les matrices Q et R à partir de α . On trouve :

$$Q_{11} = a \cos^2 \theta - 2b \sin \theta \cos \theta \cos(\varphi - q.n) + c \sin^2 \theta$$

$$Q_{12} = a \sin \theta \cos \theta e^{-i\varphi} + b(\cos^2 \theta e^{-iq.n} - \sin^2 \theta e^{i(qn-2\varphi)}) - c \sin \theta \cos \theta e^{-i\varphi}$$

$$Q_{22} = a \sin^2 \theta + 2b \sin \theta \cos \theta \cos(\varphi - q.n) + c \cos^2 \theta \quad (q = k_1 - k_2)$$

$$R_{11} = e^{-i(k_1+k_2)n} e^{-iD_1} [a \cos^2 \theta e^{-iq.n} - 2b \sin \theta \cos \theta e^{-i\varphi} + c \sin^2 \theta e^{i(q.n-2\varphi)}]$$

$$R_{12} = e^{-i(k_1+k_2)n} e^{-iD_2} [a \sin \theta \cos \theta e^{i(\varphi-q.n)} + b \cos 2\theta - c \sin \theta \cos \theta e^{i(q.n-\varphi)}]$$

$$R_{21} = e^{-i(k_1+k_2)n} e^{-iD_1} [a \sin \theta \cos \theta e^{i(\varphi-q.n)} + b \cos 2\theta - c \sin \theta \cos \theta e^{i(q.n-\varphi)}]$$

$$R_{22} = e^{-i(k_1+k_2)n} e^{-iD_2} [a \sin^2 \theta e^{i(2\varphi-q.n)} + 2b \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi} + c \cos^2 \theta e^{i q.n}]$$

Ces relations, en utilisant les équations (3) permettent de calculer l'opérateur de perturbation qui intervient dans (2). Le résultat du calcul de perturbations au deuxième ordre donne alors :

$$\begin{aligned} \text{ch}\Gamma'_1 = & \text{ch}\Gamma_1 + 2(a \cos^2 \theta \sin(2k_1 n + D_1) - 2b \sin \theta \cos \theta \sin((k_1 + k_2)n + D_1 + \varphi) \\ & + c \sin^2 \theta \sin(2k_2 n + D_1 + 2\varphi)) \text{sh}\Gamma_1 \\ & + 2(a^2 \cos^4 \theta + 4b^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + c^2 \sin^4 \theta - 4ab \sin \theta \cos^3 \theta \cos(\varphi - q.n) \\ & - 4bc \sin^3 \theta \cos \theta \cos(\varphi - q.n) + 2ac \cos^2 \theta \sin 2\theta \cos 2(\varphi - q.n)) \text{ch}\Gamma_1 \\ & + 2(a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + b^2 \cos^2 2\theta + c^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2ab \sin \theta \cos \theta \cos 2\theta \cos(\varphi - q.n) \\ & - 2bc \sin \theta \cos \theta \cos 2\theta \cos(\varphi - q.n) - 2ac \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos 2(\varphi - q.n)) \frac{\text{sh}^2 \Gamma_1}{\text{ch}\Gamma_1 - \text{ch}\Gamma_2} \quad (5a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ch}\Gamma'_2 = & \text{ch}\Gamma_2 + 2(a\sin^2\theta\sin(2k_1n+D_2-2\varphi)+2b\sin\theta\cos\theta\sin((k_1+k_2)n+D_2-\varphi) \\
 & + c\cos^2\theta\sin(2k_2n+D_2))\text{sh}\Gamma_2 \\
 & + 2(a^2\sin^4\theta+4b^2\sin^2\theta\cos^2\theta+c^2\cos^4\theta+4absin^3\theta\cos\theta\cos(\varphi-q.n) \\
 & + 4bcsin\theta\cos^3\theta\cos(\varphi-q.n)+2ac\sin^2\theta\cos^2\theta\cos 2(\varphi-q.n))\text{ch}\Gamma_2 \\
 & + 2(a^2\sin^2\theta\cos^2\theta+b^2\cos^22\theta+c^2\sin^2\theta\cos^2\theta+2absin\theta\cos\theta\cos 2\theta\cos(\varphi-q.n) \\
 & - 2bc\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta\cos(\varphi-q.n)-2ac\sin^2\theta\cos^2\theta\cos 2(\varphi-q.n))\frac{\text{sh}^2\Gamma_2}{\text{ch}\Gamma_2-\text{ch}\Gamma_1} \quad (5b)
 \end{aligned}$$

Cela nous permet d'écrire une partie de l'équation de Fokker-Planck complète. Nous faisons l'hypothèse que $1/q$ est une longueur petite devant les longueurs caractéristiques d'évolution de la distribution de probabilité (longueurs de localisation). L'équation de Fokker-Planck s'obtient alors en prenant la moyenne sur les termes de phase à oscillation rapide.

On a, en posant $F_1=\text{ch}\Gamma_1$ et $F_2 = \text{ch}\Gamma_2$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial L} W(L, F_1, F_2, \theta) = & (<a^2>\cos^4\theta+<c^2>\sin^4\theta+4<b^2>\sin^2\theta\cos^2\theta)\frac{\partial}{\partial F_1}[(F_1^2-1)\frac{\partial W}{\partial F_1}] \\
 & - 2((<a^2>+<c^2>)\sin^2\theta\cos^2\theta+<b^2>\cos^22\theta)\frac{\partial}{\partial F_1}\left(\frac{F_1^2-1}{F_1-F_2}W\right) \\
 & + (<a^2>\sin^4\theta+<c^2>\cos^4\theta+4<b^2>\sin^2\theta\cos^2\theta)\frac{\partial}{\partial F_2}[(F_2^2-1)\frac{\partial W}{\partial F_2}] \\
 & - 2((<a^2>+<c^2>)\sin^2\theta\cos^2\theta+<b^2>\cos^22\theta)\frac{\partial}{\partial F_2}\left(\frac{F_2^2-1}{F_2-F_1}W\right) \\
 & + \dots \text{autres termes}
 \end{aligned}$$

F. Longueurs de localisation de l'échelle.

A la limite $L \rightarrow \infty$, on s'attend à ce que les deux valeurs propres F_1 et F_2 croissent de manière exponentielle avec la longueur, avec des longueurs caractéristiques différentes^(37,38). Il en résulte que par exemple $1 \ll F_1 \ll F_2$. On peut alors simplifier l'équation de Fokker-Planck et obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial L}(L, F_1, F_2, \theta) = & (\langle a^2 \rangle \cos^4 \theta + \langle c^2 \rangle \sin^4 \theta + 4 \langle b^2 \rangle \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \frac{\partial}{\partial F_1} (F_1^2 \frac{\partial W}{\partial F_1}) \\ & + (\langle a^2 \rangle \sin^4 \theta + \langle c^2 \rangle \cos^4 \theta + 4 \langle b^2 \rangle \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \frac{\partial}{\partial F_2} (F_2^2 \frac{\partial W}{\partial F_2}) \\ & - 2(\langle a^2 \rangle + \langle c^2 \rangle) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \langle b^2 \rangle \cos^2 2\theta \frac{\partial}{\partial F_2} (F_2 W) \\ & + \dots \text{autres termes} \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\frac{d \langle \ln F_1 \rangle}{dL} = \langle a^2 \rangle \langle \cos^4 \theta \rangle + \langle c^2 \rangle \langle \sin^4 \theta \rangle + 4 \langle b^2 \rangle \langle \sin^2 \theta \cos^2 \theta \rangle \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d \langle \ln F_2 \rangle}{dL} = & \langle a^2 \rangle \langle \sin^4 \theta \rangle + \langle c^2 \rangle \langle \cos^4 \theta \rangle + 4 \langle b^2 \rangle \langle \sin^2 \theta \cos^2 \theta \rangle \\ & + 2(\langle a^2 \rangle + \langle c^2 \rangle) \langle \sin^2 \theta \cos^2 \theta \rangle + 2 \langle b^2 \rangle \langle \cos^2 2\theta \rangle \end{aligned} \quad (6b)$$

A priori, la distribution de probabilité de θ est non triviale et dépend de L . Toutefois, Dorokhov a noté que la moyenne géométrique $(F_1 F_2)^{1/2}$ suit une évolution simple

$$\frac{d}{dL} \left[\frac{\langle \ln F_1 \rangle + \langle \ln F_2 \rangle}{2} \right] = \frac{\langle a^2 \rangle + \langle c^2 \rangle}{2} + \langle b^2 \rangle \quad (7)$$

Cette dernière équation est valable quelle que soit la distribution de probabilité de θ .

Pour utiliser (5a) et (5b), il faut donc obtenir la distribution de probabilité de θ ; $W(\theta, L)$. En fait, à la limite des grandes longueurs, l'évolution de θ devient indépendante de F_1 et F_2 car $T_1 \rightarrow 0$ et $T_2 \rightarrow 0$ si bien que $F_1 \rightarrow \infty$ et $F_2 \rightarrow \infty$. On peut alors écrire une équation de Fokker-Planck pour $W(\theta, L)$ et en rechercher la distribution stationnaire⁽³⁷⁾, donnée par $\frac{\partial W}{\partial L}(\theta, L) = 0$.

Pour cela, nous devons calculer la variation de θ au deuxième ordre dans les potentiels d'impuretés, lorsque l'on ajoute une impureté à la chaîne.

On a tout d'abord :

$$\begin{aligned} \cos 2\theta'(\text{ch}\Gamma_1' - \text{ch}\Gamma_2') &= \cos 2\theta(\text{ch}\Gamma_1 - \text{ch}\Gamma_2) + 2b \sin 2\theta \sin(\varphi - qn)(\text{ch}\Gamma_1 - \text{ch}\Gamma_2) \\ &+ 2(a \cos^2 \theta \sin(2k_1 n + D_1) - c \sin^2 \theta \sin(2k_2 n + D_1 + 2\varphi)) \text{sh}\Gamma_1 \\ &+ 2(a \sin^2 \theta \sin(2k_1 n + D_2 - 2\varphi) - c \cos^2 \theta \sin(2k_2 n + D_2)) \text{sh}\Gamma_2 \\ &+ 2(a^2 - b^2)(\cos^2 \theta \text{ch}\Gamma_1 + \sin^2 \theta \text{ch}\Gamma_2) + 2(b^2 - c^2)(\cos^2 \theta \text{ch}\Gamma_2 + \sin^2 \theta \text{ch}\Gamma_1) \\ &+ 2b(a - c) \sin 2\theta \cos(\varphi - qn)(\text{ch}\Gamma_2 - \text{ch}\Gamma_1) \end{aligned}$$

Cette équation est obtenue à partir de l'équation (1), multipliée par u à gauche et u^+ à droite et en prenant la différence des coefficients de la diagonale. Remplaçant dans l'équation l'expression (5a et 5b) de $\text{ch}\Gamma_1' - \text{ch}\Gamma_2'$ et en développant au deuxième ordre en a, b, c , il vient :

$$\cos 2\theta' = \cos 2\theta + 2b \sin 2\theta \sin(\varphi - qn)$$

$$\begin{aligned} & + (a \sin^2 2\theta \sin(2k_1 n + D_1) + 2b \sin 2\theta \cos 2\theta \sin((k_1 + k_2)n + D_1 + \varphi) \\ & - c \sin^2 2\theta \sin(2k_2 n + D_1 + 2\varphi)) \frac{\text{sh} \Gamma_1}{\Delta} \\ & + (a \sin^2 2\theta \sin(2k_1 n + D_2 - 2\varphi) + 2b \sin 2\theta \cos 2\theta \sin((k_1 + k_2)n + D_2 - \varphi) \\ & - c \sin^2 2\theta \sin(2k_2 n + D_2)) \frac{\text{sh} \Gamma_2}{\Delta} \\ & + (a^2(1-h^2)(2+h) - 4b^2 h(2-h^2) - c^2(1-h^2)(2-h)) \frac{\text{ch} \Gamma_1}{2\Delta} \\ & + (a^2(1-h^2)(2-h) + 4b^2 h(2-h^2) - c^2(1-h^2)(2+h)) \frac{\text{ch} \Gamma_2}{2\Delta} \\ & + (-a^2(1-h^2)(1+2h) + 4b^2 h(1-2h^2) + c^2(1-h^2)(1-2h)) \frac{\text{sh}^2 \Gamma_1}{2\Delta^2} \\ & + (a^2(1-h^2)(1-2h) + 4b^2 h(1-2h^2) - c^2(1-h^2)(1+2h)) \frac{\text{sh}^2 \Gamma_2}{2\Delta^2} \end{aligned}$$

Dans cette expression, nous avons posé pour simplifier l'écriture :
 $h = \cos 2\theta$ et $\Delta = \text{ch} \Gamma_1 - \text{ch} \Gamma_2$. De plus, nous avons négligé les termes
 du second ordre dans les variables a, b, c à oscillation spatiale rapide,
 et fait l'hypothèse que la quantité $D_1 - D_2 + 2\varphi$ est uniformément répartie.
 Dans la limite $L \rightarrow \infty$, la symétrie $\Gamma_{1,2}$ se brise. Par exemple :
 $1 \ll \Gamma_1 \ll \Gamma_2$. L'expression précédente devient :

$$\cos 2\theta' = \cos 2\theta + 2b \sin 2\theta \sin(\varphi - qn)$$

$$\begin{aligned} & - (a \sin^2 2\theta \sin(2k_1 n + D_2 - 2\varphi) + 2b \sin 2\theta \cos 2\theta \sin((k_1 + k_2)n + D_2 - \varphi) \\ & - c \sin^2 2\theta \sin(2k_2 n + D_2)) \\ & - (a^2(1-h^2)(1+h) + 4b^2 h(1+h^2) - c^2(1-h^2)(1-h))/2 \end{aligned}$$

On en tire l'équation de Fokker Planck pour la distribution de $h = \cos 2\theta$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} W(h, L) = & \frac{\partial}{\partial h} [(\alpha h(1-h^2) + \beta h(1+h^2) + \gamma(1-h^2))W] \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial h^2} [(\alpha(1-h^2)^2 + \beta(1-h^4))W] \end{aligned} \quad (8)$$

On a posé :

$$\alpha = (\langle a^2 \rangle + \langle c^2 \rangle) / 2$$

$$\beta = 2 \langle b^2 \rangle$$

$$\gamma = (\langle a^2 \rangle - \langle c^2 \rangle) / 2$$

Remarques : Les matrices α , β , γ précédemment introduites ne seront plus utilisées dans la suite. Cette dernière notation n'introduit donc pas de confusion. D'autre part, les valeurs moyennes de a^2 , b^2 , c^2 font intervenir la distribution de probabilité du potentiel des impuretés.

La distribution stationnaire de h s'obtient en annulant le membre de droite de l'équation (8). L'équation différentielle obtenue s'intègre avec les deux conditions :

$$W(h) \geq 0 \quad \text{pour } -1 \leq h \leq 1$$

$$\int_{-1}^1 W(h) dh = 1$$

Deux cas sont à distinguer :

1) $\beta > \alpha$: diffusion entre canaux forte :

$$W(h) = \frac{\mu}{\alpha(1-h^2) + \beta(1+h^2)} \exp \left\{ - \frac{2\gamma}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \operatorname{Arctg} \left(\sqrt{\frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha}} h \right) \right\}$$

$$\text{avec} \quad \mu = \gamma / \operatorname{sh} \left(\frac{2\gamma}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha}} \right) \quad (9)$$

2) $\beta < \alpha$: diffusion entre canaux faible

$$W(h) = \frac{\mu}{\alpha(1-h^2)+\beta(1+h^2)} \exp\left\{ - \frac{2\gamma}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}} \operatorname{Argth}\left(\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} h\right) \right\} \quad (10)$$

et

$$\mu = \gamma / \operatorname{sh}\left(\frac{2\gamma}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}} \operatorname{Argth} \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} \right)$$

La connaissance de cette distribution stationnaire permet de trouver les valeurs de $\langle \ln F_1 \rangle$ et $\langle \ln F_2 \rangle$.

En effet, d'après (6a) et (6b)

$$\frac{d \langle \ln F_1 \rangle}{dL} = \frac{1}{2} \langle (\alpha(1+h^2)+\beta(1-h^2)+2\gamma h) \rangle$$

$$\frac{d \langle \ln F_2 \rangle}{dL} = \frac{1}{2} \langle (\alpha(3-h^2)+\beta(1+h^2)-2\gamma h) \rangle$$

Les valeurs moyennes sont à prendre sur la distribution stationnaire de h (Eq. (9) ou (10)). Le calcul peut être mené complètement et :

1) $\beta > \alpha$

$$\frac{d}{dL} \langle \ln F_1 \rangle = \alpha + \beta - \gamma \coth \left\{ \frac{2\gamma}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}} \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}} \right\} \quad (11)$$

2) $\beta < \alpha$

$$\frac{d}{dL} \langle \ln F_1 \rangle = \alpha + \beta - \gamma \coth \left\{ \frac{2\gamma}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}} \operatorname{Argth} \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} \right\} \quad (12)$$

Le résultat pour F_2 s'obtient en utilisant l'importante Eq. (7).

G. Discussion des résultats.

1. Distribution stationnaire de h :

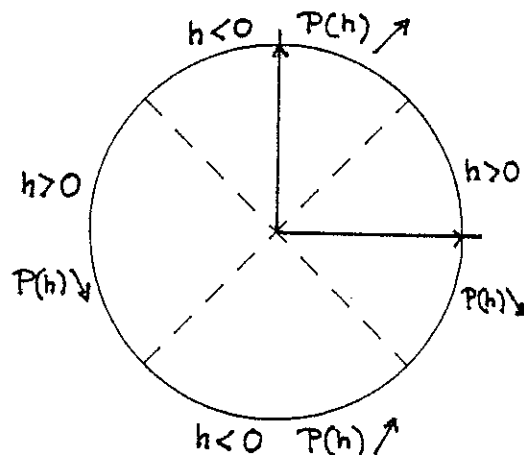
L'allure de cette distribution dépend beaucoup des valeurs des paramètres α , β , γ . γ est un facteur d'anisotropie entre canaux. Lorsque $\gamma = 0$, on a

$$W(\theta) = \frac{\mu}{\alpha(1-h^2) + \beta(1+h)^2}$$

si $\beta > \alpha$, la distribution présente un maximum pour $h = 0$, soit $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n$. θ est l'angle de la rotation qu'il faut imposer aux deux vecteurs de base choisis pour l'onde incidente, afin de diagonaliser la forme quadratique donnant le courant transmis. Lorsque $\beta > \alpha$, la diffusion entre canaux joue beaucoup si bien que les vecteurs propres de la forme associée au courant transmis tendent à être une superposition, avec un poids égal, des canaux incidents. Lorsque $\beta < \alpha$, la distribution présente un maximum pour $h^2 = 1$, soit $\theta = \frac{\pi}{2} n$. Ceci traduit une tendance pour les vecteurs propres à ressembler davantage aux canaux incidents. Nous parlons seulement de tendance, car une distribution uniforme en θ devient singulière lorsqu'elle est exprimée avec h :

$$P(\theta) = \frac{1}{2\pi} \quad \text{donne} \quad P(h) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-h^2}}$$

Par ailleurs, lorsque $\gamma > 0$, la probabilité est réduite pour $h > 0$ et augmentée pour $h < 0$. En variable θ , l'effet est décrit par la figure



Par conséquent, le vecteur propre associé à la plus grande valeur du coefficient de transmission reçoit une plus grande contribution du canal n° 2. Cela est conforme à l'intuition car $\gamma > 0$ implique que $\langle c^2 \rangle \ll \langle a^2 \rangle$, par conséquent l'effet du désordre est moins fort dans le canal n° 2 que dans le canal n° 1. Il est rassurant que la contribution dominante vienne du canal le moins sensible au désordre !

2. Longueurs de localisation :

Par extension du cas strictement unidimensionnel, nous introduisons deux longueurs de localisation ℓ_1 et ℓ_2 définies par⁽³⁷⁾

$$\frac{d\langle \ln F_1 \rangle}{dL} = \frac{1}{\ell_1}$$

$$\frac{d\langle \ln F_2 \rangle}{dL} = \frac{1}{\ell_2}$$

Avec le choix $F_1 \ll F_2$, $\ell_1 > \ell_2$.

Remarque : les indices 1 et 2 intervenant dans F_1 , F_2 n'ont pas la même signification que ceux que nous avons employés pour distinguer les canaux. Une permutation de F_1 et F_2 est simplement absorbée par un changement approprié de θ et φ .

Une conséquence intéressante des équations (11) et (12) est que à α et β fixés, ℓ_1 augmente et ℓ_2 diminue lorsque la dissymétrie γ augmente. Cela est relié à l'évolution de la distribution de h décrite précédemment : le canal dans lequel le potentiel aléatoire joue le moins domine, en ce qui concerne ℓ_1 .

3. Cas $t = 1$ $\phi = 0$ ou $\phi = h/2e$:

Nous considérons le modèle où chaque site a une probabilité x d'être occupé par une impureté, le potentiel w de l'impureté ayant une valeur moyenne nulle et une variance $\langle w^2 \rangle$.

On a, d'après D. :

$$\underline{\phi = 0} \quad \langle a^2 \rangle = \frac{x \langle w^2 \rangle}{2} \frac{1}{(1+E)(3-E)}$$

$$\langle b^2 \rangle = \frac{x \langle w^2 \rangle}{2} \frac{1}{\sqrt{(1-E^2)(9-E^2)}}$$

$$\langle c^2 \rangle = \frac{x \langle w^2 \rangle}{2} \frac{1}{(1-E)(3+E)}$$

$$\underline{\phi = h/2e} \quad \langle a^2 \rangle = x \langle w^2 \rangle \frac{(1+\lambda^4)}{(1-\lambda^2)^2(5-E^2)} = \langle c^2 \rangle$$

$$\langle b^2 \rangle = x \langle w^2 \rangle \frac{2\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2(5-E^2)}$$

$$\text{avec } \lambda = (E + \sqrt{E^2-1})^{-1}$$

$$\underline{\phi = 0} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_2} \right) = \frac{x \langle w^2 \rangle}{4} \left[\frac{1}{\sqrt{(1+E)(3-E)}} + \frac{1}{\sqrt{(1-E)(3+E)}} \right]^2$$

et

$$\frac{1}{\ell_1} = \frac{x \langle w^2 \rangle}{2} \left[\frac{3-E^2-2E\mathcal{F}(E)}{(1-E^2)(9-E^2)} + \frac{2}{\sqrt{(1-E^2)(9-E^2)}} \right]$$

$$\text{avec } \mathcal{F}(E) = \coth \left[\frac{4E}{(27-34E^2+3E^4)^{1/2}} \operatorname{Arctg} \left(\frac{2((1-E^2)(9-E^2))^{1/2} - (3-E^2)}{2((1-E^2)(9-E^2))^{1/2} + (3-E^2)} \right)^{1/2} \right]$$

$$\text{si } |E| < E_c \quad E_c = \sqrt{\frac{17-4\sqrt{13}}{3}} < 1$$

et

$$\mathcal{F}(E) = \coth \left[\frac{4E}{(-3E^4+34E^2-27)^{1/2}} \operatorname{Argth} \left(\frac{(3-E^2)-2((1-E^2)(9-E^2))^{1/2}}{(3-E^2)+2((1-E^2)(9-E^2))^{1/2}} \right)^{1/2} \right]$$

$$\text{si } E_c < |E| < 1$$

Lorsque $|E|$ partant de 0 franchit la valeur E_c , la distribution de probabilité de θ change de nature, la dissymétrie entre les canaux devenant très grande lorsque $|E| \rightarrow 1$, c'est-à-dire lorsqu'un canal devient évanescent. Dans ce cas $\lambda_2 \rightarrow 0$ et

$$\lambda_1^{-1} \rightarrow \frac{x < w^2 >}{2} \frac{1}{(1+E)(3-E)}$$

On retrouve pour $c^2 \rightarrow \infty$ la longueur de localisation calculée en C., au cas où seul un canal est propagatif.

$$\phi = h/2e$$

Les valeurs de l'énergie appartenant au spectre sont définies par : $1 \leq |E| \leq \sqrt{5}$. On a :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) = \frac{x < w^2 >}{(5-E^2)} \left(\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2} \right)^2$$

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{x < w^2 >}{(5-E^2)(1-\lambda^2)^2} [1 + \lambda^4 + 4\lambda^2 - \mathcal{G}(\lambda)]$$

avec

$$\mathcal{G}(\lambda) = (16\lambda^4 - (1+\lambda^4)^2)^{1/2} / 2 \operatorname{Arctg} \left(\frac{4\lambda^2 - 1 - \lambda^4}{4\lambda^2 + 1 + \lambda^4} \right)^{1/2} \quad \text{si } 1 < |E| < E'_c$$

et

$$\mathcal{G}(\lambda) = ((1+\lambda^4)^2 - 16\lambda^4)^{1/2} / 2 \operatorname{Argth} \left(\frac{1+\lambda^4 - 4\lambda^2}{1+\lambda^4 + 4\lambda^2} \right)^{1/2} \quad \text{si } E'_c < |E| < \sqrt{5}$$

$$\text{avec } E'_c = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

La différence entre le cas $\phi = 0$ et $\phi = h/2e$ est encore plus nette dans la limite de couplage faible $t \ll 1$:

4. Cas $t \ll 1$, $\phi = 0$ ou $\phi = h/2e$:

Nous négligerons ici l'effet de la différence de vitesse de groupe entre les deux canaux. Cet effet introduit des corrections en t^2

aux longueurs de localisation. D'après D, nous avons :

$$\underline{\phi = 0} \quad \langle a^2 \rangle = \langle b^2 \rangle = \langle c^2 \rangle = \frac{x \langle w^2 \rangle}{2(4-E^2)}$$

On en tire :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_2} \right) = \frac{x \langle w^2 \rangle}{4-E^2} + O(t^2)$$

$$\frac{1}{\ell_1} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \right) \frac{x \langle w^2 \rangle}{4-E^2}$$

$$\underline{\phi = h/2e} \quad \langle a^2 \rangle = \langle c^2 \rangle = \frac{x \langle w^2 \rangle}{(4-E^2)}; \quad \langle b^2 \rangle = \frac{x \langle w^2 \rangle}{(4-E^2)} \frac{t^2}{2E^2}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_2} \right) = \frac{x \langle w^2 \rangle}{4-E^2} + O(t^2)$$

$$\frac{1}{\ell_1} = \frac{x \langle w^2 \rangle}{(4-E^2)} \left(1 - \frac{1}{\ln(2E^2/t^2)} \right)$$

La dépendance de ℓ_1 en t est non analytique à flux moitié.

H. Conclusions pour l'échelle.

Nous avons montré que dans la limite de faible désordre, à couplage faible ($t \ll 1$) comme à couplage fort ($t = 1$), la période de l'oscillation de la distribution de probabilité des coefficients de transmission T_1 et T_2 n'est pas $\frac{h}{2e}$, mais $\frac{h}{e}$. C'est la période d'oscillation de la structure de bandes de l'échelle, qui est déterminante dans la limite de faible désordre. Pour terminer nous pouvons préciser les limites de ce travail.

. Nos calculs portent sur des champs magnétiques ne brisant pas l'invariance par renversement du temps. Pour des valeurs quelconques du champ magnétique, deux problèmes se posent : d'une part, le calcul de la matrice de transmission d'une impureté est très lourd, si l'on cherche à exprimer de manière explicite la dépendance en champ. D'autre part, on perd la relation entre les matrices unitaires u et v^* , ce qui oblige à introduire deux paramètres supplémentaires (θ' et φ' pour v). La distribution stationnaire requise porte alors sur deux phases θ et θ' , dont il doit être nécessaire de suivre les corrélations. La brisure d'invariance par renversement du temps par un faible champ magnétique doit contribuer à des effets de type magnétorésistance négative, ce qu'il serait important de vérifier.

. Notre traitement de faible désordre n'est pas valable en bord de bande, situation dans laquelle $\frac{1}{\ell} \approx < \varepsilon^2 >^{1/3}$ au lieu de $< \varepsilon^2 >$ (39).

De même, nous avons négligé la possibilité de phénomènes de résonances de type Kappus-Wegner^(34,39), lorsque k_1 , k_2 ou $k_1 - k_2$ ou $k_1 + k_2$ est commensurable avec π . Ce genre de situation apparaît systématiquement à flux moitié, où l'on a : $k_2 = k_1 - \pi$. L'analyse ne peut pas en être menée avec la méthode ici suivie, qui repose largement sur l'élimination des termes à oscillation rapide. Il faudrait pour cela employer des matrices de transfert, qui auraient en plus l'avantage de s'adapter au cas d'un fort désordre. La méthode que nous avons empruntée a par contre l'avantage de révéler l'existence de deux formes possibles pour la distribution de la phase θ , suivant que la diffusion entre canaux est forte ou faible. Notons que notre

modèle est différent de celui que considère Dorokhov dans son analyse de l'échelle⁽³⁷⁾. Son hypothèse consiste à prendre une amplitude de transmission par une impureté réelle (absence de déphasage), ce qui nous a conduits à faire les calculs présentés ici dans le cas où le déphasage est non nul.

VI - CONCLUSION

Le principal résultat de ce chapitre est de confirmer l'idée que la périodicité à $\frac{h}{2e}$ apparaît lorsque l'échelle de longueur associée au désordre est inférieure à la taille des boucles présentes dans le système. Si cette condition est satisfaisante, la structure de bandes sous-jacentes n'intervient plus, et seul subsiste le déphasage par le champ magnétique. C'est ce qui se produit dans la théorie de la localisation faible, où le champ magnétique est introduit dans le propagateur moyenné sur les positions des impuretés par la substitution⁽⁵⁾ :

$$G(r, r') \rightarrow G(r, r') \exp \left\{ i \int_r^{r'} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \right\}$$

Une conséquence est la différence entre un champ magnétique uniforme et une singularité comme dans le cas de l'effet Aharonov-Bohm. Dans un modèle de liaisons fortes, avec un champ uniforme, la période $\frac{h}{2e}$ ne peut se voir qu'en désordre fort, comme le montre notre étude de la chaîne de boucles. Cette condition de désordre fort est nécessaire et peut ne pas être suffisante comme le suggère le modèle de Nguyen, Spivak et Shklovski discuté dans l'introduction de ce chapitre. Par contre, une singularité du type Aharonov-Bohm peut plus facilement conduire à $\frac{h}{2e}$, lorsque les phases associées aux différents chemins autour de l'anneau sont aléatoires. L'observation de $\frac{h}{2e}$ dans les réseaux étudiés au chapitre I est bien liée à l'établissement d'un mouvement diffusif des électrons le long des brins, qui assure cette équirépartition des phases.

Un autre thème que nous avons rencontré dans ce chapitre est l'importance des détails microscopiques du modèle. A la limite de faible désordre, seule joue la combinaison concentration d'impuretés $\times$ variance du potentiel. L'exemple de la chaîne de boucles montre qu'il n'est pas équivalent d'augmenter la concentration, ou d'augmenter la hauteur des marches de potentiel, lorsque l'on quitte cette limite de

faible désordre. Le champ magnétique a tendance à amplifier ce rôle des paramètres microscopiques. Toutefois, il peut ne pas être nécessaire de mettre un champ magnétique pour faire apparaître des phénomènes liés à la nature même du désordre. Un exemple est donné par le modèle de Nguyen, Spivak et Shklovski pour lequel la probabilité de saut d'un point à l'autre doit décroître brusquement lorsque x croît au-delà de x_c . Récemment, EFetov⁽⁴⁰⁾ a montré que les préfacteurs des corrections logarithmiques à la conductivité dans un certain modèle bidimensionnel dépendent explicitement de paramètres microscopiques. Il en tire la conclusion qu'une théorie d'échelle à un paramètre ne peut pas décrire le système. Sans avoir la prétention d'entrer dans ce débat important, nous pensons que ces calculs confirment l'idée que des choses intéressantes peuvent se passer lorsque l'on modifie la distribution de probabilité du potentiel aléatoire.

REFERENCES CHAPITRES I ET II

1. P.W. ANDERSON, Phys. Rev. 102, 1008 (1958).
2. R. LANDAUER, Philos. Mag. 21, 863 (1970).
3. E. ABRAHAMS, P.W. ANDERSON, D.C. LICCIARDELLO, T.V. RAMAKRISHNAN, Phys. Rev. Lett. 42, 673 (1979).
4. A.A. ABRIKOSOV, L.P. GORKOV, I.E. DZIALOSHINSKII : Methods of quantum field theory in statistical physics, Dover, 1975.
5. L.P. GORKOV, A.I. LARKIN, D.E. KHMELNITSKII, JETP Lett. 30, 228 (1979).
6. P.A. LEE et T.V. RAMAKRISHNAN, Rev. Mod. Phys. 57, 287 (1985).
7. G. BERGMANN, Phys. Reports 107 (1984).
8. N.F. MOTT et W.D. TWOSE, Adv. Phys. 10, 107 (1961).
R.E. BORLAND, Proc. Roy. Soc. A274, 529 (1963).
9. J.S. LANGER et T. NEAL, Phys. Rev. Lett. 16, 984 (1966).
10. B.L. ALTSHULER, A.G. ARONOV, D.E. KHMELNITSKII, A.I. LARKIN, Coherent effects in disordered conductors, publié dans Quantum Theory of Solids (Ed. Mir, Moscou, 1982, p. 130).
11. R.B. DINGLE, Proc. Phys. Soc. A212, 47 (1952).
12. Y. AHARONOV et D. BOHM, Phys. Rev. 115, 485 (1959).
13. D.Y. SHARVIN et Y.V. SHARVIN, JETP Lett. 34, 272 (1981).
14. M. GIJS, C. Van HAESSENDONCK, V. BRUYNSERAEDE, Phys. Rev. Lett. 52, 5069 (1984) et Phys. Rev. B30, 2964 (1985).
15. B. PANNETIER, J. CHAUSSY, R. RAMMAL, P. GANDIT, Phys. Rev. Lett. 53, 718 (1984) et Phys. Rev. B31, 3209 (1985).
16. G.J. DOLAN, J.C. LICINI, D.J. BISHOP, Phys. Rev. Lett. 56, 1493 (1986).
17. R.A. WEBB, S. WASHBURN, C.P. UMBACH, R.B. LAIBOWITZ, Phys. Rev. Lett. 54, 2696 (1985).
18. V. CHANDRASEKHAR, M.J. ROOKS, S. WIND, D.E. PROBER, Phys. Rev. Lett. 15, 1610 (1985).
19. R. RAMMAL, T.C. LUBENSKY, G. TOULOUSE, Phys. Rev. B27, 2820 (1983).
20. D.R. HOFSTADTER, Phys. Rev. B14, 2239 (1976).
21. B. PANNETIER, J. CHAUSSY, R. RAMMAL et J. VILLEGIER, Phys. Rev. Lett. 53, 1845 (1984).

22. P.W. ANDERSON, D.J. THOULESS, E. ABRAHAMS, D.S. FISHER, Phys. Rev. B22, 3519 (1980).
23. A.D. STONE et Y. IMRY, Phys. Rev. Lett. 56, 189 (1986).
24. B.L. ALTSHULER, A.G. ARONOV, B.Z. SPIVAK, JETP Lett. 33, 94 (1981).
25. M. BÜTTIKER, Y. IMRY, R. LANDAUER, S. PINHAS, Phys. Rev. B31, 6207 (1985).
26. Y. GEFEN, Y. IMRY, M.Y. AZBEL, Phys. Rev. Lett. 52, 129 (1984) et Surf. Science 142, 203 (1984).
27. M. BÜTTIKER, Y. IMRY, M.Y. AZBEL, Phys. Rev. A30, 1982 (1984).
28. Q. LI et C.M. SOUKOULIS, Phys. Rev. B33, 7318 (1986).
29. C.P. UMBACH, C. Van HAESSENDONCK, R.B. LAIBOWITZ, S. WASHBURN, R.A. WEBB, Phys. Rev. Lett. 56, 386 (1986).
30. B. FOURCADE, Phys. Rev. B 33, 6644 (1986).
31. V.L. NGUYEN, B.Z. SPIVAK, B.I. SHKLOVSKI, JETP Lett. 41, 42 (1985).
32. P.L. SULEM, Physica 70, 190 (1973).
33. V.I. MELNIKOV, Sov. Phys. Solid State 23, 444 (1981).
34. M. KAPPUS, F. WEGNER, Z. Phys. B 45, 15 (1981).
35. P.D. KIRKMAN et J.B. PENDRY, J. Phys. C 17, 4327 (1984).
36. A. Mac KINNON, L. SCHWEITZER, B. KRAMER, Surf. Science 142, 189 (1984).
37. O.N. DOROKHOV, Sol. State Comm. 44, 915 (1982) ; Sol. State Comm. 46, 605 (1983) et Sov. Phys. JETP 58, 606 (1983).
38. J.L. PICHARD, Thèse (Orsay, 1984).
39. B. DERRIDA et E. GARDNER, J. Physique (Paris) 45, 1283 (1984).
40. K.B. EFETOV, Sov. Phys. JETP 62, 605 (1985).
41. B.L. ALTSHULER et A.G. ARONOV, JETP Lett. 33, 499 (1981).

C H A P I T R E I I I

CORRELATIONS ENTRE LES COEFFICIENTS DE TRANSMISSION D'UNE
CHAINE LINEAIRE DESORDONNEE A DEUX VALEURS DIFFERENTES DE
L'ENERGIE INCIDENTE

I - INTRODUCTION

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés à des phénomènes dans lesquels l'énergie des particules incidentes est fixée. Dans ce chapitre, nous allons étudier la façon dont les coefficients de transmission d'une chaîne linéaire désordonnée unidimensionnelle pour deux valeurs de l'énergie incidente se décorrèlent lorsque la différence d'énergie augmente. En fait, il est équivalent de travailler avec une longueur de chaîne fixée pour évaluer l'écart en énergie typique ΔE_c nécessaire à la décorrélation, et de fixer E pour déterminer l'échelle de longueur L^* au-delà de laquelle intervient cette décorrélation. Nous avons déjà rencontré cette notion d'énergie de corrélation dans notre présentation du chapitre II, dans le contexte de la conductivité à température finie. En effet, une façon possible d'étendre la formule de Landauer pour une température non nulle⁽¹⁾ est :

$$G = \frac{e^2}{\pi h} \left[\int dE \left(-\frac{df}{dE} \right) T(E) \right] \frac{\int dE \left(-\frac{df}{dE} \right) v^{-1}(E)}{\int dE \left(-\frac{df}{dE} \right) R(E) v^{-1}(E)}$$

où f est la fonction de distribution de Fermi, $T(E)$ et $R(E)$ sont les coefficients de transmission et de réflexion à l'énergie E , et $v(E)$ est la vitesse de groupe de l'onde. Pour un système bidimensionnel, Lee et Stone⁽²⁾ ont proposé l'évaluation suivante : $\Delta E_c \approx \hbar D L^{-2}$ où L est la longueur du système. ΔE_c ainsi défini est inversement proportionnel au temps mis à traverser l'échantillon lors d'une diffusion classique. C'est également, d'après Thouless⁽³⁾, la variation de l'énergie d'un niveau dans une boîte carrée de côté L par changement de conditions aux limites périodiques en conditions antipériodiques. Il nous a paru intéressant de regarder ΔE_c dans le cas unidimensionnel où l'on a des possibilités d'effectuer des calculs directement.

D'autres conséquences physiques ont été envisagées par Pendry et Kirkman^(4,5). La première⁽⁴⁾ porte sur la largeur de bande d'un

système désordonné unidimensionnel. En plus de l'atténuation exponentielle du coefficient de transmission avec la longueur, le désordre conduit à de brusques variations du coefficient de transmission en fonction de l'énergie. Comme Azbel⁽⁶⁾ l'a noté, la transmission présente des résonances très étroites lorsque l'énergie incidente est égale à celle d'un mode localisé dans la chaîne. Cette structure fine de la transmission a pour effet de réduire considérablement la largeur de bande d'un tel système. La deuxième conséquence envisagée⁽⁶⁾ est la génération de bruit lorsque l'on impose aux bornes de la chaîne une tension alternative V telle que $eV \gg kT$.

Nous mentionnerons également le travail de Gorkov, Dorokhov et Prigara⁽⁷⁾ sur les corrélateurs des fonctions d'onde pour deux valeurs de l'énergie. Ils ont calculé le corrélateur

$$F_{\omega}^{(1)}(z) = \langle \sum_{\mu\nu} \delta(E_F - \epsilon_{\mu}) \delta(E_F + \omega - \epsilon_{\nu}) \psi_{\mu}(x) \psi_{\nu}(x) \psi_{\mu}(x') \psi_{\nu}(x') \rangle, \quad z = |x - x'|$$

où ψ_{μ} et ψ_{ν} sont des états propres. Cette fonction fait intervenir une échelle de longueur caractéristique $z_0(\omega) = 2\ell \ln(\frac{8}{\omega\tau})$ où ℓ est la longueur de localisation et τ le temps de collision élastique. La conductivité dynamique $\sigma(\omega)$ est reliée à $F_{\omega}^{(1)}(z)$ par la formule de Kubo :

$$\sigma(\omega) = -2\pi \frac{e^2}{h} \frac{\omega^2}{S} \int_0^{\infty} z^2 F_{\omega}^{(1)}(z) dz$$

où S est la section du fil.

Ceci entraîne pour la conductivité une formule en $\omega^2 \ln^2 \omega$ de type Mott⁽¹¹⁾ :

$$\sigma(\omega) = \frac{8}{\pi} \frac{e^2}{h} \frac{\ell}{S} (\omega\tau)^2 \ln^2(\omega\tau) .$$

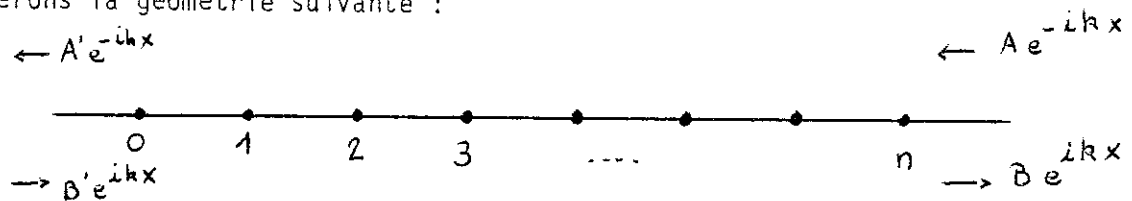
Cette échelle de longueur $z_0(\omega)$ joue donc un rôle important. Dans ce chapitre, nous chercherons à savoir si cette longueur suffit à décrire les corrélateurs de différentes quantités définies à partir des coefficients de transmission. Nous utiliserons deux méthodes différentes : l'une reposant sur l'établissement d'équations de Fokker Planck pour la

loi conjointe des transmissions aux deux valeurs de l'énergie, et l'autre constituant un algorithme de calcul direct des corrélateurs, développé par Pendry et Kirkman.

II - CORRELATEUR $\langle T^{-1}(E)T^{-1}(E') \rangle$

A. Approche de type Fokker-Planck.

Nous avons déjà utilisé ce genre de méthode au chapitre II, à propos des phases intervenant dans la matrice de transmission. Considérons la géométrie suivante :



Le système étant invariant par renversement du temps, la matrice de transmission s'écrit :

$$m = \begin{bmatrix} 1/t^* & -r^*/t^* \\ -r/t & 1/t \end{bmatrix}$$

avec
$$\begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

Comme au chapitre II, nous introduisons la matrice $M = m^+ m$.

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1+R}{T} & -\frac{2r^*}{T} \\ -\frac{2r}{T} & \frac{1+R}{T} \end{bmatrix} \quad (1)$$

La matrice de transmission par une impureté placée au site n s'écrit :

$$m(\epsilon, n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\epsilon}{2i \sin k} \begin{bmatrix} 1 & e^{i2kn} \\ -e^{-i2kn} & -1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

où ϵ désigne le potentiel (aléatoire) de l'impureté.

L'évolution de la matrice M est décrite par la relation :

$$M(n+1) = m^+(\epsilon, n) M(n) m(\epsilon, n) \quad (3)$$

Il est alors avantageux de paramétrer M de la façon suivante :

$$M(n) = \begin{bmatrix} F_n & G_n e^{i\varphi_n} \\ G_n e^{-i\varphi_n} & F_n \end{bmatrix} ; \quad F_n^2 - G_n^2 = 1 \quad (4)$$

En utilisant (2) et (3), on peut déterminer l'évolution des variables F et φ au second ordre dans le potentiel d'impureté ϵ :

$$F_{n+1} = \left(1 + \frac{\epsilon^2}{2\sin^2 k}\right) F_n - \frac{\epsilon}{\sin k} \sin \theta_n G_n - \frac{\epsilon^2}{2\sin^2 k} \cos \theta_n G_n \quad (5)$$

$$\varphi_{n+1} - \varphi_n = \frac{\epsilon}{\sin k} (1 - \cos \theta_n \frac{F_n}{G_n}) + \frac{\epsilon^2}{2\sin^2 k} \sin \theta_n (\frac{F_n}{G_n} - \cos \theta_n (1 + \frac{2}{G_n^2})) \quad (6)$$

Dans les équations (5) et (6), k est le vecteur d'onde, relié à l'énergie E par la relation de dispersion $E = 2 \cos k$. Par ailleurs,

$\theta_n = \varphi_n - 2kn$. Dans la limite de faible désordre, en moyennant sur les termes à oscillation spatiale rapide, on tire de (5) l'équation de Fokker-Planck :

$$\frac{\partial}{\partial x} W(F, x) = \frac{\partial}{\partial F} \left[(F^2 - 1) \frac{\partial W}{\partial F} \right]$$

où $W(F, x)$ est la distribution de probabilité de F en fonction de la longueur réduite $x = L/\ell$, ℓ étant la longueur de localisation.

$$\ell = \frac{4\sin^2 k}{x \langle \epsilon^2 \rangle}$$

où x est la concentration des impuretés et $\langle \epsilon^2 \rangle$ la variance du potentiel d'une impureté.

Pour les grandes valeurs de F, on peut en déduire une équation de Fokker-Planck pour la distribution $\bar{W}(z, x)$ avec $z = \ell n F$:

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial x}(z, x) = - \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{W}$$

équation qui admet pour solution une gaussienne, de paramètres

$$\langle Z \rangle = x \quad \text{et} \quad \langle Z^2 \rangle - \langle Z \rangle^2 = 2x$$

Cas de deux ondes k et k'

Considérons deux ondes ayant des énergies légèrement différentes E et E'. Le principal phénomène est le déphasage relatif entre ces deux ondes accumulé au cours de leur diffusion multiple sur les impuretés. Dans l'équation (6) cela se traduit par une différence entre θ_n et θ'_n qui augmente avec n. Cet effet domine à longue distance, devant l'effet dû à la variation de vitesse de groupe ($\sin k \neq \sin k'$). De manière plus quantitative, le déphasage commence à jouer de manière cruciale pour des longueurs de l'ordre de la longueur "optique" définie par $|\Delta k| \ell_{\text{opt}} = 1$. Par contre, la différence de vitesse de groupe se traduit par une différence entre les longueurs de localisation, différence qui se fait sentir au bout d'une longueur ζ définie par :

$$\zeta^{-1} = |\ell^{-1} - \ell'^{-1}|, \quad \text{soit} \quad \zeta = \ell/2 \cotg k |\Delta k|.$$

Nous nous placerons dans la limite de faible désordre où $\ell \gg 1$, si bien que $\zeta \gg \ell_{\text{opt}}$, et nous négligerons ainsi la différence entre les vitesses de groupe.

Introduisons maintenant la variable $u_n = \varphi_n - \varphi'_n$. De l'équation (6), on tire l'évolution de u, avec l'hypothèse $\sin k \approx \sin k'$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n = & - \frac{\epsilon}{\sin k} \left(\cos \theta_n \left(\frac{F_n}{G_n} \right) - \cos \theta'_n \left(\frac{F'_n}{G'_n} \right) \right) \\ & + \frac{\epsilon^2}{2 \sin^2 k} \left(\sin \theta_n \left(\frac{F_n}{G_n} - \cos \theta_n \left(1 + \frac{2}{G_n^2} \right) \right) - \sin \theta'_n \left(\frac{F'_n}{G'_n} - \cos \theta'_n \left(1 + \frac{2}{G_n'^2} \right) \right) \right) \quad (7) \end{aligned}$$

Lorsque la longueur L de la chaîne augmente, θ_n et θ'_n se brouillent très rapidement (dès la collision avec la première impureté, comme nous

l'avons vu au chapitre II). Par contre $\theta_n - \theta'_n = u_n - 2qn$ diffuse lentement (nous posons $q = k - k'$). L'équation (7) conduit à une équation de Fokker-Planck pour la distribution conjointe de F, F' et u : $W(F, F', u; x)$ après avoir moyenné les fonctions oscillantes des variables rapides $\theta, \theta', \theta + \theta'$. Nous obtenons alors ($x = L/\lambda$ et $\beta = 2q\lambda$) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x}(F, F', u; x) = & \frac{\partial}{\partial F}((F^2 - 1) \frac{\partial W}{\partial F}) + \frac{\partial}{\partial F'}((F'^2 - 1) \frac{\partial W}{\partial F'}) \\ & + \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left[\left(\frac{F^2}{F^2 - 1} + \frac{F'^2}{F'^2 - 1} - 2 \frac{FF'}{\sqrt{(F^2 - 1)(F'^2 - 1)}} \cos(u - \beta x) \right) W \right] \\ & + 2 \frac{\partial^2}{\partial F \partial F'} \left[\sqrt{(F^2 - 1)(F'^2 - 1)} \cos(u - \beta x) W \right] \\ & - 2 \frac{\partial^2}{\partial F \partial u} \left[\sqrt{\frac{F^2 - 1}{F'^2 - 1}} F' \sin(u - \beta x) W \right] \\ & - 2 \frac{\partial^2}{\partial F' \partial u} \left[\sqrt{\frac{F'^2 - 1}{F^2 - 1}} F \sin(u - \beta x) W \right] \end{aligned} \quad (8)$$

$F = \frac{1+R}{T} = \frac{2}{T} - 1$. Les contributions dominantes à la distribution de probabilité de F proviennent des événements où T est petit, à longue distance. Nous nous plaçons donc dans la limite $F \gg 1$ et $F' \gg 1$. L'équation précédente se simplifie pour donner :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} = & \frac{\partial}{\partial F}(F^2 \frac{\partial W}{\partial F}) + \frac{\partial}{\partial F'}(F'^2 \frac{\partial W}{\partial F'}) + 2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} [(1 - \cos(u - \beta x)) W] + \\ & + 2 \frac{\partial^2}{\partial F \partial F'} [FF' \cos(u - \beta x) W] - 2 \frac{\partial^2}{\partial F \partial u} [F \sin(u - \beta x) W] \\ & - 2 \frac{\partial^2}{\partial F' \partial u} [F' \sin(u - \beta x) W] \end{aligned} \quad (9)$$

L'équation (9) permet d'écrire une équation d'évolution pour le corrélateur $\langle FF' \rangle$. Cette équation couple $\langle FF' \rangle$ à $\langle FF' \cos(u - \beta x) \rangle$ et

$\langle FF' \sin(u-\beta x) \rangle$, mais l'évolution de ces trois quantités est décrite par un système linéaire fermé :

$$\frac{d}{dx} \langle FF' \rangle = 4 \langle FF' \rangle + 2 \langle FF' \cos(u-\beta x) \rangle \quad (10.a)$$

$$\frac{d}{dx} \langle FF' \cos(u-\beta x) \rangle = 4 \langle FF' \rangle + 2 \langle FF' \cos(u-\beta x) \rangle + \beta \langle FF' \sin(u-\beta x) \rangle \quad (10.b)$$

$$\frac{d}{dx} \langle FF' \sin(u-\beta x) \rangle = -\beta \langle FF' \cos(u-\beta x) \rangle + 2 \langle FF' \sin(u-\beta x) \rangle \quad (10.c)$$

Le taux de croissance exponentielle de $\langle FF' \rangle$ est donné par la plus grande valeur propre de la matrice :

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & \beta \\ 0 & -\beta & 2 \end{bmatrix}$$

Dans la base des vecteurs propres $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

de la matrice précédente à $\beta = 0$, la matrice s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & \beta/3 \\ 0 & 0 & -\beta/3 \\ -\beta & 2\beta & 2 \end{bmatrix}$$

au second ordre en β , la plus grande valeur propre est égale à $6 - \frac{\beta^2}{12}$.
Donc :

$$\frac{\langle FF' \rangle}{\langle F^2 \rangle} = \text{cte.} \exp \left[- \frac{\beta^2}{12} x \right] = \text{cte} \exp \left[- \frac{(\Delta k)^2}{3} L \right]$$

On définit ainsi une longueur caractéristique $L_{\langle FF' \rangle}^*$ par :

$$L_{\langle FF' \rangle}^* L = 3/(\Delta k)^2 \quad (11)$$

De manière un peu surprenante, cette longueur est très supérieure à la

longueur optique $1/\Delta k$ lorsque $\Delta k \cdot \ell \ll 1$. Ceci montre qu'il est nécessaire de travailler avec les trois corrélateurs, contrairement à une intuition qui voudrait par exemple négliger $\langle FF' \cos(u-\beta x) \rangle$ devant $\langle FF' \rangle$ dans le système (10).

$$\text{D'autre part, } \frac{\zeta}{L \langle FF' \rangle} = \frac{1}{6 \cot g k} \left(\frac{\ell}{a} \right) (|\Delta k| \cdot \ell)$$

(nous avons introduit la longueur a entre deux sites voisins pour mettre en évidence l'homogénéité du rapport). A la limite $|\Delta k| \rightarrow 0$, on ne pourra plus négliger l'effet de la variation de vitesse de groupe.

Nous pouvons essayer de généraliser le calcul pour des corrélateurs du type $\langle F^m F'^n \rangle$.

On trouve alors le système suivant :

$$\frac{d}{dx} \langle F^m F'^n \rangle = m(m+1) \langle F^m F'^n \rangle + n(n+1) \langle F^m F'^n \rangle + 2mn \langle F^m F'^n \cos(u-\beta x) \rangle$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \langle F^m F'^n \cos(u-\beta x) \rangle = & \beta \langle F^m F'^n \sin(u-\beta x) \rangle + (m(m+1) + n(n+1) - 2) \langle F^m F'^n \cos(u-\beta x) \rangle \\ & + 2(mn+1) \langle F^m F'^n \cos^2(u-\beta x) \rangle + 2(m+n) \langle F^m F'^n \sin^2(u-\beta x) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \langle F^m F'^n \sin(u-\beta x) \rangle = & -\beta \langle F^m F'^n \cos(u-\beta x) \rangle + (m(m+1) + n(n+1) - 2) \langle F^m F'^n \sin(u-\beta x) \rangle \\ & + 2(mn - m - n + 1) \langle F^m F'^n \sin(u-\beta x) \cos(u-\beta x) \rangle \end{aligned}$$

Le système précédent se ferme à condition que $(m-1)(n-1) = 0$. Sinon, on engendre une chaîne dénombrable d'équations d'évolution couplées. Prenons par exemple m quelconque et $n=1$.

Nous avons à calculer la plus grande valeur propre de la matrice :

$$\begin{bmatrix} m(m+1)+2 & 2m & 0 \\ 2(m+1) & m(m+1) & \beta \\ 0 & -\beta & m(m+1) \end{bmatrix}$$

Au second ordre en β , elle est donnée par :

$$\lambda = (m+1)(m+2) - \beta^2 \frac{m}{(2m+1)(m+1)}$$

Soit

$$\frac{\langle F^m F' \rangle}{\langle F^{m+1} \rangle} = \text{cte} \cdot \exp\left(-\frac{L}{L^*}\right)$$

$$\text{où } \frac{L^*}{\langle F^m F' \rangle} = \frac{(m+1/2)(m+1)}{m} \left(\frac{1}{\Delta k}\right)^2 \quad (12)$$

B. Utilisation de matrices de transfert.

Il nous a paru intéressant de vérifier par une méthode différente le résultat précédent pour $L^*_{\langle FF' \rangle}$. Pendry et Kirkman^(4,5) ont montré comment calculer des corrélateurs de manière systématique, pour toute distribution de probabilité du désordre. Dans ce paragraphe, nous allons suivre leur méthode pour le calcul de

$$\left\langle \frac{1}{|t|^2} \frac{1}{|t'|^2} \right\rangle.$$

Pour cela, nous effectuons tout d'abord un changement de base sur les canaux à droite de la chaîne désordonnée :

$$A e^{-ikx} \rightarrow A e^{-ik(x-n)}$$

$B e^{ikx} \rightarrow B e^{ik(x-n)}$ si n désigne la longueur du segment désordonné. Avec ce choix, la matrice de transmission par une impureté devient invariante (en loi de probabilité) par translation.

$$m \rightarrow m = \begin{bmatrix} (1-i\delta') e^{ik} & -i\delta' e^{ik} \\ i\delta' e^{-ik} & (1+i\delta') e^{-ik} \end{bmatrix} \quad \text{où } \delta' = \frac{\epsilon}{2\sin k}$$

on en tire $\frac{1}{t^*} = (1,0) \prod_{j=1}^n m_j \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ où m_j est la matrice de transmission

associée au site j .

On a en fait :

$$\frac{1}{|t|^2} \frac{1}{|t'|^2} = (1,0) \otimes (0,1) \otimes (1,0) \otimes (0,1) \prod_{j=1}^n [m_j \otimes m_j \otimes m'_j \otimes m'_j] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

m'_j est la matrice de transmission associée au site j , pour l'énergie E' .
On a un produit de matrices aléatoires indépendantes, ce qui permet de prendre la valeur moyenne :

$$\langle \frac{1}{|t|^2} \frac{1}{|t'|^2} \rangle = (1,0) \otimes (0,1) \otimes (1,0) \otimes (0,1) \langle m \otimes m \otimes m' \otimes m' \rangle^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On se ramène à la diagonalisation de $\langle m \otimes m \otimes m' \otimes m' \rangle$

Cette matrice est de taille 16×16 . Posons $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
En l'absence de désordre, cette matrice est diagonale et admet les valeurs propres suivantes (avec leur dégénérescence entre parenthèses).

$$e^{i2(k+k')}(1) ; e^{i2k}(2) ; e^{i2k'}(2) ; e^{i2(k-k')}(1) ; e^{-i2(k-k')}(1) ; 1(4) ;$$

$$e^{-i2k}(2) ; e^{-i2k'}(2) ; e^{-i2(k+k')}(1).$$

Pour traiter de l'effet simultané du désordre et de Δk , on se restreint au sous-espace propre dégénéré, associé à la valeur propre 1, en désordre nul et pour $\Delta k = 0$ (puisque l'on recherche la valeur propre dont la partie réelle est la plus grande). Ce sous-espace est constitué des 6 vecteurs de base :

$$e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 ; e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 \otimes e_2 ; e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 ; e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 \otimes e_1 ;$$

$$e_2 \otimes e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 ; e_2 \otimes e_2 \otimes e_1 \otimes e_1$$

Dans ce sous-espace, l'opérateur $\langle m \otimes m \otimes m' \otimes m' \rangle$ s'écrit, dans la limite de faible désordre, où l'on ne garde que la variance du potentiel aléatoire (nous posons $\delta'^2 = \langle \delta'^2 \rangle$ pour simplifier l'écriture) :

$$m \otimes m \otimes m' \otimes m' = \begin{bmatrix} (1+2\delta'^2)e^{i2q} & \delta'^2 e^{i2q} & \delta'^2 e^{i2q} & \delta'^2 e^{i2q} & \delta'^2 e^{i2q} & 0 \\ \delta'^2 & (1+2\delta'^2) & \delta'^2 & \delta'^2 & 0 & \delta'^2 \\ \delta'^2 & \delta'^2 & (1+2\delta'^2) & 0 & \delta'^2 & \delta'^2 \\ \delta'^2 & \delta'^2 & 0 & (1+2\delta'^2) & \delta'^2 & \delta'^2 \\ \delta'^2 & 0 & \delta'^2 & \delta'^2 & (1+2\delta'^2) & \delta'^2 \\ 0 & \delta'^2 e^{-i2q} & \delta'^2 e^{-i2q} & \delta'^2 e^{-i2q} & \delta'^2 e^{-i2q} & (1+2\delta'^2) e^{-i2q} \end{bmatrix}$$

Nous avons posé $q = \Delta k = k - k'$.

La matrice centrale se diagonalise bien, elle est égale à

$$P \Delta P^{-1} \text{ avec } \Delta = \begin{bmatrix} 1 + 4\delta'^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+2\delta'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+2\delta'^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Compte tenu de cela, la matrice $\langle m \otimes m \otimes m' \otimes m' \rangle$ est équivalente à

$$\begin{bmatrix} (1+2\delta'^2)e^{i2q} & 0 & 4\delta'^2 e^{i2q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1+2\delta'^2)e^{-i2q} & 4\delta'^2 e^{-i2q} & 0 & 0 & 0 \\ \delta'^2 & \delta'^2 & 1+4\delta'^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+2\delta'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+2\delta'^2 \end{bmatrix}$$

Par un changement d'échelle, on se ramène à la diagonalisation de

$$A = \begin{bmatrix} (1+2\delta'^2)e^{i2q} & 0 & 2\delta'^2 e^{i2q} \\ 0 & (1+2\delta'^2)e^{-i2q} & 2\delta'^2 e^{-i2q} \\ 2\delta'^2 & 2\delta'^2 & 1+4\delta'^2 \end{bmatrix}$$

lorsque $q = 0$. A admet les valeurs propres $1+2\delta'^2$, 1 , $1+6\delta'^2$ avec pour vecteurs propres associés, respectivement $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Un calcul de perturbations habituel donne alors pour la plus grande valeur propre

$$\lambda = 1 + 6\delta'^2 - \frac{(\Delta k)^2}{3\delta'^2}$$

Or, avec ces notations, $\delta'^2 = \lambda^{-1}$.

Cela donne

$$L^x \left\langle \frac{1}{|t|^2} \cdot \frac{1}{|t'|^2} \right\rangle = \frac{3}{2(\Delta k)^2}$$

ce qui est le résultat trouvé par l'équation de Fokker-Planck.

III - CORRELATEUR $\langle \ln T^{-1}(E) \cdot \ln T^{-1}(E') \rangle$

Il est équivalent de calculer le corrélateur $\langle \ln F \cdot \ln F' \rangle$ où F et F' ont été définis au paragraphe précédent.

Nous partons de l'équation de Fokker Planck (9), valable dans le domaine des faibles valeurs des coefficients de transmission, pour obtenir :

$$\frac{d}{dx} \langle \ln F \cdot \ln F' \rangle = \langle \ln F \rangle + \langle \ln F' \rangle + 2 \langle \cos(u - \beta x) \rangle$$

soit

$$\frac{d}{dx} [\langle \ln F \cdot \ln F' \rangle - \langle \ln F \rangle \langle \ln F' \rangle] = 2 \langle \cos(u - \beta x) \rangle \quad (13)$$

Il est donc nécessaire d'étudier la distribution de probabilité de la phase u . Toujours en utilisant (9), il vient, en intégrant sur toutes les valeurs de F et F' :

$$\frac{\partial}{\partial x} W(u, x) = 2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} [(1 - \cos(u - \beta x)) W] \quad (14)$$

Posons $u - \beta x = 2\theta$ (ce n'est pas la variable θ utilisée au paragraphe précédent). L'équation (14) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{W}(\theta, x) = \frac{\beta}{2} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \theta}(\theta) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\sin^2 \theta \bar{W}(\theta)) \quad (15)$$

A grande distance, on peut décrire la distribution de θ par des solutions stationnaires de (15), c'est-à-dire vérifiant :

$$\frac{\beta}{2} \frac{d\bar{W}(\theta)}{d\theta} + \frac{d^2}{d\theta^2} (\sin^2 \theta \bar{W}(\theta)) = 0 \quad (16)$$

Cette équation différentielle apparaît notamment dans un article de

Bérezinskii et Gorkov (Ref. 8, Equation (39)) consacré au calcul de corrélateurs d'expressions contenant les fonctions d'ondes exactes pour différentes valeurs de l'énergie.

La distribution stationnaire est donnée par :

$$\bar{W}(\theta) = \frac{\beta}{2\pi} \frac{1}{\sin^2 \theta} \exp\left(\frac{\beta}{2} \cotg \theta\right) \int_0^\theta \exp\left(-\frac{\beta}{2} \cotg \theta'\right) d\theta' \quad (17)$$

Nous cherchons par ailleurs à évaluer $\langle \cos(u-\beta x) \rangle = 1 - 2 \langle \sin^2 \theta \rangle$. Après quelques transformations, en utilisant la solution (17), nous obtenons :

$$\langle \sin^2 \theta \rangle = \frac{\beta}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-\beta u}}{1+u^2} du \quad (18)$$

Ce résultat donne $\langle \sin^2 \theta \rangle \rightarrow \frac{1}{2}$ lorsque $\beta \rightarrow \infty$, ce qui est satisfaisant, dans la mesure où $\beta = \infty$ donne une distribution stationnaire uniforme. Cela correspond à $\Delta k = \infty$, où l'on attend effectivement une décorrélation complète des phases des deux coefficients de réflexion, et donc une répartition uniforme pour θ .

Nous nous intéressons principalement à la limite $\beta \rightarrow 0$ (faible différence d'énergie) et la formule (18) donne : $\langle \sin^2 \theta \rangle = \beta \frac{\pi}{4}$. On en tire : $\langle \cos(u-\beta x) \rangle = 1 - \frac{\pi}{2} \beta = 1 - \pi (\Delta k \cdot l)$, et par conséquent, en utilisant (14) :

$$\langle \ln F \cdot \ln F' \rangle - \langle \ln F \rangle \langle \ln F' \rangle = 2(1 - \pi(\Delta k \cdot l))x + \text{cte} \quad (19)$$

$$(x = L/l \text{ et } x \gg 1)$$

On obtient ainsi la valeur asymptotique du coefficient de corrélation des logarithmes :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\langle \ln F \cdot \ln F' \rangle - \langle \ln F \rangle \langle \ln F' \rangle}{\langle (\ln F)^2 \rangle - \langle \ln F \rangle^2} = 1 - \pi(\Delta k \cdot l) \quad (20)$$

Décrivons maintenant le régime à courte distance :

$$\overline{W}(\theta, x = 0) = \delta(\theta)$$

Lorsque θ reste petit, l'équation (15) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \overline{W} = \frac{\beta}{2} \frac{\partial \overline{W}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\theta^2 \overline{W})$$

soit $\frac{d}{dx} \langle \theta \rangle = - \frac{\beta}{2}$

$$\frac{d}{dx} \langle \theta^2 \rangle = - \beta \langle \theta \rangle + 2 \langle \theta^2 \rangle$$

Par conséquent :

$$\langle \theta \rangle = - \frac{\beta}{2} x$$

et $\langle \theta^2 \rangle = \frac{\beta^2}{8} (e^{2x} - 2x - 1)$

En développant le cosinus à l'ordre θ^2 dans l'équation (13), on trouve :

$$\frac{d}{dx} [\langle \ln F \cdot \ln F' \rangle - \langle \ln F \rangle \langle \ln F' \rangle] = 2 \left(1 - \frac{\beta^2}{4} (e^{2x} - 2x - 1) \right)$$

d'où

$$\langle \ln F \cdot \ln F' \rangle - \langle \ln F \rangle \langle \ln F' \rangle = 2 \left(x - \frac{\beta^2}{8} (e^{2x} - 2x^2 - 2x - 1) \right) \quad (21)$$

Ce régime a un sens tant que $\beta^2 e^{2x}$ reste petit devant 1. Il fait apparaître la longueur caractéristique x^* donnée par :

$$x^* = \frac{\beta^2}{8} e^{2x^*}$$

On obtient donc une longueur associée à ce corrélateur :

$$L^* = \frac{1}{\langle \ln F \cdot \ln F' \rangle} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{\Delta k \cdot \ell} \right) \quad (22)$$

Cette longueur est semblable à celle qui intervient pour le corrélateur

des fonctions d'onde. Ceci est naturel, dans la mesure où, par le biais de l'équation (13), l'évolution du corrélateur des logarithmes est directement liée à la diffusion relative des phases. Cette longueur revêt donc une signification physique intéressante : elle est caractéristique du régime transitoire pour l'évolution de la distribution de probabilité de $u = \varphi - \varphi'$.

Nous avons caractérisé le comportement à courte distance et le comportement asymptotique. Le problème de savoir raccorder ces deux régions extrêmes reste ouvert, notamment la question de l'approche de la distribution stationnaire de θ (oscillations ou convergence monotone).

IV - CORRELATEURS $\langle t(E)t'^*(E) \rangle$ ET $\langle |t(E)|^2 |t'(E)|^2 \rangle$

L'approche du type Fokker-Planck nous paraît mal adaptée pour aborder ce calcul. Tout d'abord parce qu'il n'est plus légitime de se placer dans l'approximation de faible transmission, dans la mesure où la contribution des pics résonants est essentielle pour les moments positifs du coefficient de transmission. Cela se voit bien sur la formule⁽⁹⁾

$$\langle |t|^{2n} \rangle = \frac{\pi^{3/2} \Gamma^2(n-1/2)}{2\Gamma^2(n)} \frac{e^{-x/4}}{x^{3/2}} \quad \text{où } x = L/\ell$$

Le fait que la forme fonctionnelle ne dépende pas de n , autrement que par un préfacteur est la signature de ces résonances. L'autre problème, conséquence du précédent est que l'on ne peut plus écrire d'équation différentielle fermée pour l'évolution d'un nombre fini de corrélateurs. Le calcul des moments positifs $\langle |t|^{2n} \rangle$, $n \geq 1/2$ est rendu difficile à cause de cela⁽⁹⁾. Le calcul des corrélateurs $\langle t(E)t'^*(E) \rangle$ et $\langle |t(E)|^2 |t'(E)|^2 \rangle$ a fait l'objet de deux articles de Pendry et Kirkman^(4,5) en utilisant des matrices de transfert. Un point technique au sujet de leur méthode sera discuté dans un appendice à la fin de ce chapitre. Pour l'instant, il nous sera utile de reprendre leurs résultats:

$$\langle t(E)t'^*(E') \rangle = \frac{2}{\pi x^{3/2}} S(\alpha) e^{-x/4}$$

où $\alpha = \pi x^{1/2} \ln^{-1}(\pi/\Delta k \cdot \ell)$

et $S(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^3 n^2 e^{-n^2 \alpha^2}$

et $\langle |t(E)|^2 |t(E')|^2 \rangle = \frac{\pi^2}{2x^{3/2}} S(\beta) e^{-x/4}$

avec $\beta = \pi x^{1/2} \ln^{-1}(2^{3/2}/\Delta k \cdot \ell^{1/2})$ et S est défini de la même façon.

Nous ne comprenons pas ce changement d'argument dans la fonction S , et dans l'appendice, nous expliquerons pourquoi nous pensons que les arguments doivent être identiques. Si ce rectificatif est correct, dans les deux cas, la longueur caractéristique est de la forme $\ell \ln^2(\frac{1}{\Delta k \cdot \ell})$, donc différente de la longueur $\ell \ln(\frac{1}{\Delta k \cdot \ell})$ trouvée pour la diffusion relative des phases. Nous interprétons le $\ln^2$ en liaison avec l'expression de la conductivité dynamique rappelée au début de ce chapitre. En effet, Economou et Soukoulis⁽¹⁰⁾ ont montré l'égalité entre la conductance statique d'un système unidimensionnel calculée par la formule de Kubo, et la conductance donnée par la formule de Landauer (en négligeant les résistances d'interface) $G = \frac{e^2}{\pi h} |t|^2$. Leur approche permet de penser que la formule de Kubo pour la conductivité dynamique peut s'interpréter en termes de corrélateurs faisant intervenir les différentes combinaisons possibles des coefficients de réflexion et de transmission, pris à deux valeurs différentes de l'énergie. Ceci rend naturel le passage de $\ln(\frac{1}{\Delta k \cdot \ell})$ à $\ln^2(\frac{1}{\Delta k \cdot \ell})$. Rappelons que dans la conductivité le $\ln^2(\omega\tau)$ intervient à cause du carré du module de l'élément de matrice de l'opérateur dipolaire : $|\int dx \psi_\mu(x) \psi_\nu(x) x|^2$.

IV - CONCLUSION

Ce chapitre nous a montré que les corrélateurs de différentes quantités liées au coefficient de transmission, prises à deux valeurs voisines de l'énergie incidentes, sont régis par des longueurs caractéristiques qui dépendent assez nettement de la quantité considérée. En résumé :

- pour les puissances négatives de t :

$$L_{-}^{\sim} \sim \frac{1}{\Delta k} \left(\frac{1}{\Delta k \cdot \ell} \right)$$

- pour le logarithme ou la différence de phase des coefficients de réflexion :

$$L_0^{\times} \sim \ell \ln \left(\frac{1}{\Delta k \cdot \ell} \right)$$

- pour les puissances positives de t :

$$L_{+}^{\times} \sim \ell \ln^2 \left(\frac{1}{\Delta k \cdot \ell} \right)$$

Ceci montre une fois de plus le caractère très pathologique des distributions de probabilité dans les systèmes unidimensionnels : distribution très large pour les grandes valeurs de $1/T$, avec des possibilités de résonance où T est voisin de l'unité. Parmi ces trois types de longueurs ainsi rencontrées, nous voudrions insister sur le statut un peu spécial de $L_0^{\times}$, qui exprime directement la décorrélation entre les phases des coefficients de réflexion. Cette longueur apparaît naturellement dans des arguments comme ceux donnés par Mott⁽¹¹⁾ pour le régime de conductivité par sauts entre états localisés. Deux états localisés séparés par une distance z ont entre eux un recouvrement de l'ordre de $e^{-z/\ell}$. La séparation en énergie de ces niveaux est de l'ordre de ce recouvrement : $\Delta E \sim e^{-z/\ell}$. Donc la distance typique entre

états localisés différant en énergie de ΔE est donnée par $z^* \sim \ln(\frac{1}{\Delta E})$. A des échelles de longueur inférieures, la résonance éventuelle des deux ondes incidentes se fait donc sur le même mode localisé et la corrélation reste importante. Pour des longueurs supérieures, les deux ondes peuvent résonner sur deux états localisés différents, ce qui provoque la diminution rapide des corrélations.

Pour terminer, notons l'aspect non perturbatif de L_0^* en fonction de Δk qui est le petit paramètre. Dans l'appendice, nous précisons que ce caractère provient d'une équation différentielle très singulière. D'un point de vue plus "physique", on peut s'attendre à un comportement analytique en Δk dans la limite où la propagation reste bien décrite par l'optique géométrique : $\Delta k.L$ étant la différence de chemin optique entre les deux ondes. Cependant, la localisation résulte d'une interférence constructive entre un grand nombre de chemins fermés, si bien que lorsque L dépasse la longueur de localisation, l'expression $\Delta k.L$ sous-estime nettement les déphasages entre les ondes subissant des diffusions multiples sur les impuretés pour deux valeurs différentes de l'énergie.

A P P E N D I C E

Sur le calcul de $\langle t(E)t^*(E') \rangle$ et $\langle |t(E)|^2 |t(E')|^2 \rangle$ par Pendry et Kirkman^(4,5)

A. $\langle t(E)t^*(E') \rangle$ (Réf. 4).

Nous avons abordé un premier aspect de la méthode lors de l'évaluation du corrélateur $\langle \frac{1}{T(E)} \frac{1}{T(E')} \rangle$. Kirkman et Pendry ont montré^(12,13) comment faire le calcul $\langle 1/t^N(E) \rangle$ pour N entier positif quelconque, en tirant partie du fait que l'on fait agir $\langle \otimes m \rangle$ sur un sous-espace complètement symétrique de $\otimes^N \mathbb{R}^2$ (m est la matrice de transfert, aléatoire, associée à un site quelconque). Cette symétrie permet de travailler dans un espace de dimension N+1 au lieu de 2^N . Ils ont ensuite prolongé analytiquement l'expression obtenue pour des valeurs négatives de N. Ce prolongement introduit alors des matrices de taille infinie. Dans la limite de faible désordre, le calcul de $\langle t(E)t^*(E') \rangle$ se ramène à l'évaluation de la plus grande valeur propre de la matrice W définie par :

$$W_{\ell\ell} = [1 - \delta'^2(1+2\ell(\ell+1))] e^{-i(2\ell+1)\Delta k}$$

$$W_{\ell\ell+1} = (\ell+1)^2 \delta'^2 e^{-i(2\ell+1)\Delta k}$$

$$W_{\ell\ell-1} = \ell^2 \delta'^2 e^{-i(2\ell+1)\Delta k}$$

et $\ell = 0, 1, 2, \dots$

$$\delta'^2 = \frac{x \langle \varepsilon^2 \rangle}{4 \sin^2 k} = \ell^{-1} \text{ où } x \text{ est la concentration des}$$

impuretés et $\langle \varepsilon^2 \rangle$ la variance du potentiel d'une impureté.

En fait, pour un système désordonné de longueur N, on a :

$$\langle t(E) t^*(E') \rangle = (W^N)_{00}$$

Il faut donc utiliser une base de vecteurs propres de W. Or l'équation aux valeurs propres

$$\sum_{\ell'=0}^{\infty} W_{\ell\ell'} A_{\ell'} = \mu A_{\ell}$$

peut se transformer en une équation différentielle ordinaire si on utilise la fonction génératrice :

$$A(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} x^{\ell}$$

$$x(x-1)^2 \frac{d^2 A}{dx^2} + (3x-1)(x-1) \frac{dA}{dx} + (x-1+\delta'^{-2})A = \delta'^{-2} e^{i\Delta k} \mu A (x e^{i2\Delta k}) \quad (1)$$

Cette équation est singulière en $x = 1$. Par conséquent, la perturbation Δk a tendance à lever cette singularité et on comprend que le résultat soit non analytique en Δk .

Dans la limite $\delta'^{-2} \rightarrow 0$ (pas de désordre), l'équation (1) devient :

$$A(x) = e^{i\Delta k} \mu A (x e^{i2\Delta k})$$

Les états propres sont des monômes $A(x) = x^n$, avec $\mu = e^{-i(2n+1)\Delta k}$. Dans l'autre limite $\Delta k = 0$ et $\delta'^{-2} \neq 0$.

$$\text{Posons } s = \delta'^{-2}(1 - \mu)$$

L'équation se réécrit :

$$x(1-x)^2 \frac{d^2 A}{dx^2} + (1-x)(1-3x) \frac{dA}{dx} + [s-(1-x)] A = 0 \quad (2)$$

l'équation est auto-adjointe : $\frac{d}{dx} [x(1-x)^2] = (1-x)(1-3x)$.

On en déduit que les solutions seront orthogonales sur l'intervalle $[0,1]$. On peut ramener l'équation (2) à la forme hypergéométrique en posant

$$A(x) = (1-x)^g B(x) \quad \text{avec} \quad g = -\frac{1}{2} + i\lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$s = \frac{1}{4} + \lambda^2$$

On trouve alors $A(x) = (1-x)^{-1/2 + i\lambda} F(\frac{1}{2} + i\lambda, \frac{1}{2} + i\lambda, 1, x)$
 et

$$\mu = 1 - \delta'^2 \left(\frac{1}{4} + \lambda^2 \right) \quad (3)$$

Le bord du spectre $\lambda = 0$ engendre la loi de décroissance exponentielle en $e^{-L/4\lambda}$ des moments positifs du coefficient de transmission.

Pour étudier l'équation (1), il est utile de faire les changements de variable :

$$y = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \quad \text{et} \quad A(y) = e^{y/2} \varphi(y)$$

$$\text{On définit} \quad \tilde{y} = \ln\left(\frac{1}{1-xe^{i2\Delta k}}\right)$$

L'équation (1) devient, au voisinage de la singularité $x = 1$:

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \left(\frac{1}{\delta'^2} - \frac{1}{4}\right)\varphi(y) = \frac{\mu}{\delta'^2} e^{i\Delta k} e^{(\tilde{y}-y)/2} \varphi(\tilde{y}) \quad (4)$$

$$\text{Posons} \quad \mu e^{i\Delta k} = 1 - \left(\frac{1}{4} + \lambda^2\right)\delta'^2$$

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \lambda^2\varphi(y) = \left(\frac{1}{\delta'^2} - \frac{1}{4} - \lambda^2\right)(e^{(\tilde{y}-y)/2} \varphi(\tilde{y}) - \varphi(y)) \quad (5)$$

Lorsque $\Delta k = 0$, $y = \tilde{y}$ et le second membre de (5) est nul. Partant de la solution $\varphi(y) = e^{i\lambda y}$, et en substituant cette valeur de φ dans le second membre de (5), nous avons comme première correction

$$\varphi(y) = e^{i\lambda y} + i \frac{\Delta k}{\delta'^2} e^{i\lambda y} \left(e^y - \frac{1}{2} y^2 - y - 1 + O(\lambda)\right) \quad (6)$$

(on se place au voisinage du bord du spectre $\lambda \rightarrow 0$).

Cette formule suggère un changement de régime pour $y = \ln(\frac{\delta'^2}{\Delta k})$. Posons maintenant $\varphi(y) = e^{i\lambda y} \psi(y)$. L'équation (6) suggère que à λ petit, ψ dépendra peu de λ et que la bonne variable d'échelle sera $z = \frac{\Delta k}{\delta'^2} e^y$.

A la limite $\lambda \rightarrow 0$, l'équation (5) donne :

$$z^2 \frac{d^2 \psi}{dz^2} + z \frac{d\psi}{dz} = \frac{1}{\delta'^2} [(1 + i\delta'^2 z) \psi(z + i2\delta'^2 z^2) - \psi(z)] \quad (7)$$

Faisons provisoirement l'hypothèse que l'on peut développer :

$$\psi(z + i2\delta'^2 z^2) \approx \psi(z) + i2\delta'^2 z^2 \frac{d\psi}{dz}$$

Nous obtenons

$$z^2 \frac{d^2 \psi}{dz^2} + z \frac{d\psi}{dz} = iz \psi(z) + 2iz^2 \frac{d\psi}{dz} \quad (8)$$

Dans cette équation, z est la seule variable d'échelle, comme on l'aurait souhaité.

L'équation (8) admet pour solution : $\psi(z) = e^{iz} J_0(z)$, où J_0 est la fonction de Bessel solution de : $f'' + \frac{1}{x} f' + f = 0$. On en tire :

$$\varphi(y) = e^{i\lambda y} \exp\left[i \frac{\Delta k}{\delta'^2} e^y\right] J_0\left(\frac{\Delta k}{\delta'^2} e^y\right) \quad (9)$$

L'onde se met donc à osciller très violemment, lorsque y devient comparable à $\ln(\delta'^2/\Delta k)$.

Pour z grand, $J_0(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos(z - \pi/4)$. Soit

$$\psi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} [e^{-i\pi/4} e^{2iz} + e^{i\pi/4}] \quad (10)$$

Ce comportement de la fonction d'onde est typique de celui que l'on trouve, dans la méthode W.K.B., lorsque le potentiel diminue brusquement. L'accélération des particules (oscillation rapide) est compensée par le

terme en $z^{-1/2}$ pour assurer la conservation du courant.

La formule asymptotique (10) nous permet d'établir la limite de validité du développement au premier ordre dans le second membre de (7). Il s'agit de comparer $\psi(z(1+i2\delta'^2 z))$ et $\psi(z)+i2\delta'^2 z^2 \frac{d\psi}{dz}$

$$e^{2i(z+i2\delta'^2 z^2)} = e^{2iz} e^{-4\delta'^2 z^2}$$

$$\text{et } e^{2iz} + 2i e^{2iz} (i2\delta'^2 z^2) = e^{2iz} (1 - 4\delta'^2 z^2)$$

Le développement est donc valable jusqu'à ce que $z\delta'$ soit de l'ordre de 1, ce qui donne une nouvelle échelle $y = \ln(\frac{\delta'}{\Delta k})$ (11).

Etudions maintenant la limite $y \rightarrow \infty$. D'après l'équation (4), on a dans cette limite :

$$\frac{d^2 \varphi}{dy^2} + (\frac{1}{\delta'^2} - \frac{1}{4})\varphi(y) = \text{cte.} e^{-\frac{1}{2}y} \quad (12)$$

dans la mesure où $\tilde{y}$ tend vers sa valeur limite $\ln(\frac{1}{1-e^{i2\Delta k}})$. Posons $\lambda_0 = (\frac{1}{\delta'^2} - \frac{1}{4})^{1/2}$. C'est la valeur de λ correspondant au mode $\mu = 0$. Ce mode attire toutes les solutions au voisinage de la singularité $x = 1$ ($y \rightarrow \infty$). Cela résulte du fait que la perturbation Δk est renforcée par la singularité.

L'équation (12) admet des solutions du type :

$$\varphi = A e^{-1/2y} + B e^{i\lambda_0 y} + C e^{-i\lambda_0 y} \quad (13)$$

Ce régime démarre lorsque $\tilde{y}$ s'immobilise, soit $e^y \sim \frac{1}{2\Delta k}$. La solution (13) peut être raccordée de manière approchée à la solution (9) qui asymptotiquement donne :

$$\varphi(y) = e^{i\lambda y} \frac{1}{(2\pi\Delta k/\delta'^2)^{1/2}} e^{-y/2} [e^{-i\pi/4} e^{(i2\Delta k \cdot \delta'^2 e^y)} + e^{i\pi/4}] \quad (14)$$

Le point de cross-over entre les solutions (13) et (14) est alors déterminé par l'égalité des vecteurs d'onde locaux (dans l'esprit de l'approximation W.K.B.), soit :

$$\frac{d}{dy} \left(2 \frac{\Delta k}{\delta'^2} e^y \right) = \lambda_0 \approx \frac{1}{\delta'}$$

Ce point de raccordement est donné par : $e^y = \frac{\delta'}{2\Delta k}$ (15),
et l'équation (11) montre que c'est précisément la région où la solution (14) cesse de bien décrire la fonction propre.

La connaissance de ce point de cross-over permet de déterminer:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\delta'^2}{\Delta k}} e^{i\pi/4}$$

$$B = \sqrt{\frac{\delta'}{\pi}} e^{-i\pi/4} \delta'^{-1} \ln(\delta'/2\Delta k)$$

$$C = 0$$

En résumé, nous avons une forme approchée des fonctions propres, au voisinage $\lambda \approx 0$ du bord du spectre, à l'approche de la singularité $x = 1$ ($y \rightarrow \infty$). Cette forme fait intervenir deux échelles de "longueur" :

$$y_0 = \ln\left(\frac{\delta'^2}{\Delta k}\right) \quad \text{et} \quad y_1 = \ln\left(\frac{\delta'}{\Delta k}\right)$$

Lorsque $y > y_0$, la "particule" décrite par l'équation de type Schrödinger (5) voit une marche de potentiel négative et accélère brusquement. y_1 décrit la fin de ce régime et le cross-over vers une région où le "potentiel" est constant, correspondant au vecteur d'onde λ_0 .

L'attraction vers le vecteur $\mu = 0$ correspondant à λ_0 doit être reliée au fait qu'en présence de Δk , l'équation (1) n'est plus autoadjointe. Un branchement adiabatique de Δk sur les modes propres (3) engendre une famille de fonctions propres qui n'est plus une famille complète dans l'espace des états. En particulier, le branchement du désordre δ'^2 sur les modes polynomiaux du cas $\Delta k \neq 0$, $\delta'^2 = 0$ engendre des états qui demeurent finis en $x = 1$ et doivent contribuer au développement du vecteur $A_n^{(0)} = \delta_{n0}$, c'est-à-dire de la fonction génératrice égale à la constante 1.

Pour cette raison, le calcul exact de $(W^N)_{00}$ nous semble très difficile à partir de cette méthode. La sommation sur des modes discrets introduite par Pendry et Kirkman⁽⁴⁾ par l'intermédiaire de leur fonction

$$S(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta^3 n^2 e^{-n^2 \beta^2}$$

nous semble fournir une précision un peu illusoire. Par contre la dépendance fonctionnelle qu'ils obtiennent est correcte. On l'obtient simplement en disant qu'il faut introduire une coupure dans le spectre pour les états correspondant à $\lambda y_0 \lesssim 1$. En effet, ces états deviennent complètement méconnaissables à la suite de la perturbation Δk .

Cet argument conduit à :

$$\frac{\langle t(E)t^*(E') \rangle}{t(E)t^*(E)} \approx \frac{\int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda^2 e^{-(\frac{1}{4} + \lambda^2)x} d\lambda}{\int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-(\frac{1}{4} + \lambda^2)x} d\lambda} \quad \lambda_0 y_0 = 1, \quad x = L/\ell$$

Ceci donne, dans la limite $x \rightarrow \infty$:

$$\frac{\langle t(E)t^*(E') \rangle}{\langle t(E)t^*(E) \rangle} \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{L}{L_+^*} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{L}{L_+^*}\right) \quad (16)$$

avec $L_+^* = \ell \ln^2\left(\frac{1}{\Delta k \cdot \ell}\right)$

Cette forme fonctionnelle est identique à celle que trouvent Pendry et Kirkman, mais nous ne sommes pas en mesure de fixer les préfacteurs ou de décrire le régime des courtes longueurs.

B. Corrélateur $\langle |t(E)|^2 |t(E')|^2 \rangle$ (Réf. 5).

Donnons maintenant un argument indiquant que la longueur caractéristique de décorrélation de $|t(E)|^2 |t(E')|^2$ est également L_+^* .

Dans la Réf. 5, Pendry et Kirkman établissent la formule :

$$\langle |t(E)|^2 |t(E')|^2 \rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty g(\lambda) g(\lambda') \langle Z(-\frac{1}{2} - i\lambda, E) Z(-\frac{1}{2} - i\lambda', E') \rangle d\lambda d\lambda' \quad (17)$$

où la quantité intéressante s'exprime par :

$$\langle Z(-\frac{1}{2} - i\lambda, E) Z(-\frac{1}{2} - i\lambda', E') \rangle = \langle W^{\lambda\lambda'} \rangle_{00} \quad (18)$$

où L est la longueur du système et $\langle W^{\lambda\lambda'} \rangle$ est l'opérateur défini dans la limite de faible désordre par :

$$\langle W_{jj'}^{\lambda\lambda'} \rangle = (\delta_{jj'} + w_{jj'}^{\lambda\lambda'} \delta'^2) \exp [-i2(k-k')j]$$

et $w_{jj}^{\lambda\lambda'} = (-\frac{1}{2} - i\lambda)(\frac{1}{2} - i\lambda) + (-\frac{1}{2} - i\lambda')(\frac{1}{2} - i\lambda') - 2j^2$

$$w_{jj+1}^{\lambda\lambda'} = (j + \frac{1}{2} + i\lambda)(j + \frac{1}{2} + i\lambda')$$

$$w_{jj-1}^{\lambda\lambda'} = (j - \frac{1}{2} - i\lambda)(j - \frac{1}{2} - i\lambda')$$

et $j, j' = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty$

Pendry et Kirkman proposent l'approximation suivante : puisque $w_{mn} = w_{-m-n}$, lorsque $\Delta k = 0$, les états propres de W sont soit symétriques : $A_j = A_{-j}$, soit antisymétriques $A_j = -A_{-j}$. Lorsque $\Delta k \neq 0$, on va diagonaliser l'opérateur dans chacun de ces deux sous-espaces. Le sous-espace des vecteurs symétriques est muni de sa base naturelle indexée par $0, 1, 2, \dots, \infty$.

Introduisons la fonction génératrice :

$$A(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m x^{m-1/2} \quad x \in]0,1[$$

L'équation aux valeurs propres $w_{mm}^{\lambda\lambda'}$, $A_{m'} = \gamma A_m$ donne, en posant $\gamma = 1 + \delta'^2 \zeta$: (pour l'instant $\Delta k = 0$)

$$\begin{aligned} x(1-x)^2 A''(x) + [(1-3x)(1-x) + i(\lambda+\lambda')(1-x^2)] A'(x) \\ + [-1 - \lambda^2 - \lambda'^2 - \frac{\lambda\lambda'}{x} + (1-i\lambda)(1-i\lambda')x - \zeta] A(x) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Sous cette forme, l'équation n'est pas auto-adjointe. On peut la ramener à une forme autoadjointe en posant :

$$A(x) = [(1-x)^2/x]^{i(\lambda+\lambda')/2} B(x)$$

$$x(1-x)^2 B''(x) + (1-3x)(1-x) B'(x) + [-(1-x) - \zeta + \frac{1}{4}(\lambda-\lambda')^2 \frac{(1-x)^2}{x}] B(x) = 0 \quad (20)$$

Si $\lambda = \lambda'$, on retrouve l'équation (2) ci-dessus. Cependant le terme en $(\lambda-\lambda')^2 \frac{(1-x)^2}{x}$ va peu jouer car l'essentiel est contrôlé par la singularité $x = 1$ qui justement annule ce terme.

Branchons maintenant la perturbation Δk . Avec les mêmes notations, l'équation différentielle à étudier devient :

$$\begin{aligned} x(1-x)^2 B''(x) + (1-3x)(1-x) B'(x) + [1/\delta'^2 - (1-x) + \frac{1}{4}(\lambda-\lambda')^2 \frac{(1-x)^2}{x}] B(x) \\ = \frac{\gamma}{\delta'^2} e^{i\Delta k} \left[\left(\frac{1-xe^{i2\Delta k}}{1-x} \right)^2 e^{-i2\Delta k} \right]^{i(\lambda+\lambda')/2} B(xe^{i2\Delta k}) \end{aligned} \quad (21)$$

Ce qui change par rapport à l'équation (1) est le terme en

$$\left[\left(\frac{1-xe^{i2\Delta k}}{1-x} \right)^2 e^{-i2\Delta k} \right]^{i(\lambda+\lambda')/2}$$

qui ne tend pas vers 1 lorsque $x \rightarrow 1$, mais se met à osciller très violemment pour $x \approx 1 - \Delta k$. Or l'étude précédente nous a montré que l'échelle déterminante est $y_0 = \ln(\frac{\delta'^2}{\Delta k})$, soit $x_0 = 1 - \frac{\Delta k}{\delta'^2}$.

Dans la limite de faible désordre, $x_0 < 1 - \Delta k$, si bien que l'analyse déjà faite s'appliquera aussi à l'équation (21), tant que $y < y_1$ (région de cross-over). Il suffira de remplacer γ par $\gamma e^{i\Delta k(1-i(\lambda+\lambda'))}$ (on a intérêt à prendre λ et λ' négatifs pour ne pas avoir des modes croissant exponentiellement). La longueur caractéristique de décorrélation est liée à la façon dont les états du bord du spectre sont perturbés. Nous en concluons que cette longueur est là encore égale à $L_+^* = 2 \ln^2 \left(\frac{1}{\Delta k \cdot \ell} \right)$.

Pour terminer, nous soulignons que le corrélateur de moments positifs du coefficient de transmission passe par l'étude d'une perturbation non hermitienne d'une équation différentielle singulière. Ce problème mathématique est difficile. La seule chose qui nous paraît digne de confiance est la mise en évidence de la longueur caractéristique L_+^* , ce en quoi nous sommes d'accord avec la Réf. 4 (et pas avec la Réf. 5). La recherche de ces longueurs caractéristiques était notre propos, mais nous ne savons pas aller au-delà dans l'analyse mathématique du problème, qui par ailleurs présente un grand intérêt pour son caractère très générique⁽¹⁴⁾.

REFERENCES CHAPITRE III

1. M. BÜTTIKER, Y. IMRY, R. LANDAUER, S. PINHAS, Phys. Rev. B31, 6207 (1985).
2. P.A. LEE, A.D. STONE, Phys. Rev. Lett. 55 (1985), 1622.
3. D.J. THOULESS, Phys. Rep. 13C, 93 (1974).
4. J.B. PENDRY et P.D. KIRKMAN, J. Phys. C17, 6711 (1984).
5. J.B. PENDRY et P.D. KIRKMAN, J. Phys. C19, 207 (1986).
6. M.Ya. AZBEL, Sol. State Comm. 45, 527 (1983).
7. L.P. GORKOV, O.N. DOROKHOV et F.V. PRIGARA, Sov. Phys. JETP 58, 852 (1983).
8. V.L. BEREZINKSII et L.P. GORKOV, Sov. Phys. JETP 50, 1209 (1979).
9. V.I. MELNIKOV, Sov. Phys. Solid State 23, 444 (1981).
10. E.N. ECONOMOU et C.M. SOUKOULIS, Phys. Rev. Lett. 46, 618 (1981).
11. N. MOTT and E. DAVIS, "Electronic processes in Non-Crystalline Materials" Oxford, 1971.
12. P.D. KIRKMAN et J.B. PENDRY, J. Phys. C17, 4327 (1984).
13. P.D. KIRKMAN et J.B. PENDRY, J. Phys. C17, 5707 (1984).
14. A.A. ABRIKOSOV et I.A. RYZHKIN, Adv. Phys. 27, 2147 (1978).

C H A P I T R E I V

TRANSMISSION D'UNE ONDE
DANS UN MILIEU NON LINEAIRE DESORDONNE UNIDIMENSIONNEL

ON ANDERSON LOCALIZATION IN NON LINEAR RANDOM MEDIA

B. DOUCOT and R. RAMMAL

Centre de Recherches sur les Très Basses Températures, Centre National
de la Recherche Scientifique, BP 166 X, 38042 GRENOBLE Cédex, FRANCE

ABSTRACT

By employing an invariant-imbedding method a partial differential equation is derived for the complex reflection amplitude $R(L)$ of a one-dimensional non-linear random medium of length L . The method of characteristics reduces this equation to a dynamical system. Averaging of the perturbation of orbits by weak disorder is used to investigate the probability distribution of $R(L)$. For a large class of non linearities, a power law decay of $1-|R|^2$ is shown to take place at large L , and the associated fluctuations are obtained.

PACS numbers : 03.40.Kf, 42.20.-y, 71.55.Jv.

The concept of localization was first introduced and analyzed by Anderson⁽¹⁾ in the context of the propagation of electronic wave functions in a disordered metal. Actually, localization is a very general phenomenon observed during wave propagation through disordered media. At least for weak disorder, wave localization is due, to a large extent, to the enhancement of backscattering by imperfections. This leads in particular to some unusual properties of wave transport in various situations. For instance, due to the exponential localization of electronic states, the typical residual resistance of long finite chains grows exponentially with length L ⁽²⁾. In this case, the dimensionless resistance is given by the ratio r/t of the reflection and transmission coefficients of the system.

Up to now localization has been studied mainly in linear random media. A natural question then arises : what happens in a medium where both randomness and non linearities are relevant ? In this letter we analyse this problem, for a large class of non linearities, by looking at the possible modifications due to the presence of non linear terms in the wave field equations. Our exposition will be limited to 1D problems. The extension of our approach to other cases will be discussed elsewhere⁽³⁾.

We describe the systems which we have studied by the generalized non linear Schrödinger equation, for the complex amplitude of the field $\psi(x,t)$:

$$i\partial\psi/\partial t = \partial^2\psi/\partial x^2 - V(x)\psi + \psi f(|\psi|^2) \quad (1)$$

Here $f(|\psi|^2)$ is an arbitrary function of the intensity $|\psi|^2$ with $f(0) = 0$, t is time and $V(x)$ is a real (or complex) random potential. Note that

for $f(|\psi|^2) = \alpha|\psi|^2$, Eq. 1 reduces to the so-called cubic non linear Schrödinger equation, which arises in different fields : Optics (Kerr non linearities), vortices in Boson systems, superconductivity, etc. In this example, non trivial situations are described by $\alpha > 0$.

We consider Eq. 1, for a one dimensional case, corresponding to a plane-layered medium, which occupies the region $0 \leq x \leq L$. Outside this region, $V(x) = 0$ and $f = 0$ identically. In what follows, we will consider only the stationary regime, corresponding to solutions of the form : $\psi(x,t) = \exp(ik^2 t)\varphi(x)$, where $k^2 \equiv E$ is the energy. This leads to

$$d^2\varphi/dx^2 + k^2 [1 + \varepsilon(x, |\psi|^2)]\varphi = 0 \quad (2)$$

where $\varepsilon(x, |\psi|^2) = (-V(x) + f(|\psi|^2))/k^2$

Let now a plane wave $\varphi_0(x) = A \exp [ik(L-x)]$ be incident on the layer from the right. The solution of Eq. 2 can be represented in the form $\varphi(x) = A u(x)$, where $w = |A|^2$ refers to the intensity of the incident wave. To the right and left of the layer, the wave field has the form :

$$\begin{aligned} u(x) &= \exp [ik(L-x)] + R(L,w) \exp [ik(x-L)] & , x \geq L \\ u(x) &= T(L,w) \exp [-ikx] & , x \leq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Here $R(L,w)$ and $T(L,w)$ are respectively the complex reflection and transmission coefficients. The wave number k is assumed to be the same inside and outside the layer. This restriction corresponds to an approximation where the creation of other harmonics is neglected. From

the continuity of $u(x)$ and du/dx on the layer boundaries one gets four boundary conditions for Eqs. 2,3. Due to the non linear terms in Eq. 2, all the techniques used in linear problems seem to fail completely in the present case. Furthermore, in contrast with linear problems, the transmission problem is no longer uniquely defined : in a number of cases, including the non random limit, ambiguities arise with possible bistability and hysteresis phenomena⁽⁴⁾. Despite these intrinsic difficulties, there is one method to obtain a closed equation for the reflected field. Indeed making use of the invariant imbedding idea⁽⁵⁾, it is possible to reduce the calculation of $R(L,w)$, to an initial-value Cauchy problem, relative to the imbedding parameters : L and w . The basic idea is to follow the modification of $R(L,w)$ which results from infinitesimal changes of L and w , the left side of the layer being unchanged. The field at the boundary, $1 + R(L,w)$ is then described by a closed non linear equation

$$\partial R(L,w)/\partial L = 2ikR + [ik(1+R)^2 + ik(R-R^*)w\partial R/\partial w] \cdot \epsilon[L, w(1+R)(1+R^*)]/2 \quad (4)$$

Eq. 4 is a quasi-linear partial differential equation, subject to the boundary condition $R(L=0,w) = 0$, which allows for a complete solution $R(L,w)$. It is interesting to notice that Eq. 4 reduces to a Riccati equation at $w = 0$. In this limit one recovers the linear case, previously investigated with this equation following the same line of approach⁽⁶⁾. Eq. 4 is actually the starting point of our analysis and we leave the details of the derivation to be published elsewhere⁽³⁾.

For random potentials $V(x)$, Eq. 4 can be viewed as a stochastic equation, describing the evolution of the "stochastic process" $R(L,w)$ under the action of the "multiplicative" noise $V(L)$. However, in

contrast to an ordinary differential equation no simple Liouville-like theorem can be used here as usually done⁽⁷⁾ for the probability density of the process. Nevertheless, one can proceed otherwise, by using the method of characteristics^(8,9). Indeed, for $R = R_1 + iR_2$, the quasi-linear system (Eq. 4) is equivalent to the following ordinary differential equations ($V(x)$ is assumed real).

$$dw/dL = kR_2 w \cdot \epsilon [L, w(1+R)(1+R^*)] \quad , \quad (5.a)$$

$$dR_1/dL = -2kR_2 - kR_2(1+R_1) \cdot \epsilon [L, w(1+R)(1+R^*)] \quad , \quad (5.b)$$

$$dR_2/dL = 2kR_1 + k((1+R_1)^2 - R_2^2) \cdot \epsilon [L, w(1+R)(1+R^*)]/2. \quad (5.c)$$

Eq. 5.a gives the equation of the characteristics $w(L)$ and Eqs. 5.b,c are the so-called relations on the characteristics. The boundary conditions (Cauchy data) are : $R_1 = R_2 = 0$ at $L = 0$.

Straightforward algebra shows that Eqs. 5 imply a remarkable equation for the characteristic curves :

$$w(L) = w(0)/(1-r(L)), \quad (6)$$

where $r \equiv R_1^2 + R_2^2$. Here $w(0) = w_0$ refers to the initial value of w at the origin $L = 0$. Note that $w(L)$ are actually random curves when a random potential is present. As will become clear below, Eq. 6 is the key to understand the qualitative behavior of transmission. In fact, due to randomness, $r(L)$ approaches the value 1 and this results in a renormalization of w which becomes dominant at large L .

Remembering that for real $V(x)$, $1-r = t$ is nothing else than the transmission coefficient, two different problems are to be

distinguished. The first (problem A) corresponds to the transmission with fixed output (w_0), which arises if one needs a fixed power at the end $x = 0$ of the layer. In that case, one follows the influence of randomness on just one characteristic curve. The linear problems belong to this category : the characteristic curve being $w(L) = 0$. The second one (problem B) corresponds to a fixed input w and one has to perform the statistics of $R(L, w)$ over all the characteristics passing through the chosen point (L, w) . On Fig. 1 are shown some characteristics obtained for the case discussed below ($n = 1$).

For the sake of simplicity, we shall illustrate our approach in the case : $f(|\varphi|^2) = \alpha |\varphi|^{2n}$, $n =$ positive integer and $\alpha =$ positive constant. Furthermore, we assume a gaussian white-noise potential : $\langle V(x) \rangle = 0$ and $\langle V(x)V(x') \rangle = g\delta(x-x')$ ($g > 0$). Here $\langle \dots \rangle$ denotes the average over the realizations of the random potential. In the present case one gets

$$\varepsilon [L, w(1 + R)(1 + R^*)] = \alpha [w(1 + R)(1 + R^*)]^n + \eta(L) \quad (7)$$

where $\eta(L) = -V(L)/k^2$ and α refers to α/k^2 . In what follows, α and $\eta(L)$ will be scaled so that $k = 1$. Note that more general cases, including the case of random α can also be treated⁽³⁾ following the same approach described below.

Problem A : Using the expression of w (Eq. 6), Eqs. 5.b,c reduce to a dynamical system, describing the evolution of R_1 and R_2 as function of "time" L . Polar coordinates, $R_1 = r^{1/2} \cos \theta$, $R_2 = r^{1/2} \sin \theta$ ($0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$) are actually very useful to describe the motion in the phase space : $0 \leq r \leq 1$. In the absence of randomness, the

trajectories are given by closed orbits. For instance, at $w_0 = \infty$, the orbit reduces to a circle of radius $1/2$ centered at $R_1 = -1/2$, $R_2 = 0$. In general, fixed points are located on the negative real axis and the representative point (r, θ) exhibits a periodic motion. Both the period, the angular velocity $d\theta/dL$ and the shape of orbits depend on the value of w_0 (see fig. 1).

The influence of disorder, i.e. $\eta(L)$ leads to a perturbation of the orbital motion, and its net effect can be followed on the Poincaré⁽⁹⁾ sections, on the real axis for instance, $r(0)$ and $r(\pi)$. It turns out that at large L , $r(\theta)$ approaches the attractive point $r = 1$, $\theta = \pi$. In this limit, the orbital motion exhibits a slowing down near $\theta = \pi$ and a rapid revolution elsewhere. The main contribution of $\eta(L)$ comes however from the regions where $\theta \neq \pi$. Indeed, $\eta(L)$ enters the equations of motion via the combination $(1 + \cos\theta)\eta(L)$ and this results in a diffusive-like motion of the Poincaré section points. The appropriate method to handle this perturbed orbital motion is provided by the well known⁽⁹⁾ averaging of the perturbation over each period. This approach is facilitated by the existence, in the absence of $\eta(L)$, of the following invariant of motion⁽¹⁰⁾ :

$$F(r, \theta) = \frac{2}{(1-r)} + \frac{\alpha w_0^n}{2(n+1)} \left[\frac{1 + r + 2r^{1/2} \cos\theta}{1-r} \right]^{n+1} \quad (8)$$

It is possible to write down a Fokker-Planck equation for $F(r, \theta)$, giving its probability distribution resulting from the "time" dependent random perturbation $\eta(L)$. Let us summarize the main results so obtained.

In the limit of large w_0 , the period of motion $L_p = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot (d\theta/dL)^{-1}$ is given by

$$L_p = \lambda(n) \left[(n+1)/\alpha(2F\bar{w}_0)^n \right]^{1/2(n+1)} \quad (9)$$

where $\lambda(n)$ denotes a constant.

The averaged drift of F , during one period is, to second order in $\eta(L)$:

$$\langle \Delta F \rangle = \mu(n) \cdot g \cdot (2F)^{-1/2} \left[2(n+1)F/\alpha w_0^n \right]^{3/2(n+1)} \quad (10)$$

with $\mu(n) = \lambda(n) \cdot (n+1)/(n+4)$. Eqs. 9,10 lead to the rate of variation

$\langle \Delta F \rangle / L_p$ and then to

$$\langle F(L) \rangle = \frac{\alpha w_0^n}{2(n+1)} \left[1 + 2 \frac{n(n+4)}{n+1} g \frac{L}{\alpha w_0^n} \right]^{(n+1)/n} \quad (11)$$

The other moments of $F(L)$ can also be calculated. It appears that the probability distribution of F tends to be self-similar : $\langle F^2 \rangle / \langle F \rangle^2$ is a constant at large L . Coming back to the transmission coefficient $t = 1 - r$, it turns out that t is not self-averaging (as in the case of linear media) but $\ln t$ is self averaging. The non uniform angular velocity on the orbits induces a non monotonic behavior of t on each characteristics $w(L)$. Typical values are given by :

$t_{\min}(L) = 2 / \langle F(L) \rangle \approx L^{-(n+1)/n}$ (at $\theta = \pi$) and

$t_{\max}(L) = 4 \left[2(n+1) \langle F \rangle / \alpha w_0^n \right]^{-1/(n+1)} \sim L^{-1/n}$ (at $\theta = 0$). This implies that : i) $\langle 1/t \rangle$ is dominated by $t_{\min}(L)$ and $\langle 1/t \rangle \sim L^{1+1/n}$ and the distribution of $1/t$ becomes self-similar at large L , ii) $\langle \ln t \rangle$ is similarly dominated by $t_{\min}(L)$ and the relative fluctuation goes to zero at $L = \infty$, iii) $\langle t \rangle$ is given by the geometrical mean of $t_{\min}(L)$ and $t_{\max}(L)$ and decays to zero as a power law of L .

The physical origin of the power law decay comes from the equation (Eq. 6) of the characteristics, which implies that non linearities dominate definitely at large L . In fact due to disorder, $r(L)$ approaches its asymptotic value ($= 1$) and this enhances in a sensitive way the role of non linear terms. This behavior becomes much more clear in the limit of small w_0 . In such a case, an exponential decay : $\langle t \rangle \sim \exp(-L/4\xi)$ appears at short length scales, and this is the result of the well known backscattering mechanism^(1,2). However, at large L , non linearities dominate and lead to a power law decay. The crossover between these two regimes, occurs at $L^* \sim 4\xi \ln(1/\alpha w_0^n)$, where ξ denotes the localization length. Such a crossover is visible on Fig. 1 and agrees with the numerical results of Ref. 11. Note that $t_{\min}(L) \sim L^{-(n+1)/n}$ has been shown⁽¹¹⁾ to provide a lower bound for the transmission coefficient.

Problem B : In this case one is interested in transmission at fixed w and L . This requires performing the statistics over all characteristics. In the limit of large L , $w(L)$ along each characteristics oscillate more and more as a consequence of the oscillatory behavior of $r(L)$ (Eq. 6). The oscillation period depends on w_0 , and there are in general a large number of characteristics which satisfy $w(L) = w$ for a given w . It is important to realize that such a multiplicity of solutions is actually a very important feature of wave propagation in non linear media, and this occurs for each individual realization of the potential $\eta(L)$.

For a given value of w , the possible values of $r(L)$ are lying between two limits, $r_1(L) \geq r(L) \geq r_2(L)$. $r_1(L)$ (resp $r_2(L)$) are given by the characteristics of origin w_0 , such that $w(L) = w$ at $\theta = \pi$ (resp. $\theta = 0$). As L increases, the origin w_0 of the relevant

characteristics decreases and then a crossover towards an exponential decay is expected for the transmission. The corresponding crossover lengths are respectively : $L_1(w) \sim (\alpha w^n)^{1/(n+1)} \cdot \xi$ for $r_1(L)$ and $L_2(w) \sim \alpha w^n \cdot \xi$ for $r_2(L)$. The asymptotic behavior of the transmission coefficient is therefore an exponential decay :

$$1 - r_i(L) \simeq [(n+1)/\alpha w^n]^{1/n} \exp [-(L-L_i(w))/4\xi] \text{ at } L > L_i(w) \quad (12)$$

($i = 1, 2$). Eq. 12 shows that exponential localization is actually recovered at large distances. This contrasts with problem A where an algebraic decay has been shown to take place. Physically, this behavior originates in the initial damping of the wave intensity, on a length scale given by $L_1(w)$ (or $L_2(w)$) which are larger than ξ at large w . This damping allows the recovery of the linear-like behavior, corresponding to the fixed point $w = 0$.

In conclusion, we have shown how Anderson localization is affected by non linearities using a dynamical system point of view. The absence of a superposition principle leads to a breakdown of the backscattering mechanism, which is dominating in linear problems. Neglecting the generation of harmonics is not a serious limitation to our results : a higher group velocity corresponds to a larger localization length and then a weaker sensitivity to disorder. Transmission through optical fibers are potential candidates for the experimental realization of the systems investigated in this paper.

The authors are grateful to Prof. P.B. Littlewood and J.C. Angles d'Auriac for a critical reading of the manuscript and to the authors of Ref. 11 for sending a preprint before publication.

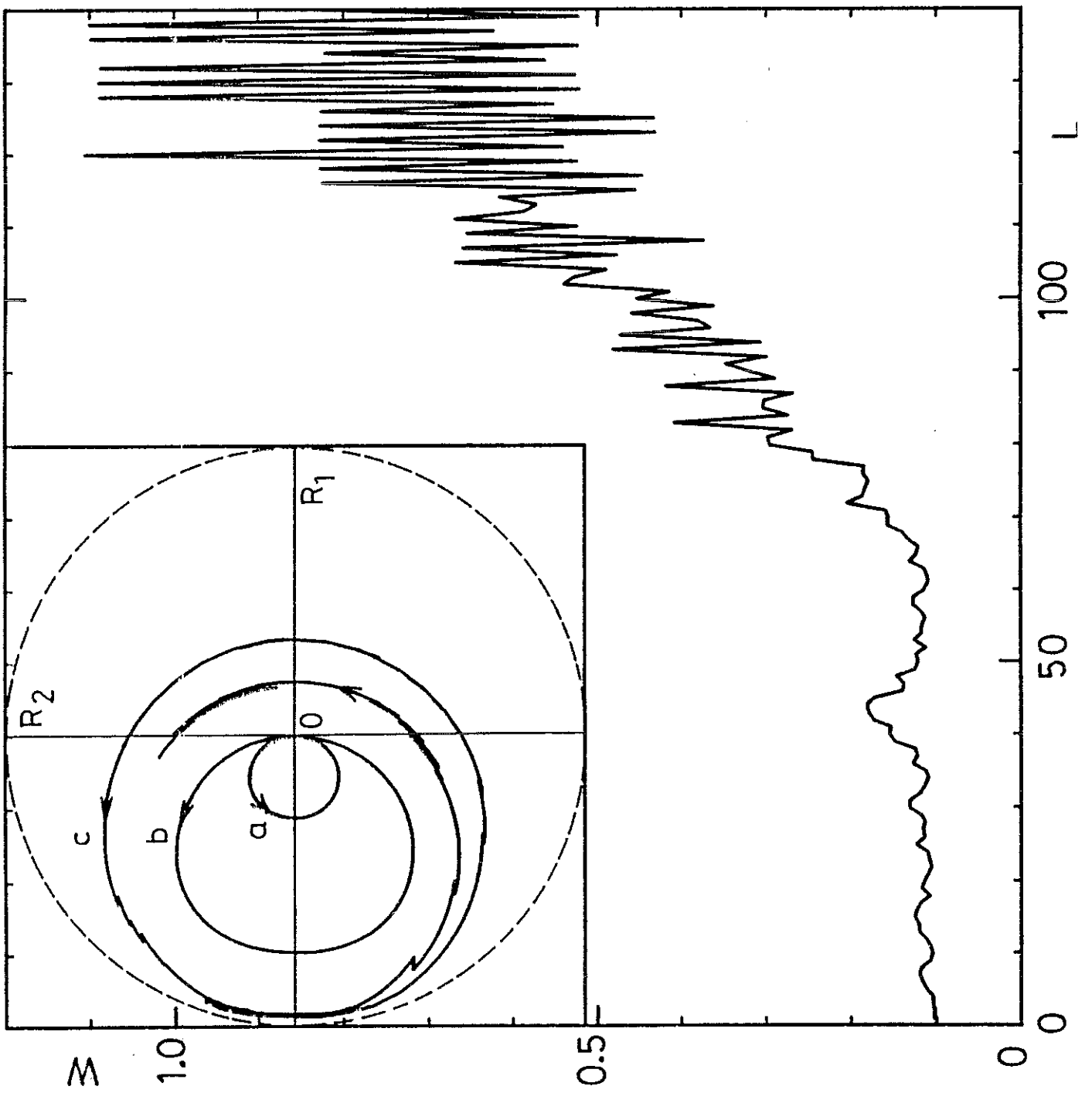
REFERENCES

1. P.W. ANDERSON, Phys. Rev. 109, 1492 (1958). See also N.F. MOTT and W.D. THOSE, Adv. Phys. 10, 107 (1961).
2. R. LANDAUER, Philos. Mag. 21, B63 (1970).
3. B. DOUCOT and R. RAMMAL, to be published.
4. A.E. KAPLAN, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 72, 1710 (1977) (Sov. Phys. JETP 45, 896 (1977)).
5. R. BELLMAN and G.M. WING, An introduction to Invariant Imbedding (Wiley, New York, 1976).
6. R. H. LANG, J. Math. Phys. 14, 1921 (1973). See also J. HEINRICHS, Phys. Rev. B33, 5261 (1986), and references therein.
7. See e.g., N.G. van KAMPEN, Stochastic Processes in Physics and Chemistry (North-Holland, Amsterdam, 1981).
8. R. COURANT and D. HILBERT, Methods of Mathematical Physics, Vol. II, pp. 139 (New York, Interscience Pub. 1962).
9. V.I. ARNOLD, Geometrical Methods in the theory of ordinary differential equations (Springer, New York, 1983).
10. The invariant $F(r,0)$ exists for a general $f(|\varphi|^2)$ and is related to the primitive of the function f . A similar invariant has been used in Ref. 11. The existence of F allows to use a Hamiltonian formalism, after an appropriate change of variables (ref. 3).
11. P. DEVILLARD and B. SOUILLARD, J. Stat. Phys. 43, 423 (1986).

FIGURE CAPTION

Figure 1 : A typical characteristics (w,L) , obtained by numerical integration of Eq. 5 ($w_0 = 0.1$) with a white-noise potential, corresponding to a localization length $\xi \approx 45$. The insert shows some orbits of the dynamical system : (a) $w_0 = 1$, (b) $w_0 = 10$ in the absence of disorder and (c) a perturbed orbit by randomness.

Fig. 1



INVARIANT IMBEDDING APPROACH TO LOCALIZATION

I - GENERAL FRAMEWORK AND BASIC EQUATIONS

R. RAMMAL and B. DOUCOT

Centre de Recherches sur les Très Basses Températures,
C.N.R.S., BP 166 X, 38042 Grenoble-Cédex, France

ABSTRACT

A unified framework for solving the problems of waves transmission across a random medium is outlined. Using an invariant imbedding approach, differential equations are derived for the reflection and transmission coefficients. In general, the transmission problem, viewed as a boundary-value problem, can be reduced to an initial-value Cauchy equation, relative to the imbedding parameters. Known results are recovered and new equations pertaining to : Multichannel problem, time-dependent medium, etc ... are obtained. The extension of this approach to other cases is outlined. A systematic method for the investigation of the stochastic differential equations so obtained is described. The case of one-dimensional linear media is used as an illustrative example.

PACS Numbers : 03.40.Kf, 42.20.-y, 71.55.Jv.

INVARIANT-IMBEDDING APPROACH TO LOCALIZATION :
II - NON LINEAR RANDOM MEDIA

B. DOUCOT and R. RAMMAL

Centre de Recherches sur les Très Basses Températures, Centre
National de la Recherche Scientifique, BP 166 X,
38042 GRENOBLE Cédex, FRANCE.

PACS numbers : 03.40.Kf, 42.20.-y, 71.55.jv.

ABSTRACT

By employing an invariant-imbedding method a partial differential equation is derived for the complex reflection amplitude $R(L)$ of a one-dimensional non-linear random medium of length L . The method of characteristics reduces this equation to a dynamical system. Averaging of the perturbation of orbits by weak disorder, is used to investigate the probability distribution of $R(L)$. Two different situations are considered : fixed output w_0 (Problem A) and fixed input (Problem B). For a large class of non linearities the generic behavior for Problem A is as follows :

i) For weak non linearities, a crossover between an exponential decay of transmission $\langle t \rangle \sim \exp(-L/4\xi)$ at short L and a power law decay at large L is shown to take place at a length scale $L^* = \xi \ln(1/w_0)$, ii) Strong non linearities dominate the full behavior and give rise to a power law decay. The physical origin of this behavior is traced back to the enhancement of non linearities by disorder. For Problem B, the

asymptotic behavior is shown to be always an exponential decay. The fluctuations associated to both regimes are obtained. Random non linearities are also investigated and shown to lead to a self-repelling phenomenon at finite distances. The relevance of our results to experimental situations is briefly discussed.

1. INTRODUCTION

Up to now Anderson localization phenomena have been studied mainly in linear random media⁽¹⁾. A natural question then arises : what happens in a medium where both randomness and non linearities are relevant ? In the first paper (hereafter I) of this series⁽²⁾, the simplest form of this problem : wave transmission across a non linear medium, has been addressed where the basic equations have been derived using an invariant-embedding method⁽³⁾. In this paper, we analyze this problem, for a large class of non linearities, by looking at the possible modifications due to the presence of non linear terms in the wave field equations. Our approach will be limited here to 1D problems and we leave the extension of the results to other cases for a future work.

We describe the system which we have studied by the generalized non linear Schrödinger equation, for the complex amplitude of the field $\psi(x,t)$:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - V(x)\psi + \alpha \psi f(|\psi|^2) \quad (1.1)$$

Here $f(|\psi|^2)$ is an arbitrary function of the intensity $|\psi|^2$ with $f(0) = 0$. In Eq. (1.1), t is time and $V(x)$ is a real (or complex) regular (or random) potential. Examples of physical phenomena described by Eq. 1.1. have been discussed in I. We consider Eq. 1.1. for a one dimensional case, corresponding

to a plane-layered medium, which occupies the region $0 \leq x \leq L$. Outside this region, $V(x) = 0$ and $f = 0$ identically. As in I, we consider only the stationary regime, corresponding to solutions of Eq. 1.1. of the form : $\psi(x,t) = e^{ik^2 t} \varphi(x)$, where $k^2 = E$ is the wave energy. This leads to the following equation for $\varphi(x)$:

$$d^2\varphi/dx^2 + k^2 [1 + \varepsilon(x, |\varphi|^2)] \varphi = 0 \quad (1.2.)$$

Here, the function ε is given by

$$\varepsilon(x, |\varphi|^2) = (-V(x) + \alpha f(|\varphi|^2))/k^2$$

Let now a plane wave $\varphi_0(x) = Ae^{ik(L-x)}$ be incident on the layer from the right. Then the solution of Eq. 1.2 can be represented in the form $\varphi(x) = Au(x)$, where $u(x)$ satisfies a similar equation, involving the intensity $w = |A|^2$ of the incident wave and $|u(x)|^2$. To the right and left of the layer, the wave field has the form :

$$u(x) = \exp [ik(L-x)] + R(L,w) \exp [ik(x-L)], \quad x \geq L \quad (1.3)$$

$$u(x) = T(L,w) \exp(iLx), \quad x \leq 0$$

Here $R(L,w)$ and $T(L,w)$ are respectively the complex reflection and transmission coefficients. The wave number k is assumed to

be the same inside and outside the layer. This restriction corresponds to an approximation where the creation of other harmonics is neglected.

The main object of this paper is to answer the following question : how non linearities can modify the usual⁽¹⁾ exponential decay of transmission $\langle t \rangle \sim \exp(-L/4\xi)$ due to the enhanced backscattering mechanism induced by disorder ? To our knowledge, such a question has never been studied before, excepted the recent work reported in Refs. 4,5. Due to the non linear terms in Eq. 1.2 all the techniques used in linear problems (i.e. at $f = 0$) seem to fail completely in the present case. Furthermore, in contrast with linear problems where the superposition principle holds, the transmission problem is no longer uniquely defined : in a large number of cases, including the non random limit, ambiguities arise with possible bistability and hysteresis phenomena⁽⁶⁾. Despite these intrinsic difficulties, there is one method to obtain a closed solution for reflected field (i.e. reflection coefficient). For real potentials $V(x)$, $|R|^2 + |T|^2 = 1$ holds and then the information on $t \equiv |T|^2$ can be deduced from $|R|^2 \equiv r = 1-t$. Making use of the invariant imbedding idea, we have shown in I the possibility of reducing the calculation of $R(L,w)$ to an initial-value Cauchy equation, relative to the imbedding parameters, namely the position L of the right-hand layer boundary and the intensity w of the incident wave. The field at the boundary, $1 + R(L,w)$ is described by a closed non

linear partial differential equation (Eq. 2.1. below). This is the basic equation of our approach and the paper is organized as follows. In section 2, the main steps of our approach are described : the method of characteristics and the Hamiltonian formulation. We show in particular that two problems are to be distinguished : transmission at fixed output (problem A) and transmission at fixed input (problem B). Using a dynamical systems point of view, these two problems are investigated in the weak disorder limit. In both cases, the method of the averaging of the perturbation of orbits⁽⁷⁾ is used to obtain the behavior of transmission as function of L and w . Problem A is worked in Section 3 and problem B in section 4. In section 5, the case of non linear randomness is investigated. In the final section 6, some remarks will be given about the generality of our results and the remaining open problems.

2. FORMALISM AND BASIC PROPERTIES

In the previous paper⁽²⁾, the following equation

$$\frac{\partial R(L, w)}{\partial L} = 2ikR + \frac{ik}{2} [(1+R)^2 + (R-R^*) w \frac{\partial R}{\partial w}] \cdot \varepsilon(L, w(1+R)(1+R^*)) \quad (2.1)$$

has been derived for the complex reflection coefficient $R(L, w)$. Eq. 2.1. is a quasi linear partial differential equation, subject to the boundary condition $R(L = 0, w) = 0$, which allows for a complete solution $R(L, w)$. It is interesting to notice that Eq. 2.1. reduces to a Riccati equation at $w = 0$. In this limit one recovers the linear case, previously investigated⁽⁸⁾ following the same line of approach.

For a random potential $V(x)$, Eq. 4 can be viewed as a stochastic equation, describing the evolution of the "stochastic process" $R(L, w)$ under the action of the "multiplicative noise" $V(L)$. Recall that in Eq. 2.1, ε refers to the function

$$\varepsilon(x, |\psi|^2) = [-V(x) + \alpha f(|\psi|^2)] / k^2 \quad (2.2)$$

where $f(|\psi|^2)$ describes the non linearities in the wave field .

Examples of $f(u)$ which are of physical interest are :

- i) $f(u) = u^n$ ($n = \text{integer}$)
- ii) $f(u) = \ln u$
- iii) $f(u) = a - be^{-u}$, $b > 0$
- iv) $f(u) = a/(1+u)$, $a < 0$

In the next sections, we limit our attention to the exemple i) and this for the sake of clarity. The remaining examples can be worked following the same lines of approach.

In contrast to an ordinary differential equation no simple Liouville-like theorem can be used here as usually done⁽⁹⁾ for the probability density of the process. Nevertheless, one can proceed otherwise, by using the method of characteristics⁽¹⁰⁾. In this section, we describe this approach in some details.

2.1. Liouville theorem and partial differential equations

Let us show first that no simple Liouville-like theorem can be written for the calculation of the probability density of a dynamical variable described by a partial differential equation (PDE). For the sake of simplicity, we consider the case of one dynamical variable $\psi(x,y)$ and assume that $\psi(x,y)$ is the solution of the following quasi-linear PDE

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + a(x,y ; \psi) \frac{\partial \psi}{\partial y} = f(x,y ; \psi) \quad (2.3)$$

In Eq. 2.3, x and y can be viewed as generalized "times", a and f are arbitrary functions and the initial values of ψ are known (Cauchy data). Let us denote by $Q(\psi; x,y)$ the (probability) measure associated to the evolution of $\psi(x,y)$. For each instant (x,y) and point ψ of the phase space, one can define two currents :

j_x and j_y in x and y directions. Eq. (2.3) implies then

$$j_x(x,y;\psi) + a(x,y;\psi)j_y(x,y;\psi) = Q(x,y;\psi)f(x,y;\psi) \quad (2.4)$$

On the hand, one has

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = - \frac{\partial j_x}{\partial \psi} ; \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = - \frac{\partial j_y}{\partial \psi} \quad (2.5)$$

and

$$\frac{\partial}{\partial \psi} j_y = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \psi} (a j_y) - \frac{1}{a} \left(\frac{\partial a}{\partial \psi} \right) j_y \quad (2.6)$$

which in comparison with Eqs. 2.4-2.5 leads to

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + a \frac{\partial Q}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial \psi} (Qf) + \frac{\partial a}{\partial \psi} j_y \quad (2.7)$$

The last equation reduces, in the case where y is absent for instance, to the well known Liouville equation⁽⁹⁾. However in the general case, where more than one "time axis" is present, there are additional drift terms, coming from the flow in the other directions. In fact the current cannot be related in a simple way to the density. Therefore in contrast to dynamical systems described by ordinary differential equations, Eq. 2.7 cannot be closed and then no Liouville-like theorem can be used here.

2.2. Method of characteristics

Eq. 2.1 is actually a quasi-linear PDE for the complex amplitude of reflection $R(L, w)$. Taking the real and imaginary parts ($V(x)$ is real) and $R = R_1 + iR_2$, one obtains a system of two PDEs :

$$\frac{\partial R_1}{\partial L} + kR_2 \in [L, w((1+R_1)^2 + R_2^2)] \cdot w \frac{\partial R_1}{\partial w} = -2kR_2 - kR_2(1+R_1) \in [L, w((1+R_1)^2 + R_2^2)] \quad (2.8a)$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial L} + kR_2 \in [L, w((1+R_1)^2 + R_2^2)] \cdot w \frac{\partial R_2}{\partial w} = 2kR_1 + \frac{k}{2}((1+R_1)^2 - R_2^2) \cdot \in [L, w((1+R_1)^2 + R_2^2)] \quad (2.8b)$$

This differential system is subject to the boundary conditions :
 $R_1(L=0, w) = R_2(L=0, w) = 0$. The set of Eq. 2.8 can be shown⁽¹⁰⁾
 to be equivalent to a set of three ordinary differential equations :

$$\frac{dw}{dL} = w \cdot kR_2 \in [L, w((1+R_1)^2 + R_2^2)] \quad (2.9a)$$

$$\frac{dR_1}{dL} = -2kR_2 - kR_2(1 + R_1) \cdot \in [L, w((1+R_1)^2 + R_2^2)] \quad (2.9b)$$

$$\frac{dR_2}{dL} = 2kR_1 + \frac{k}{2}((1 + R_1)^2 - R_2^2) \cdot \in [L, w((1+R_1)^2 + R_2^2)] \quad (2.9c)$$

The first Eq. 2.9a gives the equation of the characteristics $w(L)$ and Eqs. 2.9b,c are the so-called relations on the characteristics. The boundary conditions are (Cauchy data) :

$R_1(L=0, w) = R_2(L=0, w) = 0$. The above equations allow for a complete solution $R(w, L)$ for a given form of the function ϵ .

In the following, we focus our study in the cases described by Eq. 2.2. In such cases, α and $\eta(L) = -V(L)/k^2$ will be scaled so that $k = 1$. Note however that more general situations including the case of random α can also be treated following the same approach described below. For the sake of simplicity, the random potential $V(x)$ used in the next sections is assumed to be a gaussian white-noise :

$\langle V(x) \rangle = 0$ and $\langle V(x) V(x') \rangle = g\delta(x-x')$, $g > 0$. Here $\langle \dots \rangle$ denotes the average over the realizations of the random potential. Within this class of models, the expression of the function ϵ in Eqs. 2.9 becomes : $\alpha f [w((1+R_1)^2 + R_2^2)] + \eta(L)$.

A straightforward algebra shows that Eqs. 2.9 imply a remarkable equation for the characteristic curves :

$$w(L) = w(0)/(1-r(L)) \quad (2.10)$$

where $r = R_1^2 + R_2^2$. Here $w(0) = w_0$ refers to the initial value of w at the origin $L = 0$. As will become clear below, Eq. 2.10 is the key to understand the qualitative behavior of transmission. Note further that for random $\eta(L)$, $w(L)$ are actually random curves (Fig. 1).

Using polar coordinates, $R_1 = r^{1/2} \cos \theta$, $R_2 = r^{1/2} \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi, r \geq 0$, one deduces from Eqs. 2.9 :

$$\frac{dr}{dL} = r^{1/2} (1-r) \sin \theta \{ \alpha f [w(1+r+2r^{1/2} \cos \theta)] + \eta(L) \} \quad (2.11)$$

$$\frac{d\theta}{dL} = 2 + \left[1 + \frac{1}{2} (r^{1/2} + r^{-1/2}) \cos \theta \right] \{ \alpha f [w(1+r+2r^{1/2} \cos \theta)] + \eta(L) \}$$

Another interesting property of the Eq. 2.11 is provided by the existence of an invariant of motion. Indeed, let us consider the "time" evolution of r and θ , viewed as dynamical variables (L being the "time"), on a given characteristics $w(L)$, of origin $w(0) \equiv w_0$. Let denote by $\mathcal{F}(u)$ a primitive of the function $f(u)$: $f(u) = d\mathcal{F}(u)/du$. Then, using Eq. 2.10-11, it is easy to verify that

$$F(r, \theta) = \frac{2}{1-r} + \frac{\alpha}{2w_0} \mathcal{F} \left[w_0 \frac{1+r+2r^{1/2} \cos \theta}{1-r} \right] \quad (2.12)$$

is actually an invariant of the motion, i.e. $dF/dL = 0$, in the absence of the potential $\eta(L)$. More generally, for a constant potential $\eta(L) = \eta$, $F(r, \theta) + \frac{\eta}{2} \frac{1+r+2r^{1/2} \cos \theta}{1-r}$ is an invariant of the motion.

The existence of the invariant $F(r, \theta)$ has a simple physical meaning (see below) and allows for a simple description of the dynamics⁽¹¹⁾. Remembering that for real $\eta(L)$, $1-r = t$ is nothing else than the transmission coefficient, two different problems are to be distinguished. The first (Problem A)

corresponds to the transmission at fixed output w_0 , which arises if one needs a fixed power at the end $x = 0$ of the layer. In that case, one follows the influence of the potential $\eta(L)$ on just one characteristics. The linear problems belong to this category : the characteristic curve being $w(L) = 0$. The second one (problem B) corresponds to a fixed input w and one has to perform the calculation of $R(L,w)$ by considering all the characteristics passing through the chosen point (L,w) . In the next sections, both problems will be investigated and the corresponding results are different.

2.3. Invariants and Hamiltonian formulation

The existence of the invariant F can be traced back to the second order differential equation describing the wave field inside the medium. The wave field is actually a complex number, and there are two first integrals. The first one is the current and the second is simply the energy : F is actually just the ratio of these two quantities. To see that, it is useful to use the impedance⁽¹²⁾ $Z = \frac{1}{\psi(x)} \frac{d\psi}{dx} \equiv a + i/b$; in terms of Z the reflection coefficient, $R = R_1 + iR_2$ is given by $R = (i - Z(L))/(i + Z(L))$. The real (a) and imaginary ($1/b$) parts of Z are given by

$$\begin{aligned} a &= 2r^{1/2} \sin \theta / (1 + r + 2r^{1/2} \cos \theta) \\ b &= (1 + r + 2r^{1/2} \cos \theta) / (1 - r) \end{aligned} \tag{2.13}$$

It is easy to see, that the current expression (w_0) is :

$$j \equiv w_0 = \frac{1}{2i} (\psi^* \frac{d\psi}{dx} - \psi \frac{d\psi^*}{dx}) \equiv |\psi|^2 \operatorname{Im} Z = |\psi|^2 / b \quad (2.14)$$

This implies in particular : $|\psi|^2 \equiv b w_0$ and similarly one has $|\partial\psi/\partial x|^2 = |\psi|^2 |Z|^2 = b w_0 (a^2 + 1/b^2)$. For the class of potentials considered here, the wave field equation can actually be derived from a "hamiltonian", which assume the following expression :

$$|\frac{\partial\psi}{\partial x}|^2 + \frac{a}{2} \mathcal{F}(|\psi|^2) + |\psi|^2$$

Using the above notations, it is very easy to check that $F(r, \theta)$ is nothing else than the ratio of this invariant to the current, up to a factor 1/2 and an additive constant term.

The previous remarks allow to write down a Hamiltonian formulation in terms of the variables a and b . Indeed, in the absence of the potential η , the equations of motion for a and b are given by :

$$\frac{da}{dx} = - \frac{\partial}{\partial b} (2F) \quad (2.15)$$

$$\frac{db}{dx} = \frac{\partial}{\partial a} (2F)$$

where $2F$ is given by Eq. 2.12. For instance, for $f(u) = u^n$, $F(a, b)$ assumes the following simple form

$$2F(a,b) = (a^2 + 1)b + \frac{1}{b} + \frac{\alpha_w o^n}{(n+1)} b^{n+1} \quad (2.16)$$

More generally, in the presence of the potential $V(x)$,
Hamilton's equations Eq. 2.15 become

$$\frac{da}{dx} = - \frac{\partial}{\partial b} (2F) + V(x) \quad (2.17)$$

$$\frac{db}{dx} = \frac{\partial}{\partial a} (2F)$$

The equation of motion of F in the presence of $V(x)$ is also
simple and can be written as :

$$\frac{d}{dx} (2F) = 2ab V(x) \quad (2.18)$$

It is interesting to notice that the use of the conjugate
variables a and b leads to a simplified dynamical system, rather
than the apparently complicated set of initial equations. However,
Eqs. 2.17, 2.18 are still stochastic differential equations,
with an additive noise for Eq. 2.17 and a multiplicative noise
for 2.18.

3. TRANSMISSION AT FIXED OUTPUT

In this section we investigate the behavior of the transmission coefficient for a fixed output w_0 . A familiar example of this problem is given by the fixed point $w_0 = 0$, which corresponds to the linear case⁽¹⁾ : $\langle t \rangle \sim \exp(-L/4\xi)$, where ξ refers to the localization length. The approach used here is that of dynamical systems. Indeed, in the absence of disorder, the representative point (r, θ) exhibits a periodic motion on closed orbits. The effect of a small disorder can then be considered as a perturbation of the orbital motion. This results in a random perturbation calculation of the orbits and the net effect can be followed on the Poincaré⁽⁷⁾ sections, on the real axis for instance, $r(0)$ and $r(\pi)$. It turns out that at large L , $r(\theta)$ approaches the attractive point $r = 1$, $\theta = \pi$. In this limit, the orbital motion exhibits a slowing down near $\theta \simeq \pi$ and a rapid revolution elsewhere. The main contribution of disorder comes however from the regions where $\theta \neq \pi$. The appropriate method to handle this perturbed orbital motion is provided by the well known⁽⁷⁾ averaging of the perturbation over each period. The main object of the next subsections is a rather detailed exposition of this approach.

3.1. Analysis of the unperturbed motion

The analysis of the phase space portrait is facilitated by the existence, in the absence of disorder, of the following invariant of motion

$$F(r, \theta) = \frac{2}{(1-r)} + \frac{\alpha w_0^n}{2(n+1)} \left[\frac{1+r+2r^{1/2}\cos\theta}{1-r} \right]^{n+1} \quad (3.1)$$

In the present case, the boundary condition $r(L=0) = 0$ gives : $F(r, \theta) = 2 + \alpha w_0^n / 2(n+1)$ which allows for a detailed description of the orbits $r(\theta)$.

Consider for instance, the limit $w_0 = \infty$. The orbital motion reduces to : $r^{1/2} = -\cos \theta$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$, and the corresponding trajectory is given by the circle of radius $1/2$, centered at $(-1/2, 0)$ (see Fig. 2).

3.1.a. Large w_0 limit

For large $w_0 \gg 1$, the trajectories are strongly modified near $r = 1$ and $\theta = \pi$. In fact, in that region, $2/(1-r)$ in Eq. 3.1 becomes dominant, and a net deviation from the circular orbit results. Indeed, for large w_0 , the circular motion is followed in a large angular sector : $\sqrt{r} = -\cos \theta$, $\pi/2 \leq \theta < \pi - \bar{\varphi}$, but in the remaining sector $\pi - \bar{\varphi} < \theta \leq \pi$, the first term in Eq. 3.1 dominates, and the trajectory is described by : $1-r = 4(n+1)/w_0^n$. Here $\bar{\varphi}$ denotes a small number given by

$$\bar{\varphi} = 2 \left[\frac{2(n+1)}{w_0^n} \right]^{1/2} \approx w_0^{-n/2}, \quad w_0 \gg 1$$

The fixed points associated to the dynamical system are located on the negative real axis $\theta = 0$ and are given by the solutions of $d\theta/dL = 0$:

$$2 + \left(1 - \frac{1}{2}(r^{1/2} + r^{-1/2})\right) \left(\frac{1-r^{1/2}}{1+r^{1/2}}\right) \alpha w_0^n = 0$$

In particular, for $w_0 \gg 1$: $r^{1/2} \approx 1 - 2(1/w_0^n)^{1/(n+1)}$, $\theta = 0$ gives the fixed points of the dynamics. In terms of $w = w_0/(1-r)$, this corresponds to : $1-r^{1/2} \approx w^{-n/2(n+1)}$. Some examples of the orbital motion are shown on fig. 3.

The period of motion L_p on the closed trajectories can be calculated from the angular velocity expression ($k = 1$).

$$\frac{d\theta}{dL} = 2k + k \left[1 + \frac{1}{2}(r^{1/2} + r^{-1/2}) \cos\theta \right] \cdot \alpha w_0^n \left[\frac{1+r+2r^{1/2} \cos\theta}{1-r} \right] \quad (3.2)$$

Therefore,

$$L_p = \int_0^{2\pi} d\theta (d\theta/dL)^{-1} \quad (3.3)$$

The main contribution to L_p is given by the sector $\pi - \bar{\varphi} \leq \theta \leq \pi$ and then $L_p \approx \frac{1}{k} w_0^{-n/2}$. In the remaining sector, the contribution to L_p is comparatively small and can then be neglected. Note that, L_p becomes smaller and smaller at large w_0 and this in contrast with the other limit $w_0 \ll 1$, discussed below. This implies in particular a rapid revolution of (r, θ) at large w_0 .

The above analysis of the orbital motion can be used to follow the pattern of characteristics and then the surface $r(L, w)$. A typical characteristics (w, L) is shown on Fig. 4, where the periodic motion on the orbits is shown to induce a periodic oscillation of the characteristics. The slowing down of the orbital motion at $\theta \approx \pi$ results in a flat behavior, at $w = w_1 \equiv w_0^{(n+1)}/4(n+1)$. In that region $r(\theta = \pi)$ is given by $1-r(\pi) = w_0/w_1$, i.e.

$$r(\pi) = 1 - (4(n+1))^{1/(n+1)} w_1^{-n/(n+1)} \quad (3.4)$$

These remarks are actually very useful in solving problem B (sec. Section 4). In fact, in that case, w is fixed and we have to solve the implicit equation : $w = w_0/(1-r(L, w_0))$ for w_0 . This means that, for a fixed level w , all the characteristics starting at w_0 and satisfying this equation must be taken into account. From the above analysis, the relevant w_0 are given by : $[4(n+1)w]^{1/(n+1)} \leq w_0 \leq w$. Furthermore, for fixed w , $0 \leq r \leq r_{\max}$, where $r_{\max} = 1 - (4(n+1))^{1/(n+1)} w^{-n/(n+1)}$. Therefore, the procedure to be used for the calculation of $r(L, w)$ at fixed w is the following one. Each characteristics of origin w_0 , $w_0 < w < w_1$ generates a sequence of points $r(L, w)$ which is periodic in L . The union of all these sequences provides the desired solution $r(L, w)$, which defines the reflection coefficient at the chosen w and L . It is important to notice that the period in L is not the same for all the

sequences. In fact each characteristics exhibits a large number of folds (see Fig. 5) which becomes important at large L : the period of the maxima ($\theta = \pi$) is given by : $\lambda [4(n+1)w]^{-n/2(n+1)}$ whereas the period of minima is : $\lambda w^{-n/2}$. This folding leads in particular to the following multiplicity of folds : $L [w^{n/2} - (4(n+1)w)^{n/2(n+1)}] / \lambda$, which increases with both L and w . As will be shown in Sec. 4, this behavior of the degeneracy of folds is not altered by the presence of disorder.

3.1.b. Small w_0 limit

In this limit, r remains in the vicinity of the origin and $F \approx 2 + \alpha w_0^{n/2(n+1)}$. This leads to the following equation for the orbits : $r^{1/2} = -\alpha w_0^n \cos \theta/2$. The corresponding trajectories are simple circles of radius : $\alpha w_0^n/4$. The fixed points are given by the centers of these circles. The angular velocity on the orbits becomes

$$\frac{d\theta}{dL} = k + \frac{1}{2} \alpha k w_0^n + O(k w_0^{2n}) \quad (3.5)$$

In particular, Eq. (3.5) yields the following expression for the period ($k = 1$)

$$L_p = \frac{1}{k} \frac{\pi}{1 + \alpha w_0^n/2} \quad (3.6)$$

As before, the characteristics are periodic in L :
 $w(L)$ oscillates between w_0 and $w_1 = w_0 / (1 - w_0^{2n}/4)$. Therefore,
 at fixed w , r oscillates between 0 and $w^{2n}/4$. The period of
 minima is associated with the characteristics starting at
 $w_0 = w$: the corresponding period in L is given by $\frac{\pi/k}{1+w^n/2}$.
 Similarly, the period of maxima corresponds to the charac-
 teristics starting at $w_0 = w(1 - w^{2n}/4)$: the corresponding
 period is $(\frac{\pi}{k}) / [1 + \frac{1}{2} w^n(1 - n \frac{w^{2n}}{4})]$. Finally, the proli-
 feration of folds can be measured with the multiplicity of
 folding :

$$L \cdot [(1 + \frac{1}{2} w^n) - (1 + \frac{1}{2} w^n(1 - n \frac{w^{2n}}{4}))] \approx L \frac{k}{8} n w^{3n}$$

The degeneracy increases linearly with L , but much more
 slowly with w in comparison with the large w limit.

3.2. Perturbation of the orbital motion by disorder

In this section, the effect of a small disorder (i.e.
 potential $\eta(L)$) on the orbital motion is investigated. A
 more systematic study of the influence of disorder will be
 found in the next section. Here we limit our investigation
 to the large L limit, where $l-r = t$ is vanishing.

Let us consider first the behavior of the orbits. To
 the lowest order in t , Eq. 3.1 gives the following expression
 for $F(r, \theta)$:

$$F(r, \theta) \approx \frac{2}{t} + \frac{1}{2(n+1)w_0} \left[\frac{2w_0(1+\cos\theta)}{t} \right]^{n+1} \quad (3.7)$$

Similarly, the angular velocity becomes

$$\frac{d\theta}{dL} \approx 2k + k \left[\frac{2w_0(1+\cos\theta)}{t} \right]^n (1+\cos\theta) \quad (3.8)$$

Assuming that $t = t_0$ at $\theta = \pi$ before the random perturbation is turned on, Eq. 3.7 shows that the equation of motion can be simplified as follows ($\theta = \pi - \varphi$).

$$t(L) = t_0, \quad 0 \leq \theta \leq \theta^* \quad (3.9)$$

and
$$\frac{2w_0(1+\cos\theta)}{t(L)} = \left[\frac{4w_0}{t_0} (n+1) \right]^{1/(n+1)}, \quad \pi - \varphi^* \leq \theta \leq \pi$$

Here, φ^* denotes the extension of the angular sector where the second term in Eq. 3.7 dominates :

$$\varphi^* = [4(n+1)]^{1/2(n+1)} \left(\frac{t_0}{w_0} \right)^{n/2(n+1)} \quad (3.10)$$

Performing the same sort of analysis for Eq. 3.8, one obtains the following behavior for the angular velocity :

$$\frac{d\theta}{dL} = 2k + 2k(n+1) \left(\frac{\varphi}{\varphi^*} \right)^{2(n+1)}, \quad \pi - \varphi^* \leq \theta \leq \pi \quad (3.11)$$

and
$$\frac{d\theta}{dL} = 2k + k \left[4(n+1) \frac{w_0}{t_0} \right]^{n/(n+1)} (1+\cos\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \theta^*$$

The two angular sectors are matched at $\theta = \pi - \varphi^*$. Eq. 3.11 shows that, as long as θ is close to π , the angular velocity can be expressed as a function of the reduced variable φ/φ^* . The contribution $\approx (\frac{t_0}{w_0})^{n/2(n+1)}$ of this sector to the period in L, dominates that of the second sector, which is proportional to $(t_0/w_0)^{n/(n+1)}$. This leads in particular to the following expression of the period : $\text{Const. } (t_0/w_0)^{n/2(n+1)}$. Here the constante in front refers to an n dependent prefactor.

3.2.a. Averaged perturbation method

In order to follow the effect of a small disorder on the transmission coefficient, we consider the dynamical system giving the "time" evolution of r and θ :

$$\frac{dr}{dL} = kr^{1/2}(1-r)\sin\theta [\eta(L) + \alpha w_0^n (\frac{1+r+2r^{1/2}\cos\theta}{1-r})^n] \quad (3.12)$$

$$\frac{d\theta}{dL} = 2k+k [1 + \frac{1}{2}(r^{1/2}+r^{-1/2})\cos\theta] [\eta(L) + \alpha w_0^n (\frac{1+r+2r^{1/2}\cos\theta}{1-r})^n] \quad (3.13)$$

In the absence of $\eta(L)$, the orbital motion corresponding to these equations has been studied in the previous section 3.1. In the limit considered here : $1-r \ll 1$, and Eqs. 3.12-13 reduce to :

$$\frac{dr}{dL} \approx k(1-r)\sin\theta \left[\eta(L) + \alpha \frac{n}{w_0} \left(\frac{1+\cos\theta}{(1-r)/2} \right) \eta \right] \quad (3.14)$$

$$\frac{d}{dL} \approx 2k + k(1 + \cos \theta) \left[\eta(L) + \alpha \frac{n}{w_0} \left(\frac{1 + \cos \theta}{(1-r)/2} \right) \eta \right] \quad (3.15)$$

The presence of $\eta(L)$ generates fluctuations around the closed orbits described above. The main contribution of $\eta(L)$ comes from the sector where $\theta \neq \pi$, because $\eta(L)$ enters the equations of motions via the combinations $(1 + \cos \theta)\eta(L)$ and $\sin \theta \cdot \eta(L)$. This results in a diffusion-like motion of the Poincaré section points. To the first order in η , the average of the perturbation Δr , integrated over each revolution period ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) vanishes. In fact, using Eq. 3.14-15, one deduces

$$\Delta^{(1)} \ln(1-r) = -k \int_0^L \eta(L') \sin \theta(L') dL'$$

$$\Delta^{(1)} \theta(L) = k \int_0^L \eta(L') (1 + \cos \theta(L')) dL'$$

The average over η ($\langle \eta \rangle = 0$) gives no contribution to $(1-r)$.

To the second order, one obtains

$$\Delta^{(2)} \ln(1-r) = -gk^2 \int_0^L \eta(L') \cos \theta(L') dL' \int_0^{L'} \eta(L'') (1 + \cos \theta(L'')) dL'' \quad (3.16)$$

The average over η leads to :

$$\langle \Delta^{(2)} \ln(1-r) \rangle = -gk^2 \int_0^L dL' \cos \theta(L') [1 + \cos \theta(L')] \quad (3.17)$$

Therefore, the net effect of disorder can be cast as follows

$$\langle \Delta^{(2)} \ln(1-r) \rangle_{\text{period}} = - gk^2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta(1+\cos\theta)d\theta}{d\theta/dL} \quad (3.18)$$

The different contributions to the integral in Eq. 3.18 can be separated and the final result is $\approx \varphi^3$. However, the period of motion is proportional to φ^* and this leads to

$$\langle \frac{\Delta \ln(1-r)}{\Delta L} \rangle_{\text{period}} = - \text{const.} \left(\frac{t_0}{w_0} \right)^{n/(n+1)} \quad (3.19)$$

Due to the persistence of a quasi-orbital motion in the presence of the perturbation, a non monotonic behavior of $t \equiv 1-r$ is obtained on each characteristics $w(L)$. The typical values as given by Eq. 3.19 are respectively : $t_{\min}(L) \approx L^{-(n+1)/n}$ (at $\theta = \pi$) and $t_{\max}(L) \approx L^{-1/n}$ (at $\theta = 0$). The average value of t : $t_{\min}(L) \leq t(L) \leq t_{\max}(L)$ is therefore no longer an exponential function of L , but a power law. This behavior contrasts with the well known exponential decay in the linear case (i.e. $w_0 = 0$). The power laws $t_{\min}(L)$ and $t_{\max}(L)$ must be viewed actually as the lower and upper envelopes of the true $\langle t(L) \rangle$. A similar behavior has been obtained in Ref. 4, for $n = 1$ and another derivation of this result will be given below.

3.2.b. Fluctuations and self-averaging properties

It is well known⁽¹⁾ that at $w_0 = 0$, i.e. in the linear case, the fluctuations of $t, r, \dots$, etc., are very important and the full probability distribution of t is of importance. In order to follow the influence of non-linearities on the statistical distribution of t , we shall use the approximated equations for the unperturbed orbital motion ($\varphi = \pi - \theta$).

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} &= \frac{1}{t_0} \quad , \text{ for } \varphi \leq \varphi^* \\ &= \frac{1}{t_0} \left(\frac{\varphi^*}{\varphi} \right)^2 \quad , \text{ for } \varphi^* \leq \varphi \ll 1 \\ &= \left[\frac{4w_0}{t_0} (n+1) \right]^{1/(n+1)} / 2w_0 (1 + \cos\theta) \text{ elsewhere.} \end{aligned} \quad (3.20)$$

The corresponding angular velocity in the three angular sectors is given by

$$\begin{aligned} d\theta/dL &= 2k + 2k(n+1) (\varphi/\varphi^*)^{2(n+1)} \quad , \text{ for } \varphi \leq \varphi^* \\ &= 2k + 2k(n+1) (\varphi/\varphi^*)^2 \quad , \text{ for } \varphi^* \leq \varphi \ll 1 \quad (3.21) \\ &= 2k + k \left[4 \frac{w_0}{t_0} (n+1) \right]^{n/(n+1)} (1 + \cos\theta) \text{ elsewhere} \end{aligned}$$

As will be shown below, there is two sources of fluctuation : the first is due of course to disorder, and the second comes

from the orbital motion. Actually, the averaging procedure over the closed orbits, generates "fluctuations" which dominates at large w_0 , where non linearities govern the behavior of t . Here we shall investigate this second source of fluctuations.

i) Average and fluctuation of $1/t(L)$:

Following the definition of the average over each period, one has ([...] denotes the average over orbits) :

$$[\frac{1}{t}]_{\text{period}} = \int_0^\pi t^{-1}(\theta) d\theta \left(\frac{d\theta}{dL} \right)^{-1} / \int_0^\pi d\theta \left(\frac{d\theta}{dL} \right)^{-1} \quad (3.22)$$

The sector $\theta \neq \pi$ does not contribute to the integrals, because t and also $(d\theta/dL)$ are large in this sector. The main contribution to the numerator is $\approx \varphi^x/t_0$, whereas the period (denominateur) is $\approx \varphi^x$. This implies in particular that :

$$[1/t] = \text{const.} \frac{1}{t_0} .$$

The same argument holds also for $1/t^2$ and $[1/t^2] = \text{const} \frac{1}{t_0^2}$. This leads in particular to the relative fluctuation

$$\lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{[t^{-2}] - [t^{-1}]^2}{[t^{-1}]^2} = \text{const} \quad \text{at fixed } w_0 \quad (3.23)$$

This "self-similar" behavior of the fluctuation of $1/t$ originates from the following fact. The angular sector contributing to the average of $1/t$ has the same scale φ^x as that contributing to the period.

ii) Average and fluctuation of t :

According to Eqs. 3.20-21, t increases in the sectors where $d\theta/dL$ increases. Therefore the fluctuations of t should be important. Using a similar expression as 3.22 for t and taking the ratio $t/(\frac{d\theta}{dL})$ from 3.20, 21, one obtains ($k = 1$)

$$[t] \approx t_o \left(\frac{w_o}{t_o}\right)^{n/2(n+1)} \quad (3.24)$$

Note that for $\theta = \pi$: $t = t_o$ and for $\theta = 0$:

$t = 4w_o / \left[\frac{4w_o}{t_o} (n+1) \right]^{1/(n+1)}$. Eq. 3.24 shows that $[t] / w_o$ is nothing else than the geometrical mean of these two extreme values of t/w_o . This implies in particular a large fluctuation of t . Indeed, the expression of $[t^2]$ assume the following form :

$$[t^2] = \text{const. } t_o^2 \left(\frac{w_o}{t_o}\right)^{\frac{3}{2} \frac{n}{n+1}} \quad (3.25)$$

The resulting relative fluctuation behaves as

$$\frac{[t^2] - [t]^2}{[t]^2} \approx \left(\frac{w_o}{t_o}\right)^{n/2(n+1)} \quad (3.26)$$

which diverges as $t_o \rightarrow 0$ at fixed w_o .

iii) Average and fluctuation of $\ln t$:

The average of $\ln t$ is dominated by the sector $\theta \approx \pi$, because of the slowing down of the angular velocity in this region. Taking into account the main contributions to $\ln 1/t$ and $(\ln 1/t)^2$, one deduces that the relative fluctuation of $\ln 1/t$, due to the orbital motion, vanishes as $t \rightarrow 0$.

Anticipating the results of the next section, the above results can then be summarized as follows :

- 1) $\langle 1/t \rangle$ is dominated by $t_{\min}(L)$, $\langle 1/t \rangle \sim L^{1+1/n}$ and the distribution of $1/t$ becomes self similar at large L .
- 2) $\langle \ln t \rangle$ is similarly dominated by $t_{\min}(L)$ and the relative fluctuation goes to zero at $L = \infty$.
- 3) $\langle t \rangle$ is given by the geometrical mean of $t_{\min}(L)$ and $t_{\max}(L)$ and decays to zero as a power law of L .

The physical origin of the power law decay comes from the equation $w = w_0/(1-r)$ of the characteristics, which implies that non linearities dominate definitely at large L . In fact due to disorder, $r(L)$ approaches its asymptotic value ($= 1$) and this enhances in a sensitive way the role of non linear terms.

3.3. Hamiltonian approach

An equivalent approach to the transmission problem A is provided by the Hamiltonian formalism described in Section 2. Such an approach is facilitated by the existence of the invariant F . Making the change of variables $a = 2r^{1/2} \sin\theta / (1+r+2r^{1/2} \cos\theta)$, $b = [1+r+2r^{1/2} \cos\theta] / (1-r)$, the corresponding Hamiltonian is $\mathcal{H} = 2F$. The associated Hamilton's equations, when $\eta(L)$ is present, are given by

$$\frac{da}{dL} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial b} + \eta(L) \quad (3.27)$$

$$\frac{db}{dL} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a}$$

It is important to notice that the perturbation $\eta(L)$ is "time" dependent. The Hamiltonian formalism allows us to write down a Fokker-Planck equation for $F(r, \theta)$ and then follow its probability distribution. Recall that $\mathcal{H}$ is given by the following expression ($k = 1$)

$$\mathcal{H} = 2F = (a^2 + 1)b + \frac{1}{b} + \alpha \omega_o^n \frac{b^{n+1}}{n+1} \quad (3.28)$$

In the presence of the potential $\eta(L)$, the "time" evolution of F , as deduced from Eqs. 3.27-28, is given by :

$$\frac{d}{dL} (2F) = 2ab \eta(L) \quad (3.29)$$

Using Novikov's theorem⁽⁹⁾, the "time" evolution of the moments $\langle F^m \rangle$ of F can be deduced from (3.20). For instance, $\langle F \rangle$ and $\langle F^2 \rangle$ are the solutions of the ordinary differential equations

$$\frac{d \langle F \rangle}{dL} = g \langle b \rangle \quad (3.30)$$

$$\frac{d \langle F^2 \rangle}{dL} = 2g \langle a^2 b^2 \rangle + 2g \langle Fb \rangle$$

Eq. 30 permits in particular to follow the variation of F in the general case. In the weak disorder limit, $\langle b \rangle$, $\langle a^2 b^2 \rangle$, $\langle Fb \rangle$, etc., can be approximated by their values corresponding to the motion on an unperturbed orbit.

3.3.a. Large w_0 limit

Before going to the calculation of the moments of F and its probability distribution, let us consider first the unperturbed orbital motion in the phase space (a,b) . In the new variables, the closed orbits are invariant under $a \rightarrow -a$ and the ranges of variations are : $-\infty \leq a \leq \infty$, $b \geq 0$. In the limit $r \rightarrow 1$, $\theta = 0$ corresponds to $b = \infty$ and $\theta = \pi$ is reached at $b = 0$.

In what follows, $\mathcal{H}$ will be written as

$$\mathcal{H} \equiv 2F = a^2 b + G(b) \quad (3.31)$$

where $G(b) \equiv b + 1/b + \alpha w_o^n \frac{b^{n+1}}{n+1}$ denotes the positive function shown in Fig. 6. The minimum of $G(b)$, which occurs at $b = b^*$ is actually the fixed point of the dynamical system. In the limit of large w_o , $b^* \approx (\frac{1}{\alpha w_o^n})^{1/(n+2)} \ll 1$. The position of b^* is close to b_c corresponding to the value of b , where the main terms : $1/b$ and $\alpha w_o^n \frac{b^{n+1}}{n+1}$ become comparable :
 $b_c \sim [\frac{n+1}{\alpha w_o^n}]^{1/(n+2)}$ at large w_o . Two other special values of b are given by the solutions of : $\mathcal{H} = G(b)$. In the vicinity of the first $b = b_o \equiv 1/2 F$, $G(b) \sim 1/b$ and

$$a = \pm \left[\frac{1}{b} \left(\frac{1}{b_o} - \frac{1}{b} \right) \right]^{1/2} \quad (3.32)$$

whereas for $b \sim b_1 \equiv (\frac{2F(n+1)}{\alpha w_o^n})^{1/(n+1)}$, $G(b) \sim \alpha w_o^n \frac{b^{n+1}}{n+1}$ and

$$a = \pm (2F)^{1/2} \left[\frac{1}{b} \left(1 - \frac{b}{b_1} \right)^{n+1} \right] \quad (3.31)$$

In terms of the above notations, the period L_p in L takes the following simple form

$$L_p = 2 \int_{b_o}^{b_1} db / (db/dL) = \int_{b_o}^{b_1} db / (ab) \quad (3.32)$$

Actually, b_o and b_1 can be viewed as the turning points for the periodic motion on the orbit corresponding to the fixed level $2F$ on Fig. 6. For an initial condition $r(L = 0) = 0$, i.e. $b_1 = 1$, one has $2F = 2 + \alpha w_o^n / (n+1) \gg 1$ at large w_o . This

implies in particular that in Eq. 3.32, the dominant contribution is given by the interval $[b_c, b_1]$, $b_c \ll 1 \lesssim b_1$ and then

$$L_p = C \left[\frac{n+1}{\alpha(2Fw_o)^n} \right]^{1/2(n+1)} \quad (3.33)$$

The constant factor C is given by $C(n) = \frac{1}{n+1} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2(n+1)}\right)$.

It is interesting to notice that Eq. (3.33) reproduces the result $L_p \sim (t_o/w_o)^{n/2(n+1)}$ obtained previously at $t_o \sim 0$, where $F \sim 2/t_o$. Note however that Eq. 3.33 is more general and no assumption on t_o is used here.

Following the procedure described before, we consider now the "time" evolution of $\langle F \rangle$, $\langle F^2 \rangle$, ... using the average perturbation, due to disorder, on each orbit. All the calculations are performed to the second order in $\eta(L)$.

Consider first the "drift" of F , due to disorder. Using Eq. 3.30, one obtains for weak disorder

$$\langle \Delta F \rangle_{\text{period}} = g \cdot 2 \int_{b_o}^{b_1} b db / (2ab) \quad (3.34)$$

The integral in Eq. 3.34 is dominated, at large w_o , by the contribution of the interval $[b_c, b_1]$. This yields in particular :

$$\langle \Delta F \rangle_{\text{period}} = \text{const. } g (2F)^{-1/2} \left[\frac{2(n+1)}{\alpha w_o^n} F \right]^{3/2(n+1)} \quad (3.35)$$

and then when $\langle \Delta F \rangle$ is divided by L_p :

$$\frac{d \langle F \rangle}{dL} = \lambda(n) g \left[\frac{2(n+1)}{\alpha w_0^n} F \right]^{1/(n+1)} \quad (3.36)$$

Here $\lambda(n) = B(1/2, \frac{3/2}{n+1}) / B(1/2, \frac{1/2}{n+1})$, where $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, $\Gamma(x)$ = gamma function. The integration of Eq. 3.36, with the initial condition $2F_0 \equiv 2F(L=0) = 2 + \frac{\alpha w_0^n}{n+1}$ at $b=1$, yields

$$\langle F(L) \rangle = \frac{\alpha w_0^n}{2(n+1)} \left[1 + 2\lambda(n) g \frac{n}{\alpha w_0^n} L \right]^{(1+n)/n} \quad (3.37)$$

Note that Eq. 3.37 is valid for all values of L , at large w_0 . The result $\langle F(L) \rangle \sim 1/w_0$ is obtained at large L . Furthermore, w_0/t_0 appears as the scaling variable in this regime. Under the action of disorder, $F(L)$ diffuses with a systematic "drift" towards larger values. The associated diffusion in phase space is illustrated on Fig. 7.

The same calculation can be repeated for $\langle F^2 \rangle$, starting from Eq. 3.30. For weak disorder $\langle a^2 b^2 \rangle$ and $\langle bF \rangle$ can be replaced by their unperturbed values. This leads to

$$\Delta [\langle F^2 \rangle - \langle F \rangle^2]_{\text{period}} = 2g \int_{b_0}^{b_1} ab \cdot db. \quad (3.38)$$

Here again, $[b_c, b_1]$ dominates the integral in Eq. 3.39, and then

$$\Delta [\langle F^2 \rangle - \langle F \rangle^2] = \text{const. } g(2F)^{1/2} \left[F \frac{2(n+1)}{\alpha w_0^n} \right]^{3/2(n+1)} \quad (3.39)$$

Comparing Eqs. 3.39 and 3.37, one arrives at the following conclusion. The relative fluctuation of F : $\frac{\langle F^2 \rangle - \langle F \rangle^2}{\langle F \rangle^2}$

stabilizes at a constant value for large F , i.e. large L . This behavior of F will be termed "self-similar" in the following.

The results so obtained for the moments of F are confirmed by the "time" evolution of the probability distribution $W(F,L)$ of the stochastic process F . The Fokker-Planck equation satisfied by $W(F,L)$ can be written as⁽⁹⁾

$$\frac{\partial W}{\partial L} = - \frac{\partial}{\partial F} \langle \Delta F \rangle W + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial F^2} \langle (\Delta F)^2 \rangle W \quad (3.40)$$

The "drift" coefficient, in Eq. 3.40 is given by

$$\langle \Delta F \rangle = \langle \Delta F \rangle_{\text{period}} / L_p = \lambda(n) g \left[\frac{2(n+1)}{\alpha w_o^n} F \right]^{1/(n+1)} \quad (3.41)$$

Similarly, the diffusion coefficient is, given, to first order in g , by

$$\langle (\Delta F)^2 \rangle = 2\mu(n)g(2F) \left[\frac{2(n+1)}{\alpha w_o^n} F \right]^{3/2(n+1)} \quad (3.42)$$

Here $\mu(n) = B(3/2, \frac{3/2}{n+1}) / B(1/2, \frac{1/2}{n+1})$

The resulting Fokker-Planck equation can then be written :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial L} = & - \lambda(n)g \frac{\partial}{\partial F} \left[\left(\frac{2(n+1)}{\alpha w_o^n} F \right)^{1/(n+1)} W \right] + \mu(n)g \frac{\partial^2}{\partial F^2} \\ & \cdot \left[2F \cdot \left(\frac{2(n+1)}{\alpha w_o^n} F \right)^{1/(n+1)} W \right] \end{aligned} \quad (3.43)$$

A more familiar form for Eq. 3.43 can be obtained, by making the following change of variables :

$$I = \left[\frac{2(n+1)}{\alpha w_o^n} F \right]^{n/(1+n)}, \quad u = \frac{2ng}{\alpha w_o^n L} \quad (3.44)$$

$$W(F, L) = \bar{W}(I, L) \cdot \frac{dI}{dF}$$

This change of scales leads to :

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial u} = -(\lambda(n) - 2\mu(n)) \frac{\partial \bar{W}}{\partial I} + \mu(n) \frac{2n}{n+1} \frac{\partial}{\partial I} \left(I \frac{\partial \bar{W}}{\partial I} \right) \quad (3.45)$$

The normalized solution of Eq. 3.45 is $(\bar{W}(I, u = 0) = \delta(I-1))$:

$$\bar{W}(I, u) = \frac{1}{d(n) \Gamma(1 + \frac{c(n)}{d(n)})} \left(\frac{I}{d(n)u} \right)^{c(n)/d(n)} \exp(-I/d(n)u) \quad (3.46)$$

for $I > 0$ and $\bar{W}(I, u) = 0$ for $I \leq 0$, where $c(n) = \lambda(n) - 2\mu(n)$,
 $d(n) = \mu(n) \frac{2n}{n+1}$.

The obtained solution for $\bar{W}(I, u)$ permits the calculation of the moment $\langle F^p \rangle$ of F :

$$\langle I^p \rangle = (d(n) u)^p \frac{\Gamma(p+1+c(n)/d(n))}{\Gamma(1+c(n)/d(n))} \quad (3.47)$$

In particular, the previous results for $\langle F \rangle$, $\langle F^2 \rangle$ and the relative fluctuation $\frac{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}{\langle I \rangle^2} = \frac{d(n)}{c(n)+d(n)} = \text{const}$ are recovered.

The solution Eq. 3.46 is actually valid for large L , such that $\langle F(L) \rangle \gg F(L=0) \equiv F_0$ is fulfilled. In order to describe the other limit, we make the change of variable : $I' = I - I_0$, where $I_0 = 1$ corresponds to the initial value $F_0 = \frac{1}{2} \frac{(n+1)}{\alpha_w n}$ of F . The probability distribution $\bar{W}'$ for I' is now the solution of the following equation (valid for $|I'| \ll 1$).

$$\frac{\partial \bar{W}'}{\partial u} = - (c(n) - d(n)) \frac{\partial \bar{W}'}{\partial I'} + d(n) \frac{\partial^2 \bar{W}'}{\partial I'^2} \quad (3.48)$$

Eq. 3.48 shows that (3.46) is no longer valid for $|I'| \lesssim 1$. Using Eq. 3.48, one deduces the gaussian distribution for I' :

$$\bar{W}'(I', u) = (4\pi d(n)u)^{-1/2} \exp \{ - [I' - (c(n) - d(n))u]^2 / 4d(n)u \} \quad (3.49)$$

Eq. 3.49 describes the region where $|I'| \lesssim 1$, whereas Eq. 3.46 is valid at $I' \gtrsim 1$. The difference between these two distributions can be seen, on the behavior of the moments of I : For the exponential distribution :

$$\langle I \rangle = [c(n) + d(n)] u, \quad \langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2 = d(n) (c(n) + d(n)) u^2$$

For the gaussian distribution :

$$\langle I \rangle = [c(n) + d(n)] u + 1$$

$$\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2 = [c(n) + d(n)] d(n) u^2 + 2d(n)u$$

Note that $\mu(n) < \lambda(n)$ and then

$d(n)+c(n) = \lambda(n) - 2\mu(n)/(n+1) > 0$ as it should be. Furthermore the only dependence of the relative fluctuation of F on n is via $\lambda(n)$ and $\mu(n)$.

Let us conclude this section by noting that Eq. 3.43 can be used to support the approximation, used in the derivation of Eq. 3.37, where the fluctuation of ΔF (Eq. 3.35) has been neglected. Indeed starting from Eq. 3.43, one deduces, for large L :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} \langle F \rangle &= \lambda(n) g \langle I^{1/n} \rangle \\ &= \lambda(n) g [d(n)u]^{1/n} \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{n} + \frac{c(n)}{d(n)})}{\Gamma(1 + \frac{c(n)}{d(n)})} \end{aligned} \quad (3.50)$$

and then

$$\langle \frac{2(n+1)}{\alpha w_o^n} F \rangle = \lambda(n) (d(n))^{1/n} \frac{\Gamma(\frac{1}{n} + 1 + c(n)/d(n))}{\Gamma(1 + c(n)/d(n))} u^{\frac{n+1}{n}} \quad (3.51)$$

Repeating the same calculation for $\langle F^2 \rangle$, one obtains in a similar fashion :

$$\begin{aligned} \langle (\frac{2(n+1)}{w_o^n} F)^2 \rangle &= (\lambda(n) + 2\mu(n)) [d(n)]^{\frac{n+2}{n}} \\ &\quad \cdot \frac{\Gamma(2 + \frac{2}{n} + c(n)/d(n))}{\Gamma(1 + c(n)/d(n))} u^{2(n+1)/n} \end{aligned} \quad (3.52)$$

The results so obtained support the previous ones, and show

that $2(n+1)F/w_0^n$ is actually the appropriate scaling variable.

3.3.b. Small w_0 limit and linear-non linear crossover

In the previous section, we have considered the case of strong non linearities, i.e. large w_0 , where already at $L \sim 0$, the whole behavior is dominated by the non linear terms. However, there are characteristics, starting at vanishing w_0 , where disorder dominates first at short length scales, and non linearities govern at large L . Such a crossover between a linear and a non linear behavior takes place (for small w_0) at a length scale L^* .

From the form of $G(b)$ as given by Eq. 3.31, it is clear that three regimes can appear : $G(b) \approx 1/b$, $G(b) \approx b$ and $G(b) \approx \frac{\alpha w_0^n}{n+1} b^{n+1}$, according to the value of b . The crossover between the first two ones is at $b \approx 1$, whereas the two other ones match at $b_2 \approx (\frac{n+1}{\alpha})^{1/n} / w_0$. Therefore a necessary condition for the dynamic to be dominated by non linearities is given by : $g(b_2) \ll 2F$. For small w_0 , $b_2 \gg 1$ and this condition can be written : $Fw_0 \gg (\frac{n+1}{\alpha})^{1/n}$. In what follows we show that this condition is actually a sufficient one. For the values of w_0 which violate this requirement, the exponential decay of transmission will be shown to take place.

Let us consider first the orbital motion in the absence of disorder. The dynamics can be approximated as follows. In the interval, $b_0 < b < 1$ where $b_0 = 1/2 F$ one

has $G(b) \sim 1/b$ and then $a = [\frac{1}{b} (\frac{1}{b_0} - \frac{1}{b})]^{1/2}$. In the second interval, $1 < b < b_2$, $G(b) \sim b$ is linear in b and $a = [\frac{2F}{b} - 1]^{1/2}$. Finally for $b_2 < b < b_1$, where $b_1 = [\frac{2(n+1)}{n} F]^{1/(n+1)}$, $G(b)$ can be written as $G(b) = 2F(b/b_1)^{n+1}$ and $a \propto w_0^{1/n} [\frac{2F}{b} (1 - (b/b_1)^{n+1})]^{1/2}$. This leads to the following expression for the oscillation period : $L_p = \int_{b_0}^{b_1} db/ab$. For small w_0 , $b_2 \ll b_1$ and the integral is dominated by the contribution of $[b_2, b_1]$ and then $L_p \approx [b_1/2F]^{1/2}$, which is the same behavior as for large w_0 . Note however that in the quasi-linear regime where $G(b_2) \gtrsim 2F$, the interval $[b_2, b_1]$ is no longer present. In this limit, the period becomes independent of F as it should be.

Following the same procedure used at large w_0 , the "drift" of F , due to disorder (Eq. 3.34) is given by : $\langle \Delta F \rangle_{\text{period}} = g \int_{b_2}^{b_1} db/a$. The main contribution comes from $[b_2, b_1]$ and then

$$\langle \Delta F \rangle_{\text{period}} \approx (2F)^{-1/2} b_1^{+3/2} \quad (3.53)$$

Similarly, using Eq. 3.38, one obtains :

$$\Delta(\langle F^2 \rangle - \langle F \rangle^2) \approx (2F)^{1/2} b_1^{+3/2} \quad (3.54)$$

Note that in the quasi linear regime $G(b_2) \gtrsim 2F$, $\langle \Delta F \rangle_{\text{period}} \approx F$. But, L_p is independent of F in that region. Therefore, an exponential decay of transmission is expected. Eq. 3.53-54 show that beyond a crossover value of F , the large w_0 behavior is recovered.

Such a crossover is given by

$$F_{w_0} = \left(\frac{n+1}{\alpha}\right)^{1/n} \quad (3.55)$$

In particular for $\theta = \pi$, where $F \approx 2/t$, this corresponds to a precise value of t and w :

$$t = 2w_0 (\alpha/(n+1))^{1/n}, \quad w = \frac{1}{2} \left[\frac{n+1}{\alpha} \right]^{1/n}$$

Similarly, at $\theta = 0$ where $F \approx \frac{\alpha w_0^n}{2(n+1)} \left(\frac{4}{t}\right)^{n+1}$, the corresponding values are respectively :

$$t = \frac{4}{2^{1/(n+1)}} w_0 \left(\frac{\alpha}{n+1}\right)^{1/n} \quad \text{and} \quad w = \frac{2^{1/(n+1)}}{4} \left(\frac{n+1}{\alpha}\right)^{1/n}$$

i.e. nearly the same values as $\theta = \pi$. One deduces therefore the expression of the crossover length ($\langle t \rangle \sim e^{-L/4\xi}$ in the linear regime)

$$L^* \approx \frac{4\xi}{n} \ln [(n+1)/\alpha w_0^n] \quad (3.56)$$

The exponential decay regime ends up at $L \sim L^*$ and this agrees with the intuitive picture described in the introduction. Beyond L^* , t decays as a power law of L because of the enhancement of the non linearities. Note that L^* diverges as $w_0 \rightarrow 0$ or $\alpha \rightarrow 0$. This means that for vanishing non linearities, the exponential decay extends on a larger and larger length scale.

Beyond L^* , F is given by an expression similar to
Eq. 3.37 :

$$Fw_0 = \left(\frac{n+1}{\alpha}\right)^{1/n} \left[1 + 2^{1/(n+1)} \lambda(n) g \frac{n}{n+1} (L-L^*) \right]^{(n+1)/n},$$

$$L \geq L^* \quad (3.57)$$

This is consistent with the fact that $[2(n+1)F/\alpha w_0^n]^{n/(1+n)}$ is the appropriate scaling variable.

On figure 7, the different behaviors are clearly shown. Starting at small w_0 , we have periodic oscillations between two turning points in the "well" $G(b)$ vs b . Under the action of disorder, a diffusion-like motion takes place, towards large F . As far as $G(b) \sim b$, we have an exponential decay of transmission. However for larger F , $G(b)$ changes over towards $G(b) \sim b^{n+1}$, where non linearities dominate. This picture explains in a rather simple way the crossover described above. For more general form of non linearities, such a crossover takes always place and this because of the modification of the form of $G(b)$ at large b .

4. TRANSMISSION AT FIXED INPUT

In this case (Problem B) one is interested in transmission at fixed w and L . As explained above this requires performing the averages over all characteristics. In the limit of large L , the function $w(L)$ along a characteristic curve oscillates strongly as a consequence (Eq. 2.10) of the oscillating behavior of $r(L)$. Furthermore, the oscillation period depends on the initial value w_0 . As a result, there is in general a large number of characteristics which satisfy $w(L) = w$ (for a given w). This multiplicity of solutions is indeed an important feature of the propagation of waves in non linear media, and this occurs for each individual realization of the potential $\eta(L)$. In the following we shall limit our attention to the large w limit. In this case, the small L behavior is dominated by non linearities. However, at large L the wave intensity becomes more and more small and an exponential decay is recovered. The other limit, $w \rightarrow 0$, is definitely dominated by disorder and non-linearities are irrelevant. This behavior at fixed input contrasts with the previous one (Sec. 3) at fixed output.

Following the same procedure used in the previous section, it is useful to follow the behavior of transmission at $\theta = 0$ and π . For this, we recall here the expression of F :

$$F = \frac{\alpha w_o^n}{2(n+1)} \left[1 + 2g\lambda(n) \frac{n}{\alpha w_o^n} L \right]^{(n+1)/n} \text{ at } \frac{\alpha w_o^n}{n+1} \gg 1 \quad (4.1.a)$$

and

$$F = \frac{1}{w_o} \left(\frac{n+1}{\alpha} \right)^{1/n} \left[1 + 2^{1/(n+1)} \lambda(n) g \frac{n}{n+1} (L-L^*) \right]^{(n+1)/n}$$

$$\text{at } \frac{\alpha w_o^n}{n+1} \ll 1 \text{ and } L > L^* \quad (4.1.b)$$

Here, $L^* = \frac{4\xi}{n} \ln((n+1)/\alpha w_o^n)$. Assuming $w \gg 1$, we shall find first the characteristics leading to $w(L) = w$ at $\theta = 0$ and $\theta = \pi$ respectively. The possible values of $r(L) \equiv 1-t(L)$ are lying between two limits $r_1(L) \geq r(L) \geq r_2(L)$. Here $r_1(L)$ (resp. $r_2(L)$) are given by the characteristics of origin w_o , such that $w(L) = w$ at $\theta = \pi$ (resp. $\theta = 0$).

4.1. Recovery of an exponential decay

Let us consider first the case $\theta = \pi$. In the limit $w \gg 1$, $F \simeq 2/t$ and $w = Fw_o/2$. Using the expression of F (Eq. 4.1.a), one has to solve for w_o the following equation

$$w = \frac{\alpha w_o^{n+1}}{4(n+1)} \left[1 + 2\lambda(n) g \frac{n}{\alpha w_o^n} L \right]^{(n+1)/n} \quad (4.2)$$

The corresponding solution can be written as

$$w_o = \left[\frac{4(n+1)w}{\alpha} \right]^{1/(n+1)} (1 - L/L_1)^{1/n} \quad (4.3)$$

where we have defined the following length scale L_1 :

$$L_1(w) \equiv \frac{\alpha}{2\lambda(n)gn} \left[\frac{4(n+1)w}{\alpha} \right]^{n/(n+1)} \quad (4.4)$$

Eq. (4.3) leads in particular to the following expression for the transmission coefficient $t_1(L)$:

$$t_1(L) = \frac{1}{w} \left[\frac{2\lambda(n)gn}{\alpha} \right]^{1/n} (L_1 - L)^{1/n} \quad (4.5)$$

which reproduces at $L \approx 0$, the known result of a pure non linear medium : $t_1(L) = \left(\frac{4(n+1)w}{\alpha} \right)^{1/(n+1)}$. The range of validity of the above expression is actually much shorter than $L_1(w)$, because we have used the expression of F corresponding to $\frac{\alpha w_0^n}{n+1} \gg 1$. Indeed, as L approaches $L_1(w)$, w_0 decreases, and the above expression for $t_1(L)$ is no longer valid. Using the obtained solution for w_0 , $\alpha w_0^n/(n+1) \approx 1$ gives the following range of validity :

$$(1 - L/L_1(w)) \geq \left(\frac{n+1}{\alpha} \right)^{1/(n+1)} \left(\frac{1}{4w} \right)^{n/(n+1)} \quad (4.6)$$

and for large w , this range extends up to $L_1(w)$.

For length scales larger than $L_1(w)$, the relevant characteristics originate at vanishing w_0 , where disorder effects dominate. In this limit, the origin w_0 is given by the solution of $w = Fw_0/2$, F being given by Eq. 4.1.b :

$$w = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{\alpha} \right)^{1/N} \left[1 + 2^{1/(n+1)} \lambda(n) g \frac{n}{n+1} (L-L^*) \right]^{(1+n)/n} \quad (4.7)$$

The solutions w_0 are given by the implicit equation ($w \gg 1$) :

$$L^* = L - L_1(w) = \frac{4\xi}{n} \ln \frac{n+1}{\alpha w_0^n} \quad (4.8)$$

i.e.

$$w_0 = \left(\frac{n+1}{\alpha} \right)^{1/n} \exp\left(-\frac{L-L_1(w)}{4\xi}\right) \quad (4.9)$$

Therefore, one obtains :

$$t_1(L) = \frac{w_0}{w} = \left(\frac{n+1}{\alpha w} \right)^{1/n} \exp\left(-\frac{L-L_1(w)}{4\xi}\right), \quad L > L_1(w) \quad (4.10)$$

We turn now to the other limit $\theta = 0$, where for large w the following expression for F

$$F \approx \frac{\alpha w_0^n}{2(n+1)} \left(\frac{1+r+2r^{1/2}}{1-r} \right)^{n+1} \quad (4.11)$$

holds. Using Eq. 4.1.a one deduces the following equation for

w_0 :

$$w^n = w_0^n + \frac{2\lambda(n)gn}{\alpha} L \quad (4.12)$$

and the corresponding solution leads to :

$$t_2(w) = (1 - L/L_2)^{1/n} \text{ at } t_2(w) \lesssim 1 \quad (4.13.a)$$

$$t_2(w) = 4(1 - L/L'_2(w))^{1/n} \quad \text{at } t_2(w) \sim 0 \quad (4.13.b)$$

Here, $L_2(w) = \frac{\alpha w^n}{2\lambda(n)gn}$ and $L'_2(w) = \alpha(4w)^n/2\lambda(n)gn$ respectively.

The range of validity of the above expressions for $t_2(w)$ is fixed, as for $t_1(w)$, by : $\frac{\alpha w_0^n}{n+1} \sim 1$:

$$(1 - L/L'_2(w)) \geq \frac{n+1}{\alpha} (4w)^{-n} \quad (4.14)$$

For length scales beyond $L_2(w)$, one has to use Eq. 4.1.b. for the calculation of w_0 . As for $\theta = \pi$, one finds the following implicit equation for w_0 :

$$L'_2 = L - L^x \quad (4.15)$$

and then

$$w_0 = \left(\frac{n+1}{\alpha}\right)^{1/n} \exp\left\{-\frac{L-L'_2(w)}{4\xi}\right\}$$

The corresponding expression for transmission coefficient is therefore given by

$$t_2(w) = \frac{w_0}{w} = \frac{1}{w} \left(\frac{n+1}{\alpha}\right)^{1/n} \exp\left\{-\frac{L-L'_2(w)}{4\xi}\right\} \quad (4.16)$$

It is important to notice that : $\xi \ll L_1(w) \ll L_2(w)$ at large w . This means that these three length scales are well separated at large (fixed) input w . The curves $r_1(L) = 1-t_1(L)$ and $r_2(L) = 1 - t_2(L)$, as shown on Fig. 8 are actually the

envelops of $r(L)$, which oscillates between them. The real $r(L)$ exhibits a large number of folds as L increases and this degeneracy will be discussed below. It is important to realize that an exponential decay is obtained here at large L . In fact as L increases the origin w_0 of the relevant characteristics decreases and then a crossover towards an exponential decay is obtained for the transmission. The corresponding crossover lengths are $L_1(w) \sim (\alpha w^n)^{1/(n+1)} \xi$ and $L_2(w) \sim \alpha w^n \xi$ respectively. This behavior contrasts with problem A, where an algebraic decay has been shown to take place. Physically, this originates in the initial damping of the wave intensity, on a length scale given by $L_1(w)$ (or $L_2(w)$) which are larger than ξ at large w . This damping allows the recovery of the linear-like behavior, corresponding to the fixed point $w = 0$.

The obtained behavior for $r(L)$ can actually be understood by noticing that at $\theta = 0$ as well as $\theta = \pi$, w is a function of the scaling variable Fw_0 . However, Fw_0 becomes independent of w_0 at large L on each characteristics. This leads in particular to the behavior of the asymptotic envelops, shown on Fig. 9. In fact, using Eqs. 4.2, 4.12 it is easy to see that, at large w , $w \sim L^{1+1/n}$ at $\theta = \pi$ and $w \sim L^{1/n}$ at $\theta = 0$ and then w_0 does not appear in the equations of these asymptotic envelops.

Note that the existence of such asymptotic envelops, towards which the characteristics envelops converge is a very general property which holds for a large class of non linear

models. This remarkable property is at the origin of the existence of two well defined length scales $L_1(w)$ and $L_2(w)$. To see this, recall that the transmission across a non linear medium described by

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} - \alpha f(|\psi|^2)\psi = \psi$$

can be described in terms of the "Hamiltonian" $\mathcal{H} = 2F$, where

$$2F = (a^2 + 1)b + \frac{1}{b} + \frac{\alpha}{w_0} \mathcal{F}(w_0 b) \quad (4.17)$$

where $\mathcal{F}$ denotes a primitive of the function f . $\mathcal{H}$ governs the evolution of a and b in the absence of disorder. In the presence of disorder, one has the following evolution equation for F (Eq. 3.10)

$$\frac{d \langle F \rangle}{dx} = g \langle b \rangle$$

Furthermore, when non linearities dominate,

$$\langle b \rangle \sim b_{\max} = \frac{1}{w_0} \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{2Fw_0}{\alpha} \right) \text{ and then}$$

$$\frac{d \langle F w_0 \rangle}{dx} \approx g \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{2Fw_0}{\alpha} \right) \quad (4.18)$$

This equation for $\langle F w_0 \rangle$ shows that $F w_0$ is actually the appropriate scaling variable in the problem described by Eq. 4.17.

For both $\theta = 0$ and $\theta = \pi$, $w(L)$ on a given characteristics, becomes independant of w_0 . Note that this remarkable result is a very general one and holds for any non saturating ($f(\infty) = \infty$) positive function f .

4.2. Folding and degeneracy

For a given realization of $\eta(L)$, the reflection coefficient $r(L)$ oscillates between $r_1(L)$ and $r_2(L)$ as calculated above. Furthermore, $r(L)$ exhibits a large number of folds, which are responsible for the hysteresis of $r(L)$ (fig. 10). It appears that this degeneracy increases with both w and L , and is independent of the strength of disorder g .

To see this, let us define the degeneracy as follows. The abscissa of the points where $r(L)$ hits the lower (resp. upper) envelop are ordered as follows : $a_0 < a_1 < \dots < a_n < \dots$ (resp. $b_0 < b_1 < \dots < b_m < \dots$). For a fixed abscissa x , there are two different intervals containing this value : $b_m < x < b_{m+1}$, $a_n < x < a_{n+1}$, where $m \ll n$. The successive arcs of $r(L)$, crossing the vertical line at x are of number $2(n-m)-1 : [a_{m+1}, b_{m+1}] , [b_{m+1}, a_{m+2}] , \dots, [a_n, b_n]$. The degeneracy of folding is then defined by

$$\text{deg}(L) \approx 2 \int_0^L dL' (1/\pi_<(L') - 1/\pi_>(L')) \quad (4.19)$$

where $\pi_<(L')$ (resp. $\pi_>(L')$) refers to the short (resp. large)

period of oscillation at L' , corresponding to the lower (resp. upper) envelop.

It appears that at large L , $\pi_{<}$ and $\pi_{>}$ become independent of L . More precisely,

$$\pi(L) = \gamma (Fw_o)^{-n/2(n+1)} \quad (4.20)$$

where γ denotes a constant number.

In fact, on the upper envelop, $Fw_o = 2w$ and then

$$\pi_{>}(L) = \gamma (2w)^{-n/2(n+1)} \quad (4.21)$$

Similarly, on the lower envelop, $Fw_o = \frac{\alpha}{2(n+1)} (\beta w)^{n+1}$ with $\beta = 1$ at $r(L) \sim 0$ and $\beta = 4$ at $r \sim 1$. Therefore,

$$\pi_{<}(L) = \gamma \left[\frac{\alpha}{2(n+1)} (\beta w)^{n+1} \right]^{-n/2(n+1)} \quad (4.22)$$

Using Eqs. 4.21-22, one deduces

$$\deg(L) \approx 2\gamma \left[\frac{\alpha}{2(n+1)} \right]^{n/2(n+1)} (\beta w)^{n/2} L \quad (4.22)$$

This result shows that the degeneracy of folding increases linearly with L (at large L) and is independent of g : only w is involved in the expression of $\deg(L)$.

5. NON LINEAR RANDOMNESS

In the previous sections we have focused our attention to the cases where the random terms enter additively in the field equations. In this section, we shall consider another case, where $\alpha(x)$ is a random variable. This implies that the non linear term is a random variable with a prescribed probability distribution. We consider just the case where the potential $V(x)$ is absent and only random non linearities are present. In such a case, it is useful to consider first the case of a negative constant α before going to the random case.

5.1. Case of negative α

Using the same form of non linearities, one is interested in a wave field described by :

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} - \alpha|\psi|^{2n}\psi = k^2\psi \quad (5.1)$$

where α is a negative real number.

The invariant of motion is still defined, as before, by

$$\mathcal{H} \equiv 2F = (a^2 + 1)b + \frac{1}{b} + \alpha \frac{w_o^n}{(n+1)} b^{n+1} \equiv a^2b + G(b) \quad (5.2)$$

and the equation of motion are :

$$\frac{da}{dx} = -\frac{\partial}{\partial b} (2F) \quad , \quad \frac{db}{dx} = \frac{\partial}{\partial a} (2F) \quad (5.3)$$

The function $G(b) = b + \frac{1}{b} + \alpha \frac{w_o^n}{n+1} b^{n+1}$ is shown on Fig. 11 for $|\alpha| \ll 1$ and $|\alpha| \gg 1$ respectively. In the limit of small non linearities, there is a non trivial fixed point b^* , which is unstable. Qualitatively, the dynamics in the phase space is modified : the trajectory reaches the point $b = \infty$ in a finite "time" L_∞ . Indeed L_∞ is given by ($db/dL = 2ab$)

$$L_\infty = \int_{b_{\min}}^{\infty} db/2ab \quad (5.4)$$

On the other hand, one has :

$$a = \left(\frac{\alpha w_o^n}{n+1} \right)^{1/2} [(b^{n+1} - b_{\min}^{n+1})/b]^{1/2} \quad (5.5)$$

and then

$$\begin{aligned} L_\infty &\simeq \frac{1}{2} b_{\min}^{-n/2} \left(\frac{n+1}{\alpha w_o^n} \right)^{1/2} \int_1^\infty dz [z(z^{n+1}-1)]^{-1/2} \\ &= \frac{1}{2} b_{\min}^{-n/2} \left(\frac{n+1}{\alpha w_o^n} \right)^{1/2} < \infty \end{aligned} \quad (5.6)$$

The limiting point $a = b = \infty$ corresponds to $r = 1$ and $\theta = \pi$. This point is not a fixed point however : the phase is still running over the interval $[0, 2\pi]$. The phase trajectories are shown on Fig. 12, for weak and strong non linearities respectively.

A qualitative modification of the dynamics occurs at a critical value of (αw_0^n) corresponding to the disappearance of the unstable fixed point b^* .

In the present case, the reflection coefficient reaches the value $r = 1$ at a finite distance L_∞ and this corresponds to a "self-repelling" of the incident wave. This phenomenon occurs at enough large F , allowing to reach the maximum of $G(b)$ at small α ; and for any value of F when there is no maximum (large α).

5.2. Random $\alpha(x)$ case

Assume that α is the sum of two terms : a positive constant α and a random term $\beta(x)$. In the following, $\beta(x)$ is assumed to be a gaussian white-noise : $\langle \beta(x) \rangle = 0$, $\langle \beta(x)\beta(x') \rangle = g\delta(x-x')$. The equations of motion are now given by

$$\frac{da}{dx} = -\frac{\partial}{\partial b}(2F) - \beta(x) w_0^n b^n, \quad (5.7)$$

$$\frac{db}{dx} = \frac{\partial}{\partial a}(2F) \quad (5.8)$$

and differ from the pure case by the presence of an additional term for da/dx . Here F is given as above by Eq. 5.2.

As for the additive noise, the equation of motion of F can be used to follow the influence of disorder. In the present case, we have :

$$\frac{dF}{dx} = -\beta(x) w_o^n a b^{n+1} \quad (5.9)$$

Using Novikov's ⁽⁹⁾ theorem, one deduces

$$\frac{d \langle F \rangle}{dx} = g w_o^{2n} \langle b^{2n+1} \rangle \quad (5.10)$$

$$\frac{d \langle F^2 \rangle}{dx} = 2g w_o^{2n} \langle a^2 b^{2n+2} \rangle + 2g w_o^{2n} \langle F b^{2n+1} \rangle \quad (5.11)$$

In particular, for weak disorder one obtains :

$$\frac{d}{dx} [\langle F^2 \rangle - \langle F \rangle^2] = 2g w_o^{2n} \langle a^2 b^{2n+2} \rangle \quad (5.12)$$

In comparison with the additive noise case, there is an additional term $w_o^{2n} b^{2n}$.

The same analysis can actually be repeated and the following results are obtained. The average rate of variations over one period becomes :

$$\left. \frac{d \langle F w_o \rangle}{dL} \right|_{\text{period}} = \lambda'(n) g \left(\frac{2(n+1)}{\alpha} \right)^{2-1/(n+1)} (F w_o)^{2-1/(n+1)} \quad (5.13)$$

where $\lambda'(n)$ denotes a constant given by

$$\lambda'(n) = \int_0^1 dz z^{2n} [z/(1-z^{n+1})]^{1/2} / \int_0^1 dz [z(1-z^{n+1})]^{-1/2}$$

$$= B(\frac{1}{2}, \frac{4n+3}{2n+2}) / B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2n+2})$$

Neglecting the fluctuations of F , one obtains therefore :

$$\frac{d(Fw_o)}{(Fw_o)^{1+n/(n+1)}} = \lambda'(n) g \left[\frac{2(n+1)}{\alpha} \right]^{1+n/(n+1)} dL \quad (5.14)$$

and then for $F(L=0) = F_o$:

$$\langle F(L) \rangle = F_o \left[1 - g \frac{n}{n+1} (F_o w_o)^{n/(n+1)} \lambda'(n) \left(\frac{2n+2}{\alpha} \right)^{1+n/(n+1)} .L \right]^{-(1+1/n)} \quad (5.15)$$

Eq. 5.15 shows in particular that $\langle F \rangle$ diverges at a finite length and this expression makes sense below this length scale. The above approximation is actually valid either at large w_o or at small w_o but at values of L such that $F(L)$ has reached large values (beyond the region where $G(b) \sim b$). This behavior of $F(L)$ can be explained as follows. The random term $\alpha + \beta(x)$ is actually a white-noise, so that this sum can assume negative values and this situation has been analyzed in the previous section. In fact for negative $\alpha + \beta(x)$ and large F , the point $r = 1$, $\theta = \pi$ is reached by all orbits. This implies that F increases very rapidly. Therefore, $\langle F \rangle$ can diverge at a finite length. Beyond this length, the random variable F is described by a singular probability distribution, for which $\langle F \rangle$, $\langle F^2 \rangle$, ...

diverge. Such a behavior would correspond to a complete self-repelling of the incident wave.

The above picture becomes more precise by working the Fokker-Planck equation describing the evolution of F . Using Eq. 5.9, the rate of variation of the fluctuations of F , calculated over one period, is given by

$$\frac{d}{dL} [F^2] - \langle F \rangle^2 = 2\mu'(n) g \cdot 2F \left[\frac{2F}{\alpha w_o^n} (n+1) \right]^{1/(n+1)} w_o^{2n} \left[\frac{2F}{\alpha w_o^n} (n+1) \right]^{2n/(n+1)} \quad (5.16)$$

where

$$\begin{aligned} \mu'(n) &= \int_0^1 dz \, z^{2n} [z(1-z^{n+1})]^{1/2} / \int_0^1 dz [z(1-z^{n+1})]^{-1/2} \\ &= B\left(\frac{3}{2}, \frac{4n+3}{2n+2}\right) / B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2n+2}\right) \end{aligned}$$

The probability distribution $W(F;L)$ of F is then the solution of the following Fokker-Planck equation

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial L} &= -\lambda'(n) g w_o^{2n} \frac{\partial}{\partial F} \left[\left[\frac{2F}{\alpha w_o^n} (n+1) \right]^{(2n+1)/(n+1)} W \right] + \mu'(n) g w_o^{2n} \frac{\partial^2}{\partial F^2} \\ &\quad \cdot \left[2F \left[\frac{2F}{\alpha w_o^n} (n+1) \right]^{(2n+1)/(n+1)} W \right] \end{aligned} \quad (5.17)$$

From this equation, one deduces :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} \langle F \rangle &= \lambda'(n) g w_o^{2n} \left\langle \left[\frac{2F}{\alpha w_o^n} (n+1) \right]^{(2n+1)/(n+1)} \right\rangle \geq \lambda'(n) g w_o^{2n} \\ &\quad \left\langle \frac{2F}{\alpha w_o^n} (n+1) \right\rangle^{(2n+1)/(n+1)} \end{aligned} \quad (5.18)$$

This result shows that Eq. 5.15 gives actually a lower bound for $\langle F \rangle$. This implies in particular that $\langle F \rangle$ diverge at a length $L \leq L^>$, where $L^>$ is given by

$$L^> = \frac{1}{g} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right) / \lambda'(n) \right] \left(\frac{\alpha}{2(n+1)} \right)^{(2n+1)/(n+1)} (w_0 F_0)^{-n/(n+1)} \quad (5.19)$$

In particular, at large w_0 , where $F_0 = \alpha w_0^n / 2(n+1)$, $L^>$ assumes the following simple form

$$L^> = \frac{\alpha}{2n} [\lambda'(n) g w_0^n]^{-1} \quad (5.20)$$

This means that $\langle F \rangle$ diverges more and more rapidly either at large g (strong disorder) or at large w_0 (large power). Furthermore, $\langle F^m \rangle$ diverges at finite L for every integer $m > 0$, and this because $\frac{d}{dL} \langle F^m \rangle \approx \langle F^{m+n(n+1)} \rangle$.

Assume now that beyond this length ($L_0 \leq L^>$), $W(F, L)$ reaches (if any) a stationary distribution. Then Eq. 5.17 leads to the following behavior for such a distribution

$$W(F, L) \approx A.F^{-(2n+1)/(n+1)} + B.F^{-n(2n+2)} \quad (5.21)$$

at large F and large L . This means that the stationary distribution does not exist. All the moments (as well as their derivatives) diverge : in particular such a distribution is not normalizable.

6. CONCLUSION

The main results of this paper have been summarized in the abstract and the introduction. In this final section we discuss some general features of our results and a number of open problems.

1. It is clear that the formalism we used here permits us to investigate a large class of problems, where non linearities enter through the intensity of the wave field. We have limited our attention to a simple form $f(u) = u^n$ of non linear terms in the wave field equation, but the derived results are actually very general and hold for different distributions of disorder. The generic behavior of transmission can be understood from Eq. 2.10 : $w(L) = w(0)/(1-r(L))$. Due to the random potential, the reflection coefficient increases and this results in a sensible enhancement of the non linear terms. For instance, in the case of fixed output, the usual exponential decay will dominate only at short distances or for very weak non linearities. At large length scales non linear terms dominate the transmission behavior and this can be viewed as a breakdown of the backscattering mechanism. The absence of a superposition principle is actually at the origin of this behavior.

2. Neglecting the generation of harmonics is not a serious limitation to our results : a higher group velocity corresponds to a larger localization length ξ and then a

weaker sensitivity to disorder. This approximation can be expressed in terms of a length scale condition for the range of application of the results.

3. The problems worked in this paper are relative to the stationary regime. The stability of such regime has not been addressed here and is still a completely open question.

4. Transmission through optical fibers are probably potential candidates for an experimental realization of the systems investigated in this paper.

Acknowledgements : The authors are grateful to Dr B.

SOUILLARD for sending a preprint of Refs. 4,5 prior to publication.

REFERENCES

1. P.W. ANDERSON, Phys. Rev. B, 109, 1492 (1958).
N.F. MOTT and W.D. TWOSE, Adv. Phys. 10, 107 (1961).
R. LANDAUER, Philos. Mag. 21 B 63 (1970).
For a recent review, see B. SOUILLARD, Phys. Rep. 103, 41 (1984).
2. B. DOUCOT and R. RAMMAL, Subm. to Journal de Physique (Paris) (1986).
3. R. BELLMAN and G.M. WING, An Introduction to invariant Imbedding (Wiley, New York, 1976).
4. P. DEVILLARD and B. SOUILLARD, J. Stat. Phys. 43, 423 (1986).
5. P. DEVILLARD, Thesis Troisième Cycle (Univ. Paris, 1986) unpublished.
6. See for instance A.E. KAPLAN, Sov. Phys. JETP 45, 896 (1977).
7. V.I. ARNOLD, Geometrical Methods in the theory of ordinary differential equations (Springer, New York, 1983).
8. R.H. LANG, J. Math. Phys. 14, 1291 (1973) ; see also J. HEINRICH, Phys. Rev. B33, 5261 (1986), and references therein.
9. See e.g., N.G. van KAMPEN, Stochastic processes in Physics and Chemistry (North-Holland, Amsterdam, 1981).
10. R. COURANT and D. HILBERT, Methods of mathematical physics, Vol. II, p. 139 (New York, Interscience Publ., 1962).
11. A similar invariant has been used in Refs. 4,5.
12. P.L. SULEM, Physica 70, 190 (1973). See also Ref. 4 above.

FIGURE CAPTIONS

- Fig. 1 : A typical characteristics (w, L) , obtained by numerical integration of Eq. 2.9 ($w_0 = 0.1$) for $f(u) = u$ and with a white-noise potential $V(x)$, corresponding to a localization length $\xi \approx 45$. The insert shows some orbits of the dynamical system : (a) $w_0 = 1$, (b) $w_0 = 10$ in the absence of disorder and (c) a perturbed orbit by randomness.
- Fig. 2 : Typical orbits (R_1, R_2) in the absence of the random potential, at $w_0 = \infty$ (a) and $w_0 \gg 1$ (b) respectively.
- Fig. 3 : Orbital motion in the phase space (r, θ) , $0 \leq r \leq 1$.
- Fig. 4 : Oscillatory behavior of the characteristics (w, L) of origin w_0 .
- Fig. 5 : Folding of the characteristics (w, L) as function of L .
 L_m and L_M are the periods of minima and maxima :
 $L_m \sim \alpha w^{-n/2}$, $L_M \sim w^{-n/(2n+2)}$.
- Fig. 6 : Schematic plot of the function $G(b)$ used in the text.
The values b_0 and b_1 of b are associated with the position of the turning points, of the periodic motion at fixed level $2F$.
- Fig. 7 : Diffusion like motion, towards large F , under the action of the random potential.
- Fig. 8 : Schematic behavior of the upper and lower bounds $r_1(L)$ and $r_2(L)$ of the reflection coefficient.
- Fig. 9 : The two dashed lines : $w \sim L^{1+1/n}$ and $w \sim L^{1/n}$ show the asymptotic envelopes for the characteristics (w, L) .
- Fig. 10 : Folds of a typical $r(L)$.

Fig. 11 : Schematic picture of the function $G(b)$ (as in Fig. 6) for small ($|\alpha| \ll 1$) and large ($|\alpha| \gg 1$) nonlinearities. Here b^* refers to the unstable fixed point and $b_{\min}$ is the initial value of b .

Fig. 12 : Orbital motion in the phase space (r, θ) , $0 \leq r \leq 1$, for negative values of α (compare with Fig. 3).

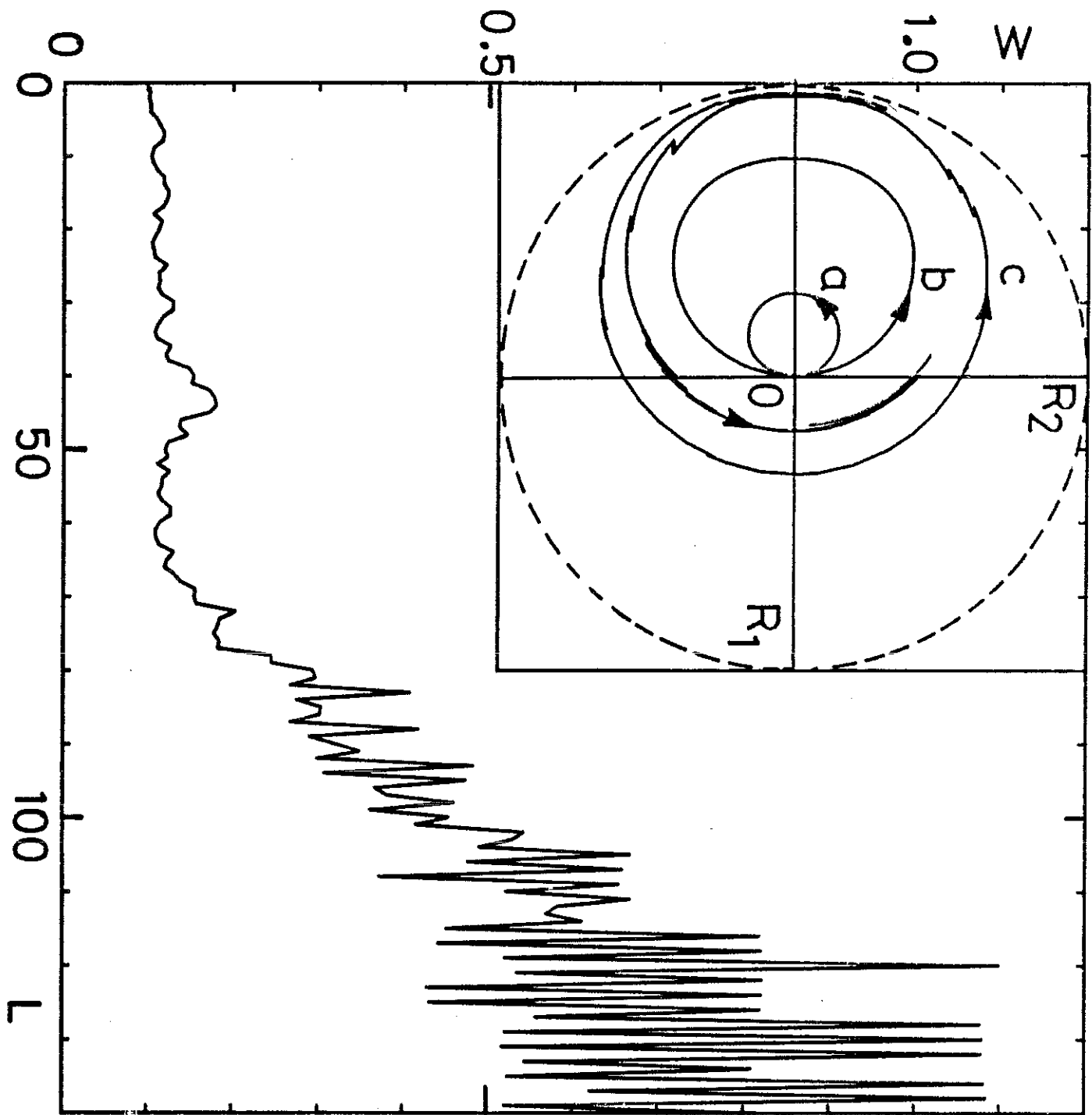


Fig. 1

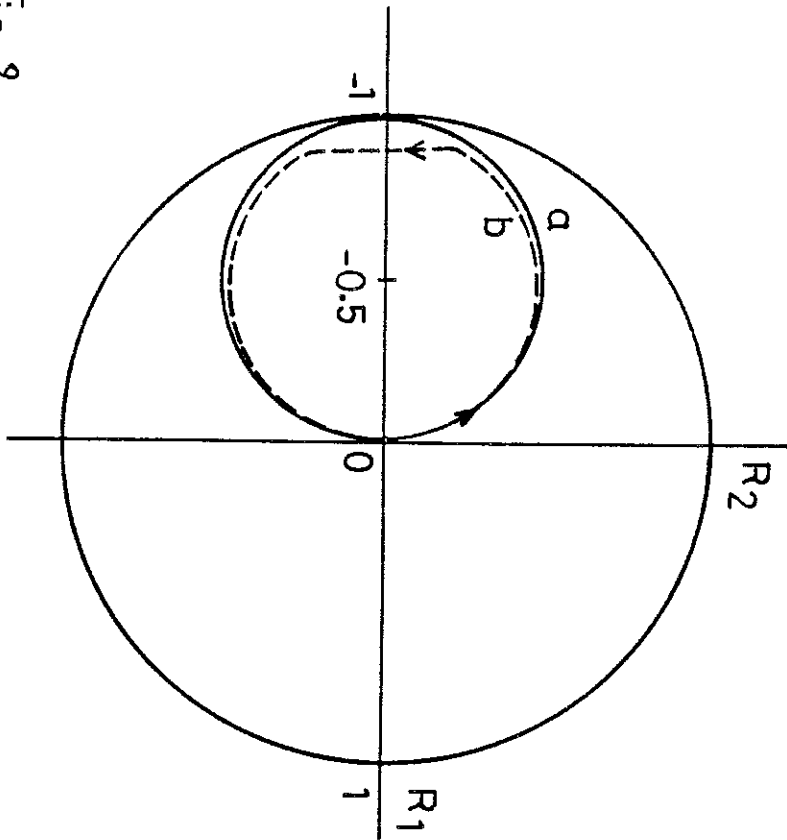


Fig. 2

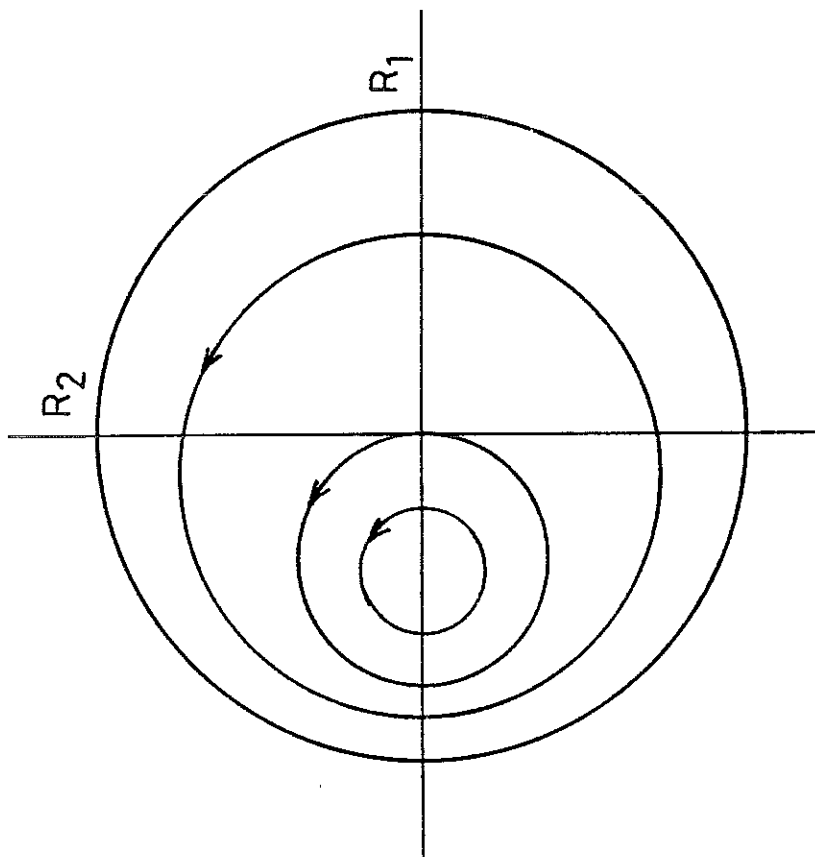


Fig.3

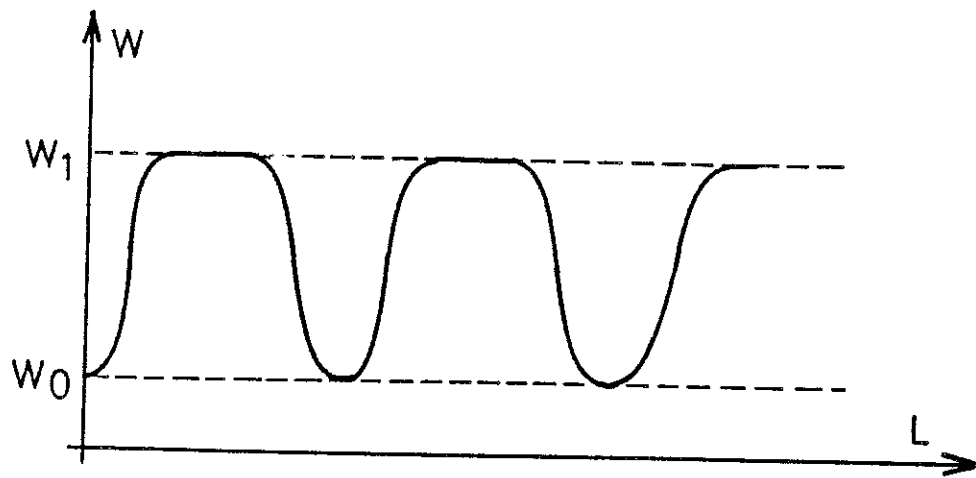


Fig. 4

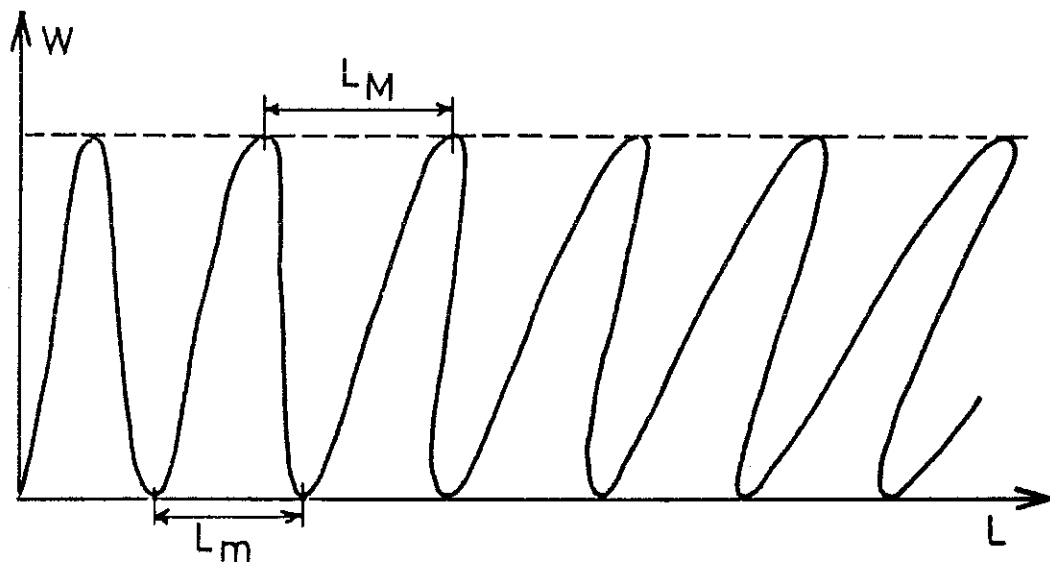


Fig. 5

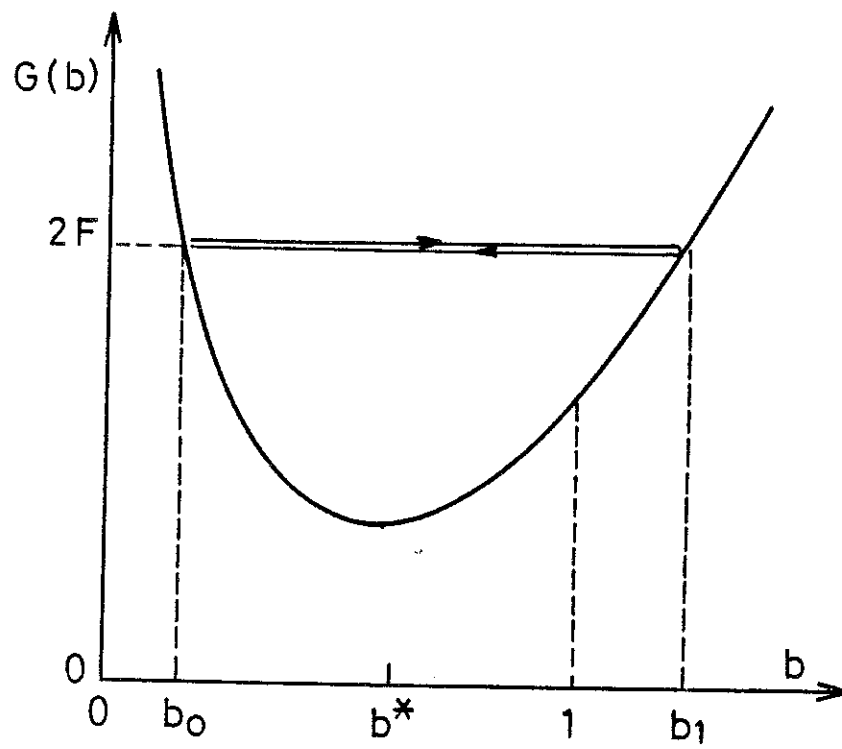


Fig. 6

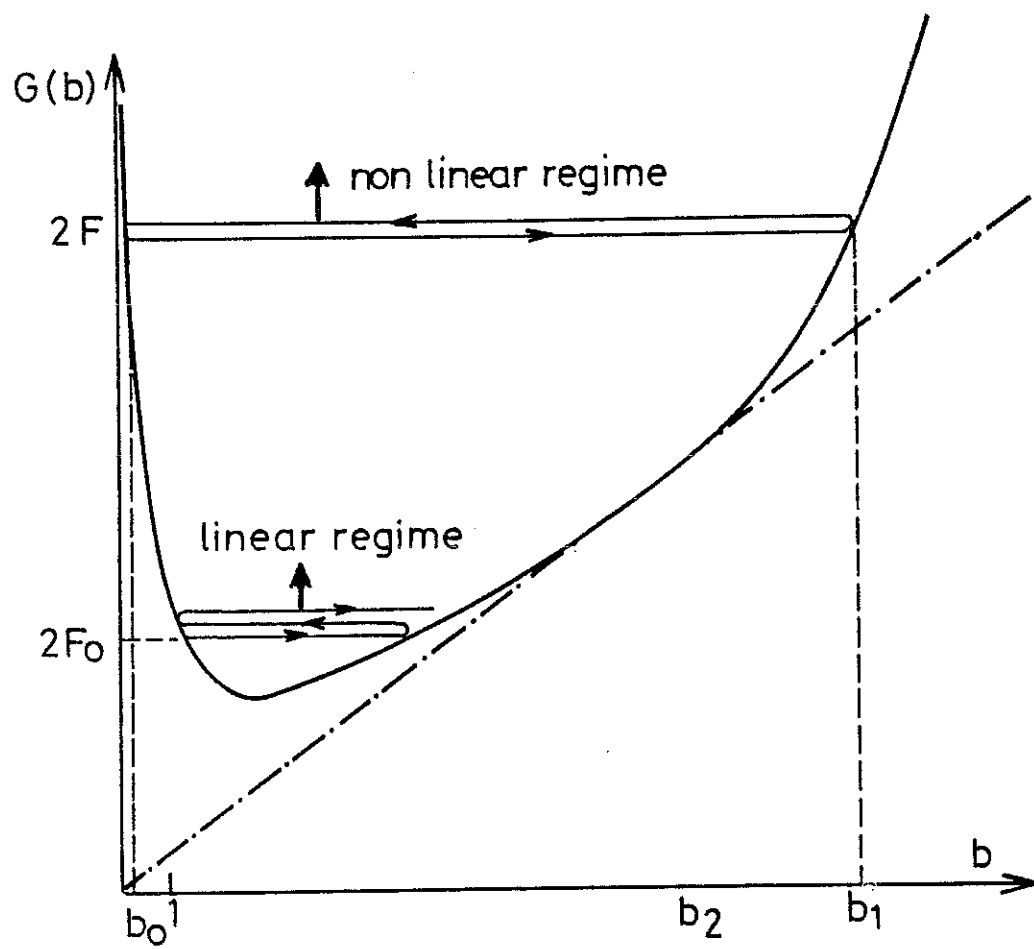


Fig. 7

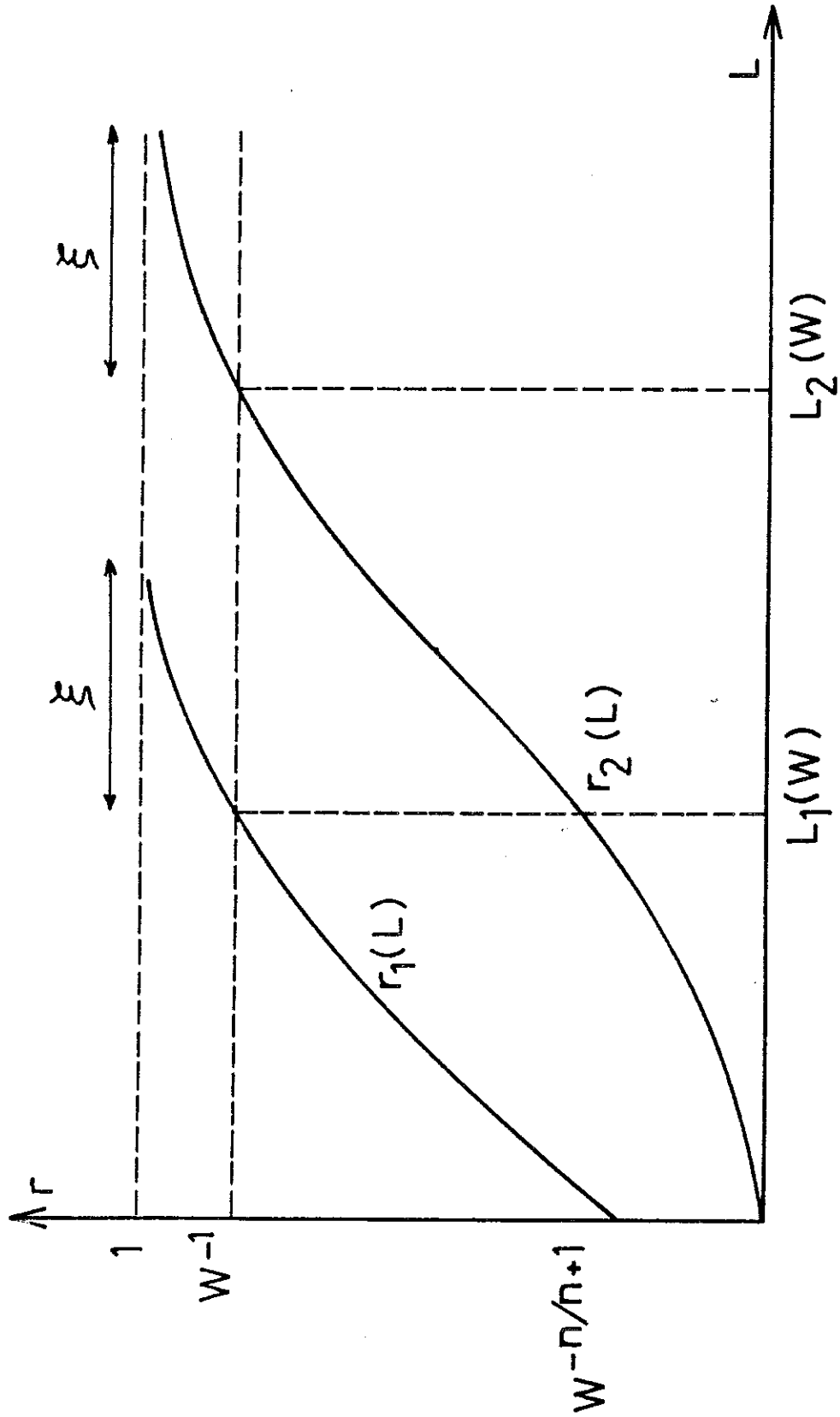


Fig. 8

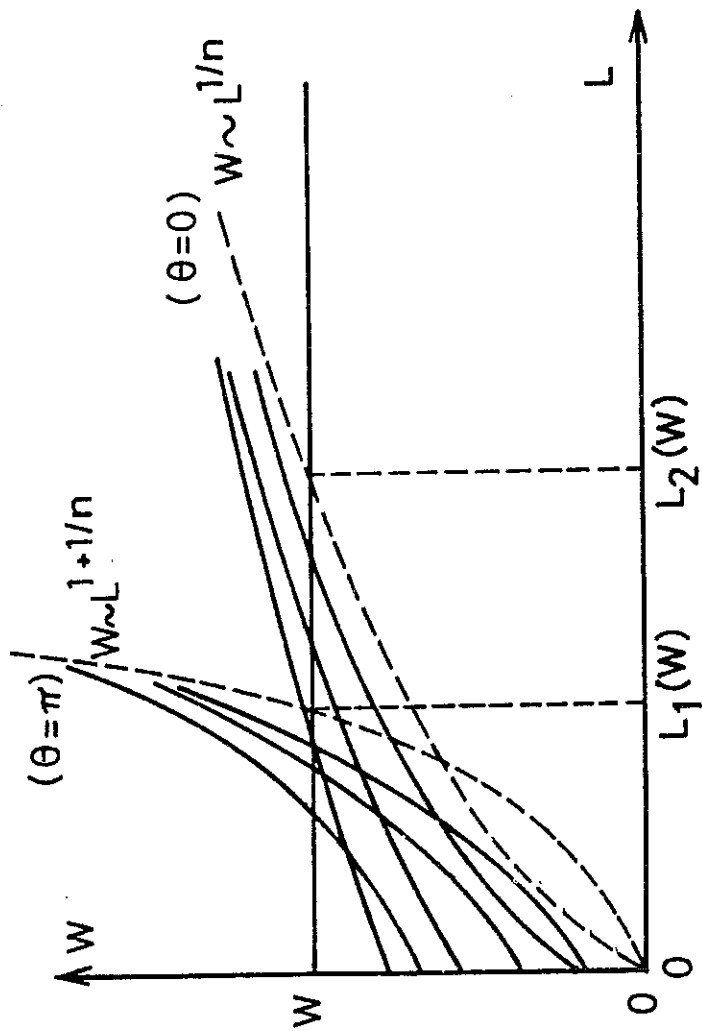


Fig. 9

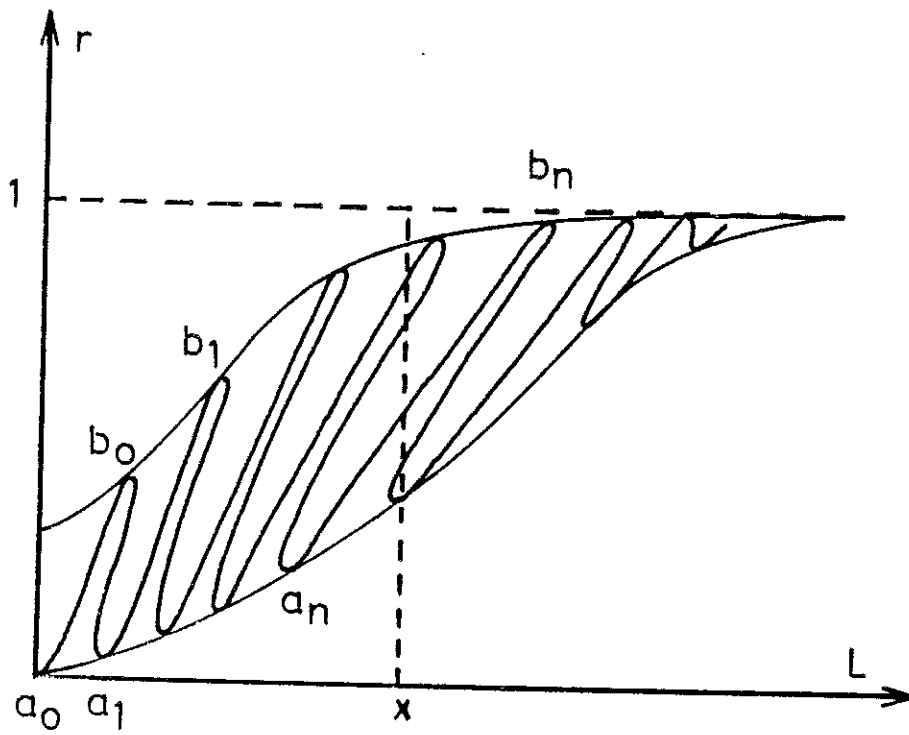


Fig. 10

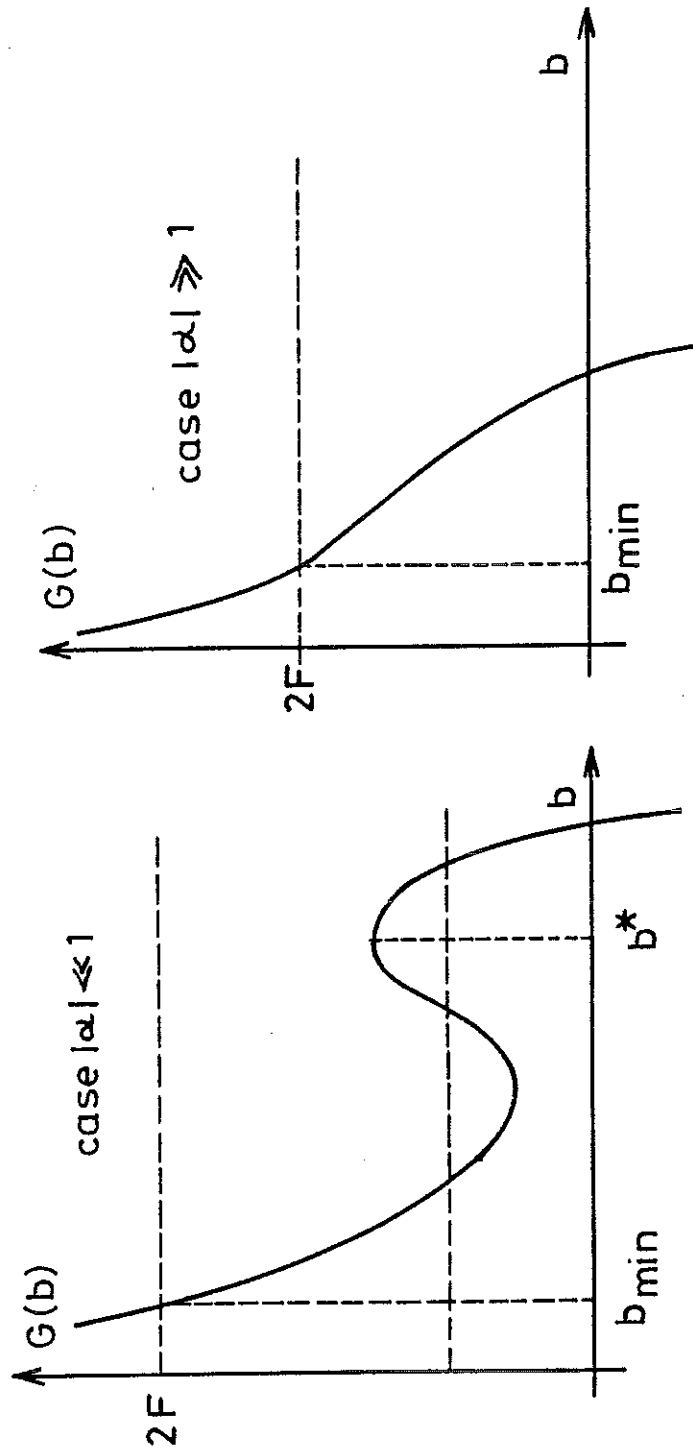


Fig. 11

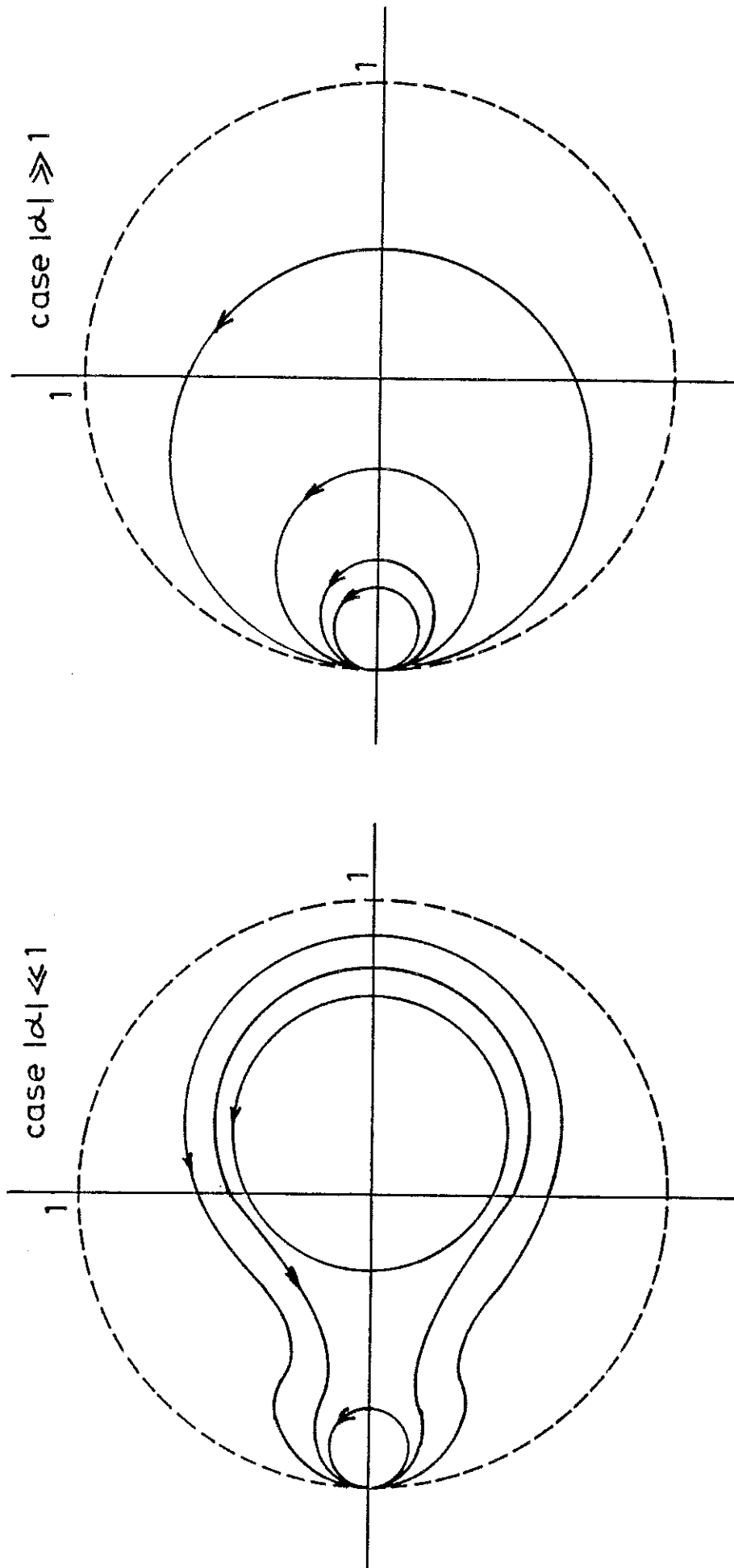


Fig. 12

CONCLUSION

Pour terminer, rappelons quelques thèmes qui ont été abordés dans cette thèse. Nous avons eu l'occasion d'insister à plusieurs reprises sur l'image de la localisation comme résultat d'une interférence constructive associée aux deux sens de parcours possibles d'un chemin fermé. Ce phénomène se révèle être très pur et très sensible à diverses perturbations, en particulier la présence d'un champ magnétique, la modification de l'énergie incidente de la particule et l'introduction d'une non-linéarité dans le milieu, trois mécanismes ayant fait l'objet de ce travail. Les méthodes employées ont été principalement de deux natures différentes. Dans un premier temps, nous avons utilisé la théorie de la localisation faible, qui repose sur un calcul de perturbations de la conductivité moyennée sur les réalisations possibles du désordre. Cela aboutit à une description quantitative très satisfaisante des oscillations de magnétorésistance observées dans des réseaux de conducteurs normaux. De manière complémentaire, nous avons ensuite cherché à obtenir des renseignements sur la distribution de probabilité de la résistance. L'idée, exposée de manière détaillée au chapitre IV revient à suivre l'évolution des quantités physiques intéressantes (coefficient de réflexion notamment) lorsque l'on ajoute au système un élément désordonné infinitésimal. Ce procédé engendre une équation différentielle (aux dérivées partielles lorsque l'intensité de l'onde intervient, dans le cas d'un milieu non linéaire) stochastique, que l'on transforme en équation de Fokker-Planck pour l'évolution de la distribution de probabilité. Pour l'instant, ce genre de méthode ne convient qu'aux systèmes unidimensionnels ou avec un petit nombre de canaux de propagation. Dans le chapitre II, nous retrouvons sur l'exemple de la période des oscillations de magnétorésistance la propriété des systèmes quasi unidimensionnels d'être parfois très mal décrits par les valeurs moyennes : la période d'oscillation de la distribution de probabilité peut différer (par un facteur 2) de celle d'un échantillon. Un critère simple pour la périodicité de la distribution de probabilité se dégage : elle

vaut h/e en général et $h/2e$ lorsque la longueur caractéristique associée au désordre (libre parcours moyen) est inférieure à la taille des boucles. A ce propos, nous avons souligné l'importance des détails microscopiques du modèle (concentration des impuretés, amplitude des fluctuations de potentiel). L'adéquation entre le comportement d'un échantillon et celui de la valeur moyenne requiert la présence d'un grand nombre de boucles et le choix de grandeurs auto-moyennantes comme le logarithme du coefficient de transmission. Le chapitre III nous a permis de voir que la modification de l'énergie incidente de la particule agit avec trois longueurs caractéristiques différentes selon que l'on considère les moments positifs, les moments négatifs ou le logarithme du coefficient de transmission, effet qui résulte de l'élargissement considérable de la distribution de probabilité dans ces systèmes. Enfin, nous présentons des résultats sur l'influence d'une non-linéarité (équation de type Schrödinger non linéaire) : atténuation en loi de puissance de la longueur du coefficient de transmission, lorsque l'on travaille à intensité sortante fixée et atténuation exponentielle, après un régime transitoire dans le cas où l'intensité entrante est imposée.

Les deux types de méthodes évoquées apparaissent donc comme complémentaires. Le problème de passer de l'un à l'autre nous semble important et non complètement éclairci. Partant de la théorie perturbative, on peut rejoindre la distribution de probabilité en faisant un calcul des moments de cette distribution. Dans l'autre sens, il est intéressant de chercher à augmenter le nombre de canaux dans des systèmes quasi unidimensionnels afin de pouvoir travailler directement sur la distribution de probabilité en dimension plus grande que un. Peut-être faudra-t-il imaginer une théorie d'échelle portant non plus sur la conductance moyenne mais sur sa distribution de probabilité ? Dans cette dernière éventualité, comment interviennent les détails microscopiques des modèles (distribution de probabilité du désordre) ? Ces questions nous sont seulement suggérées par ce travail. Très certainement leur portée s'étend au-delà du seul problème de la localisation pour rejoindre d'autres domaines où le désordre joue un rôle essentiel, qui n'a pas fini de nous surprendre !

DOUCOT Benoît

Sujet : "Effets cohérents dans les systèmes désordonnés" :
Oscillations de magnétorésistance dans des réseaux
de métaux normaux - Influence d'une non linéarité
du milieu"

Résumé

Cette thèse a pour thème principal l'influence du désordre sur la propagation d'une particule ou d'une onde. Dans le premier chapitre, nous développons une méthode de calcul des corrections quantiques à la conductivité électrique dans une géométrie de réseau, dans le cadre de la théorie de la localisation faible. Nous présentons des calculs complets pour différentes géométries (réseaux carré et nid d'abeilles, échelles, tamis de Sierpinski). Ces calculs sont confrontés à des données expérimentales récentes sur les oscillations de magnétorésistance de réseaux conducteurs normaux. Un très bon accord quantitatif est obtenu. Le second chapitre pose le problème de la période des oscillations de magnétorésistance dans un système désordonné. Nous montrons que la distribution de probabilité de la résistance d'un système de boucles en série oscille avec la période h/e (flux par boucle) ou avec la période $h/2e$, selon que le libre parcours moyen est supérieur ou inférieur à la taille des boucles. Nous soulignons le rôle des fluctuations d'échantillon à échantillon dans ces systèmes. Dans un troisième chapitre, nous étudions l'influence d'une légère variation de l'énergie incidente sur les propriétés de transmission d'une chaîne unidimensionnelle désordonnée. Plusieurs longueurs de décorrélation apparaissent selon la quantité physique considérée. Enfin, le dernier chapitre s'intéresse à la transmission d'une onde dans un milieu unidimensionnel désordonné et non-linéaire. A intensité entrante fixée, on retrouve une atténuation exponentielle de la transmission avec la longueur. Par contre, à intensité sortante fixée, la non linéarité l'emporte et une décroissance polynomiale apparaît.

Mots clés : Localisation d'Anderson - Localisation faible - Effet Aharonov-Bohm - Effet Sharvin-Sharvin - Equation de Fokker-Planck - Fluctuations d'échantillon à échantillon - Equation de Schrödinger non linéaire stochastique.

