

THESE

présentée par

Benoît CHABAUD

Ingénieur de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

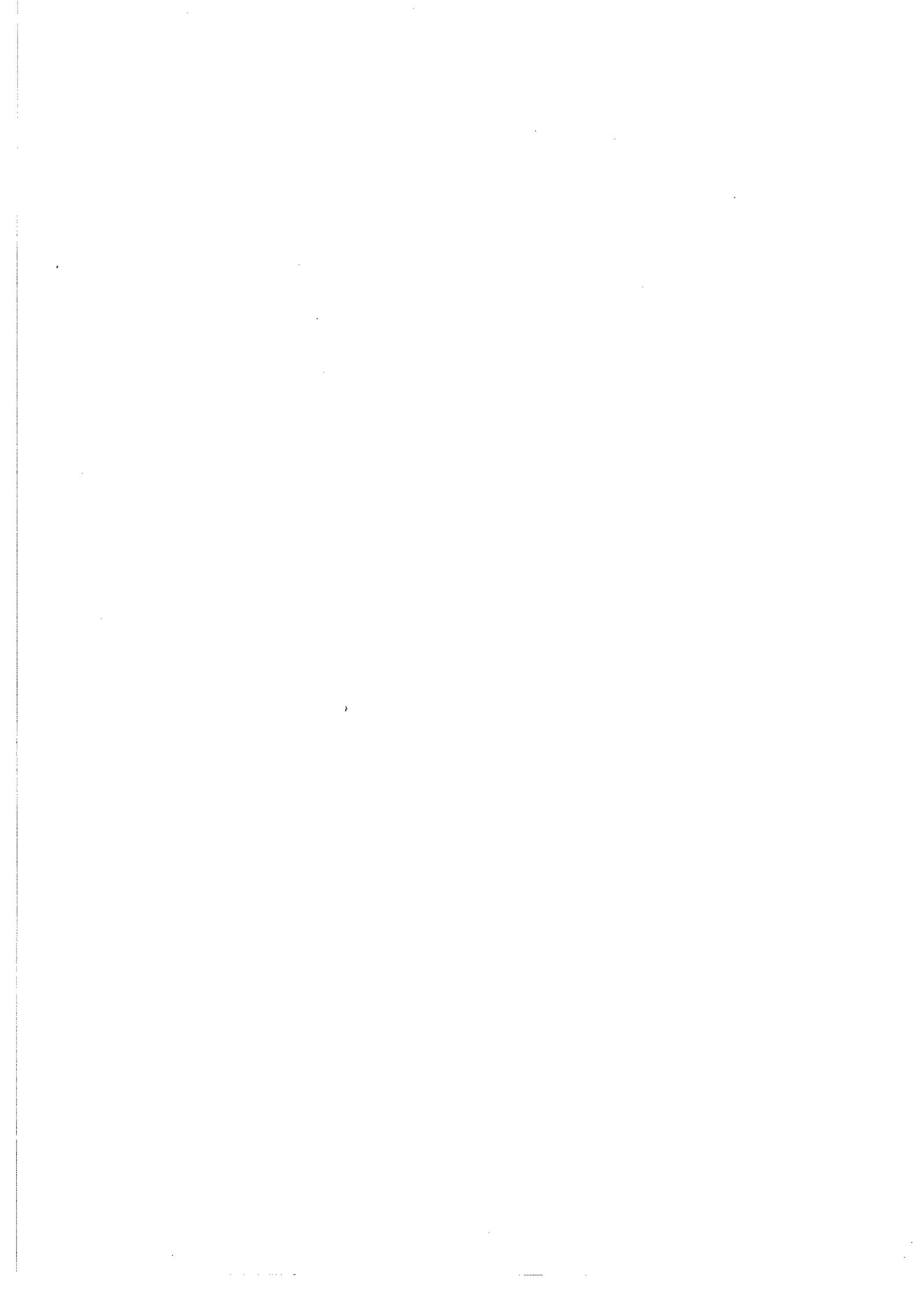
pour obtenir le titre de Docteur
de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I
(arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 23 novembre 1988)

Spécialité : Physique

ETUDE DE LA TURBULENCE DANS UN JET D'HELIUM GAZEUX A BASSE TEMPERATURE

Date de soutenance : Le 7 juillet 1992
Composition du jury :
Président : M. M. VALLADE
Rapporteurs : M. S. FAUVE
M. Y. GAGNE
Examineurs : M. Y. COUDER
M. R. TOURNIER
M. B. CASTAING

Thèse préparée au sein du Centre de Recherches sur les Très Basses Températures, CNRS Grenoble



Monsieur Jacques FLOUQUET m'a accueilli au C.R.T.B.T. au début de ma thèse, et je l'en remercie sincèrement.

Monsieur Pierre MONCEAU, promu peu après à la tête du laboratoire, m'a conservé parmi ses effectifs. Je lui en suis grandement reconnaissant.

Ce travail a été effectué sous l'éminente direction de Bernard CASTAING. C'est avec une confiance (presque) aveugle que je l'ai suivi dans les tourments de la turbulence, et ces trois années furent non seulement d'un enrichissement intense, mais surtout hautement exaltantes... Merci!

Pendant cette thèse, j'ai aussi été le "disciple" de Bernard HEBRAL. Qu'il soit ici vivement remercié pour avoir eu confiance en moi plus que moi-même, ainsi que pour les encouragements et les principes expérimentaux qu'il m'a prodigués sans faiblir.

Au cours de ces deux dernières années, j'ai eu le plaisir de travailler avec Joachim PEINKE. Je lui suis très reconnaissant d'avoir réussi quelquefois à m'arrêter dans ma perpétuelle agitation... pour prendre le temps de discuter de problèmes fondamentaux de Physique.

Je suis probablement un jour ou l'autre, allé déranger tous les membres du laboratoire, pour leur demander soit des conseils, soit quelque matériel... et je ne peux tous les remercier nominativement.

Cependant, ma sincères reconnaissance va particulièrement à Messieurs Jean-Louis BRET et Jean-Paul FAURE, dont le dévouement et la compétence ont été indispensables pour nous permettre d'obtenir un signal digne de ce nom...

De même, j'adresse mes remerciements à MM. Bernard PANNETIER et Jean GENESTE, pour les très profitables discussions, et le temps qu'ils nous ont consacré sans compter, ainsi qu'à Thierry FOURNIER pour les analyses à la microsonde qu'il a réalisées pour nous avec beaucoup de soin.

Ce travail n'aurait pu être mené à bien sans la haute compétence de Jean BERTHET qui a construit l'un des plus beaux cryostat de sa carrière, de Joseph D'ONOFRIO qui a monté "l'usine à gaz" de cette expérience, et de Georges BATTUZ dont l'aide et les conseils me furent précieux au début de ce travail.

Trois stagiaires sont venus participer à l'élaboration de cette expérience: Philippe PIOGER, Olivier CHANAL, et Antoine NAERT. Qu'ils soient remerciés pour l'aide et l'enthousiasme qu'ils nous ont apportés.

Je remercie aussi Danièle DEVILLERS, qui a assuré la frappe de l'essentiel de ce manuscrit, à une vitesse simplement prodigieuse...

Que Catherine trouve enfin ici l'expression de ma tendre reconnaissance, pour son aide morale précieuse au cours de ces trois années. Et qu'Abel soit remercié pour nous avoir raisonnablement laissé dormir au cours de cette difficile période de rédaction...

TABLE

	<i>Pages</i>
INTRODUCTION	11
CHAPITRE 1 : MOTIVATIONS D'ORDRE EXPERIMENTAL ET	
THEORIQUE	15
1. Motivations expérimentales	15
1.1. Présentation de l'expérience	15
1.1.1. <i>Nombre de Reynolds et turbulence</i>	15
1.1.2. <i>Objectif expérimental</i>	17
1.1.3. <i>Echelle de Taylor et R_λ</i>	17
1.2. Contexte scientifique et technologique	19
1.2.1. <i>Originalité de l'expérience</i>	19
1.2.2. <i>Situation dans le cadre du laboratoire</i>	21
2. Motivations fondamentales	22
2.1. Phénoménologie de la turbulence	22
2.1.1. <i>Cascade d'énergie et première théorie de</i> <i>Kolmogorov</i>	22
2.1.2. <i>Mise en évidence expérimentale de l'intermittence</i> ..	25
2.2. L'intermittence en turbulence développée	29
2.2.1. <i>Le modèle log-normal</i>	29
2.2.2. <i>Prédiction sur les moments de u_r</i>	32
2.2.3. <i>Le modèle fractal</i>	34
2.2.4. <i>Le modèle multifractal</i>	36
2.3. Une approche variationnelle.....	37
2.3.1. <i>Loi de distribution des différences de vitesse</i>	38
2.3.2. <i>Remise en cause de l'hypothèse h^2</i>	41
2.3.3. <i>Spectres de puissance</i>	43
Références Chapitre I	45

CHAPITRE II : MONTAGE EXPERIMENTAL	49
1. Objectifs et impératifs de l'expérience	49
1.1. Nombre de Reynolds dans un jet.....	49
1.2.. Contraintes dimensionnelles.....	52
2. Le système expérimental	53
2.1. Le cryostat	53
2.2. Les radiateurs à hélium liquide	54
2.3. Admission du gaz	56
2.4. La buse	57
2.5. La chambre d'expérience	59
3. Paramètres de contrôle du jet	60
3.1. Mesure des débits	60
3.2. Mesure des températures et pressions	62
3.3. Régulation du débit du jet	63
Références Chapitre II	65
CHAPITRE III : LE DETECTEUR DE VITESSE	69
1. Principe de fonctionnement et réalisation	
expérimentale	69
1.1. Adaptation du principe du fil chaud	69
1.2. Constitution du détecteur	71
1.3. Les essais préliminaires	72
1.4. Le détecteur tel qu'il existe	77
2. Modélisation du comportement du détecteur	78
2.1. Comportement statique	78
2.2. Comportement dynamique	84
2.2.1. <i>Effet d'une fluctuation de vitesse</i>	84
2.2.2. <i>Temps de réponse du détecteur</i>	88
3. Comportement expérimental du détecteur	90
3.1. Caractérisation du fil chaud	90
3.1.1. <i>Courbe $R = f(T)$</i>	90
3.1.2. <i>Caractéristique courant-tension</i>	92

3.2. Fonctionnement du détecteur in situ : l'électronique de mesure	94
3.2.1. <i>Principe de fonctionnement</i>	95
3.2.2. <i>Détection alternative à 500 kHz</i>	96
3.2.3. <i>Détection modulée à 10 MHz</i>	98
3.2.4. <i>Réponse en fréquence</i>	100
4. Etalonnage du détecteur	102
4.1. Lois d'étalonnage	102
4.1.1. <i>Fil chaud classique</i>	102
4.1.2. <i>Modification de la loi de King</i>	103
4.2. Procédures d'étalonnage.....	104
4.2.1. <i>Etalonnage à partir de la vitesse turbulente moyenne</i>	104
4.2.2. <i>Etalonnage à partir de la vitesse laminaire</i>	106
Références Chapitre III	108
CHAPITRE IV : PREMIERES MESURES EXPERIMENTALES	113
1. Acquisition du signal	113
1.1. Spectres de puissance	113
1.2. Enregistrement en temps réel	114
2. Analyse des données	115
2.1. Présentation des enregistrements	115
2.2. Etude des histogrammes du signal	116
2.2.1. <i>Remarques préliminaires</i>	116
2.2.2. <i>Histogrammes des différences de vitesse</i>	118
2.3. Etude des spectres de puissance	122
2.3.1. <i>Observations qualitatives</i>	122
2.3.2. <i>Représentation universelle</i>	123
2.3.3. <i>Perspectives</i>	125
Références Chapitre IV	126
CONCLUSION	129
ANNEXE I	131
ANNEXE II	133
ANNEXE III	139

INTRODUCTION

Nous vivons dans un univers turbulent ... Du sillage d'un véhicule ou d'un navire, à la formation d'une tornade, en passant par le brassage d'une tasse de café, la grande majorité des écoulements fluides que nous pouvons observer quotidiennement sont turbulents.

Pour les hydrodynamiciens, ces écoulements apparemment très différents relèvent de la même physique. De fait, les équations de Navier-Stokes, établies dans la première moitié du XIX^{ème} siècle, sont susceptibles de décrire tous les écoulements relevant de la mécanique des milieux continus déformables incompressibles.

Cependant, de par leur non-linéarité, ces équations ne sont généralement pas solubles analytiquement. Depuis plus d'un siècle et demi, différentes voies ont donc été explorées pour comprendre et résoudre les problèmes de la mécanique des fluides.

L'aérodynamique s'est par exemple développée sur la base d'hypothèses simplificatrices légitimées par l'expérience (approximation du fluide parfait, couche limite ...).

Plus récemment, de nombreux problèmes d'hydrodynamique expérimentale et fondamentale ont été étudiés par simulation numérique. Si cette méthode ne permet pas encore de modéliser des écoulements fortement turbulents, elle autorise en revanche une vision très détaillée du champ de vitesse en tout point de l'espace.

Enfin, l'aspect aléatoire et désordonné des écoulements turbulents a conduit très tôt les physiciens à suivre une approche statistique : on a ainsi cherché à mettre en évidence le caractère universel de la turbulence, à l'exemple de l'universalité des équations de Navier-Stokes. En particulier, la compréhension de la correspondance entre divers écoulements turbulents ou entre diverses échelles au sein d'un même écoulement, constitue un objectif central de l'approche statistique.

Dans ce contexte encore très ouvert, les difficultés expérimentales propres aux mesures hydrodynamiques résident essentiellement dans la très large étendue des échelles de mesure couvertes. Par exemple, dans le cas de la turbulence atmosphérique, les grandes structures tourbillonnaires

peuvent s'étendre sur quelques centaines de kilomètres, alors que la viscosité s'exerce sur des échelles millimétriques ... Par conséquent, on conçoit qu'il n'est pas aisé de réaliser en laboratoire des écoulements bien caractérisés, ni d'y effectuer des mesures spatiales ou temporelles sur des échelles couvrant plusieurs ordres de grandeur.

C'est néanmoins l'objectif que nous avons cherché à atteindre au cours de cette étude, et ceci dans le cadre d'un jet d'hélium gazeux à basse température. L'hélium constitue en effet un fluide d'étude hydrodynamique idéal, dans la mesure où d'une part sa faible viscosité permet d'atteindre un fort taux de turbulence, et où les basses températures autorisent d'autre part la mise en oeuvre de techniques cryogéniques fines de mesure.

Ce manuscrit est divisé en 4 chapitres. Nous présenterons d'abord les motivations expérimentales et théoriques à l'origine de cette étude ; nous décrirons ensuite le système expérimental, et consacrerons un chapitre entier aux détecteurs que nous avons réalisés et utilisés. Nous terminerons en présentant les premières mesures que nous avons obtenues, et que nous chercherons à interpréter à la lumière des théories actuelles de l'hydrodynamique physique.

CHAPITRE I

MOTIVATIONS D'ORDRE EXPERIMENTAL ET THEORIQUE

Le but de ce premier chapitre est de situer l'expérience que nous avons réalisée dans le cadre de l'étude de la turbulence.

Après avoir replacé cette expérience dans le contexte scientifique actuel des études d'hydrodynamique physique, nous présenterons dans une seconde partie, les motivations fondamentales à l'origine de cette expérience : nous rappellerons les grandes lignes des modèles log-normal et multifractal, puis nous présenterons l'approche variationnelle à laquelle seront confrontés nos résultats dans le dernier chapitre de ce mémoire.

1. MOTIVATIONS EXPERIMENTALES

1.1. Présentation de l'expérience

1.1.1. Nombre de Reynolds et turbulence

Il est d'usage de caractériser les écoulements ouverts par un nombre sans dimension, proposé par Reynolds en 1883, et défini par :

$$Re = \frac{\rho UL}{\eta} = \frac{UL}{\nu}$$

où ρ est la masse volumique du fluide considéré (kg/m^3), η sa viscosité propre (Poiseuille $\equiv \text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$) et $\nu = \eta/\rho$ sa viscosité cinématique (m^2/s). U est la vitesse moyenne de l'écoulement considéré, et L une longueur caractéristique.

Le nombre de Reynolds exprime le rapport entre les effets inertiels d'un écoulement et ses effets visqueux : un nombre de Reynolds faible ($Re \lesssim 1$) correspond généralement à un écoulement laminaire, alors qu'un Reynolds élevé ($Re \gg 1$) caractérise un écoulement turbulent.

L'étude expérimentale de la turbulence à très grand nombre de Reynolds s'effectue généralement, soit sur des systèmes de très grandes

dimensions (turbulence atmosphérique ou océanique : $L \approx$ quelques dizaines à quelques centaines de kilomètres et $Re \approx 10^9$ à 10^{10}), soit sur des écoulements forcés à vitesse élevée (soufflerie subsonique ou supersonique : $Re \approx 10^7$ ou 10^8).

Certaines expériences avec des liquides de faible viscosité cinématique (en particulier le mercure : voir tableau I.1) ont été réalisées, mais ne permettent pas d'atteindre des nombres de Reynolds très élevés, et nécessitent souvent le développement de techniques de mesure très spécifiques (fluides conducteurs ou corrosifs ...).

Fluide	T(K)	η (Poiseuilles)	ρ (g/cm ³)	ν (m ² /s)
Air	293	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$
Eau	293	$1,0 \cdot 10^{-3}$	1,0	$1,0 \cdot 10^{-6}$
Mercure	293	$1,6 \cdot 10^{-3}$	13,6	$1,2 \cdot 10^{-7}$
H ₂ liq	20	$1,1 \cdot 10^{-5}$	$7,0 \cdot 10^{-2}$	$1,6 \cdot 10^{-7}$
H ₂ gaz	20	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$1,3 \cdot 10^{-7}$	$8,5 \cdot 10^{-3}$
N ₂ liq	77	$1,6 \cdot 10^{-4}$	0,807	$2,0 \cdot 10^{-7}$
N ₂ gaz	77	$6,5 \cdot 10^{-6}$	$4,6 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-6}$
He liq	4,2	$3,6 \cdot 10^{-6}$	0,125	$2,9 \cdot 10^{-8}$
He gaz	4,2	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$1,7 \cdot 10^{-2}$	$6,5 \cdot 10^{-8}$

Tableau I.1 : Viscosité de quelques fluides à la pression atmosphérique (d'après [I.2] et [I.3]).

L'utilisation de fluides cryogéniques pour des expériences d'hydrodynamique physique (principalement l'azote ou l'hélium [I.1]), est relativement récente, et exige une infrastructure assez lourde.

1.1.2. Objectif expérimental

L'objectif que nous nous sommes fixés au début de cette étude consistait à réaliser un jet axisymétrique subsonique d'hélium gazeux à basse température ($T \approx 4$ K).

La viscosité cinématique de l'hélium gazeux compte en effet parmi les plus faibles de tous les fluides (cf. tableau I.1), et permet d'atteindre des nombres de Reynolds élevés à l'intérieur d'une chambre expérimentale tenant dans un cryostat (diamètre de la chambre d'expérience ≈ 13 cm).

Les plus hauts nombres de Reynolds accessibles avec cette expérience sont de l'ordre de 10^6 :

$U \equiv$ vitesse du gaz en sortie de la buse ≈ 60 m/s

$L \equiv$ diamètre de la buse ≈ 1 mm

$\nu \equiv$ viscosité cinématique de l'hélium gazeux à 4 K $\approx 6,5 \cdot 10^{-8}$ m²/s.

Le choix d'une géométrie de jet axisymétrique provient, quant à lui, du fort taux de turbulence intrinsèque à ce type d'écoulement. En effet, la moyenne quadratique des fluctuations de vitesse $\langle u^2 \rangle^{1/2}$ au sein d'un jet peut atteindre 25 % de sa vitesse moyenne U [I.4].

1.1.3. Echelle de Taylor et R_λ

Tel que nous l'avons défini au paragraphe 1.1.1., le nombre de Reynolds ne permet pas de comparer la turbulence d'un jet à celle d'autres types d'écoulements (tunnel, sillage, couche de mélange, ...). En effet, le choix d'une longueur caractéristique L est souvent arbitraire, et ne conduit pas à des équivalences directes entre diverses géométries.

C'est pourquoi on utilise plutôt un nombre de Reynolds basé sur la longueur de Taylor, permettant de quantifier le taux propre de turbulence indépendamment de l'écoulement considéré.

Cette échelle de Taylor dépend du taux de dissipation d'énergie ε au sein du fluide. Nous verrons au paragraphe 2.1.1. que l'énergie cinétique

turbulente d'un écoulement, finit par se dissiper en chaleur sous l'effet de la viscosité du fluide.

Ainsi, le carré de la longueur de Taylor λ s'écrit (voir [1.5] par exemple) :

$$\lambda^2 \approx \frac{15 \nu \langle u^2 \rangle}{\varepsilon}$$

où $\langle u^2 \rangle$ est le carré de la moyenne quadratique des fluctuations de vitesse dans l'écoulement, et ε est le taux de dissipation d'énergie par unité de temps et par unité de masse du fluide.

L'échelle λ caractérise donc le rapport entre les fluctuations de vitesse au sein du fluide et l'énergie qui s'y trouve dissipée sous l'effet de la viscosité.

Par suite, le nombre de Reynolds R_λ basé sur cette échelle constitue une mesure du taux propre de turbulence de l'écoulement :

$$R_\lambda = \frac{\langle u^2 \rangle^{1/2} \lambda}{\nu}$$

On peut estimer une relation entre le nombre de Reynolds usuel et le R_λ , en remarquant que le taux de dissipation d'énergie ε est relié (pour un écoulement donné) aux fluctuations de vitesse du fluide u par (cf. § 2.1.1.) :

$$\varepsilon \sim \frac{\langle u^2 \rangle^{3/2}}{L}$$

où L est la dimension macroscopique du système considéré. On aura alors :

$$\begin{aligned} R_\lambda^2 &= \frac{\langle u^2 \rangle \lambda^2}{\nu^2} \\ &\approx 15 \frac{\langle u^2 \rangle^{1/2} L}{\nu} \end{aligned}$$

En notant Re_f le nombre de Reynolds basé sur les fluctuations quadratiques moyennes de vitesse $\langle u^2 \rangle^{1/2}$, on aura alors:

$$R_\lambda \approx \sqrt{15 Re_f}$$

Dans le cas du jet, il a été montré que la relation quantitative entre le Reynolds du jet et le R_λ s'écrivait [I.6] :

$$R_\lambda \approx 1,74 \sqrt{Re}$$

Notre expérience doit donc nous permettre d'atteindre des nombres de Reynolds voisins de $R_\lambda \approx 1740$.

Le tableau qui suit regroupe quelques ordres de grandeur de nombres de Reynolds couramment rencontrés dans la nature et au laboratoire :

	Re
Paramécie	10^{-2}
Poisson rouge	10^4
Nageur	10^6
Paquebot	10^8
Soufflerie de l'ONERA	10^8
Sous-marin	10^9
Turbulence atmosphérique	10^{10}

Tableau I.2 : Quelques nombres de Reynolds

1.2. Contexte scientifique et technologique

1.2.1. Originalité de l'expérience

Les faibles dimensions de la chambre expérimentale sont particulièrement intéressantes à deux titres :

En premier lieu, le nombre de Reynolds peut être modulé à géométrie constante, en jouant simplement sur la viscosité cinématique de l'hélium par l'intermédiaire de la pression dans la chambre d'expérience (cf. figure I.1). Ceci nous permet de couvrir proprement plusieurs ordres de grandeur du nombre de Reynolds, en particulier autour de la valeur $R_\lambda = 130$ qui semble constituer un seuil de transition vers un régime ultime de turbulence (cf. § 2.3.3.).

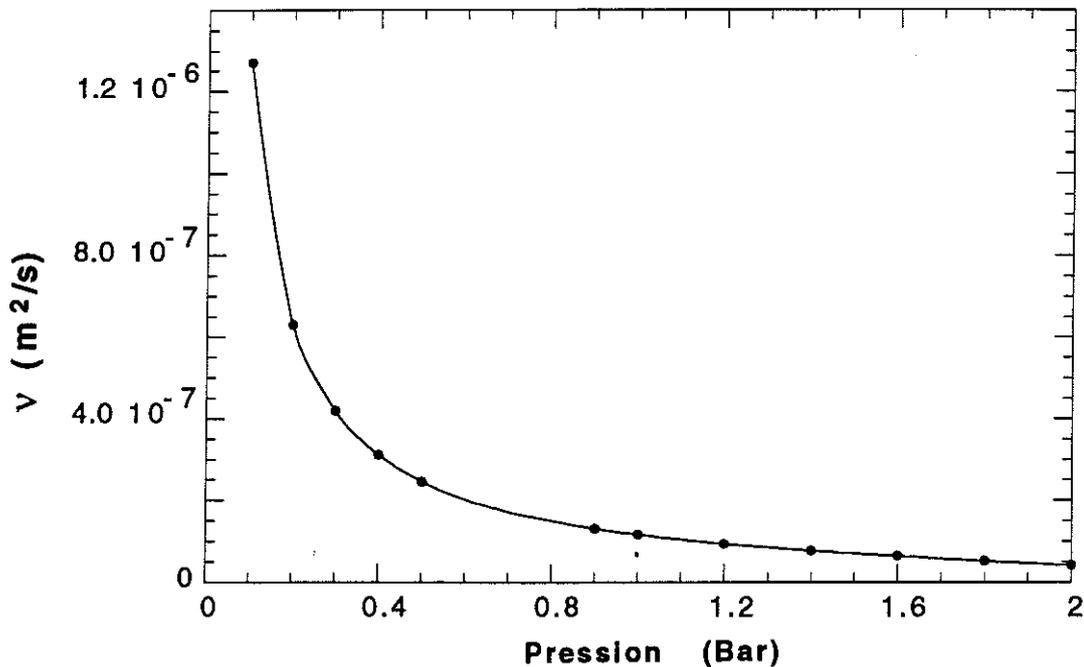


Figure I.1 : Viscosité cinématique de l'hélium gazeux à 5 Kelvin en fonction de la pression.

En second lieu, cette expérience doit nous ouvrir l'accès à l'étude des écoulements à faible nombre de Reynolds. En effet, pour un même nombre de Reynolds fixé, une diminution de la pression dans le jet correspond à une augmentation de la vitesse moyenne et fluctuante de l'écoulement. Cette augmentation des fréquences de fluctuation de vitesse dans le jet nous permet donc de réaliser des enregistrements de la vitesse au sein de l'écoulement, qui soient suffisamment longs pour pouvoir être traités d'un point de vue statistique (10^6 points de mesure typiquement, cf. § 2.2.2.), mais qui puissent cependant être effectués en un temps relativement court (de l'ordre de la minute), et dans un écoulement stable.

Ces deux points forts nous distinguent des expériences de jet réalisées dans l'eau ou l'air, lesquelles permettent parfois d'atteindre des nombres de Reynolds plus élevés, mais sont alors de dimensions considérables (souffleries de quelques mètres de diamètre ...).

La réduction des dimensions expérimentales s'accompagne cependant de contraintes sévères, en particulier au niveau des détecteurs utilisés, qui doivent être de très petites dimensions et répondre à des fréquences élevées (voir chapitre III).

1.2.2. Situation dans le cadre du laboratoire

La réalisation d'une expérience d'hydrodynamique physique au CRTBT trouve sa place d'un point de vue technologique aussi bien que du point de vue de la physique fondamentale.

Remarquons d'abord que, si l'utilisation d'hélium comme fluide d'étude hydrodynamique est nouvelle et originale, par contre, l'infrastructure cryogénique de l'expérience, est tout à fait similaire à celle de l'ensemble des expériences du site : le cryostat, construit dans les ateliers du laboratoire, ne présente pas d'autre originalité que celle de posséder une cellule expérimentale vide ... dans laquelle se développe le jet (cf. § II.2.5.) et le système de pompage et de récupération de l'hélium est semblable à celui existant sur toutes les expériences du laboratoire, à ceci près que les conduites sont plus largement dimensionnées, et que les débits de gaz constituent un élément central des mesures (cf. § II.3.1.).

Du point de vue de la physique ensuite, soulignons que l'étude de la matière condensée et celle de la turbulence présentent des points de convergence : dans ces deux disciplines, les systèmes étudiés possèdent un grand nombre de degrés de liberté (de l'ordre de 10^{23} pour un solide usuel, et autour de 10^{18} pour un écoulement turbulent (cf. § 2.3.)), et la réduction statistique de ces degrés de liberté à quelques paramètres thermodynamiques pertinents découle d'une démarche similaire. L'emploi d'arguments dimensionnels permettant de proposer des lois générales constitue également, depuis Kolmogorov en 1941 (cf. § 2.1.1.), une démarche commune à la physique du solide et à l'étude de la turbulence.

En 1941, Kolmogorov supposa alors qu'il existait une gamme d'échelles intermédiaires, plus petites que les dimensions sur lesquelles l'énergie est injectée, et donc indépendantes de la géométrie du système, mais plus grandes que l'échelle microscopique sur laquelle s'exerce la viscosité. L'énergie ne ferait alors que transiter sans être dissipée au travers de cette gamme d'échelles intermédiaires.

Les conséquences de l'existence de ce régime dit inertiel, ont été développées par Kolmogorov et découlent d'une analyse dimensionnelle simple : si la viscosité n'intervient pas dans le régime inertiel, le flux d'énergie ε (par unité de masse et par unité de temps) qui transite par l'échelle r doit pouvoir s'exprimer uniquement en fonction de r et de la vitesse u_r des tourbillons à cette échelle. On aura donc :

$$\varepsilon \sim \frac{u_r^3}{r} \quad (1)$$

Une première conséquence apparaît en exprimant les gradients de vitesse dans l'écoulement à l'échelle r :

$$\nabla u_r \approx \frac{u_r}{r} \sim \varepsilon^{1/3} r^{-2/3}$$

On voit que les gradients sont d'autant plus intenses que l'échelle considérée est petite. C'est la raison pour laquelle la conversion de l'énergie cinétique en chaleur sous l'effet de la viscosité du fluide est localisée au niveau de ces petites échelles [1.7].

L'extension de cette analyse dimensionnelle aux échelles dissipatives de l'écoulement doit faire intervenir la viscosité cinématique ν du fluide :

$$\nu \approx \ell_k u_k$$

où ℓ_k est la longueur caractéristique à laquelle intervient la viscosité (appelée longueur de Kolmogorov) et u_k la vitesse à cette échelle.

On peut alors exprimer ℓ_k en fonction de ν et du taux d'énergie à dissiper :

$$\ell_k \sim \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}$$

On remarque ainsi que la longueur de Kolmogorov ne dépend pas seulement des caractéristiques propres du fluide (viscosité cinématique), mais également de l'énergie du mouvement turbulent : plus l'énergie cinétique du fluide est importante, plus elle se propage vers des structures de petites dimensions avant d'être dissipée.

La gamme d'échelles couvertes par l'écoulement peut ensuite être exprimée en fonction du nombre de Reynolds :

$$\frac{L}{\ell_k} \approx \left(\frac{U^3 L^3}{\nu^3} \right)^{1/4} = Re^{3/4} \quad (2)$$

Cette relation met en évidence le fait que la théorie de Kolmogorov, fondée sur l'existence d'une large gamme inertielle (caractérisée par $\ell_k \ll r \ll L$), n'est valide que dans la limite des très grands nombres de Reynolds. C'est à cette limite que l'on fait implicitement référence en parlant de turbulence développée, ou de turbulence limite à caractère universel.

2.1.2. Mise en évidence expérimentale de l'intermittence

D'un point de vue expérimental, la vitesse u_r des tourbillons de dimension r est évaluée en mesurant la différence de vitesse entre deux points distants de r au sein de l'écoulement :

$$u_r \approx u(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u(\mathbf{x})$$

Cette mesure peut être obtenue à partir d'un unique détecteur à l'aide de l'hypothèse de Taylor, dont le principe est le suivant : si la vitesse moyenne \bar{u} de l'écoulement est beaucoup plus grande que ses fluctuations $u' = u - \bar{u}$, il est légitime de considérer que le mouvement du fluide est gelé et

que les tourbillons sont emportés par l'écoulement moyen, sans distorsions appréciables [1.8]. On pourra alors écrire :

$$u_r = u(\mathbf{x}+\mathbf{r},t) - u(\mathbf{x},t) \simeq u(\mathbf{x},t-\tau) - u(\mathbf{x},t)$$

où

$$\tau = r/\bar{u}$$

La composante de la vitesse que l'on mesure ainsi à l'aide de l'hypothèse de Taylor est bien sûr parallèle à la direction de l'écoulement moyen du fluide.

a) Histogrammes des différences de vitesse u_r

Comment se manifeste l'intermittence dans la mesure des différences de vitesse ? Cette question trouve en grande partie sa réponse dans l'observation des histogrammes de u_r .

Pour les grandes valeurs de r (de l'ordre des dimensions L du système), l'histogramme est gaussien, traduisant ainsi le caractère aléatoire des fluctuations de vitesse à grande échelle.

Cependant, l'observation des histogrammes pour des valeurs plus petites de r fait apparaître un renforcement aussi bien des petites valeurs de u_r , que des plus grandes (figure 1.3). Ces écarts à une distribution gaussienne (ou normale) sont de plus en plus marqués lorsque l'on considère les petites valeurs de r (dans le domaine inertiel) et révèlent une corrélation croissante des fluctuations de vitesse aux petites échelles.

C'est cette probabilité renforcée des périodes de calme (faibles valeurs de u_r) alternées avec des périodes à forts gradients de vitesse, qui traduit l'intermittence de l'écoulement.

b) Moments des différences de vitesse

La question se pose alors de savoir comment quantifier l'intermittence mise en évidence par les histogrammes de u_r .

Un moyen fréquemment utilisé pour confronter théorie et expérience réside dans l'analyse des moments des différences de vitesse (appelés aussi fonctions de structure), définis comme la moyenne de la $n^{\text{ème}}$ puissance des différences de vitesse u_r : $\langle u_r^n \rangle$.

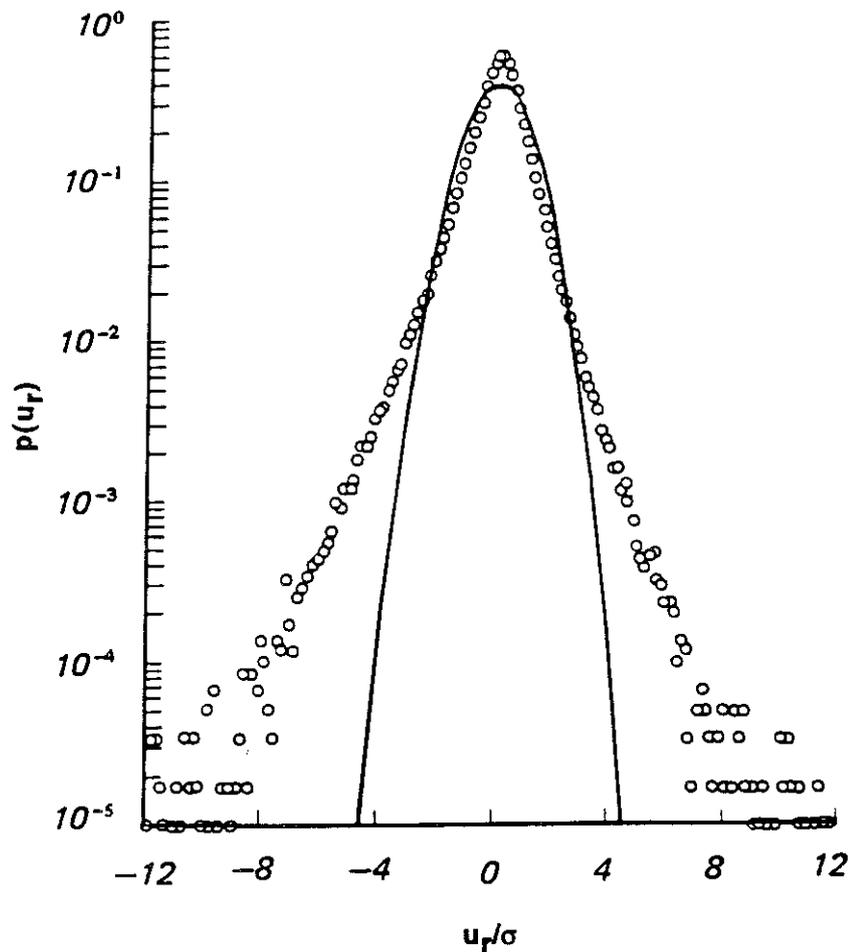


Figure 1.3 : Histogramme des différences de vitesse dans un écoulement turbulent.

L'écart à la normalité est visible par comparaison avec la Gaussienne représentée par un trait continu. σ est l'écart-type. (d'après [1.7])

On comprend en effet que, plus l'ordre n du moment considéré est élevé, plus les grandes valeurs de u_r se voient attribuer une forte pondération (cf. § 2.2.2.). En mettant ainsi en exergue ces fluctuations de vitesse très rares mais très intenses, les moments d'ordre élevé de u_r constituent une mesure directe du caractère intermittent de l'écoulement.

c) Comparaison avec la première théorie de Kolmogorov

La théorie de Kolmogorov nous permet de prédire la dépendance des moments de u_r en fonction de l'échelle r . En effet, la relation (1) peut être exprimée sous la forme :

$$\begin{aligned} \langle u_r^n \rangle &\sim \varepsilon^{n/3} r^{n/3} \\ &\sim r^{\xi_n} \end{aligned}$$

avec

$$\xi_n = \frac{n}{3}.$$

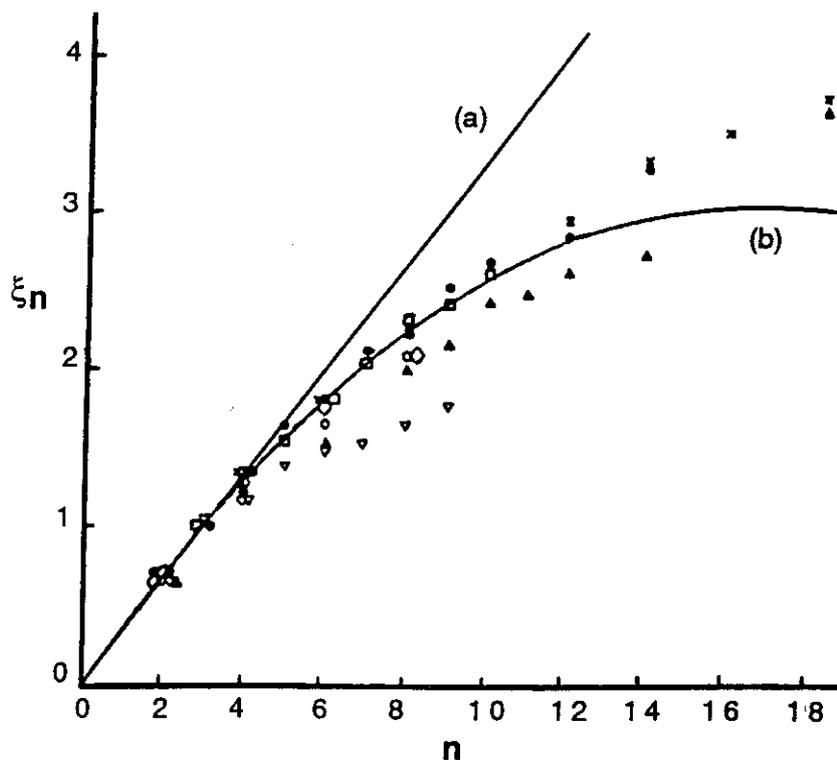


Figure 1.4 : Comparaison des lois de variation théoriques de l'exposant ξ_n avec les valeurs expérimentales (d'après [1.4]).

(a) : Kolmogorov 1941; (b) : Kolmogorov - Obukhov 1962 : cf § 2.2.2.

Cette simple loi de puissance en r du moment d'ordre n est bien vérifiée jusqu'à $n \leq 4$ (figure 1.4), mais l'écart expérimental à cette loi, de plus en plus marqué pour les valeurs de n supérieures à 4, prouve que la première théorie de Kolmogorov ne prend pas en compte les phénomènes d'intermittence.

2.2. L'intermittence en turbulence développée

L'intermittence a été introduite de façon variée dans les différents modèles. Nous allons en premier lieu décrire comment Kolmogorov et Obukhov en 1962 ont modifié le modèle initial de Kolmogorov, puis nous présenterons l'approche multifractale issue des idées de Novikov et Mandelbrot.

2.2.1. Le modèle log-normal

L'intermittence révélée par les histogrammes des différences de vitesse, se retrouve dans la répartition inhomogène du taux de dissipation de l'énergie ε aux petites échelles de l'écoulement. Peu après la formulation des hypothèses de Kolmogorov, Landau remarqua que la répartition de ε n'était pas uniforme, mais devait dépendre des fluctuations de vitesse à grande échelle par l'intermédiaire de la cascade d'énergie, et donc du nombre de Reynolds de l'écoulement ([1.9]).

Ceci avait pour conséquence directe que la loi de variation du moment d'ordre 2 de u_r , proposée en 1941 par Kolmogorov :

$$\langle u_r^2 \rangle = C_2 \langle \varepsilon^{2/3} \rangle r^{2/3}$$

devait être remplacée par :

$$\langle u_r^2 \rangle = C_2' \langle \varepsilon \rangle^{2/3} r^{2/3}$$

où la constante C_2 supposée universelle était remplacée par une constante C_2' dépendant de la répartition spatio-temporelle de ε , et donc de l'écoulement considéré.

Kolmogorov et Obukhov proposèrent alors un modèle d'intermittence fondé sur les deux hypothèses distinctes suivantes :

- h1) Le logarithme de ε présente une distribution gaussienne.
- h2) La variance de cette distribution : $\Lambda^2 = \langle (\delta \ln \varepsilon)^2 \rangle$, est une fonction linéaire de $\ln \left(\frac{l}{r} \right)$.

La première hypothèse repose sur le raisonnement physique suivant :

Soit $\langle \varepsilon \rangle$ la moyenne du taux de dissipation d'énergie dans un cube de côtés L_0 , de l'ordre des dimensions L du système. Fragmentons par la pensée ce cube en m cubes plus petits, de côtés $L_1 = L_0 m^{-1/3}$.

Nous supposerons alors que l'énergie $\langle \varepsilon \rangle$ est répartie de façon aléatoire dans ces m cubes d'ordre 1. Autrement dit, la moyenne d'espace du taux de dissipation dans chacun de ces cubes est une variable aléatoire dont la valeur moyenne est $\langle \varepsilon \rangle$. Nous appellerons alors ε_1 le taux de dissipation d'énergie moyenné sur le volume d'un cube de premier ordre, et nous écrirons :

$$\varepsilon_1 = \langle \varepsilon \rangle \theta_1$$

où θ_1 représente la variable aléatoire sans dimension d'ordre 1 à $\langle \varepsilon \rangle$ fixé.

Il suffit ensuite de reproduire cette démarche à l'échelle suivante, en fragmentant chaque cube de premier ordre en m cubes de second ordre, de côtés $L_2 = L_1 m^{-1/3} = L_0 m^{-2/3}$, dans lesquels le taux moyenné de dissipation d'énergie ε_2 est une variable aléatoire de moyenne ε_1 fixée pour chaque cube d'ordre 1 :

$$\varepsilon_2 = \langle \varepsilon_1 \rangle \theta_2$$

De façon autosimilaire, ce processus se reproduit avec des statistiques identiques à chaque échelle, jusqu'à atteindre l'ordre n , où la dimension L_n des cubes devient égale à la longueur ℓ_k de dissipation visqueuse de Kolmogorov. On pourra donc écrire :

$$\frac{\varepsilon_n}{\langle \varepsilon \rangle} = \theta_1 \theta_2 \dots \theta_n$$

où tous les θ_i sont des variables aléatoires indépendantes, mais de distributions identiques.

La distribution de ε_n , par laquelle est représentée l'intermittence de l'écoulement tout entier, s'obtient alors en remarquant que le logarithme de $\varepsilon_n / \langle \varepsilon \rangle$ s'écrit :

$$\ln\left(\frac{\varepsilon_n}{\langle \varepsilon \rangle}\right) = \ln e_1 + \ln e_2 + \dots + \ln e_n$$

qui est une somme de variables aléatoires de même distribution. Le théorème de la limite centrale nous indique que $\ln \varepsilon_n$ doit donc avoir une distribution gaussienne :

$$p(\varepsilon_n)d\varepsilon_n = \frac{1}{\Lambda\sqrt{2\pi}} \exp - \left(\frac{\ln^2(\varepsilon_n/\varepsilon_{\max})}{2\Lambda^2} \right) d\ln \varepsilon_n \quad (3)$$

où ε_{\max} est la valeur la plus probable de ε_n ($p(\varepsilon_{\max}) = 1/\Lambda\sqrt{2\pi}$), distincte de sa valeur moyenne.

La seconde hypothèse de Kolmogorov et Obukhov, proposant une variation en $\ln\left(\frac{L}{r}\right)$ de la variance Λ^2 de la distribution log-normale (3), découle quant à elle de l'autosimilarité de la cascade d'énergie.

Remarquons tout d'abord que le théorème de la limite centrale nous indique également que la variance Λ^2 de la distribution :

$$\ln\left(\frac{\varepsilon_n}{\langle \varepsilon \rangle}\right) = \sum_{i=1}^n \ln e_i$$

est égale à n fois la variance σ^2 commune à toutes les distributions $\ln e_i$:

$$\Lambda^2 = n\sigma^2$$

Dans l'esprit de Kolmogorov et Obukhov, l'autosimilarité de la cascade d'énergie impliquait que le rapport entre deux échelles successives soit une constante :

$$\frac{L_i}{L_{i+1}} = m^{1/3}$$

Le rapport entre l'échelle intégrale du système L , et l'échelle r correspondant aux perturbations d'ordre n peut alors s'écrire :

$$\frac{L}{r} = \frac{L}{L_0} \frac{L_0}{L_1} \frac{L_1}{L_2} \dots \frac{L_{n-1}}{r} = m^{n/3}$$

d'où $n \sim \ln\left(\frac{L}{r}\right)$, et finalement :

$$\Lambda^2 = \mu \ln\left(\frac{L}{r}\right) \quad (4)$$

où μ est une constante universelle.

2.2.2. Prédications sur les moments de u_r

L'expression de la loi de distribution (3) pour ε , permet d'expliciter la dépendance du moment d'ordre n des différences de vitesse u_r :

$$\begin{aligned} \langle u_r^n \rangle &\sim \langle \varepsilon^{n/3} \rangle r^{n/3} \\ &\sim \left(\int p(\varepsilon) \varepsilon^{n/3} d\varepsilon \right) r^{n/3} \end{aligned}$$

Le développement du terme entre parenthèses donne :

$$\langle \varepsilon^{n/3} \rangle = \varepsilon_{\max}^{n/3} \exp(n^2 \Lambda^2 / 18)$$

En appliquant cette relation pour $n = 3$, on peut exprimer ε_{\max} en fonction du taux moyen et constant de dissipation d'énergie $\langle \varepsilon \rangle$:

$$\varepsilon_{\max} = \langle \varepsilon \rangle \exp\left(-\frac{\Lambda^2}{2}\right)$$

D'où l'expression du moment d'ordre n :

$$\langle u_r^n \rangle \sim \langle \varepsilon \rangle^{n/3} \exp\left(\frac{n(n-3)}{18} \Lambda^2\right) r^{n/3}$$

Enfin, en exprimant Λ^2 en fonction de $\ln\left(\frac{L}{r}\right)$ d'après l'hypothèse h2), on obtient une dépendance en loi de puissance de r du moment de u_r :

$$\langle u_r^n \rangle \sim r^{\xi_n}$$

où

$$\xi_n = \frac{n}{3} - \mu \frac{n(n-3)}{18} \quad (5)$$

La constante μ est déterminée expérimentalement à partir de la mesure du moment d'ordre 6 de u_r et vaut $0,2 \pm 0,05$ [I.10].

Cette loi de puissance en r suit de façon satisfaisante, jusqu'à $n = 12$ environ, les mesures expérimentales fiables de divers auteurs, mais semble s'en éloigner au-delà (figure I.4).

Cette apparente déviation entre la théorie et l'expérience doit cependant être tempérée par la forte incertitude dont sont entachées les mesures des moments de u_r d'ordre élevé.

En effet, supposons que les histogrammes des différences de vitesse puissent être représentés en première approximation par une exponentielle simple de la forme :

$$p(u_r) = \alpha e^{-\frac{u_r}{u_0}}$$

α étant de l'ordre de 0,5 pour les histogrammes usuels et $u_0 = 1/2\alpha \approx 1$ (dans les unités de u_r) pour que la distribution soit normalisée. L'expression des moments d'ordre n (pair) est alors :

$$\begin{aligned} \langle u_r^n \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} u_r^n p(u_r) du_r \\ &= 2\alpha \int_0^{\infty} u_r^n e^{-\frac{u_r}{u_0}} du_r \end{aligned}$$

L'intégrant étant une fonction assez pointue, la contribution prépondérante à cette intégrale provient des valeurs situées au voisinage du maximum de l'intégrant, défini par :

$$\frac{d}{du_r} (u_r^n e^{-\frac{u_r}{u_0}}) = 0$$

soit $u_r = nu_0 \approx n$.

Ainsi, un moment d'ordre $n = 16$ sera dominé par des valeurs de u_r voisines de 8 fois l'écart-type des fluctuations de vitesse ($\sigma = 1/\alpha\sqrt{2}$), et apparaissant avec une probabilité inférieure à 10^{-7} .

Par conséquent, l'obtention d'un nombre significatif de telles valeurs de u_r nécessiterait une durée d'enregistrement du signal de vitesse excessivement longue, et en pratique inaccessible (on dépasse rarement 10 millions de points de mesure).

D'un point de vue théorique, le modèle log-normal de Kolmogorov et Obukhov a également été contesté, à propos de la variation quadratique de l'exposant ξ_n avec n (relation (5)). La décroissance de ξ_n pour $n \geq 16$ paraissait en effet incompatible avec un argument établi par Novikov, portant sur les fluctuations de u_r dans une dimension de l'espace [1.11].

Sur la base de ces apparentes inconsistances, d'ordre théorique autant qu'expérimental, d'autres modèles ont été proposés, parmi lesquels le modèle multifractal de Frisch et Parisi.

Nous présenterons d'abord l'approche fractale, avant de l'élargir au cas multifractal dont le modèle de Kolmogorov et Obukhov constitue un cas limite.

2.2.3. Le modèle fractal

Alors que l'approche de Kolmogorov et Obukhov était essentiellement de nature statistique, l'approche fractale est de nature géométrique.

Elle découle de la remarque originale de Mandelbrot [I.12] consistant à dire que, dans la limite des très grands nombres de Reynolds, la cascade d'échelle induit une répartition fractale des petites structures de l'écoulement. En particulier, l'énergie ne serait pas dissipée en certains points distribués aléatoirement dans le fluide (cf. § 2.2.1.), mais en des points formant un ensemble fractal S de dimension D_f .

Suivant la définition usuelle (topologique) de la dimension fractale, la moyenne de l'énergie dissipée dans tout l'écoulement peut alors s'écrire :

$$\langle \varepsilon \rangle \sim \int_S \varepsilon(x) d^3x \sim r^{D_f}$$

Les différences de vitesse entre deux points distants de r ($u_r \sim \varepsilon^{1/3} r^{1/3}$) suivront donc une loi de puissance du type :

$$\begin{cases} u_r \sim r^{(D_f-2)/3} & \text{pour } x \in S \\ u_r \sim 0 & \text{pour } x \notin S \end{cases}$$

et le moment d'ordre n de u_r sera proportionnel à u_r^n , pondéré par le rapport du nombre de cubes élémentaires nécessaires pour couvrir l'ensemble S ($\sim r^{-D_f}$) au nombre de cubes élémentaires couvrant le volume total du système ($\sim r^3$) :

$$\langle u_r^n \rangle \sim u_r^n \frac{r^{-D_f}}{r^3}$$

soit $\langle u_r^n \rangle \sim r^{\xi_n}$

où $\xi_n = \left(\frac{D_f-2}{3} \right) n + (3-D_f)$

La dimension fractale D_f constitue un paramètre ajustable qui ne peut pas être déduit à partir d'arguments simples.

Remarquons que dans la limite où $D_f = 3$ (énergie uniformément répartie dans tout le volume à 3 dimensions), on retrouve l'exposant $n/3$ de la première théorie de Kolmogorov.

On observe qu'avec ce modèle fractal la loi de variation des moments de u_r s'ajuste à l'expérience jusqu'à l'ordre 7 environ, puis s'en éloigne au-delà (figure I.5).

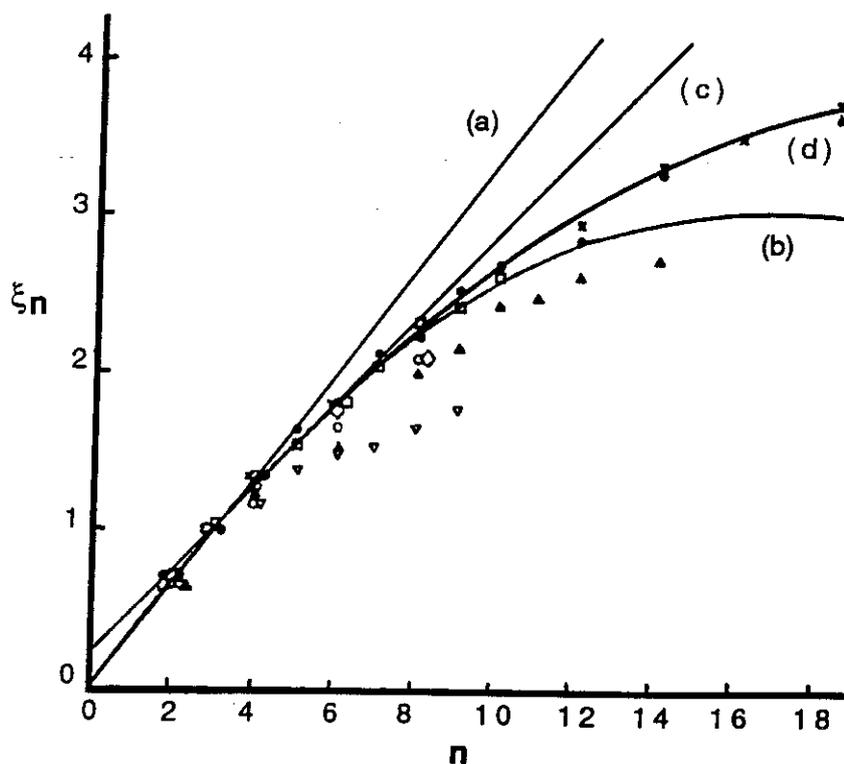


Figure I.5 : Variation de l'exposant ξ_n avec n pour les modèles fractal (c) et multifractal (d) (cf. § 2.2.4.).

((a) : Kolmogorov 1941; (b) : Kolmogorov - Obukhov 1962 [I.4]).

2.2.4. Le modèle multifractal

L'affinement du modèle fractal passe par l'introduction d'un large spectre des singularités dans l'écoulement. Autrement dit, la dissipation d'énergie au sein du fluide ne serait pas localisée sur un unique ensemble fractal, mais sur toute une gamme d'ensembles $S(h)$ dont les dimensions $d(h)$ dépendent de la loi de variation de u_r :

$$\begin{cases} u_r \sim r^h & \text{pour un point appartenant} \\ & \text{à l'ensemble fractal } S(h) \\ u_r \sim 0 & \text{pour un point n'appartenant} \\ & \text{à aucun ensemble fractal du spectre} \end{cases}$$

L'expression du moment de u_r sera cette fois obtenu en intégrant la $n^{\text{ème}}$ puissance de u_r , pondérée par le rapport $r^{-d(h)}/r^{-3}$ et par la densité $d\rho(h)$ de l'ensemble fractal $S(h)$ dans l'espace :

$$\langle u_r^n \rangle \sim \int r^{nh} r^{3-d(h)} d\rho(h)$$

On obtient, par la méthode du point selle :

$$\langle u_r^n \rangle \sim r^{\xi_n}$$

où
$$\xi_n = \min_h (nh + 3 - d(h))$$

Le paramètre h apparaissant dans l'expression de ξ_n est ajustable et permet de superposer la loi de variation de ξ_n aux valeurs expérimentales jusqu'à l'ordre 18 environ (figure 1.5).

Cet accord optimal entre la théorie et l'expérience doit cependant être tempéré, comme on l'a vu au paragraphe 2.2.2., par l'imprécision intrinsèque des mesures des moments d'ordre élevés. Au-delà de cette étude sur les moments, se pose la question de la représentation des histogrammes de u_r . C'est entre autre à ce point que s'est attaquée l'approche variationnelle qui est à l'origine de ce travail et que nous allons présenter maintenant.

2.3. Une approche variationnelle

Comme il a été évoqué au paragraphe 1.2.2., le nombre de degrés de liberté d'un écoulement turbulent est très élevé. La relation (2) nous permet en effet de voir que, pour une dimension, il est de l'ordre du nombre de Reynolds élevé à la puissance 3/4 :

$$\frac{L}{\lambda_k} \sim Re^{3/4} \quad (2)$$

et à 3 dimensions, pour un volume unité L^3 , il sera donc de l'ordre de :

$$\left(\frac{L}{\ell_k}\right)^3 \sim Re^{9/4}$$

Avec un Reynolds de 10^8 , le nombre de degrés de liberté sera voisin de 10^{18} , c'est-à-dire comparable au nombre d'Avogadro. Cette remarque a conduit certains auteurs à rechercher s'il était possible de définir une entropie de la turbulence, à l'instar d'une approche de thermodynamique statistique.

Nous allons présenter les idées directrices de ce modèle, en insistant en particulier sur les prédictions expérimentales auxquelles il conduit.

On trouvera le formalisme complet de cette approche, et en particulier la définition de la fonction entropique justifiant le titre "d'approche variationnelle", développés dans [1.13] notamment.

2.3.1. Loi de distribution des différences de vitesse

L'une des idées maîtresses de cette approche consiste à remarquer que les histogrammes des différences de vitesse u_r peuvent être modélisés avec une grande précision par une distribution compatible avec l'hypothèse h1) de Kolmogorov et Obukhov, à savoir que ε a une distribution log-normale.

En effet, appelons σ^2 la variance des différences de vitesse u_r pour un taux de dissipation d'énergie ε donné :

$$\sigma^2 = \langle u_r^2 \rangle$$

En vertu de la relation de proportionnalité entre $\langle u_r^2 \rangle$ et $\varepsilon^{2/3}$ (à ε fixé) (cf. § 2.1.2.), on peut écrire :

$$\sigma^2 \sim \varepsilon^{2/3}$$

Par suite, l'intermittence du taux de dissipation d'énergie se manifeste, au même titre que les fluctuations de ε (hypothèse h1)), par des fluctuations log-normales de la variance σ^2 (à ε fixé, la répartition des vitesses est gaussienne).

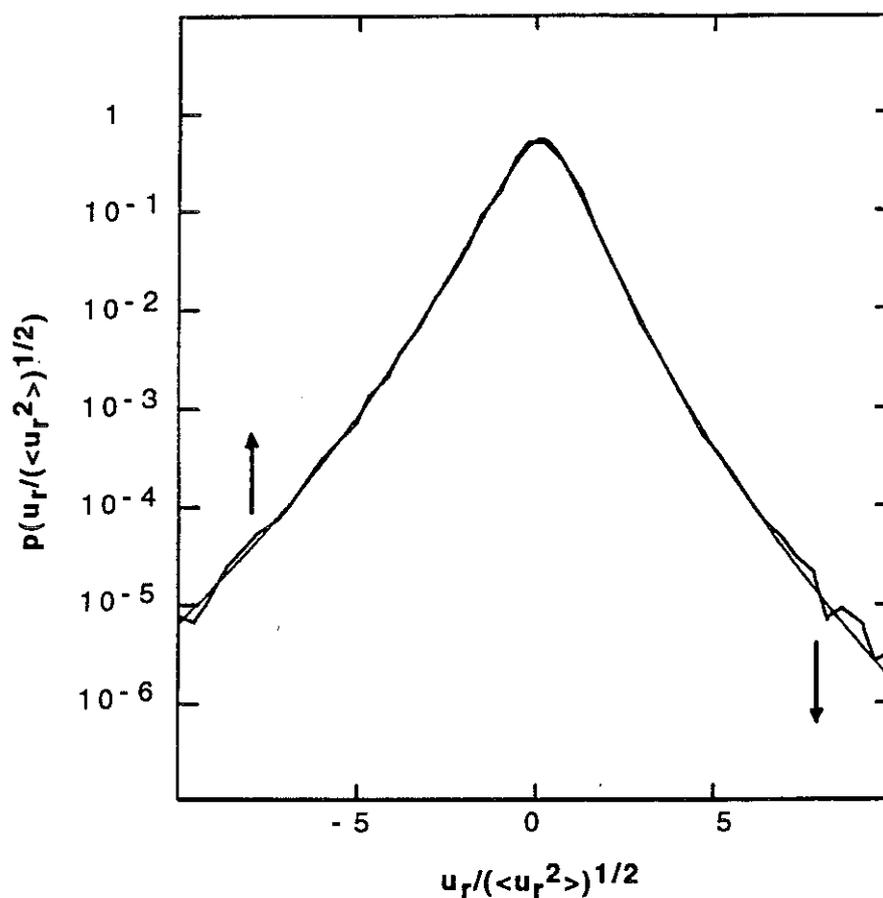


Figure I.6 : Déséquilibre de la répartition des différences de vitesse.
Le trait lisse représente la loi de distribution (7). ([I.13]).

La distribution de σ s'écrit donc :

$$Q_{\lambda}(\sigma)d\sigma = \frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\ln^2(\sigma/\sigma_0)}{2\lambda^2}\right) d\ln\sigma$$

où σ_0 est la valeur la plus probable de σ et où λ est la variance de $\ln\sigma$.

La distribution de u est alors pondérée par la répartition des σ :

$$\Pi_\lambda(u) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{\ln^2(\sigma/\sigma_0)}{2\lambda^2}\right) \frac{d\sigma}{\sigma^2} \quad (6)$$

Il reste encore une propriété de la distribution que nous devons prendre en compte et qui concerne la non nullité des moments expérimentaux de u_r d'ordre impair. En effet, la distribution symétrique (6) conduit à des moments impairs nuls, en contradiction avec l'expérience.

Le déséquilibre des distributions expérimentales de u_r se manifeste par un renforcement des valeurs négatives de u_r par rapport aux valeurs positives (figure I.6).

Ceci peut s'expliquer en remarquant que les valeurs positives de u_r correspondent à la différence de vitesse entre deux éléments de fluide qui s'éloignent (figure I.7). Les vitesses de ces deux éléments de fluide ont donc été "thermalisées" en deux points plus proches que la distance r à laquelle ils se trouvent au moment de la mesure. Par conséquent, la probabilité de fortes différences de vitesse positives se trouve réduite. Ce raisonnement est bien entendu inversé pour les différences de vitesse négatives.

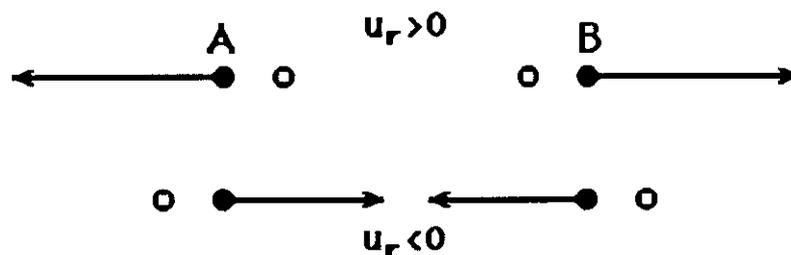


Figure I.7 : "Thermalisation" de la vitesse de deux points de l'écoulement s'éloignants ou se rapprochant. Les points évidés correspondent à la distance effective de mesure.

Cet effet est pris en compte dans la loi de probabilité de u , par un terme de la forme :

$$1 + a_s \frac{u/\sigma}{(1 + u^2/\sigma^2)^{1/2}}$$

où a_s est une constante universelle.

Pour des grandes valeurs de u , ce facteur tend vers la constante $1 \pm a_s$, limitant ainsi cet effet à une correction raisonnable (la distance effective reste comparable à r quelle que soit la vitesse u). Pour des petites valeurs de u , ce facteur est linéaire en u .

La loi complète de distribution de u s'écrit alors :

$$\Pi_{a_s, \lambda}(u) = \frac{A(a_s)}{2\pi\lambda} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma^2} \left(1 + a_s \frac{u/\sigma}{(1 + u^2/\sigma^2)^{1/2}}\right)\right] \exp\left(-\frac{\ln^2(\sigma/\sigma_0)}{2\lambda^2}\right) \frac{d\sigma}{\sigma^2} \quad (7)$$

Le terme $A(a_s)$ est une constante de normalisation dépendant du paramètre universel $a_s = 0,18$ (déterminé expérimentalement : [I.13]).

λ constitue l'unique paramètre ajustable de cette distribution, et représente l'écart-type de la répartition de $\ln\sigma$.

2.3.2. Remise en cause de l'hypothèse h2)

La validité de la loi de distribution (7) a été vérifiée expérimentalement avec divers écoulements, et s'ajuste de façon optimale aux histogrammes expérimentaux. Par ailleurs, cette loi permet de tester l'hypothèse h2) de Kolmogorov et Obukhov.

Remarquons tout d'abord que le paramètre λ peut être relié à la variance $\Lambda^2 = \langle(\delta \ln \epsilon)^2\rangle$ de la distribution de $\ln \epsilon$ dont nous avons évoqué le rôle au paragraphe 2.2.1. (modèle log-normal).

En effet, par définition :

$$\lambda^2 = \langle \ln^2 \sigma \rangle$$

avec $\sigma^2 = \langle u r^2 \rangle \sim \varepsilon^{2/3} r^{2/3}$

soit $\ln \sigma \sim \frac{1}{3} \ln \varepsilon$

d'où $\lambda^2 = \frac{\Lambda^2}{9}$.

Λ peut donc être mesuré en déterminant le paramètre λ conduisant à la meilleure correspondance entre un histogramme expérimental (à r donné), et l'histogramme théorique issu de la loi de distribution (7).

Il a ainsi été observé que l'hypothèse h2), proposant une variation de Λ avec r du type :

$$\Lambda^2 = \mu \ln\left(\frac{L}{r}\right)$$

pouvait être avantageusement remplacée par une loi de puissance de forme

$$\Lambda^2 \sim r^{-\beta} \quad (8)$$

Le renoncement à l'hypothèse h2) semble donc légitime et permet en outre de dissiper les contradictions qui avaient été opposées au modèle log-normal de Kolmogorov et Obukhov (cf. § 2.2.2.).

L'exposant β apparaissant dans la relation (8) est supposé dépendre du nombre de Reynolds et se comporter comme $1/\ln Re$ dans la limite $Re \rightarrow \infty$ (cf. [I.13]).

Ce point doit pouvoir être vérifié expérimentalement, en déterminant à nombre de Reynolds donné, la variance $\Lambda^2 = 9\lambda^2$ pour différents histogrammes dans le domaine inertiel, et en en déduisant ensuite la loi de variation de la pente $-\beta$ de la droite $\Lambda^2 = f(\ln r)$ en fonction du Reynolds.

Ce type de mesure doit être effectué avec un système permettant un contrôle très propre du nombre de Reynolds, et dans ce cadre notre expérience semble donc particulièrement bien adaptée.

2.3.3. Spectres de puissance

Une confirmation expérimentale indirecte à la variation de $1/\beta$ avec le logarithme du nombre de Reynolds peut également être obtenue par l'étude des spectres de puissance des fluctuations de vitesse au sein de l'écoulement.

Remarquons tout d'abord que le spectre spatial des fluctuations de vitesse $E(k)$ (où $k \sim 1/r$ est le nombre d'onde correspondant à l'échelle r) est directement déduit de la transformée de Fourier du moment d'ordre 2 de u_r . En effet, l'énergie par unité de masse transitant par l'échelle $r \sim 1/k$ est proportionnelle au moment d'ordre 2 :

$$\varepsilon_k \sim \langle u_r^2 \rangle$$

L'autosimilarité de la cascade d'énergie avait ainsi conduit Kolmogorov à prédire la loi :

$$E(k) = C_k \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (9)$$

valable pour des nombres d'onde k dans le domaine inertiel (C_k étant une constante universelle).

Corrolairement à la prédiction de cette pente $-5/3$ du régime inertiel, Kolmogorov avait suggéré une représentation universelle des spectres de puissance, moyennant certaines translations ne dépendant que de la viscosité ν et du taux moyen de dissipation d'énergie $\langle \varepsilon \rangle$.

Cependant, cette superposition des spectres de puissance (tracés en coordonnées logarithmiques) n'est valide que dans la limite des très grands nombres de Reynolds, et donc difficilement vérifiable en pratique (il a fallu plus de 20 ans pour que la pente en $-5/3$ de Kolmogorov soit mise en évidence expérimentalement).

Dans l'approche variationnelle, l'exposant β a pu être assimilé à un coefficient de normalisation des spectres de la forme

$$\frac{1}{\ln\left(\frac{R_\lambda}{R^*}\right)}$$

Le paramètre R^* a été déterminé à partir des premières valeurs de β obtenues expérimentalement, et a été trouvé égal à 75.

Le tracé de la loi :

$$\frac{\ln E(k)}{\ln(R_\lambda/75)} = f\left(\frac{\ln k}{\ln(R_\lambda/75)}\right)$$

a ainsi permis d'obtenir la superposition de très nombreux spectres correspondants à des écoulements très divers et à des nombres de Reynolds R_λ compris entre 130 et 13000, c'est-à-dire inférieurs à la définition usuelle de la turbulence développée [I.14].

En deçà de $R_\lambda = 130$, cette représentation n'est plus applicable et l'étude d'une éventuelle transition de nature hydrodynamique pour des nombres de Reynolds voisins de $R_\lambda \approx 130$ constitue la prochaine étape de l'étude. Là encore, notre expérience doit bien convenir, compte tenu de la gamme de Reynolds qu'elle permet de couvrir ($10 \leq R_\lambda \leq 1740$).

Références Chapitre I

- [I.1] *Scaling of hard thermal turbulence in Rayleigh-Bénard convection*
B. Castaing *et al.* J. Fluid Mech. 204 (1989) 1.
- [I.2] *Thermophysical properties of helium 4 from 2 to 1500 K with pressures to 1000 atmospheres* R.D. Mc Carty - NBS Technical Note 631 - US Dept. of Commerce (Nov. 1972).
- [I.3] *Eléments de cryogénie* R.R. Conte - Masson et Cie Editeurs (1970).
- [I.4] *High-order velocity structure functions in turbulent shear flows*
F. Anselmet, Y. Gagne, E.J. Hopfinger, R.A. Antonia - J. Fluid Mech. 140 (1984) 63 : Table 1.
- [I.5] *A first course in turbulence* H. Tennekes, J.L. Lumley
The MIT Press (1972) : chap. 3.2.
- [I.6] *Measurements of dissipation rate and some other characteristics of turbulent plane and circular jets* . R. A. Antonia, B. R. Satyaprakash, A. K. M. F. Hussain - Phys. Fluids vol. 23, n°4 (Avril 1980).
- [I.7] *Statistical fluid mechanics : Mechanics of turbulence (2)*
A.S. Monin et A.M. Yaglom - The MIT Press (1975) : chap. 8 § 21.3.
- [I.8] Idem que [1.6] : chap. 8 § 23.1.
- [I.9] *Cours de Physique théorique : Mécanique des fluides (Tome 6)*
L. Landau et E. Lifchitz - 2ème Edition. Ed Mir 1989 : Page 200.
- [I.10] Idem que [1.4] : § 4.
- [I.11] Idem que [1.6] : chap. 8 § 25.3 p. 622.

- [I.12] *Géométrie fractale de la turbulence. Dimension de Hausdorff, dispersion et nature des singularités du mouvement des fluides*
B. Mandelbrot - C. R. Acad. Sc. 282 A (1976) pp.119 - 120.
- [I.13] *Velocity probability density functions of high Reynolds number turbulence* B. Castaing, Y. Gagne, E.J. Hopfinger - Physica D 46 (1990) 177.
- [I.14] *Une représentation universelle sans invariance globale d'échelle des spectres d'énergie en turbulence développée*
Y. Gagne, B. Castaing - C.R. Acad. Sci. Paris 312 série II (1991) 441.

CHAPITRE II

MONTAGE EXPERIMENTAL

La pression P et la densité étant sensiblement uniformes dans le jet, le produit

$$U^2 S = U_0^2 \frac{\pi L_0^2}{4}$$

(où L est le diamètre du jet au point considéré) est donc constant. Par suite, le nombre de Reynolds UL/ν dans une section quelconque du jet est lui aussi constant.

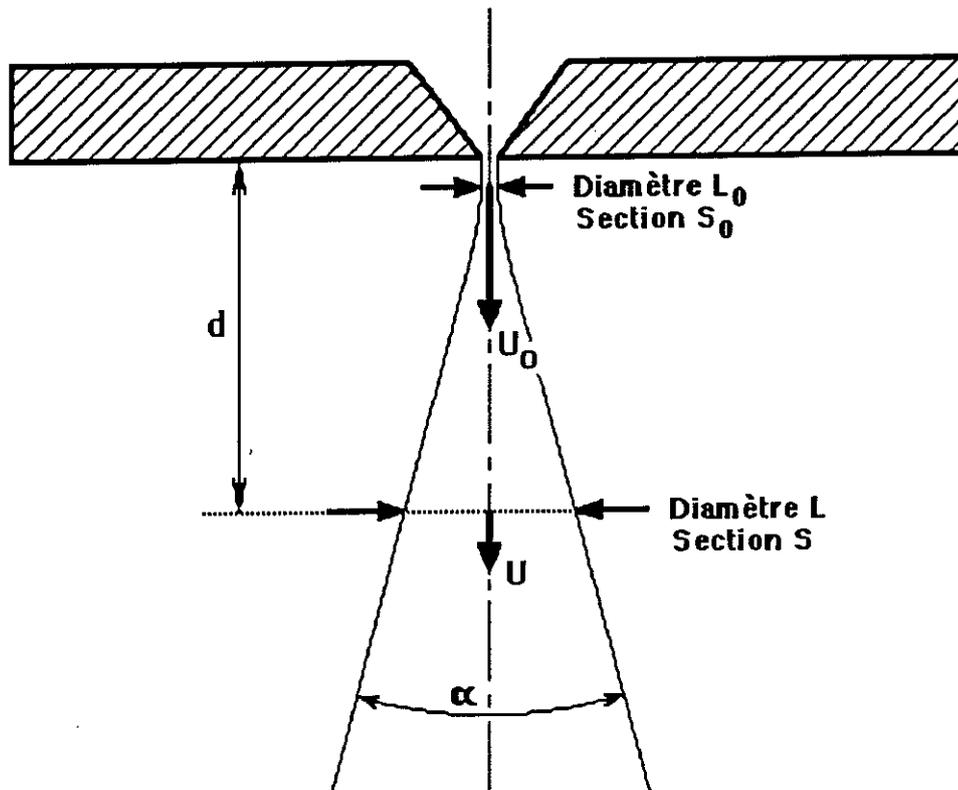


Figure II.1 : Paramètres caractéristiques et nombre de Reynolds dans un jet.

Cette propriété s'accompagne d'un effet d'aspiration par le jet du gaz adjacent : en effet, le débit de gaz à une distance d de la buse

$$D_v = U.S \sim (UL)L$$

est proportionnel au diamètre du jet L , lui-même fonction linéaire de d :

$$L \approx 2 d \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

où α est l'angle d'ouverture du jet loin de la buse ($\alpha \approx 25^\circ$ [II.1]).

On voit donc que le débit de gaz dans le jet croît linéairement avec la distance à la buse d :

$$D_v \sim d \operatorname{Re}$$

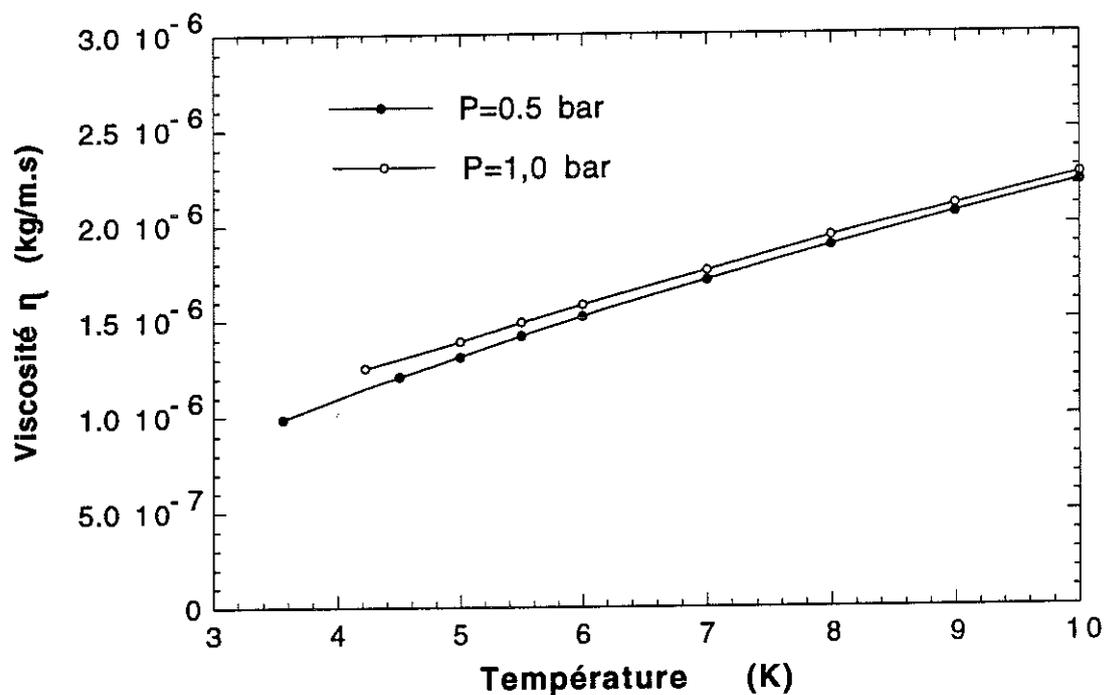


Figure II.2 : Viscosité de l'hélium gazeux en fonction de la température.

L'expression la plus simple du nombre de Reynolds dans le cas du jet est obtenue en faisant apparaître le débit massique de gaz D_m traversant la buse :

$$D_m = \rho D_{v0} = \rho U_0 S_0$$

où D_{v0} est le débit volumique de gaz à travers la buse.

Le Reynolds s'écrit alors :

$$Re = \frac{4 D_m}{\pi \eta L_o}$$

expression sensiblement indépendante de la pression et de la température du gaz, dans la mesure où la viscosité propre η varie peu dans les gammes de pression et de température où nous travaillons (cf. figure II.2).

1.2. Contraintes dimensionnelles

Un nombre de Reynolds voisin de 10^6 correspond à un écoulement à travers une buse 1 à 5 mm de diamètre, à une vitesse de 50 à 10 m/s (la vitesse du son dans l'hélium gazeux à 4,2 K est de 120 m/s).

Sachant que dans un jet, l'écoulement est pleinement turbulent à une distance de l'ordre de 50 fois le diamètre de la buse, la chambre d'expérience devait mesurer au moins 30 cm de longueur.

D'autre part, l'angle d'ouverture d'un jet étant voisin de 25° , le diamètre de la chambre d'expérience devait être de l'ordre de 15 cm afin que l'écoulement turbulent puisse se développer librement avant d'atteindre les parois.

L'hélium gazeux à basse température qui alimente le jet provient de l'évaporation contrôlée du bain d'hélium liquide contenu dans le cryostat. L'autonomie du jet dépend donc de la contenance du réservoir d'hélium liquide : un écoulement à nombre de Reynolds égal à 10^6 correspond à un débit massique de l'ordre de 100 g/minute d'hélium, ce qui nécessite un réservoir de 25 litres d'hélium liquide environ pour alimenter le jet pendant 10 à 20 minutes.

Ces contraintes dimensionnelles (chambre d'expérience et contenance du réservoir d'hélium liquide) étant fixées, nous avons réalisé les plans du système expérimental.

2. LE SYSTEME EXPERIMENTAL

2.1. Le cryostat

Le cryostat, que nous avons dessiné et fait construire, est de conception classique, avec une enceinte à azote liquide cylindrique en acier inoxydable, d'un diamètre intérieur de 345 mm et de 160 cm de hauteur, dans

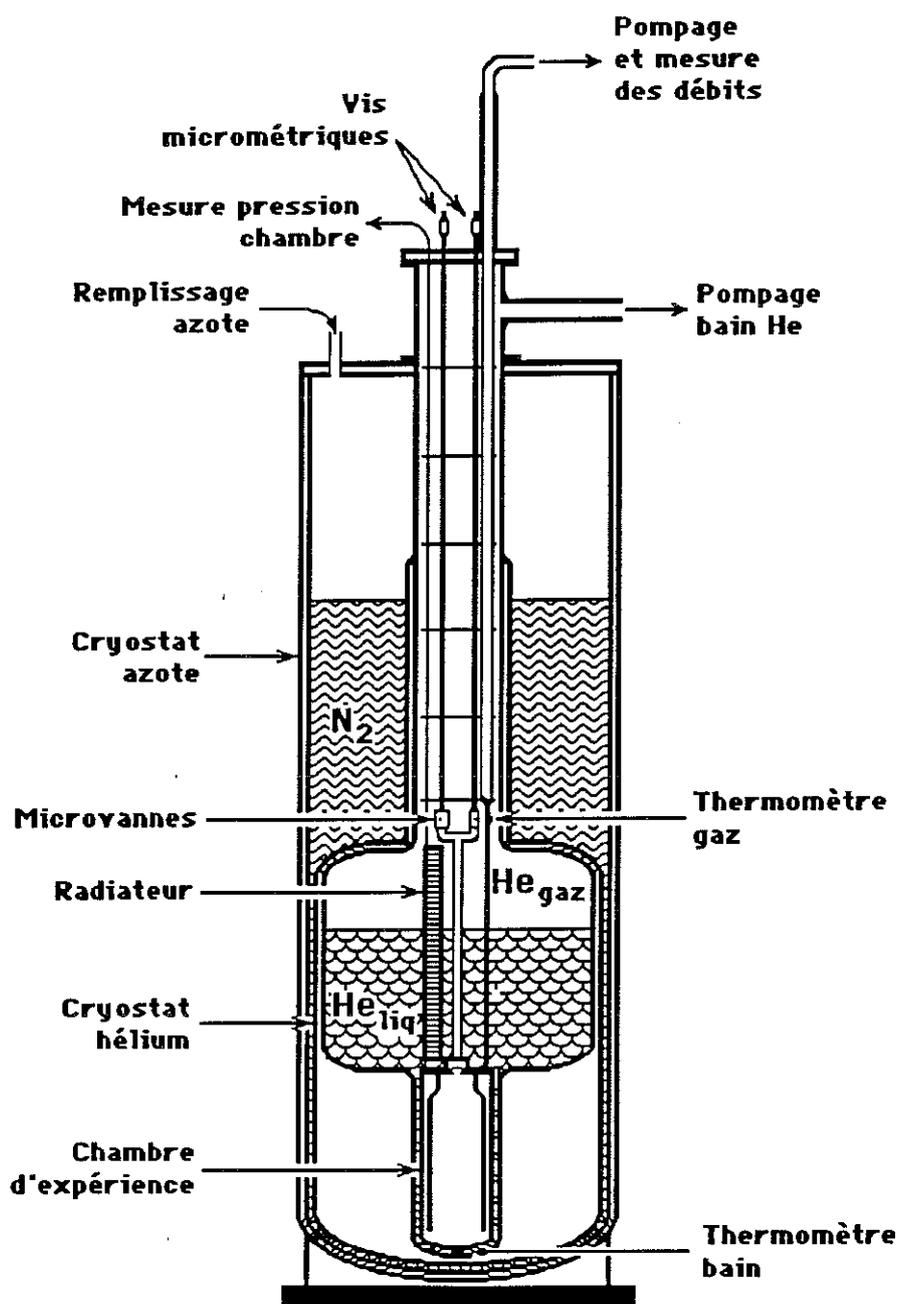


Figure II.3 : Vue d'ensemble du système expérimental.

laquelle vient se placer l'enceinte à hélium liquide, également en acier inoxydable, d'un diamètre intérieur de 160 mm et s'élargissant dans sa partie basse au niveau du réservoir à hélium liquide, d'une contenance de 25 litres.

Ce cryostat a été entièrement construit dans les ateliers du laboratoire, et présente de très bonnes performances thermiques : malgré le diamètre important du col d'introduction de la chambre d'expérience, les pertes sont inférieures à 0,15 watt, soit une consommation propre de moins de 5 litres d'hélium liquide par jour.

2.2. Les radiateurs à hélium liquide

Comme nous l'avons indiqué au paragraphe 1.2., l'alimentation du jet provient du gaz évaporé par des radiateurs immergés dans le bain d'hélium liquide du cryostat.

Aux plus forts débits, pour évaporer de l'ordre de 100 g/mn d'hélium, il faut fournir au liquide une puissance voisine de 50 watts. Cette forte puissance dissipée dans le bain ne doit cependant pas provoquer d'ébullition ou de vibrations excessive du système, et ne doit pas trop réchauffer l'hélium afin de disposer de gaz à une température voisine de celle de l'hélium liquide du réservoir ($T \leq 4,2$ K).

Ces exigences sont conciliées dans un radiateur présentant une surface d'échange thermique avec l'hélium liquide aussi grande que possible. Après quelques essais, nous avons défini un type de radiateur devant satisfaire aux exigences posées :

Les radiateurs sont constitués d'un tube de cuivre épais ($e = 4$ mm) de 28 mm de diamètre intérieur et 300 mm de hauteur, à l'intérieur duquel sont encastrés des disques découpés dans un grillage fin de cuivre (trame et chaîne de 0,4 mm de diamètre, maillage de $2,5 \times 2,5$ mm²). Un chauffage résistif (fil de constantan émaillé de 0,3 mm de diamètre) est enroulé autour du bas du tube de cuivre, lequel est noyé extérieurement sur toute sa hauteur dans une gaine thermique isolante (Stycast noir 2850 FT) de 5 mm d'épaisseur (figure II.4).

L'hélium liquide pénètre par le bas du tube, à l'intérieur duquel il est vaporisé grâce au chauffage résistif, et s'échappe sous forme gazeuse par le haut du radiateur à travers l'empilement des disques grillagés.

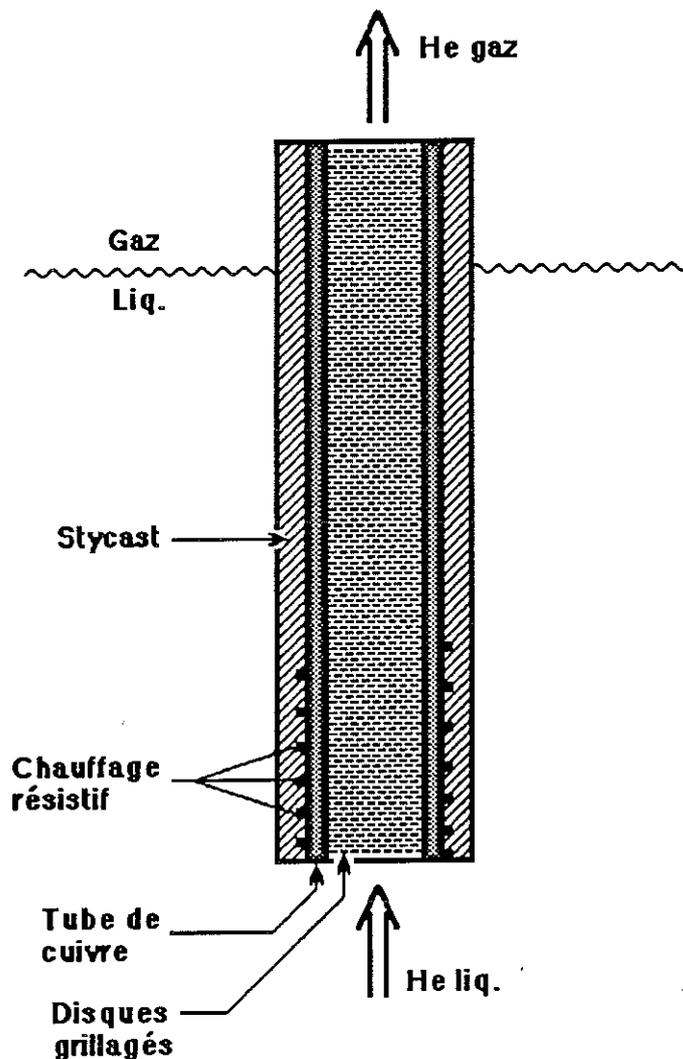


Figure II.4 : Radiateur à hélium liquide

Ces disques grillagés ont un double rôle : ils permettent d'une part d'accroître la surface d'échange thermique avec l'hélium liquide (surface totale de cuivre $\approx 0,25 \text{ m}^2$ pour un radiateur) et brisent les bulles émergent hors du bain d'autre part. La forte épaisseur du tube de cuivre assure une bonne homogénéité thermique du radiateur, en particulier lorsque celui-ci n'est pas entièrement immergé dans le bain d'hélium liquide.

Nous avons défini les paramètres d'un traitement thermique du tube de cuivre permettant d'une part d'améliorer la conductibilité thermique du tube, et d'autre part d'assurer un bon contact thermique radial entre le tube et les disques : un recuit pendant 24 heures à une température voisine de 750°C, sous une pression de $5 \cdot 10^{-5}$ mbar d'oxygène, permet d'améliorer le rapport résistif (entre l'ambiante et 4,2 K) de plus d'un ordre de grandeur, et d'atteindre une conductibilité thermique de l'ordre de $80 \text{ W.cm}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ à 4,2 K. Au cours de ce recuit, un bon contact mécanique et thermique s'établit par diffusion entre les disques grillagés et le tube de cuivre.

Des essais réalisés sur un prototype de radiateur à l'échelle 1/5 ont montré que la température du gaz évaporé ne dépassait pas 5 K tant que le radiateur était immergé à 10 % au moins dans le bain d'hélium liquide. Toujours avec ce prototype, nous avons pu dissiper plus de 10 watts dans l'hélium liquide, sans constater d'ébullition à l'extérieur du radiateur.

2.3. Admission du gaz

L'hélium gazeux à basse température produit par les radiateurs est capté au-dessus du bain d'hélium liquide par une microvanne dont on contrôle l'ouverture au moyen d'une vis micrométrique différentielle (située à la température ambiante en haut du cryostat : cf. figure II.3).

L'hélium passe ensuite dans un tube souple en acier inoxydable, plongeant verticalement dans le bain jusqu'à la chambre d'expérience. Ce tube souple immergé dans le bain, constitue un bon échangeur thermique entre le liquide et le gaz, permettant à ce dernier d'arriver dans la chambre d'expérience à la température de l'hélium liquide à $\pm 0,1$ K près (cf. § 3.2).

Au sommet de la chambre, se trouve le "chapeau", petit couvercle en acier inox, permettant le passage du gaz vers la buse. Ce couvercle assure également l'étanchéité de la chambre d'expérience vis-à-vis du bain d'hélium liquide.

2.4. La buse

La buse formant le jet remplit deux objectifs : elle permet d'une part le filtrage du gaz, évitant ainsi au jet d'être pollué par des micropoussières, et permet d'autre part d'obtenir un jet laminaire à son embouchure.

Le filtrage du gaz est rendu nécessaire par la grande sensibilité des anémomètres à fil chaud vis-à-vis de petites poussières pouvant venir se fixer sur le fil : en effet, une micropoussière peut fausser l'équilibre thermique du fil, et conduire à des mesures erronées.

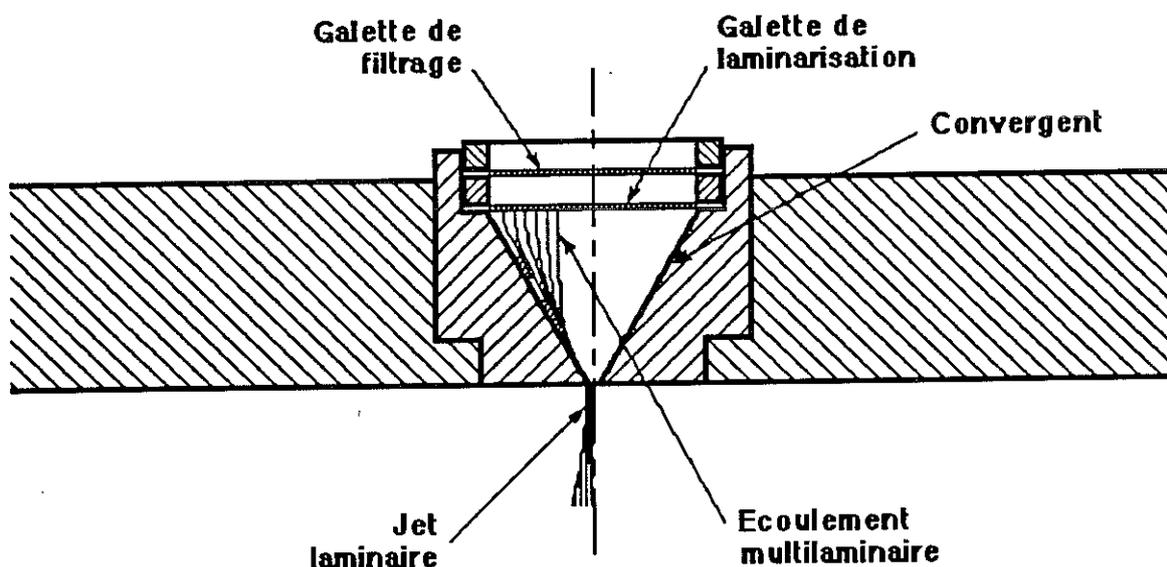


Figure II.5 : Schéma de la buse.

La formation d'un jet laminaire à son embouchure répond, quant à elle, à la nécessité d'avoir un jet "propre" : la turbulence apparaissant dans le jet doit en effet être caractéristique du jet lui-même, et non de traces résiduelles de fluctuations de vitesse éventuellement présentes en amont de la buse.

Le filtrage et la laminarisation du jet par la buse sont réalisés en deux temps à l'aide de deux galettes de microcanaux (figure II.5) : il s'agit de petits disques de verre, de 25 mm de diamètre et 0,5 mm d'épaisseur environ, percés d'une multitude de trous cylindriques disposés en nid d'abeille.

La galette de filtrage que nous avons utilisée est percée de plus de 1,5 millions de trous de $12,5\ \mu\text{m}$ de diamètre, et la galette de laminarisation compte 1 million d'alvéoles de $17,5\ \mu\text{m}$ de diamètre (figure II.6) (ce type de galette est généralement utilisé après métallisation des alvéoles comme photomultiplicateur à haute résolution ...).

La première galette retient donc les poussières véhiculées par le gaz, tandis que la seconde permet d'obtenir un écoulement multilaminaire parallèle. Au plus fort débit, le nombre de Reynolds relatif à une alvéole est de l'ordre de 100, ce qui, pour un tube cylindrique, permet d'obtenir un écoulement devenant laminaire sur une longueur de l'ordre de $60\ \mu\text{m}$ [II.2].

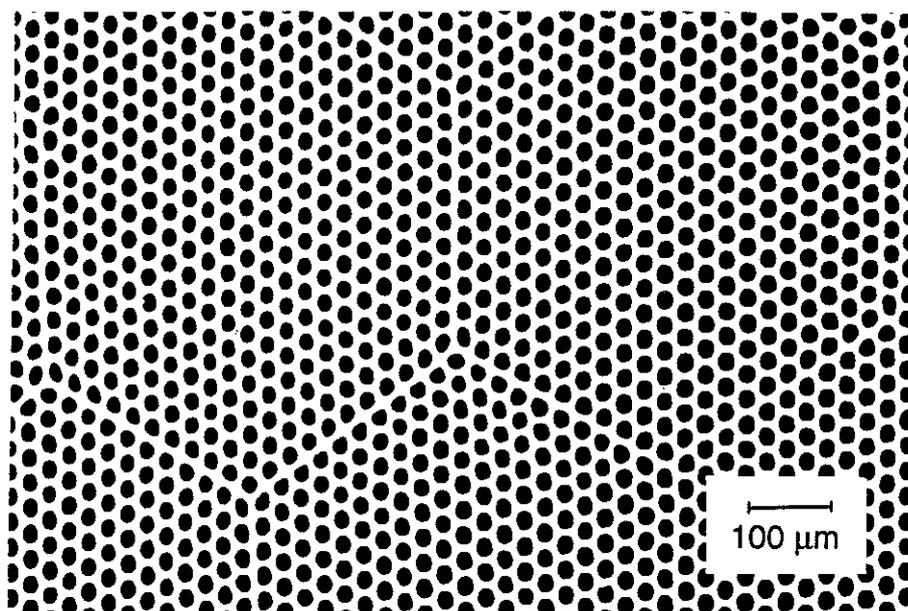


Figure II.6 : Alvéoles d'une galette de microcanaux.

A la sortie de cette galette de laminarisation, un convergent de rapport $1/5$ à $1/20$ permet de regrouper les micro-écoulements en un jet uniforme et laminaire qui débouche directement dans la chambre d'expérience. Ce type de rétrécissement en forme de cône est d'un usage empirique courant en hydrodynamique, et permet en comprimant l'écoulement, de dissiper les gradients de vitesse entre filets adjacents.

La perte de charge imposée par la buse sur le parcours de l'hélium est faible (inférieure à 100 mbar au plus fort débit et sous 1 bar) et correspond à une impédance de l'ordre de 10^{14} m^{-3} (deux galettes de microcanaux et convergent cône).

2.5. La chambre d'expérience

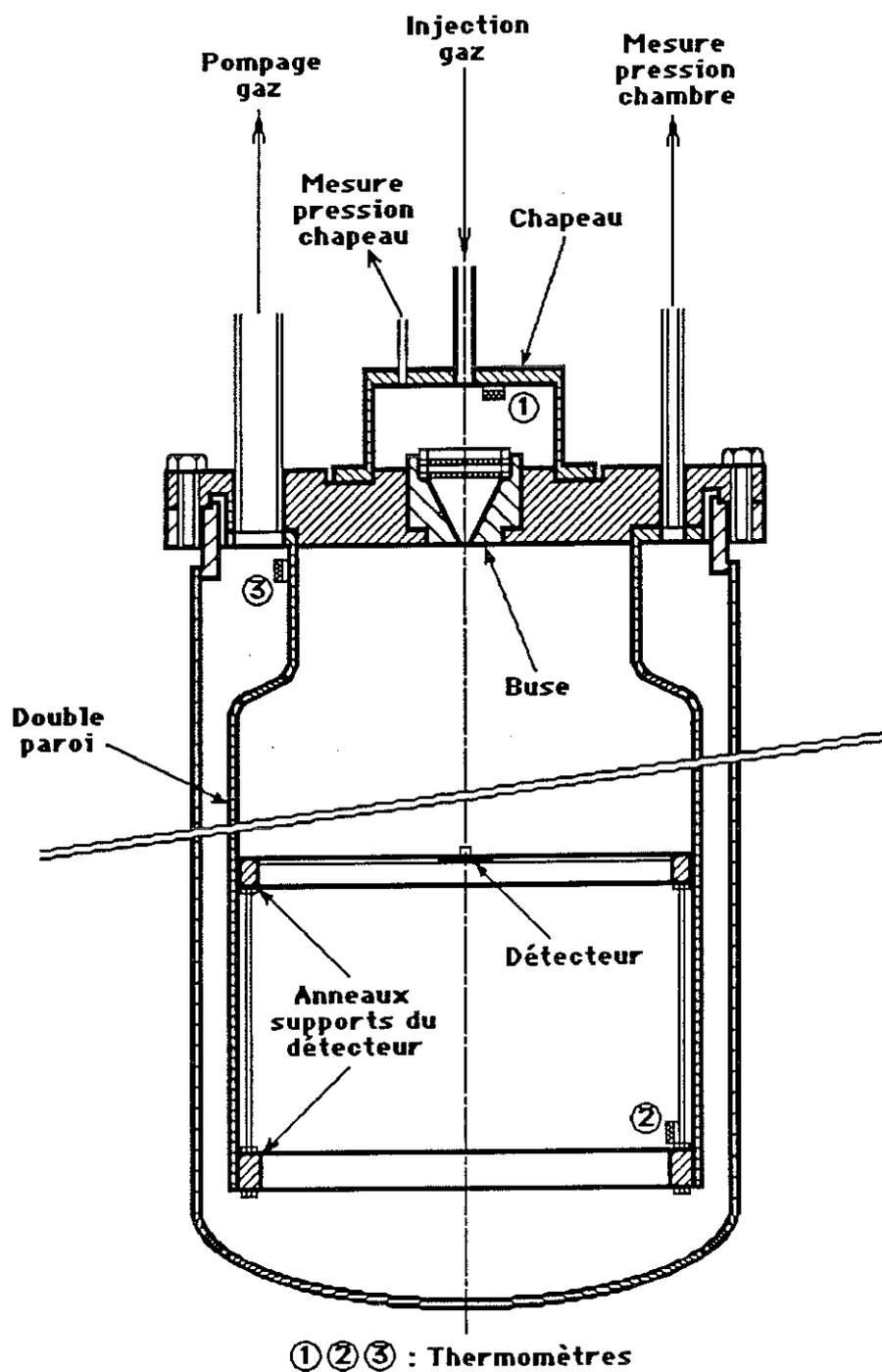


Figure II.7 : La chambre d'expérience.

La chambre est essentiellement constituée d'un cylindre fermé en acier inoxydable, de 140 mm de diamètre et 350 mm de hauteur, placé dans la partie inférieure du cryostat. La complète immersion de la chambre d'expérience dans le bain d'hélium liquide permet une bonne thermalisation, quel que soit en particulier le niveau d'hélium liquide dans le réservoir.

A la sortie de la buse, le jet se développe librement dans la chambre, sans rencontrer d'autre obstacle que le (ou les) détecteurs de vitesse ou de température. L'évacuation du gaz se fait derrière une double paroi conduisant à un tube de pompage remontant à la température ambiante (figure II.7).

A l'intérieur de la chambre, le support des détecteurs a été conçu afin de perturber le moins possible l'écoulement : il est constitué d'un anneau de 130 mm de diamètre, venant se fixer à l'intérieur de la double paroi, et supportant deux fils parallèles tendus "diamétralement" en travers du jet, sur lesquels vient se fixer le détecteur.

En jouant sur la hauteur de l'anneau-support et sur la position du détecteur le long des deux fils parallèles, on peut positionner le détecteur en tout point de la chambre, au sein du jet, ou hors de celui-ci.

3. PARAMETRES DE CONTROLE DU JET

3.1. Mesure des débits

Le débit de gaz constitue le paramètre principal à partir duquel on détermine le nombre de Reynolds du jet (cf. § 1.1.). Nous mesurons le débit en aval de l'écoulement, après réchauffement de l'hélium à la température ambiante.

A la sortie du cryostat, le gaz est dirigé à travers une conduite de 50 mm de diamètre, vers un échangeur de température. Cet échangeur est constitué d'un réservoir à eau (maintenue à la température ambiante), à l'intérieur duquel la conduite de gaz effectue un parcours de 2,5 mètres. Cette valeur correspond à la longueur caractéristique de thermalisation entre 77 K et 300 K, d'un débit de 100 g/mn (débit maximal) d'hélium gazeux [II.3].

A la sortie de l'échangeur, le gaz passe dans l'un des trois débitmètres dont nous disposons, nous permettant de couvrir la mesure des débits sur plus de 5 ordres de grandeur, de 0,01 à 1600 litres standard d'hélium par minute (correspondant à des vitesses au niveau de la buse de 10^{-3} m/s à 50 m/s environ).

Ces débitmètres sont de type massique : un élément déprimogène calibré (poreux métallique en général) crée une perte de charge sur le parcours du fluide, et astreint une fraction déterminée de celui-ci à passer dans un tube capillaire en dérivation (figure II.8). Un petit chauffage résistif est enroulé autour de ce capillaire, et deux thermomètres de part et d'autre de ce chauffage sont intégrés dans un pont de Wheatstone. La circulation du fluide dans ce capillaire provoque alors un déséquilibre du pont thermique proportionnel au débit massique total du fluide.

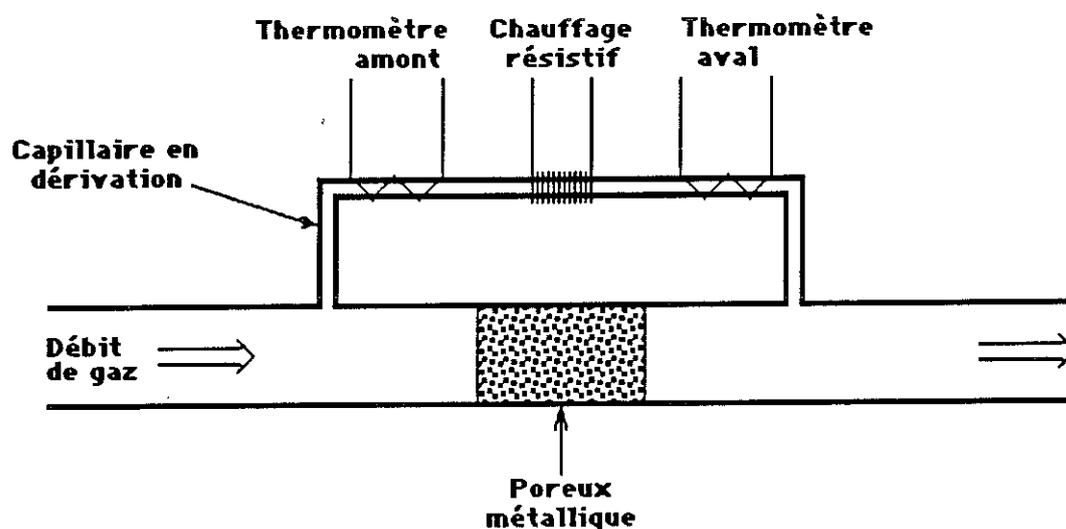


Figure II.8 : Principe de fonctionnement des débitmètres.

En changeant l'élément déprimogène du débitmètre, et moyennant un étalonnage réalisé par le fabricant, on peut, avec un même débitmètre, couvrir jusqu'à 4 ordres de grandeur.

La mesure des débits à des pressions inférieures à la pression atmosphérique doit être corrigée en utilisant une loi du type :

$$D_{Vrai} = D_{Lu} \left(\frac{\alpha}{P} + \beta \right)$$

où P est la pression au niveau du débitmètre ; α et β sont des paramètres que nous avons déterminé expérimentalement en confrontant le débit mesuré au débitmètre à celui enregistré à l'aide d'un compteur à gaz ($\alpha \approx 30$ à 200 mbar suivant le débitmètre et $\beta = 1 - \frac{\alpha}{P_{atm}}$ car les débitmètres sont étalonnés à la pression atmosphérique).

3.2. Mesure des températures et pressions

La température moyenne du jet et celle du bain d'hélium liquide sont mesurées en divers points de l'expérience, grâce à des thermomètres carbone. Ce sont des résistances Allen-Bradley à couche de carbone (67Ω à l'ambiante) dont on mesure la valeur en quatre fils au moyen d'un Siemensmètre à 4 digits et demi (licence CRTBT-Barras Provence).

Un thermomètre est placé dans le bain d'hélium liquide, sous la chambre d'expérience, et quatre autres sont disposés le long du parcours de l'hélium gazeux (figures II.3 et II.7) : au niveau des micro-vannes d'admission du gaz, dans le chapeau en amont de la buse, dans le bas de la chambre d'expérience, et enfin à la sortie de la chambre d'expérience, au niveau du retour du gaz par le tube de pompage.

Si la température mesurée dans la chambre d'expérience est toujours sensiblement égale à celle du bain d'hélium liquide, par contre, la température au niveau des micro-vannes dépend du débit de gaz et du niveau d'hélium liquide.

En effet, à débit nul, la température du gaz au-dessus du bain est stratifiée, et à la hauteur des micro-vannes, elle ne dépend que du niveau d'hélium liquide (entre 4,2 K lorsque le réservoir est plein à 100 % et 10 K lorsque le réservoir est pratiquement vide).

A faible débit ($Re \leq 15000$), le gaz "chaud" admis par les micro-vannes se thermalise au cours de son passage dans le tube immergé dans le bain, en descendant vers la chambre d'expérience.

A fort débit ($Re > 15000$), le brassage du gaz provoqué par les radiateurs, détruit la stratification en température, et le gaz admis par les micro-vannes est à une température sensiblement égale à celle de l'hélium liquide.

La complémentarité de ces deux mécanismes nous permet d'obtenir un jet dont la température est en toutes circonstances voisine à $\pm 0,1$ K près de celle du bain d'hélium liquide.

Les mesures de pression sont réalisées à l'aide de deux jauges piézorésistives (capteurs Sensym montés sur des cartes d'évaluation avec affichage 2000 points [II.4]), étalonnées de 0 à 2 bars absolus, avec une résolution de 1 mbar. Ces capteurs sont placés à la température ambiante, et reliés à l'expérience par des tubes de cuivre.

Les mesures de pression sont effectuées en trois points de l'expérience : au-dessus du bain d'hélium liquide, dans le chapeau en amont de la buse, et dans la chambre d'expérience.

3.3. Régulation du débit du jet

Pour une pression et une température choisies, l'obtention d'un écoulement stable résulte de l'équilibre finement ajusté entre la puissance dissipée dans le bain, l'ouverture des microvannes, et la vitesse de pompage en aval du jet.

En pratique, on procède de la façon suivante :

La température du jet, comme nous l'avons indiqué au paragraphe précédent, est égale à celle de l'hélium liquide du réservoir. On impose donc au-dessus du bain une pression de vapeur correspondant à la température désirée.

La perte de charge entre l'amont et l'aval du jet est donc fixée conjointement par la pression de vapeur du bain (et donc sa température), et par la pression souhaitée dans la chambre d'expérience. Cette perte de charge est concentrée essentiellement au niveau des microvannes, dont l'ouverture contrôle directement le débit de gaz.

La puissance dissipée dans le bain doit ensuite être parfaitement ajustée au débit, pour que la pression de vapeur, et donc la température de l'hélium liquide, ne varie pas.

Enfin, la vitesse de pompage en aval de l'écoulement doit exactement correspondre au débit de gaz dans le jet, afin que la pression dans la chambre ne dérive pas. Ce dernier point est obtenu grâce à un tableau de vannes permettant d'ajuster précisément la vitesse de pompage en aval des débitmètres.

Références Chapitre II

- [II.1] *Turbulent jets* N. Rajaratnam - Developments in Water Science 5, Elsevier Sci. Pub. Comp. (1976).
- [II.2] *Physical fluid dynamics* D.J. Tritton - Van Nostrand Reinhold Comp. (1977).
- [II.3] *Eléments des échanges thermiques* L. Weil - Gauthier-Villars Paris (1965).
- [II.4] SenSym-tronic SCX 30 AN avec carte LCD. - 58 av. des Marronniers, 91600 Savigny-sur-Orge.



CHAPITRE III

LE DETECTEUR DE VITESSE

Si la très faible viscosité cinématique de l'hélium nous permet de réaliser un jet à fort nombre de Reynolds dans une enceinte de quelques centimètres de diamètre, en contrepartie, les dimensions caractéristiques des structures turbulentes sont réduites en proportion, et les détecteurs utilisés doivent être de très petites dimensions. Ainsi, pour un écoulement à nombre de Reynolds voisin de 10^6 , l'échelle de dissipation visqueuse de Kolmogorov est de l'ordre du micron, et pour une vitesse moyenne de l'écoulement de 1 m/s au niveau du détecteur, les fréquences de fluctuations de température ou de vitesse seront de l'ordre du mégahertz.

Nous avons donc mis au point un détecteur de vitesse fonctionnant sur le principe de l'anémomètre à fil chaud, permettant d'effectuer des mesures à l'échelle du micron, avec un temps de réponse de l'ordre de la microseconde.

1. PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT ET REALISATION EXPERIMENTALE

1.1. Adaptation du principe du fil chaud

L'anémométrie à fil chaud est une technique fréquemment employée en hydrodynamique et repose sur un principe de fonctionnement simple [III.1] :

Un fil électrique de faible diamètre (de l'ordre du micron) et de courte longueur (typiquement un millimètre) est chauffé par effet Joule. Placé au sein d'un écoulement, il est refroidi par convection forcée, et sa résistance électrique, à l'image de sa température, fluctue avec la vitesse du fluide.

Ce mode de fonctionnement est valable tant que la résistance électrique du fil employé dépend de sa température, ce qui est vrai pour la plupart des métaux à la température ambiante. Par contre, à basse température, la résistance électrique des métaux usuels ne dépend que de la concentration d'impuretés présentes dans le métal, et ne varie plus du tout avec la température.

Pour obtenir une variation significative de la résistance en fonction de la température, et donc de la vitesse de l'hélium gazeux, nous avons mis au

point un détecteur dont la résistance électrique varie grâce à la transition partielle d'un revêtement supraconducteur couvrant le fil. La partie chaude de l'anémomètre est constituée d'une courte portion du fil exempte de dépôt supraconducteur, et donc purement résistive (figure III.1).

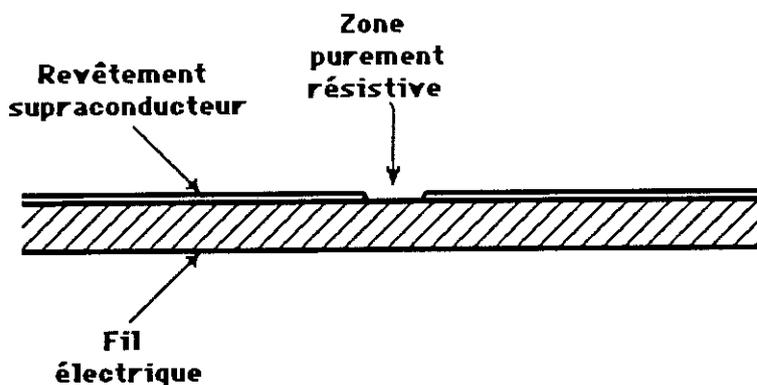


Figure III.1 : Principe du fil chaud à revêtement supraconducteur.

Lorsque le courant électrique I parcourant le fil est faible, le dépôt est entièrement supraconducteur, et la résistance du détecteur est égale à la seule contribution de sa partie résistive. Pour un courant plus important, la puissance dissipée par effet Joule provoque une élévation locale de température, et au-delà d'un courant seuil I_s la température du point chaud dépasse la température critique du dépôt supraconducteur adjacent, faisant transiter celui-ci vers l'état normal sur une longueur dépendant du rapport I/I_s .

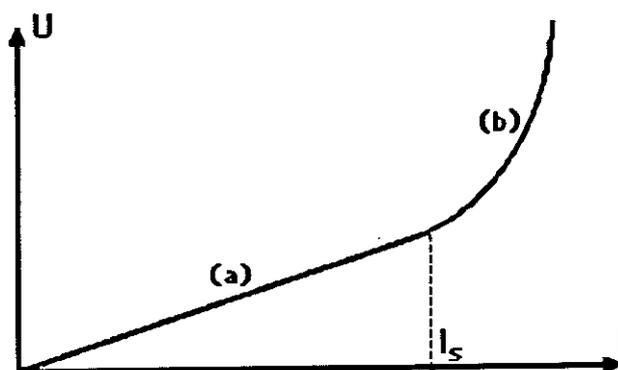


Figure III.2 : Caractéristique courant - tension du fil chaud.

- (a) Dépôt entièrement supraconducteur
- (b) Transition partielle du dépôt

La résistance totale du détecteur est alors égale à la somme de la contribution de la partie purement résistive, et de la résistance de la partie supraconductrice ayant transité. La caractéristique courant-tension du détecteur aura l'allure représentée sur la figure III.2.

1.2. Constitution du détecteur

L'une des difficultés systématiquement rencontrée en hydrodynamique expérimentale est de disposer de détecteurs ne perturbant pas l'écoulement que l'on souhaite caractériser.

Dans notre cas, afin de réaliser des mesures au sein du jet d'hélium gazeux, il nous fallait concevoir un détecteur pratiquement transparent vis à vis de l'écoulement. Dans cette optique, le système de support du détecteur est constitué d'un anneau en acier inoxydable de moins d'un millimètre d'épaisseur et de forme ovale d'un diamètre moyen de 1,5 cm, offrant une bonne rigidité, et une faible résistance à l'écoulement gazeux (figure III.3).

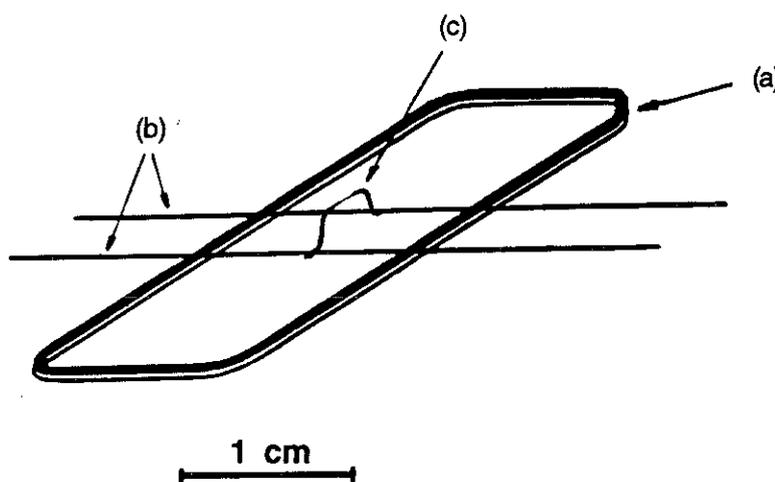


Figure III.3 : Schéma du détecteur.

- (a) Anneau - support
- (b) Fils de cuivre
- (c) Fil sensible

Sur cet anneau, sont collés à l'araldite deux fils parallèles de cuivre vernis, de 0,1 mm de diamètre, espacés de 3 à 4 mm. Ces fils constituent le support mécanique du fil chaud, ainsi que les amenées de courant et fils de mesure de tension.

chauffage, mais par dépassement du courant critique du revêtement (de l'ordre de 2500 A/mm^2).

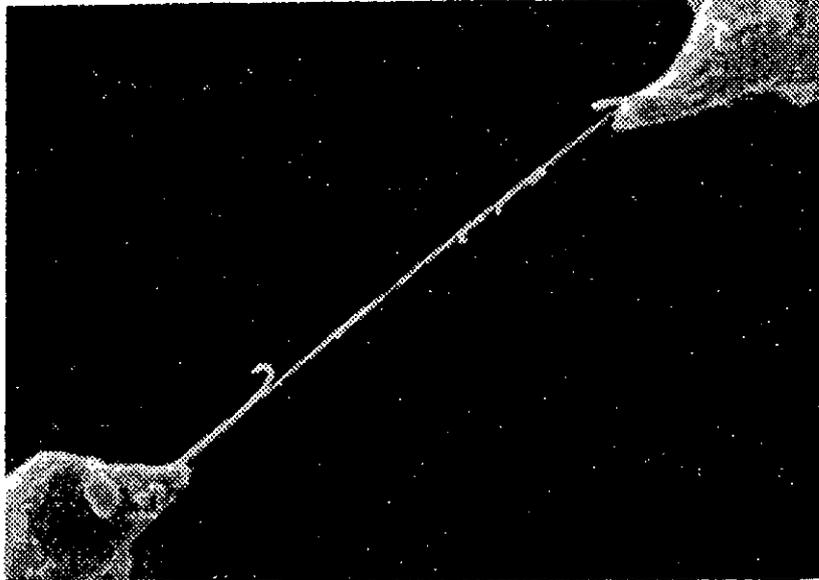


Figure III.5 : Décollement d'un dépôt de niobium sur un fil de platine de $1 \mu\text{m}$ de diamètre.
L'aspect rugueux des deux extractions du fil est dû à l'attaque acide.

Nous avons alors abandonné les fils de platine pour nous orienter vers une autre solution : à la place d'un fil métallique comme support résistif du détecteur, nous avons utilisé une fibre de verre de $5 \mu\text{m}$ de diamètre, sur laquelle sont déposées successivement une couche d'un métal résistif, puis un revêtement supraconducteur interrompu sur une courte longueur.

La fibre de verre présente le double avantage d'être un isolant électrique et un isolant thermique. Ceci doit permettre, d'une part, de contrôler la valeur de la résistance électrique de la sous-couche (en jouant en particulier sur son épaisseur) et, d'autre part, de limiter l'évacuation de la chaleur produite au point chaud par conduction solide dans la fibre.

En revanche, la mise en place d'une fibre de verre de quelques microns de diamètre sur le support du détecteur constitue une opération délicate ; dans un premier temps, on soude à l'indium deux "bras" en fil d'argent de $50 \mu\text{m}$ de diamètre et 5 mm de longueur environ sur les deux fils-supports de cuivre, puis on leur donne une forme courbée, les extrémités des deux bras étant alignées.

On vient dans un deuxième temps coller précautionneusement la fibre (préalablement nettoyée : cf. paragraphe 1.4.) sur ces deux bras d'argent, à l'aide d'une très fine couche de laque à l'argent conductrice (figure III.6).

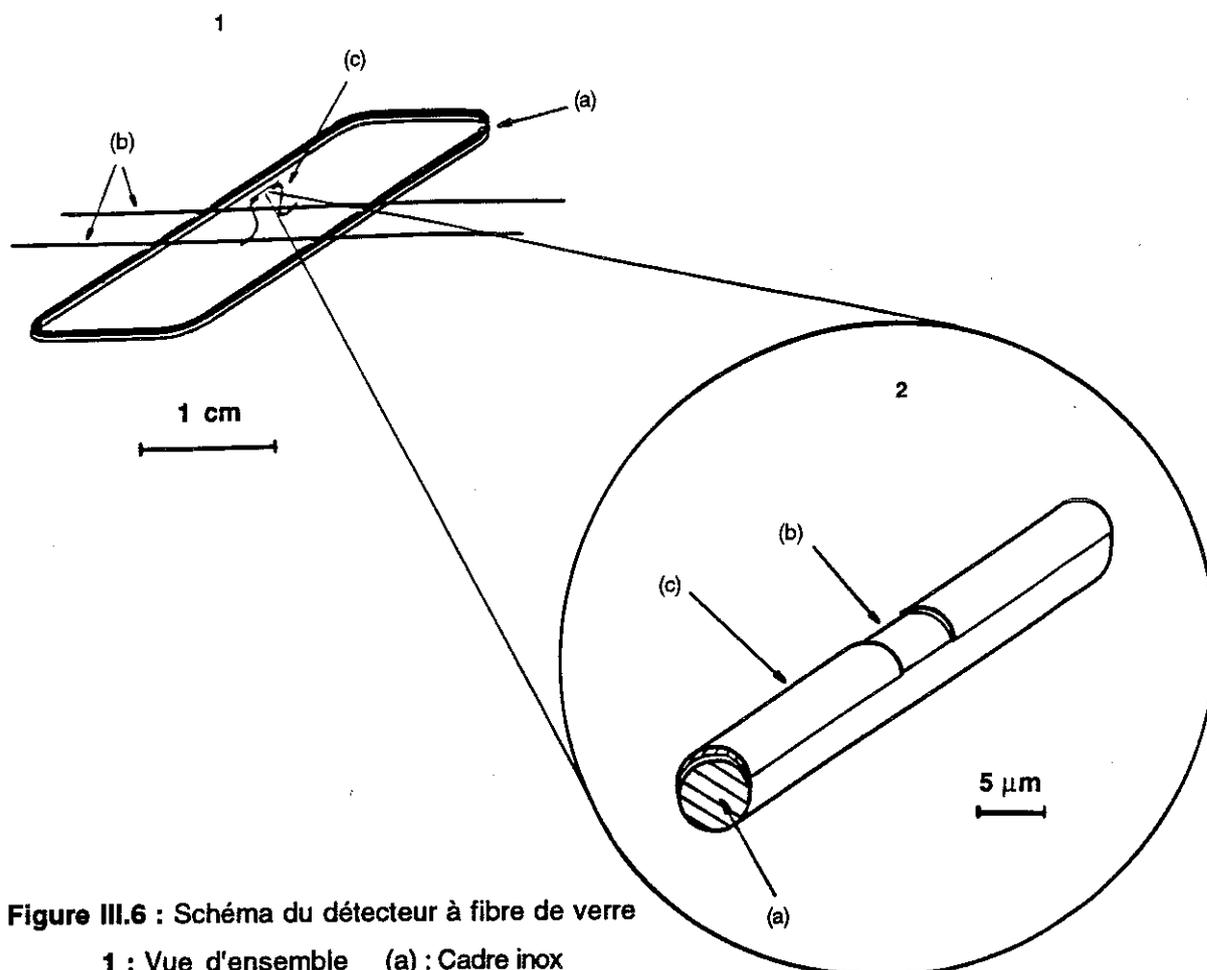


Figure III.6 : Schéma du détecteur à fibre de verre

- 1 : Vue d'ensemble** (a) : Cadre inox
 (b) : Fils de cuivre
 (c) : Fil chaud
- 2 : Point sensible** (a) : Fibre de verre
 (b) : Sous-couche de chrome
 (c) : Revêtement de plomb - indium

La fibre de verre ainsi positionnée est prête à recevoir le premier dépôt : nous avons choisi le chrome comme sous-couche résistive, car c'est un métal facile à évaporer, présentant une bonne adhérence sur le verre, et constituant une sous-couche apte à recevoir d'autres dépôts. Après quelques essais, nous avons systématiquement effectué des pré-dépôts de chrome de 500 Å d'épaisseur, permettant d'obtenir une résistance de l'ordre de l'ohm par micron de longueur de la fibre ($\rho \approx 100 \mu\Omega.cm$).

2. MODELISATION DU COMPORTEMENT DU DETECTEUR

Parallèlement à la mise au point expérimentale du détecteur, nous avons cherché à modéliser son comportement. Cette modélisation présente deux intérêts complémentaires : elle nous a permis, pendant la phase de mise au point du détecteur, de dégager les paramètres de fabrication importants, et elle nous a guidé quant à la compréhension du comportement du détecteur placé au sein d'un écoulement turbulent.

Nous allons présenter ce modèle en deux étapes :

Dans un premier temps, nous établirons l'équation d'équilibre thermique du fil placé dans un milieu statique (sans écoulement gazeux), ce qui nous permettra de tracer le profil théorique de température et la caractéristique courant-tension du détecteur.

Nous modéliserons ensuite le comportement dynamique du détecteur : nous étudierons sa réponse spatiale en simulant une perturbation locale de la vitesse de l'écoulement, puis nous estimerons son temps de réponse en ajoutant un terme d'échauffement à l'équation d'équilibre thermique de départ.

Tous les calculs sont développés dans les annexes II et III.

2.1. Comportement statique

L'équation de base du modèle exprime l'équilibre thermique du fil parcouru par un courant I (cette équation est développée dans l'annexe II) :

$$RI^2 = -K_s \frac{d^2T(x)}{dx^2} + K_H(T(x)-T_o) \quad (1)$$

où R est la résistance par unité de longueur du fil ($R = 0$ dans les zones supraconductrices).

Le terme $-K_s \frac{d^2T(x)}{dx^2}$ représente la puissance évacuée par conduction solide dans le fil (verre plus métal), où K_s est la somme des conductibilités thermiques du verre et du métal par unité de longueur. $T(x)$ est la température du fil au point x considéré.

Le terme $K_H(T(x)-T_0)$ représente la puissance évacuée par conduction dans le gaz environnant dont la température est T_0 . Le coefficient K_H est environ égal à $K_{He} \times \pi$ où K_{He} est la conductibilité thermique de l'hélium gazeux à la température T_0 ($K_{He} \approx 0,1 \text{ mW/cm.K}$ à 4,2 K).

La résolution de l'équation (1) dans les trois zones distinctes du fil (région supraconductrice, région supraconductrice ayant transité et région purement résistive) (figure III.7) fait apparaître deux longueurs λ_1 et λ_2 caractéristiques de l'étalement du profil de température le long du fil dans les régions notées 1 et 2 :

$$\lambda_i = \sqrt{\frac{K_i}{K_H}}$$

où K_i est la conductibilité thermique du fil par unité de longueur, dans la région i : $i = 1$ correspond à la région résistive, fibre de verre et dépôt de chrome-or, et $i = 2$ correspond à la région revêtue de l'alliage plomb-indium. Dans cette seconde région, nous avons pris en première approximation une valeur identique pour la conductibilité thermique du dépôt Pb-In dans l'état supraconducteur et dans l'état normal.

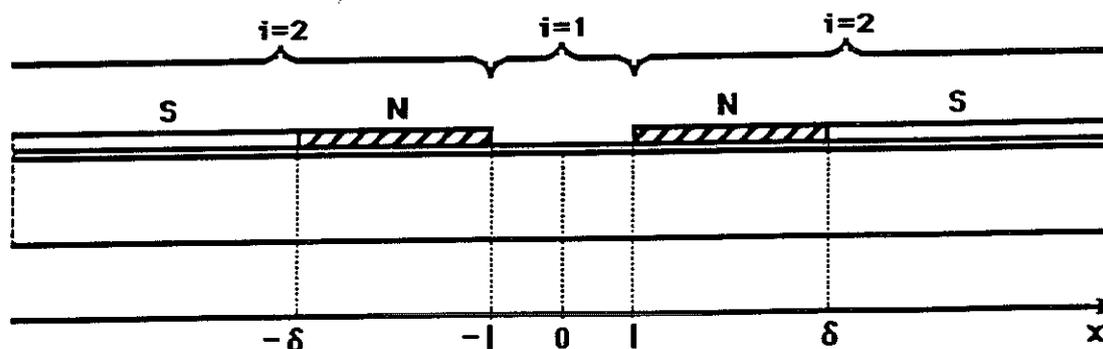


Figure III.7 : Coupe du fil chaud : repérage des différentes zones.

La résolution de l'équation (1) nous permet en premier lieu d'exprimer le courant seuil I_s en fonction des différents paramètres du fil. En atteignant ce courant seuil I_s , la chaleur fournie par effet Joule au point résistif devient suffisante pour que le revêtement supraconducteur atteigne sa température critique, et commence à transiter vers l'état normal. Ce courant seuil s'obtient

en posant comme conditions aux limites de l'équation (1) : $T(x = \pm \ell) = T_c$ où T_c est la température critique de transition de l'alliage Pb-In.

L'expression du courant seuil est alors :

$$I_s = \left[\frac{K_H(T_c - T_0)}{R_1} \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \coth \frac{\ell}{\lambda_1} \right) \right]^{1/2}$$

où R_1 représente la résistance par unité de longueur du dépôt de chrome-or.

Pour un courant inférieur au courant seuil I_s , la température est donnée par :

$$\begin{cases} T(x) = T_0 + \frac{R_1 I^2}{K_H} - 2A \operatorname{ch} \frac{x}{\lambda_1} & \text{pour } x \leq \ell \\ T(x) = T_0 + B e^{\frac{\ell-x}{\lambda_2}} & \text{pour } x \geq \ell \end{cases}$$

où

$$A = \frac{R_1 I^2}{2K_H \left(\operatorname{ch} \frac{\ell}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \operatorname{sh} \frac{\ell}{\lambda_1} \right)}$$

$$B = \frac{R_1 I^2}{K_H \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \coth \frac{\ell}{\lambda_1} \right)}$$

R_1 et R_2 représentent respectivement les résistances par unité de longueur des dépôts de chrome-or et plomb-indium dans l'état normal, et 2ℓ est la longueur du point chaud (chrome-or seul).

Pour un courant supérieur au courant seuil I_s , la température est donnée par :

$$\begin{cases} T(x) = T_0 + \frac{R_1 I^2}{K_H} - 2C \operatorname{ch} \frac{x}{\lambda_1} & \text{pour } x \leq \ell \\ T(x) = T_0 + D e^{\frac{\delta-x}{\lambda_2}} - 2 \frac{R_2 I^2}{K_H} \operatorname{sh}^2 \left(\frac{\delta-x}{2\lambda_2} \right) & \text{pour } \ell \leq x \leq \delta \\ T(x) = T_0 + D e^{\frac{\delta-x}{\lambda_2}} & \text{pour } x \geq \delta \end{cases}$$

où

$$C = \frac{D e^{\frac{\delta-\ell}{\lambda_2}} - \frac{I^2}{K_H} \left(R_1 + 2R_2 \operatorname{sh}^2 \left(\frac{\delta-\ell}{2\lambda_2} \right) \right)}{2 \operatorname{ch} \frac{\ell}{\lambda_1}}$$

$$D = T_c - T_0$$

En donnant aux paramètres de calcul les valeurs correspondant au détecteur réalisé (diamètre et longueur du fil, résistance électrique des régions 1 et 2, conductibilités thermiques déduites de la loi de Wiedemann-Franz, conductibilité thermique de l'hélium gazeux à 4,2 K ...), nous avons calculé la valeur théorique du courant seuil :

$$I_s \approx 0,563 \text{ mA.}$$

Cette valeur correspond à une densité de courant dans la couche mince de plomb-indium de l'ordre de 560 A/mm², c'est à dire largement inférieure aux valeurs de courants critiques que nous avons mesurées pour ce type d'alliage.

Nous avons ensuite calculé les profils théoriques de température du fil chaud (figure III.8).

On observe ainsi qu'au seuil de transition ($I_s = 0,563 \text{ mA}$) la température maximale du fil atteint 7 K ($\geq T_c = 6,6 \text{ K}$) et que le point chaud s'étale de part et d'autre de la partie résistive sur une longueur caractéristique $\lambda_2 \approx 10$ microns.

2.2. Comportement dynamique

2.2.1. Effet d'une fluctuation de vitesse

Pour comprendre le comportement du détecteur placé au sein d'un écoulement turbulent, nous avons modélisé les fluctuations de la vitesse du gaz environnant en modifiant les conditions d'application de l'équation d'équilibre thermique. Remarquons d'abord que la vitesse du gaz n'apparaît pas explicitement dans l'équation (1) :

$$RI^2 = -K_S \frac{d^2T(x)}{dx^2} + K_H(T(x) - T_o) \quad (1)$$

mais intervient par l'intermédiaire du coefficient d'échange thermique K_H .

Pour prendre en compte les fluctuations de la vitesse, nous avons donc imposé localement sur le fil une valeur différente de ce coefficient : une augmentation (resp. diminution) locale de la vitesse du gaz se traduit par un refroidissement plus (resp. moins) efficace du fil, qui est modélisé par une valeur plus importante (resp. faible) du coefficient K_H .

D'autre part, afin de prendre en compte les dimensions spatiales des fluctuations de vitesse autour du détecteur, nous imposons une variation de K_H sur une portion limitée du fil : suivant l'étendue et la position de la perturbation par rapport au point chaud du détecteur, 4 cas distincts apparaissent (on considère que la zone du supraconducteur ayant transité est très courte devant la longueur de la perturbation) :

- (1) La perturbation est entièrement en zone supraconductrice.
- (2) La perturbation est à cheval sur la zone supraconductrice et la zone résistive.
- (3) La perturbation est entièrement dans la zone résistive.
- (4) La perturbation couvre entièrement la zone résistive.

Dans chacun de ces 4 cas (figures III.10 (1) à (4)), nous avons résolu l'équation d'équilibre thermique dans les 5 zones adjacentes (notées (a) à (e)), délimitées par les frontières entre zones résistives et zones

supraconductrices et par les frontières entre zones soumises à un faible ou à un fort coefficient d'échange thermique K_H .

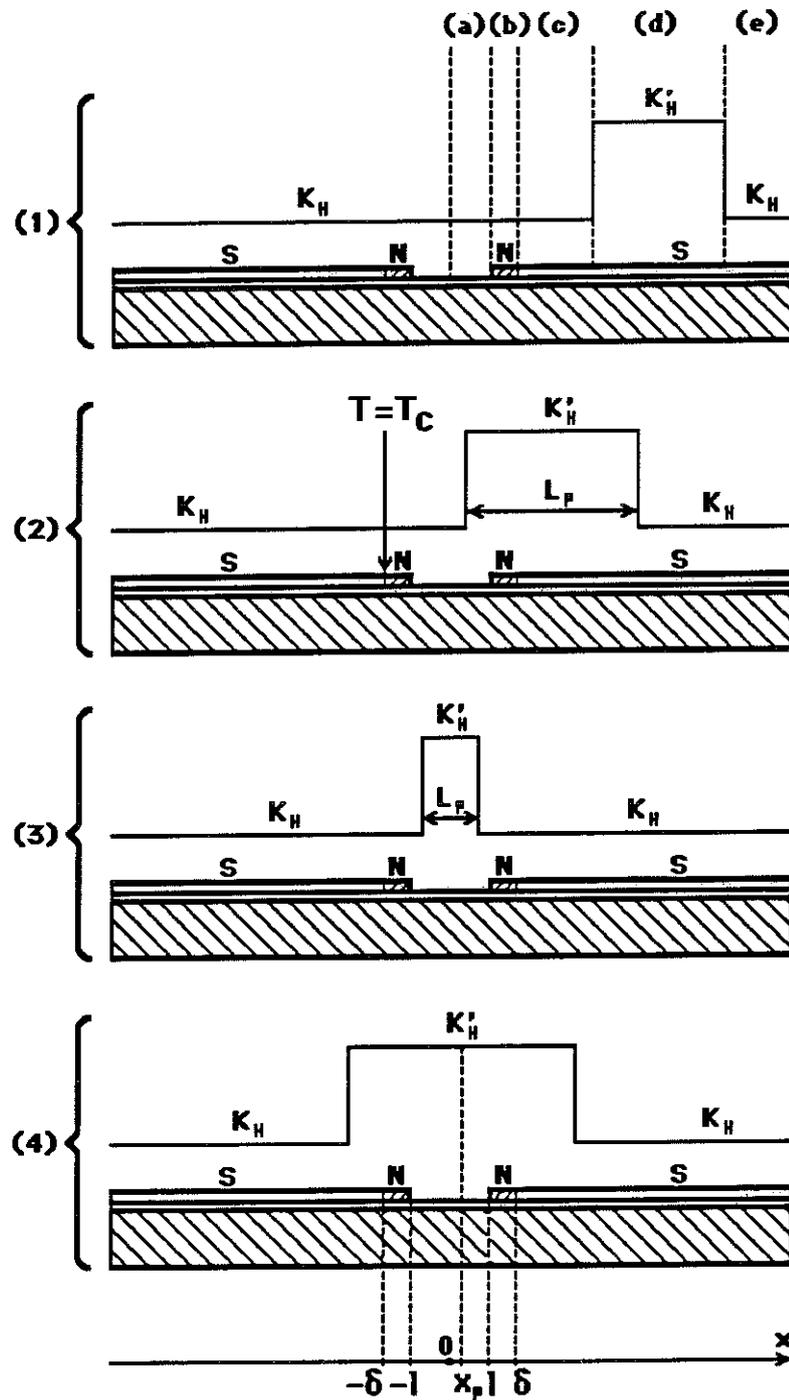


Figure III.10 : Position de la perturbation par rapport au point chaud.

En pratique, nous nous sommes intéressés à la variation du courant seuil I_s en fonction de la position d'une perturbation d'étendue L_p et d'intensité K'_H/K_H donnée. La résolution de l'équation (1) dans chacune des 5 zones (a) à (e) fait apparaître 10 constantes d'intégration que l'on détermine

d'après les conditions $T = T_0$ pour $x \rightarrow \pm \infty$ ainsi que les 4 conditions de continuité de la température et les 4 conditions de continuité du flux thermique aux frontières entre régions adjacentes (Annexe III).

La valeur du courant seuil I'_s est alors obtenue en faisant l'hypothèse que $T = T_c$ en bordure du dépôt supraconducteur du côté opposé à une perturbation d'intensité $K'_H > K_H$. La perturbation provoque en effet un déséquilibre dans le refroidissement du fil et la transition du dépôt supraconducteur apparaît du côté globalement le moins refroidi.

Nous avons ainsi, pour une perturbation de longueur et d'intensité fixées, calculé la variation relative du courant seuil ($\frac{I'_s - I_s}{I_s}$ en %) en fonction de la position du milieu de la perturbation par rapport au milieu du point résistif du fil. Les courbes de réponse obtenues (figure III.11) nous fournissent plusieurs informations intéressantes :

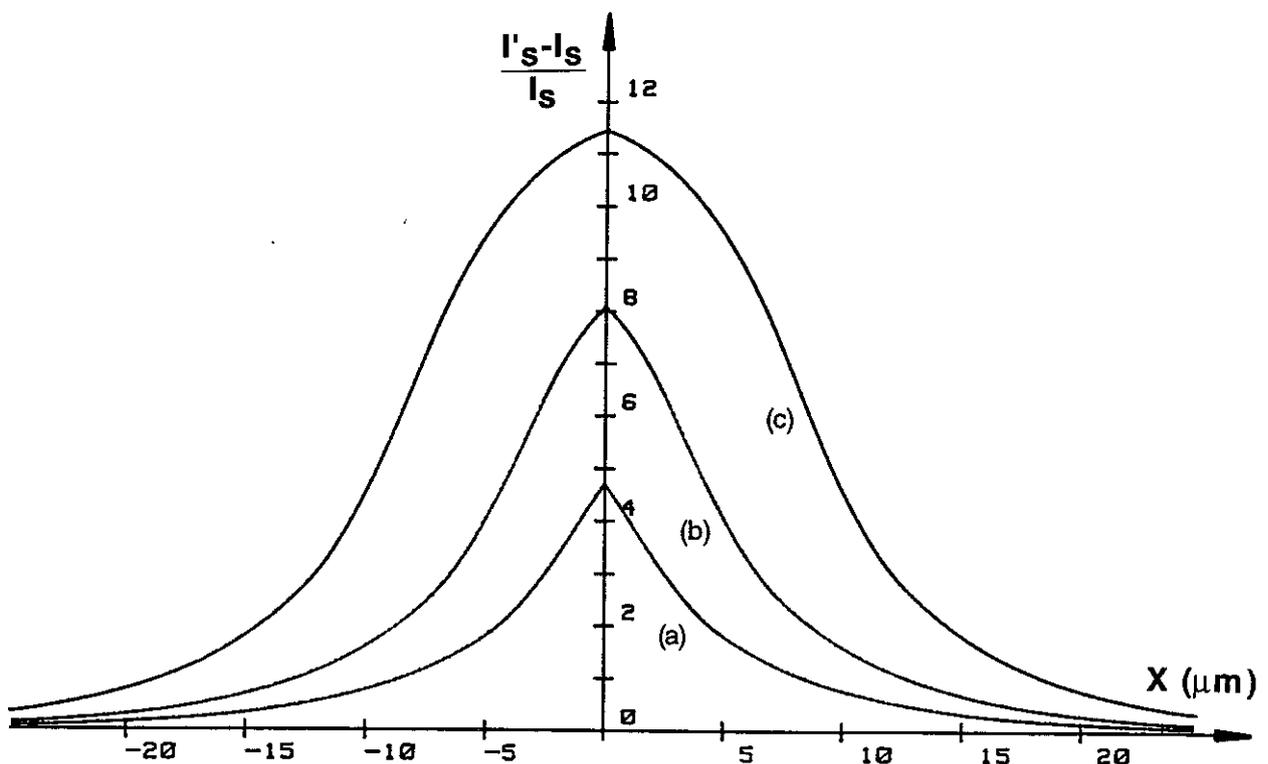


Figure III.11 : Courbes de réponse du détecteur à une perturbation ($K'_H/K_H = 1,5$)

(a) : $L_p = 5 \mu\text{m}$

(b) : $L_p = 10 \mu\text{m}$

(c) : $L_p = 20 \mu\text{m}$

On observe en premier lieu que les courbes présentent un point anguleux en $x_p = 0$ (perturbation centrée sur le milieu du point chaud). Ceci est à

relier à l'hypothèse retenue postulant que le dépôt supraconducteur commence à transiter du côté opposé à la position d'une perturbation d'intensité $K_H' > K_H$. Ainsi, lorsqu'une perturbation passe d'une position $x_p = -\varepsilon$ à une position $x_p = +\varepsilon$, la transition saute d'un côté à l'autre du point chaud (de $T = T_c$ en $x = \delta$ à $T = T_c$ en $x = -\delta$ respectivement).

D'autre part, la largeur des courbes de réponse obtenues est sensiblement égale à l'étendue de la perturbation imposée. Cela signifie qu'une fluctuation de vitesse ne couvrant pas au moins partiellement le point sensible du détecteur provoque une très faible variation du courant seuil, ce qui confirme le caractère localisé de notre détecteur.

Cette remarque est confirmée par la seconde courbe que nous avons tracée, représentant également la variation relative du courant seuil ($\frac{I_s' - I_s}{I_s}$) en fonction cette fois de la largeur d'une perturbation d'intensité K_H' fixée, centrée en $x_p = 0$ (figure III.12).

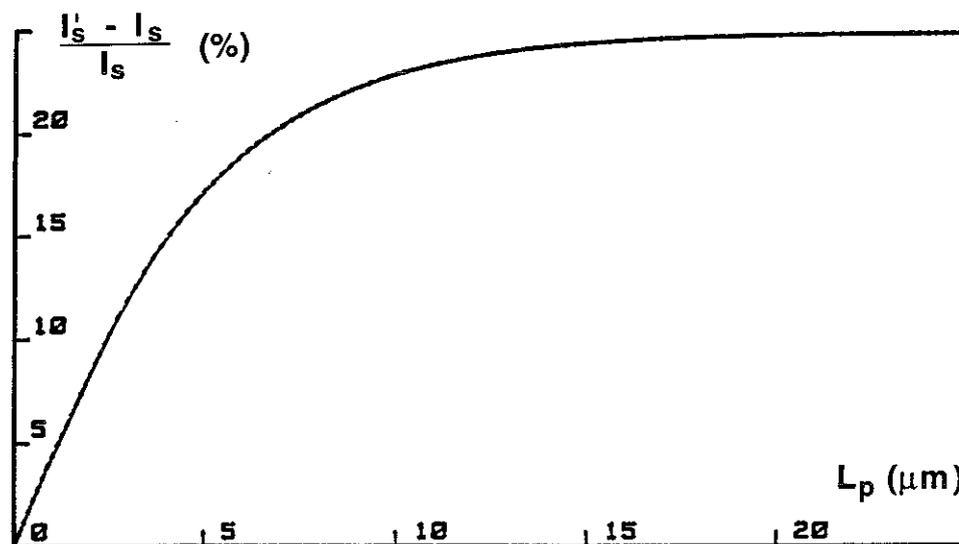


Figure III.12 : Variation relative du courant seuil en fonction de la largeur L_p d'une perturbation d'intensité $K_H'/K_H = 2$, centrée en $x_p = 0$.

Nous voyons sur cette courbe que la largeur minimale d'une perturbation entièrement vue par le détecteur est de l'ordre de 20 microns. En effet, une telle perturbation provoque une variation du courant seuil quasiment égale (à 1 % près) à celle que l'on observerait avec une perturbation couvrant entièrement le détecteur.

2.2.2. Temps de réponse du détecteur

Afin d'estimer la constante de temps de réponse du détecteur, on ajoute à l'équation d'équilibre thermique (1) un terme de chauffage du fil, fonction du temps :

$$RI^2 = K_H(T-T_0) - K_s \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2)$$

où C est la capacité calorifique par unité de longueur du fil au point considéré.

On s'intéressera ici à une solution légèrement hors d'équilibre, que l'on écrira :

$$T(x,t) = \bar{T}(x) + \theta(x,t)$$

où $\theta(x,t)$ représente l'écart à la solution d'équilibre thermique $\bar{T}(x)$.

La cause ayant conduit à cet état hors d'équilibre (fluctuation de la vitesse de l'écoulement, ou variation du courant) est ici secondaire, car on cherche à déterminer le temps de réponse caractéristique du fil, indépendamment du contexte de fonctionnement de celui-ci.

En substituant dans l'équation (2) la solution légèrement perturbée $T(x,t)$, on arrive à :

$$\theta \frac{dR}{dT} I^2 = K_H \theta - K_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + C \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (3)$$

Le terme de gauche est nul partout le long du fil, sauf au voisinage de la frontière normal-supra. En effet, tant dans la région supraconductrice, que dans les régions résistives (supraconducteur ayant transité ou zone purement résistive), la résistance du fil ne varie pas avec la température dans la gamme de températures où nous travaillons ($T \leq 10$ K pour le fil).

En intégrant l'équation (3) de $x_0 - \varepsilon$ à $x_0 + \varepsilon$ autour de la frontière normal-supra, et en faisant tendre ε vers zéro, on obtient une condition sur les dérivées $\partial\theta/\partial x$ autour du point de transition $x = x_0$ (cf. annexe III) :

$$\frac{\theta R I^2}{\left| \frac{dT}{dx} \right|} = K_s \left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)_{x_0 - \varepsilon} - \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)_{x_0 + \varepsilon} \right] \quad (4)$$

La fonction $\theta(x,t)$ contient a priori plusieurs termes de constantes de temps diverses. En écrivant $\theta(x,t)$ sous la forme

$$\theta(x,t) = \theta(x) e^{-t/\tau}$$

nous ferons l'hypothèse que tous les termes de constante de temps inférieure à τ sont tombés à zéro, et que seul reste le terme de constante de temps la plus grande, fixant ainsi une borne supérieure au temps de réponse du détecteur tout entier.

La solution $\theta(x,t)$ doit satisfaire à l'équation (3) en tout point du fil, avec les conditions aux limites θ et $\frac{\partial\theta}{\partial x}$ nuls à l'infini, ainsi que la condition de symétrie du profil. On obtient ainsi :

$$\begin{cases} \theta(x,t) = A \operatorname{ch} \frac{x}{\lambda} e^{-t/\tau} & \text{pour } x \leq \ell \\ \theta(x,t) = (B_+ e^{x/\lambda_2} + B_- e^{-x/\lambda_2}) e^{-t/\tau} & \text{pour } \ell \leq x \leq \delta \\ \theta(x,t) = D e^{-x/\lambda_2} e^{-t/\tau} & \text{pour } x \geq \delta \end{cases}$$

La continuité de la température le long du fil et la condition (4) nous permettent alors d'exprimer la constante de temps τ en fonction des paramètres du fil (cf. annexe III) :

$$\tau = \tau_0 / (1 - \alpha^2)$$

où $\tau_0 = \frac{C}{K_H}$ (la capacité calorifique C du fil est supposée constante), et

$$\alpha = \frac{R_2 \lambda_2}{R_1 \lambda_1} \coth \frac{\ell}{\lambda_1}$$

L'équilibre thermique du fil serait donc instable pour $\alpha > 1$, ce qui correspondrait à la propagation instantanée de la transition sur toute la longueur du fil, dès son apparition.

Le calcul de α pour notre détecteur donne une valeur de 0,48 qui, pour une capacité calorifique C par unité de longueur de la fibre de verre de l'ordre de $1,7 \cdot 10^{-8} \text{ J.m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, nous conduit à un temps de réponse voisin de $7,5 \cdot 10^{-7}$ secondes. Cette valeur est de l'ordre des temps caractéristiques les plus courts présents dans l'écoulement.

3. COMPORTEMENT EXPERIMENTAL DU DETECTEUR DE VITESSE

Avant d'effectuer des essais de mesure de vitesse d'écoulement, nous avons procédé à la caractérisation du détecteur placé dans un environnement statique (sans écoulement).

Cette caractérisation s'est déroulée en deux étapes : nous avons d'abord étudié le comportement du détecteur seul, en traçant la courbe $R = f(T)$ et la caractéristique courant-tension du fil ; puis nous avons procédé à l'étude du comportement du détecteur associé à l'électronique de mesure.

3.1. Caractérisation du fil chaud

3.1.1. Courbe $R = f(T)$

Cette caractéristique a été réalisée en plaçant le détecteur dans le gaz stratifié en température au-dessus du bain d'hélium liquide d'un petit cryostat d'essai.

La température du détecteur est estimée à l'aide d'une résistance carbone (Allen-Bradley 47Ω à l'ambiante) placée à quelques millimètres du fil.

La résistance du détecteur est mesurée en quatre fils, au moyen d'un pont à injection optique et d'un détecteur multifonction (licence CRTBT-Barras Provence). Le courant de mesure ne dépasse pas $0,1 \mu\text{A}$, donc très inférieur au courant seuil de chauffage du fil ($I_s \approx 0,54 \text{ mA}$).

La caractéristique obtenue nous permet d'évaluer la température critique de transition supraconductrice du revêtement plomb-indium (figure III.13).

$$T_c \approx 6,6 \text{ K}$$

Cette valeur est de l'ordre de 1,5 fois la température de l'hélium gazeux alimentant le jet ($T_0 \leq 4,2 \text{ K}$), ce qui permet au détecteur d'être peu sensible aux éventuelles fluctuations de la température du gaz, pour ne mesurer que ses fluctuations de vitesse.

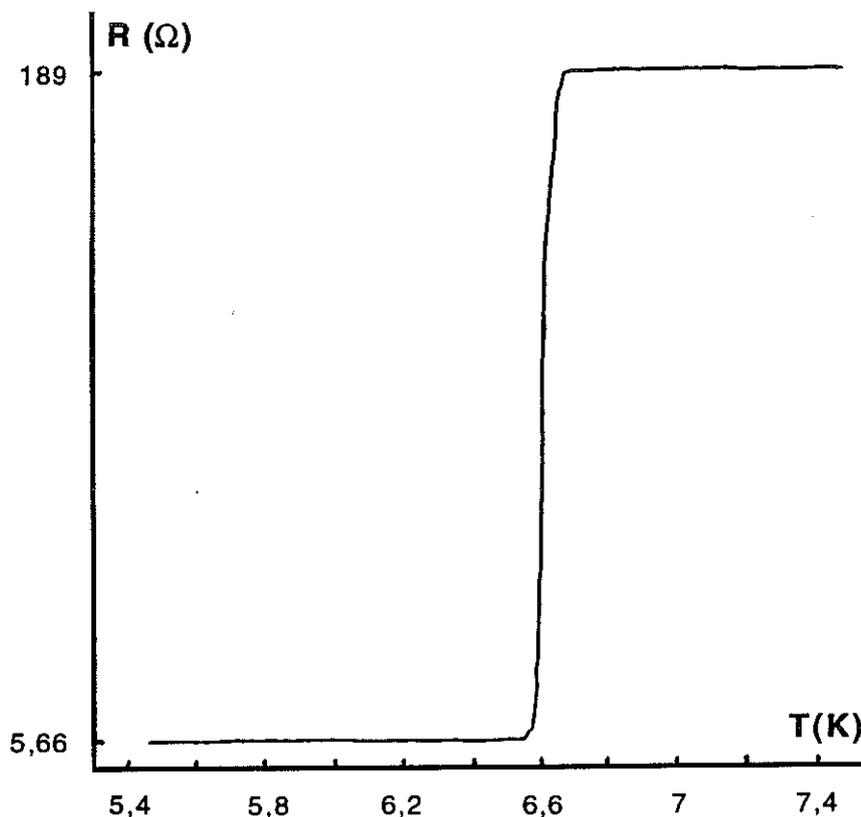


Figure III.13 : Courbe de transition du détecteur : $T_c \approx 6,6 \text{ K}$.

A partir des mesures de la résistance du fil pour une température inférieure ou supérieure à T_c , nous obtenons les valeurs R_1 et R_2 des résistances par unité de longueur des dépôts de chrome-or et de plomb-indium respectivement :

$$R_1 = \frac{5,9 \Omega}{5 \mu\text{m}} \approx 1,2 \Omega/\text{micron}$$

$$R_2 = \frac{(189 - 5,9) \Omega}{(1320 - 5) \mu\text{m}} \approx 0,14 \Omega/\text{micron}$$

où $\ell = 1320 \mu\text{m}$ est la longueur totale de la fibre de verre.

3.1.2. Caractéristique courant-tension

La caractéristique courant-tension du détecteur a été tracée en injectant dans le fil une rampe de courant continu et en mesurant simultanément la tension à ses bornes.

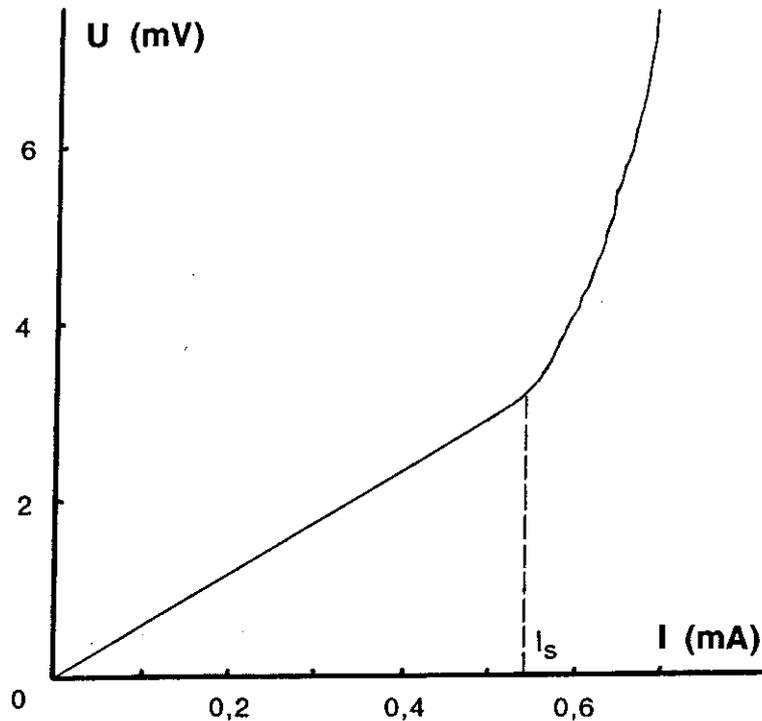


Figure III.14 : Caractéristique courant - tension du détecteur : $I_s = 0,54 \text{ mA}$.

Sur la courbe obtenue (figure III.14), on observe pour un courant inférieur au courant seuil I_s , une région linéaire, de pente égale à $5,9 \Omega$, suivie d'une région à courbure positive, correspondant à la transition progressive du dépôt supraconducteur de part et d'autre du point chaud. La valeur du courant seuil $I_s = 0,54 \text{ mA}$ est en très bon accord avec la valeur obtenue par le calcul au paragraphe 2.1. ($I_{\text{calc}} = 0,563 \text{ mA}$).

Nous avons tracé, pour un autre fil chaud, un faisceau de caractéristiques pour plusieurs valeurs de la température du gaz environnant le détecteur (figure III.15). On observe ainsi que le courant seuil I_s dépend faiblement de T_0 , et que la courbure de la caractéristique devient d'autant plus importante que la température du gaz est élevée. En effet, cette courbure dépend du terme d'échange avec le gaz $K_H(T-T_0)$ de l'équation d'équilibre thermique (1).

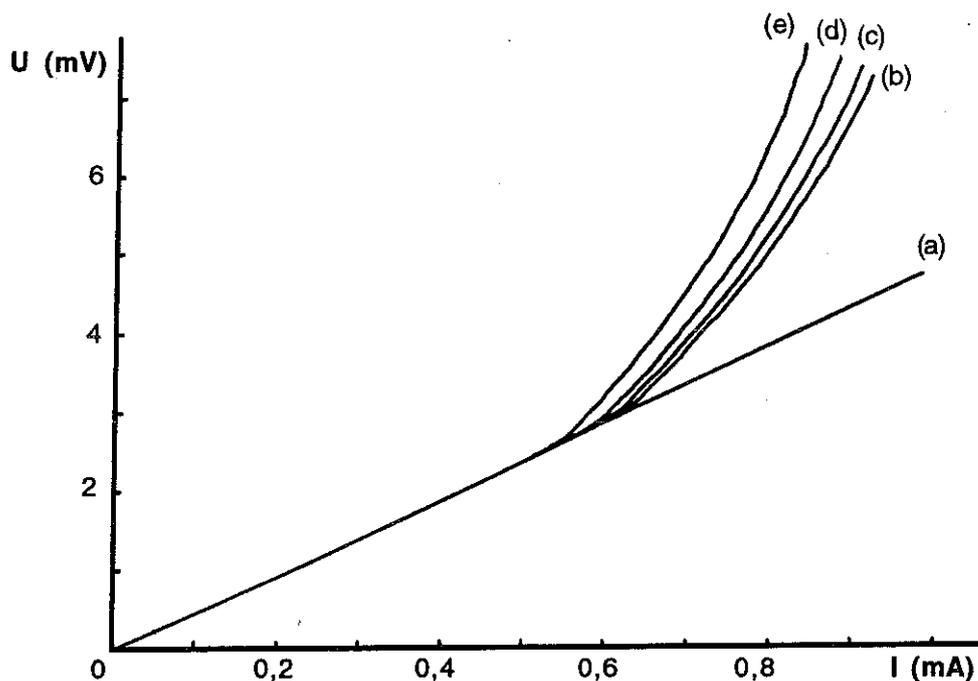


Figure III.15 : Faisceau de caractéristiques courant - tension.

(a) : Détecteur immergé dans l'hélium liquide

(b) : $T = 4,3$ K

(c) : $T = 4,4$ K

(d) : $T = 4,6$ K

(e) : $T = 4,9$ K

Cette remarque s'applique notamment à la caractéristique notée (a) de la figure III.15, tracée alors que le détecteur était entièrement immergé dans l'hélium liquide. Dans ce cas, le coefficient d'échange thermique K_H doit être remplacé par la conductibilité thermique de l'hélium liquide à 4,2 K, qui est plus de deux fois supérieure à celle de l'hélium gazeux sous 1 atmosphère et 4,2 K.

Nous n'avons pas prolongé la caractéristique du détecteur immergé au-delà d'un courant de 1 mA par mesure de précaution ... En effet, au-delà d'un certain seuil, la puissance fournie au point chaud peut provoquer un effet

de caléfaction et entraîner un réchauffement brutal du fil, jusqu'à la température de fusion du revêtement de plomb-indium (nous avons observé ce mode de destruction des détecteurs sur quelques fils antérieurs).

A l'issue de cette phase de caractérisation du détecteur lui-même, nous avons procédé à l'étude du comportement de l'ensemble : électronique de mesure - détecteur, ce dernier étant placé dans la chambre d'expérience, en conditions réelles de fonctionnement.

3.2. Fonctionnement du détecteur in situ : l'électronique de mesure

On distingue généralement deux modes de fonctionnement pour les anémomètres à fil chaud :

- le fonctionnement à courant constant, où les fluctuations de vitesse de l'écoulement sont déduites des fluctuations de la résistance du fil,
- et le fonctionnement à résistance constante, où les fluctuations à imposer au courant pour maintenir la résistance constante sont à l'image des fluctuations de vitesse.

Nous avons choisi ce dernier mode de fonctionnement pour plusieurs raisons :

En premier lieu, l'asservissement de notre détecteur à une valeur de résistance constante permet de travailler avec une longueur sensible (longueur du revêtement supraconducteur ayant transité) minimale. Cette condition est nécessaire pour que le détecteur soit sensible à tout instant aux fluctuations de vitesse jusqu'aux plus petites échelles.

En second lieu, un fonctionnement à résistance constante nous permet d'attendre une loi d'étalonnage pour notre détecteur comparable aux lois généralement utilisées pour des fils chauds classiques (cf. § 4).

Enfin, l'asservissement du détecteur à une longueur sensible constante permet d'atteindre un temps de réponse global (détecteur et électronique d'asservissement) meilleur que le temps de réponse propre du détecteur (jusqu'à deux ordres de grandeur pour un fil chaud classique [III.12]).

La conception et la réalisation de l'électronique d'asservissement du détecteur ont été assurées par le Service Electronique du laboratoire, et en particulier par MM. Bret et Faure.

3.2.1. Principe de fonctionnement

L'asservissement du détecteur à une valeur de résistance constante est réalisé grâce à un montage en pont, où la tension aux bornes du fil sensible est comparée à la tension aux bornes d'une résistance-étalon. Cette résistance-étalon est constituée d'un fil de platine-tungstène de résistance linéaire environ égale à $6 \Omega/\text{cm}$ à l'ambiante, pour un diamètre de 50 microns.

On choisit la longueur de ce fil de référence afin d'obtenir une valeur de résistance voisine de celle du fil chaud dans l'état entièrement supraconducteur (proche du point de fonctionnement du détecteur). Pour le détecteur que nous avons utilisé, le fil de platine-tungstène présente une longueur d'environ 5 mm, pour une résistance égale à $3,88 \Omega$, constante dans toute la gamme de température où nous travaillons ($T \leq 5 \text{ K}$). Afin de minimiser les boucles d'induction, cette résistance-étalon est placée immédiatement à côté du fil sensible : sur l'anneau-support en inox sont ainsi collés, non pas deux, mais trois fils de cuivre parallèles, celui du milieu étant commun au fil chaud et à la résistance de référence.

Le schéma électrique équivalent du détecteur complet peut donc être représenté ainsi (figure III.16) :

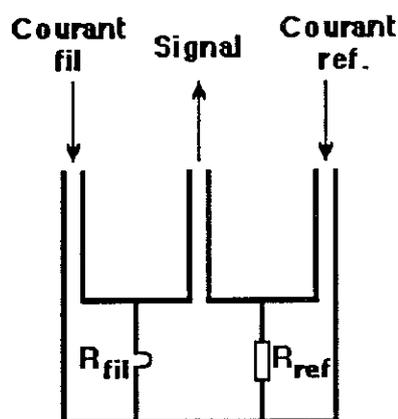


Figure III.16 : Schéma électrique du détecteur complet.

Deux sources de courant, dont les intensités sont dans le rapport inverse des valeurs des résistances du fil chaud ($R_{fil} \approx 5,9 \Omega$) et de la résistance de référence ($R_{ref} = 3,88 \Omega$), alimentent le fil et la résistance étalon. Le signal de déséquilibre recueilli par la paire de fils torsadés centrale est alors amplifié avant de venir agir en contre-réaction sur l'intensité des deux sources de courant.

Deux appareillages ont été construits sur ce principe par le Service Electronique du laboratoire : une détection alternative à 500 kHz, et une détection à 10 MHz modulée en courant continu.

3.2.2. Détection alternative à 500 kHz

Les courants qui alimentent le fil sensible et la résistance-étalon sont fournis par deux générateurs de courant délivrant des crêteaux à 500 kHz avec une amplitude de l'ordre du courant seuil ($I \geq I_s = 0,54 \text{ mA}$) (figure III.17).

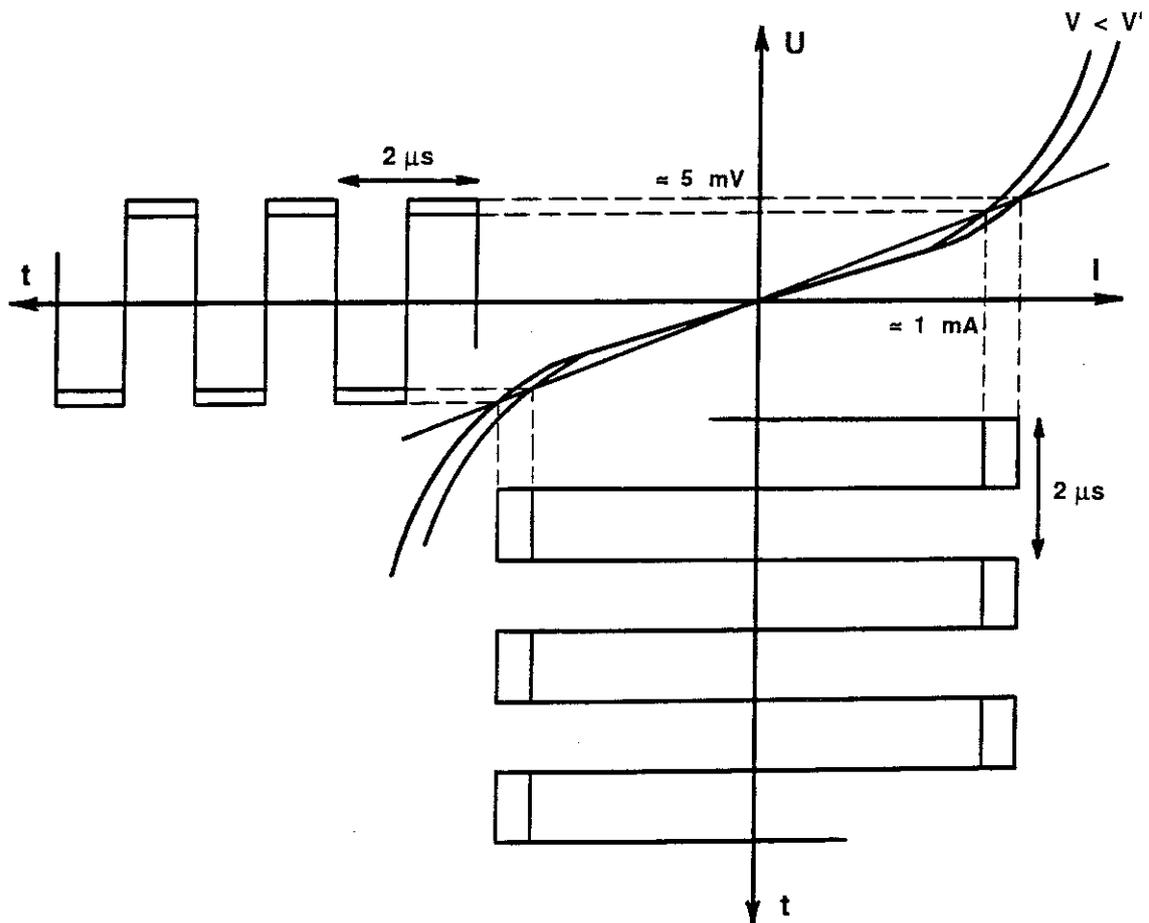


Figure III.17 : Principe de l'asservissement à 500 kHz.

Une fluctuation de la vitesse de l'écoulement autour du point chaud du fil entraîne une modification de la caractéristique du détecteur et par conséquent fait apparaître un déséquilibre dans le pont de mesure. Le système rattrape alors ce déséquilibre en ajustant l'amplitude des deux sources de courant (toujours dans le rapport R_{ref}/R_{fil}), de façon à rééquilibrer le pont.

Le schéma électrique simplifié de cet asservissement est représenté sur la figure III.18.

Cet appareillage a été testé avec succès, mais son principe même de fonctionnement (créneaux de courant), limitait la dynamique de mesure vers 20 kHz.

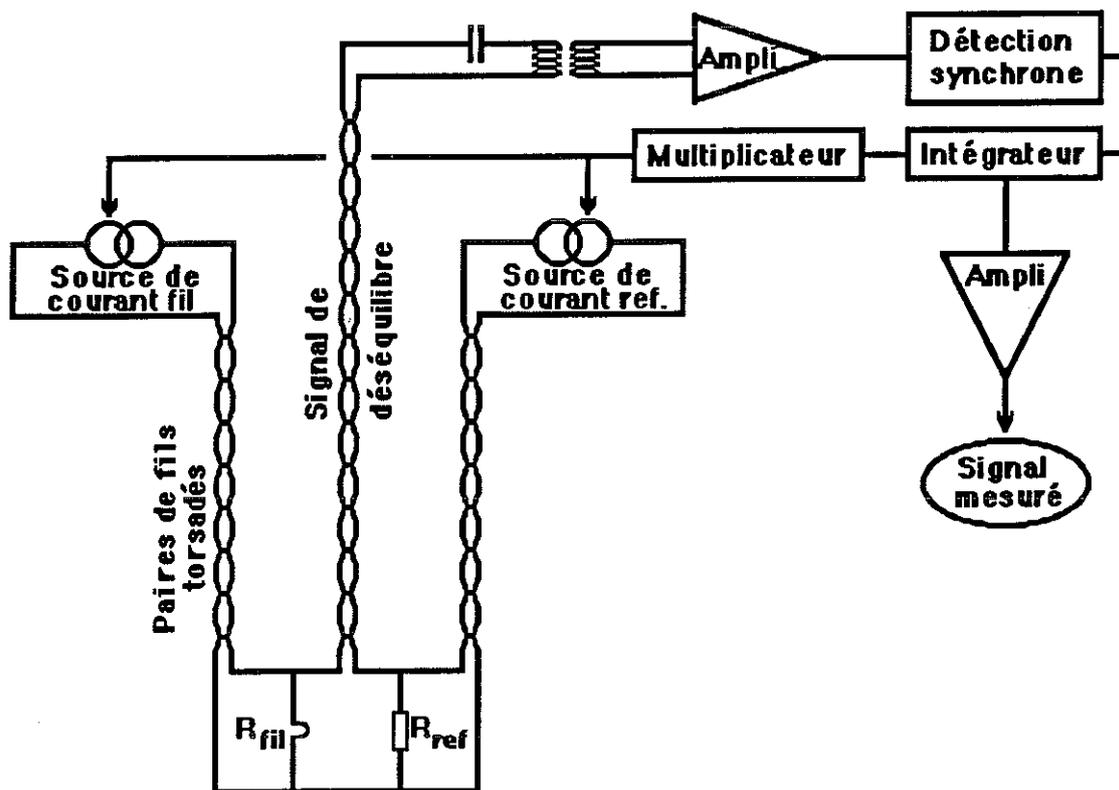


Figure III.18 : Schéma électrique de l'asservissement du détecteur.

Toujours en étroite collaboration avec le Service Electronique, nous avons alors défini le principe d'un autre appareillage d'asservissement du détecteur.

3.2.3. Détection modulée à 10 MHz

La simple transposition du premier appareillage de mesure vers des fréquences plus élevées est apparue impossible, compte tenu notamment des fréquences harmoniques élevées présentes dans les signaux en créneaux, qui auraient nécessité du système une bande passante excessivement large. Pour contourner cette limitation, le second appareillage a été conçu sur un principe légèrement différent :

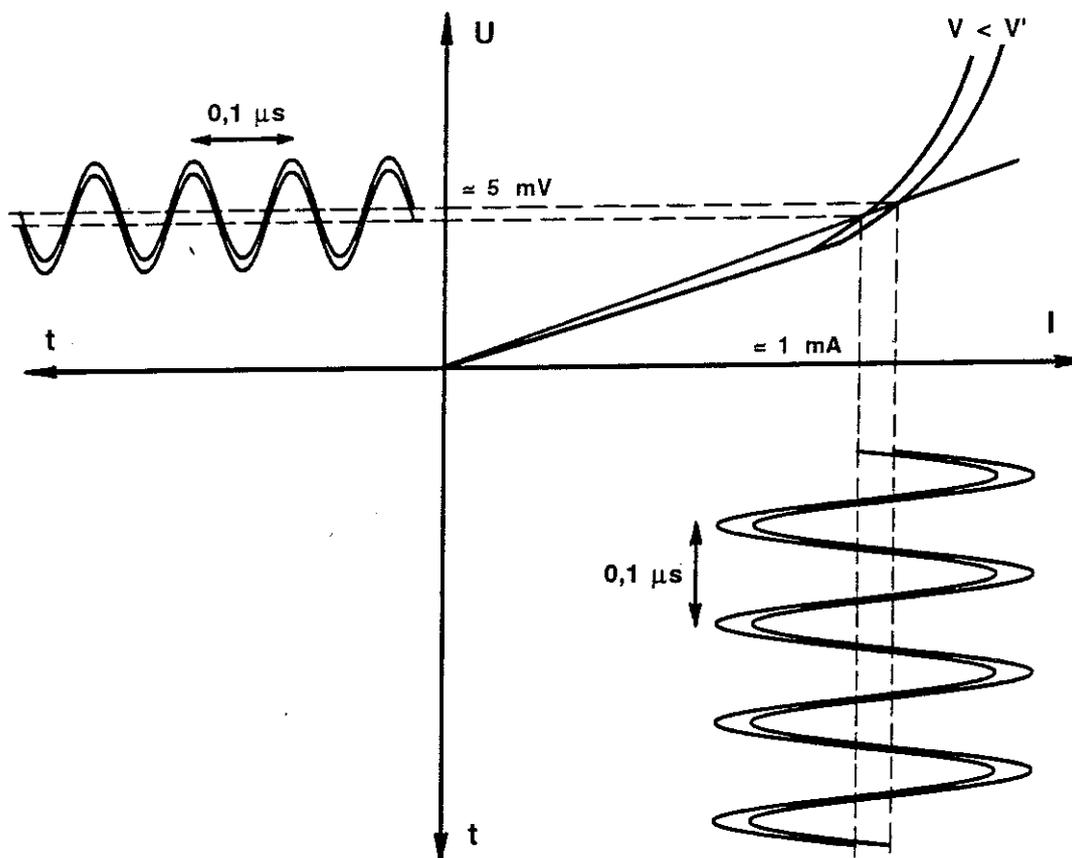


Figure III.19 : Principe de la détection modulée à 10 MHz.

Les courants envoyés dans le détecteur et dans la résistance de référence sont constitués d'une composante "continue" à laquelle se superpose une composante sinusoïdale haute fréquence (HF) à 10 MHz, de plus faible amplitude. Les déséquilibres apparaissant dans le pont de mesure sous l'effet des fluctuations de la vitesse, sont alors compensés en imposant un réajustement de la seule composante continue des courants (figure III.19).

Le schéma électrique simplifié de cet appareillage est représenté sur cette figure :

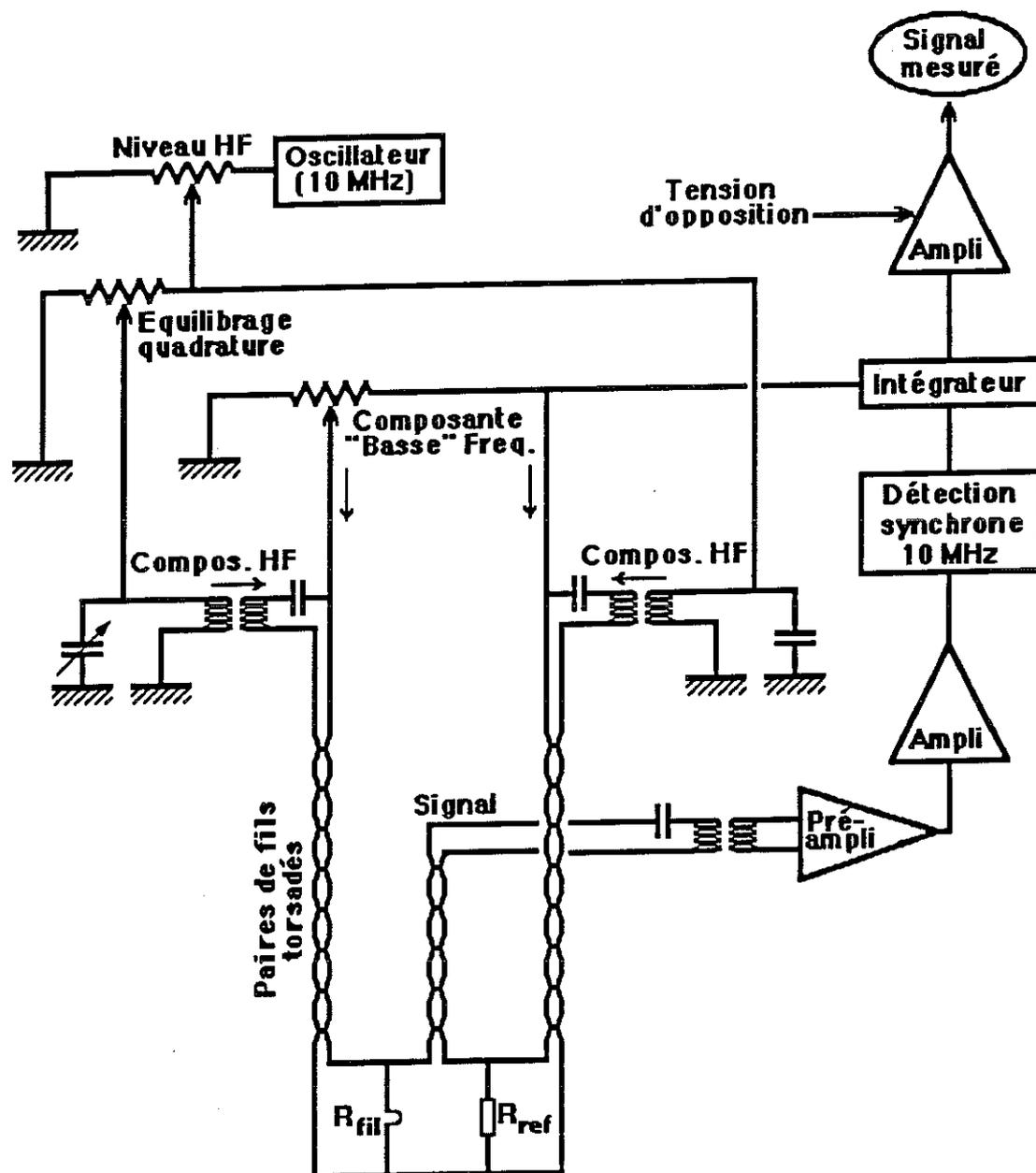


Figure III.20 : Schéma électrique de l'asservissement à 10 MHz.

La validité du signal délivré par cette électronique passe par le réglage optimal (réalisé en début de chaque série de mesures) de quelques paramètres apparaissant sur la figure III.20.

Equilibrage quadrature

Ce réglage permet de choisir le rapport des amplitudes des composantes haute fréquence du courant (10 MHz) et revient donc à choisir le point de fonctionnement du détecteur (Asservissement de la résistance du fil chaud à une valeur donnée).

Niveau HF

Le réglage du niveau de la composante haute fréquence du courant répond à 2 exigences en partie contradictoires :

Un niveau HF élevé permet d'accroître rapport signal de déséquilibre sur bruit, mais est limité par la puissance totale à fournir au fil pour maintenir sa résistance constante: pour un point de fonctionnement donné, la puissance totale reçue par le fil est la somme de la puissance HF et de la puissance due au courant asservi, laquelle doit rester nécessairement positive.

Gain de l'amplificateur

Ce gain doit être choisi en fonction du niveau HF fixé, afin d'obtenir le meilleur rapport signal sur bruit, tout en évitant l'auto-oscillation de la boucle d'asservissement.

3.2.4. Réponse en fréquence

Pour pouvoir enregistrer les fluctuations de vitesse aussi bien à faible qu'à fort débit, l'électronique de mesure associée au détecteur doit répondre des tensions continues au mégahertz environ. La valeur de la composante continue du signal est importante, car elle correspond à la vitesse moyenne de l'écoulement.

Pour concilier la mesure de la vitesse moyenne du jet avec une bonne dynamique dans la mesure de ses fluctuations, nous avons séparé la composante continue du signal de sa composante fluctuante ; pour cela, on superpose au signal une tension d'opposition choisie pour que les fluctuations soient centrées près de zéro et puissent être amplifiées sans saturation en sortie.

Nous avons d'autre part vérifié le bon fonctionnement de l'asservissement du détecteur dans toute la gamme des fréquences de fluctuation de la vitesse présentes dans le jet. Pour cela, on envoie dans le détecteur un signal de perturbation de fréquence variable (sinusoïdal ou carré) et l'on observe à l'oscilloscope comment réagit l'asservissement. Le signal de perturbation est injecté à la sortie de l'intégrateur, à travers une résistance de $1\text{ k}\Omega$. Nous avons ainsi mesuré le niveau du signal pour une perturbation sinusoïdale d'amplitude égale à 10 volts (simulant des fluctuations de vitesse de l'ordre du m/s) en effectuant un balayage de 0,1 Hz à plus d'un mégahertz. La courbe de réponse en fréquence obtenue montre le très bon comportement de l'asservissement, avec un plateau s'étendant des tensions continues à près de 100 kHz (figure III.21).

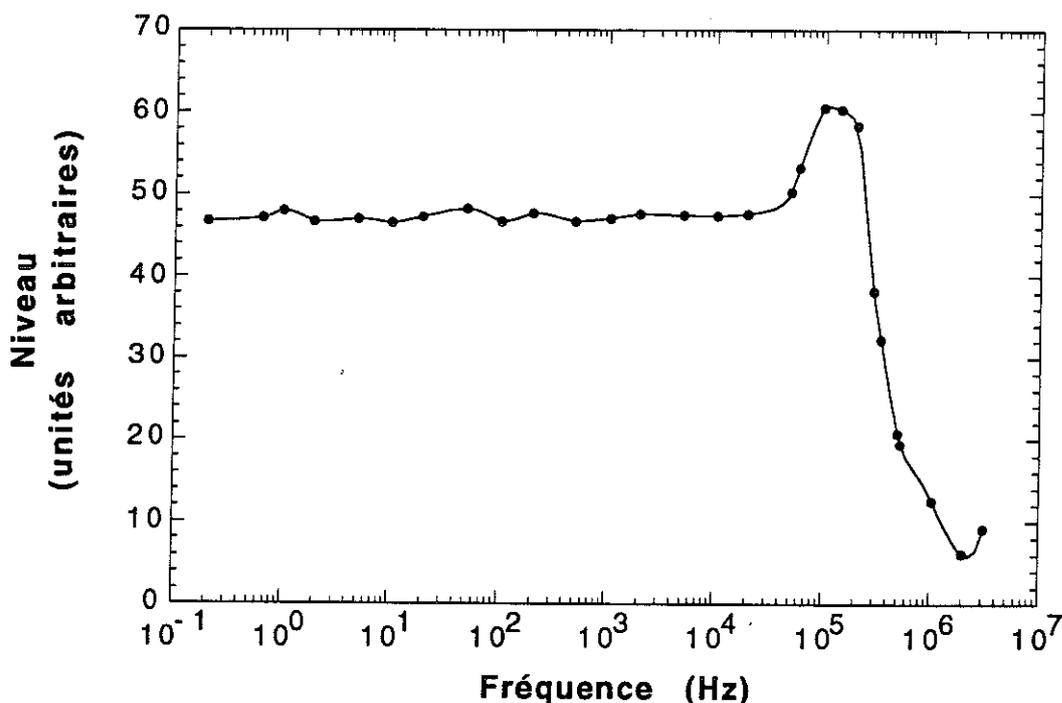


Figure III.21 : Courbe de réponse du détecteur à une perturbation.

La dernière étape de caractérisation du détecteur, avant d'effectuer des mesures au sein du jet, consistait à procéder à son étalonnage en fonction de la vitesse du gaz.

intervient dans les longueurs caractéristiques λ_1 et λ_2 ($\lambda_i = \sqrt{K_i/K_H}$) (cf. § 2.1.).

Au voisinage du courant seuil $I \approx I_s$ (soit $y \rightarrow 0$), on peut simplifier la relation entre le courant I et le coefficient K_H :

$$I^2 \approx \frac{K_H(T_c - T_o)}{R_1} \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \coth \frac{\ell}{\lambda_1} \right)$$

Et en considérant les valeurs obtenues pour λ_1 et λ_2 , on peut évaluer une dépendance de la forme :

$$I^2 \sim K_H \lambda_2 \sim \sqrt{K_H}.$$

Cette relation exprime le caractère localisé de l'échange thermique autour du point chaud du fil (sur une longueur λ_2).

En reliant K_H à la vitesse U , comme nous l'avons fait au paragraphe précédent, nous pouvons nous attendre à une loi d'étalonnage du type :

$$(RI^2)^2 = A' + B'U^{1/2}$$

4.2. Procédures d'étalonnage

4.2.1. Etalonnage à partir de la vitesse turbulente moyenne

Dans un premier temps, le détecteur a été placé sur l'axe du jet, à une distance de 55 mm de la buse. Cette distance correspond à plus de 50 fois le diamètre de la buse (diamètre = 1 mm) et à ce niveau, la turbulence dans le jet est pleinement développée (cf. § II.1.2).

Nous avons donc mesuré la composante moyenne du signal électrique et l'avons corrélée au nombre de Reynolds basé sur le diamètre du fil (afin que l'étalonnage soit indépendant de la position ultérieure du détecteur dans la chambre).

Cependant, la courbe d'étalonnage ainsi obtenue est entachée d'une forte incertitude sur la mesure de la composante continue du signal de vitesse (figure III.22).

En effet, à la sortie de l'électronique d'asservissement du détecteur (cf. § 3.2.), l'essentiel de la composante continue du signal est retranché ($T_{op} \equiv$ tension d'opposition), de façon à n'enregistrer que les fluctuations de vitesse avec la meilleure dynamique possible. La composante continue totale est donc la somme de la tension d'opposition affichée, et de la valeur moyenne résiduelle du signal fluctuant enregistré sur un temps donné.

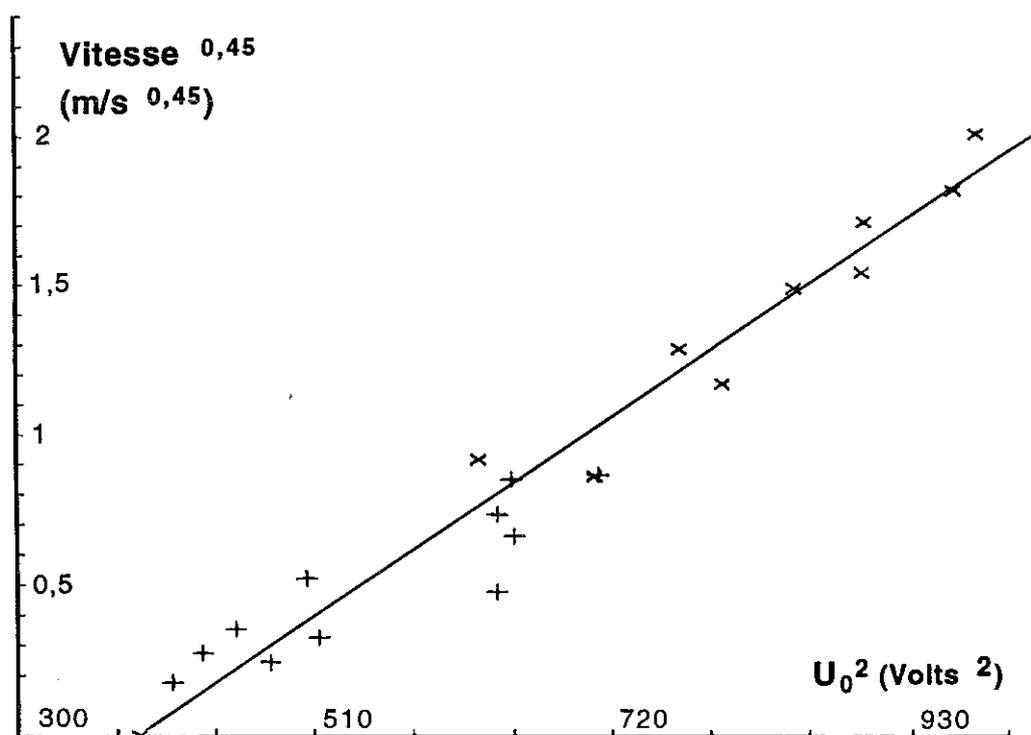


Figure III.22 : Courbe d'étalonnage du détecteur à partir de la vitesse turbulente moyenne.

Nous avons ainsi observé que cette moyenne résiduelle restait encore très fluctuante sur des temps supérieurs à la minute. Ces fluctuations basse fréquence ($< 0,1$ Hz) de la vitesse du jet turbulent ne nous ont donc pas permis d'obtenir un étalonnage satisfaisant de cette façon. Nous avons alors procédé à l'étalonnage du détecteur soumis à un écoulement laminaire.

4.2.2. Etalonnage à partir de la vitesse laminaire

Le détecteur a été placé sur l'axe et à 3 mm de distance d'une buse de 5 mm de diamètre. De cette façon, le fil sensible se trouve dans le cône potentiel du jet, balayé par un écoulement laminaire [III.15].

De fait, le signal mesuré se réduit à une composante continue et très stable.

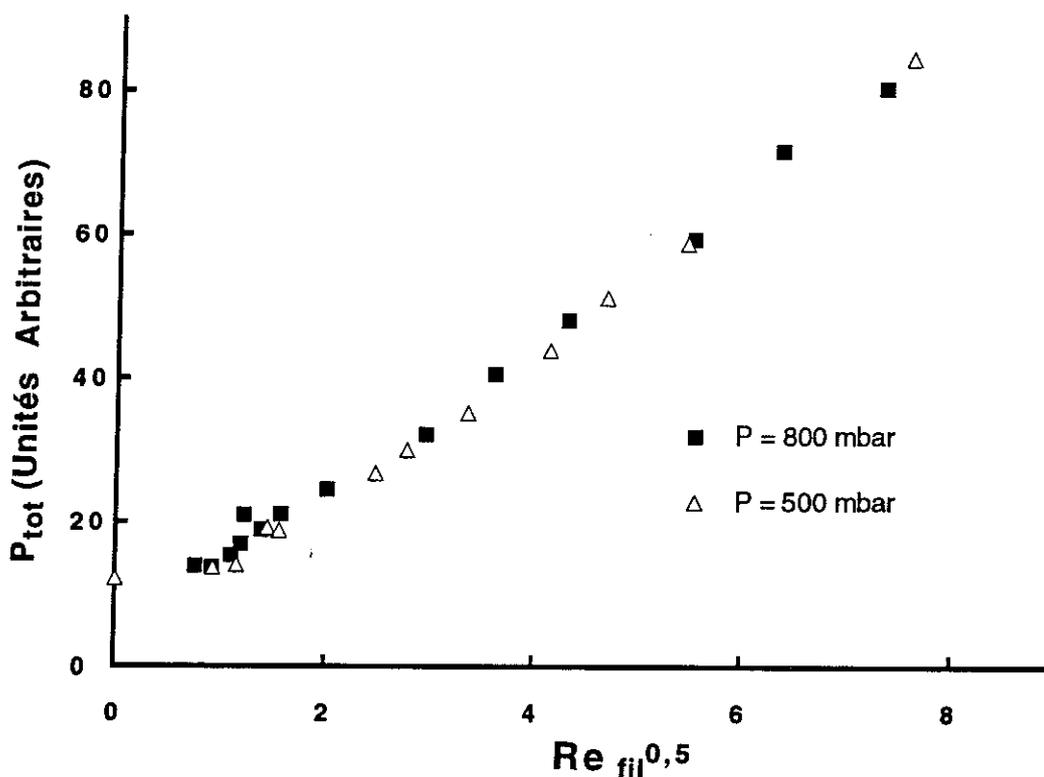


Figure III.23 : Courbe d'étalonnage à partir de la vitesse laminaire.

La puissance totale envoyée dans le fil est la somme d'une composante alternative à 10 MHz (Haute Fréquence) et d'une composante Basse Fréquence asservie à 1 MHz (cf. § 3.2.3.) :

$$P_{TOT} = P_{HF} + P_{BF}$$

Nous avons donc préalablement mesuré la composante P_{HF} en unités du courant d'asservissement :

$$P_{HF} \approx 25 \cdot 10^{-8} (A^2)$$

et nous avons tracé la courbe (cf. figure III.23)

$$P_{TOT}^2 \approx (25 \cdot 10^{-8} (A^2) + I_{ass}^2) = f(Re_{fil}^{1/2})$$

où I_{ass} est le courant d'asservissement mesuré au cours de l'étalonnage.

Conformément à ce que nous attendions, nous obtenons une droite, pratiquement insensible à la pression comme en témoignent les points tracés à 500 mbar et 800 mbar.

Nous n'avons pas tracé de courbe d'étalonnage pour des températures différentes de 4,2 K, mais nous avons vérifié qu'elles pouvaient se déduire de la courbe de la figure III.23. par un simple changement de pente.

Remarquons enfin que la droite d'étalonnage s'incurve légèrement pour les faibles vitesses. Cet effet peut s'expliquer par la compétition entre la vitesse descendante du jet laminaire, et un mouvement naturel de convection ascendante autour du fil chaud.

Il faut en effet signaler que le principe même de fonctionnement des fils chauds conduit à une faible sensibilité des mesures pour les petites vitesses d'écoulement. En effet, la convection créée localement par le fil lui-même devient progressivement dominante aux dépens du mouvement moyen du fluide. Ce point sera d'ailleurs à l'origine de certains problèmes apparus lors des premières mesures que nous avons réalisées et que nous allons décrire dans le chapitre IV.

Références Chapitre III

- [III.1] *Les méthodes de mesure physique de la turbulence*
G. Comte-Bellot - J. Physique 37. Col. C1, Suppl. au N° 1 (1976) C1-67.
- [III.2] *Goodfellow Metals Limited*
Cambridge Science Park - Cambridge CB4 - 4DJ Angleterre.
- [III.3] Laque Argent 200 (prod. n° 6200-0007)
Demetron - Leipzigerstrasse 10, D-6450 Hanau.
- [III.4] Par exemple : *Lead-alloy Josephson-tunneling gates with improved stability upon thermal cycling* - S.K. Lahiri et S. Basavaiah, J. Appl. Phys. 49 n° 5 (mai 1978).
- [III.5] Vetrotex - Saint-Gobain, 767 Quai des Allobroges, 73009 Chambéry.
- [III.6] Fluorure d'ammonium, mélange d'attaque AF 87,5 - 12,5. Classe des particules : 0-2 - MOS Selectipur Art. 1171.
- [III.7] Idem que [III.2]
- [III.8] Creusets Chrome : R.D. Mathis ref. CRW-1.
- [III.9] Or : Comptoir Lyon-Alemand (Purela HP).
- [III.10] Plomb : Comptoir Lyon-Alemand
- [III.11] Indium : Comptoir Lyon-Alemand
- [III.12] *Frequency response and electronic testing for constant-temperature hot-wire anemometers*
P. Freymuth - J. Phys. E : Sci. Instruments 10 (1977) 705.

- [III.13] *Physical fluid dynamics* - D.J. Tritton, Van Nostrand Reinhold Comp. (1977).
- [III.14] *Hot-wire and hot-film anemometers* - Ron F. Blackwelder. *Methods of Experimental Physics : Fluid Dynamics 18 Part A*, Acad. Press Inc. (1981).
- [III.15] *Turbulent jets* : N. Rajaratnam - *Developments in Water Science 5*, Elsevier Sci. Pub. Comp. (1976).



CHAPITRE IV

PREMIERES MESURES EXPERIMENTALES

Dans ce chapitre, nous présenterons les premières mesures réalisées avec notre expérience : nous décrirons d'abord la chaîne de mesure et les principaux appareils d'enregistrement et d'analyse du signal, puis nous présenterons les premiers enregistrements réalisés.

Ces mesures seront alors confrontées au modèle théorique développé au premier chapitre, en particulier du point de vue des histogrammes de vitesse et des spectres de puissance.

1. ACQUISITION DU SIGNAL

Le signal analogique délivré par l'électronique d'asservissement du détecteur est conditionné entre -10 et +10 volts. Il est envoyé sur deux appareils distincts :

- un analyseur de spectres Hewlett-Packard 3562A ;
- un enregistreur rapide Hewlett-Packard 5183A.

1.1. Spectres de puissance

L'analyseur de spectres Hewlett-Packard 3562A permet d'obtenir le spectre de puissance du signal en temps réel, jusqu'à une fréquence de 100 kHz. Cet appareil nous permet en outre d'effectuer des opérations simples sur le spectre (calcul des pentes, fonctions mathématiques) ainsi que d'enregistrer de courtes séquences temporelles du signal (blocs de 2000 points).

Il faut souligner ici que les spectres fournis par l'analyseur sont obtenus à partir du signal électrique brut (en volt), et non avec le véritable signal de vitesse. En effet, la conversion du signal électrique en un signal de vitesse ne s'effectue pas en temps réel, mais est réalisée après coup, à partir des enregistrements du signal sur disque ou bande magnétique

Pour obtenir un spectre des fluctuations de vitesse, il faut donc enregistrer le signal, le convertir, puis en extraire la transformée de Fourier. Cette procédure est assez longue (cf. §1.2), et devient pratiquement irréalisable dans la configuration actuelle du système, si l'on souhaite obtenir un spectre peu bruité. En effet, l'obtention de spectres tels que ceux

représentés sur la figure IV.6, résulte d'une moyenne réalisée directement par l'analyseur sur plus de 4000 acquisitions de 2000 points. Le spectre de vitesse correspondant nécessiterait l'enregistrement puis la conversion de près de 10 millions de points de mesures, ce qui n'est pas réalisable pour l'instant, compte tenu des moyens d'acquisition, de stockage et de calcul disponibles actuellement sur l'expérience.

Les spectres présentés au paragraphe 2.3. ont donc été obtenus à partir du signal électrique brut, et seront analysés avec les réserves qui s'imposent.

1.2. Enregistrement en temps réel

L'enregistreur rapide Hewlett-Packard 5183A permet d'acquérir des blocs de 500000 points de mesure au maximum, échantillonnés à une fréquence comprise entre 0,25 Hz et 4 MHz.

Afin de nous affranchir des effets de repliement lors de l'échantillonnage, le signal est filtré passe-bas analogiquement avant d'être envoyé vers l'enregistreur. La fréquence de coupure du filtre est choisie au delà de la fréquence de dissipation visqueuse de Kolmogorov, d'après le spectre du signal correspondant (cf. § 2.3.1).

Actuellement, cet enregistreur est piloté par un ordinateur HP 9816 travaillant sous Basic. Les premiers essais de conversion (signal électrique-vitesse) ont également été réalisés sur cet ordinateur, mais il est très vite apparu qu'il ne disposait pas des capacités ni de la vitesse de calcul nécessaire pour traiter des longs enregistrements (une heure pour convertir 260000 points de mesure ...).

Le traitement des données (conversion, histogrammes, comparaison avec les distributions théoriques) a donc été effectué sur un ordinateur vectoriel IBM-Risc de forte puissance. Cependant, afin de minimiser les problèmes d'incompatibilités et de transits multiples des données (HP, DOS, IBM ...), il est envisagé à court terme d'effectuer toutes les opérations d'acquisition, de conversion et de traitement des données sur un Macintosh Quadra 700 dont nous disposons. Le programme de pilotage de l'enregistreur HP 5183A par ce Mac Quadra est notamment déjà opérationnel.

2. ANALYSE DES DONNEES

2.1. Présentation des enregistrements

Tous les enregistrements et spectres présentés ci-dessous ont été réalisés au cours d'une même série de mesures, pendant laquelle le nombre de Reynolds du jet était maintenu stable à diverses valeurs comprises entre 1000 et 160000 (tableau IV.1).

N° de l'enregistrement	Nombre de Reynolds du jet	Nombre de Reynolds R_λ	Fréq. de coupure du filtre	Fréq. d'échantillonnage	Vitesse moyenne (m/s)	Long. de Kolmogorov ℓ_k (μm)
1	1330	63	1 kHz	1 kHz	0,0232	95
2	4200	113	1 kHz	0,8 kHz	0,073	40
3	7370	149	3 kHz	2 kHz	0,128	26
4	11300	185	10 kHz	5 kHz	0,197	19
5	17200	228	10 kHz	6,25 kHz	0,299	14
6	26900	285	30 kHz	10 kHz	0,468	10
7	38700	342	30 kHz	20 kHz	0,674	7,6
8	68100	454	100kHz	50 kHz	1,19	5,0
9	109000	574	100 kHz	100 kHz	1,89	3,5
10	156000	687	300 kHz	200 kHz	2,71	2,7

Tableau IV.1 : Caractéristiques des enregistrements étudiés et présentés dans le texte.

La pression dans le jet était maintenue à 500 mbar, et la température fixée à 4,2 K. Le détecteur était placé sur l'axe et à 55 mm de distance d'une buse de 1 mm de diamètre.

Dans cette configuration, le nombre de Reynolds du jet est relié au débit volumique par (cf. § II.1.1) :

$$Re = 3200 D_m$$

où D_m est le débit d'hélium gazeux exprimé en litres standard par minutes (à 23°C et sous une atmosphère).

Pour chaque nombre de Reynolds, nous avons réalisé un ou plusieurs enregistrements temporels de 260000 points, et effectué simultanément un spectre de puissance du signal.

Nous avons regroupé dans le tableau IV.1. les principales caractéristiques des enregistrements que nous avons étudiés. La vitesse moyenne de l'écoulement au niveau du détecteur U_m , a été calculée à l'aide de la relation (cf. [IV.1]) :

$$\frac{U_m}{U_0} = 6,3 \frac{L_0}{d}$$

où U_0 est la vitesse du gaz à la sortie de la buse (de diamètre L_0), et d est la distance entre le détecteur et la buse (cf. figure II.1).

Quant à la longueur de dissipation visqueuse de Kolmogorov, nous l'avons évaluée à partir de la relation empirique (cf. [IV.2]) :

$$\ell_k = (48 Re^3)^{-1/4} d$$

2.2. Etude des histogrammes du signal

2.2.1 Remarques préliminaires

Parmi tous les enregistrements temporels du signal que nous avons réalisés, certains n'ont pu être analysés, en raison notamment d'une saturation du signal électrique. Nous avons donc choisi de décrire la procédure d'analyse des histogrammes de vitesse sur trois enregistrements (N° 2, 4 et 10), dont les caractéristiques sont données dans le tableau IV.1.

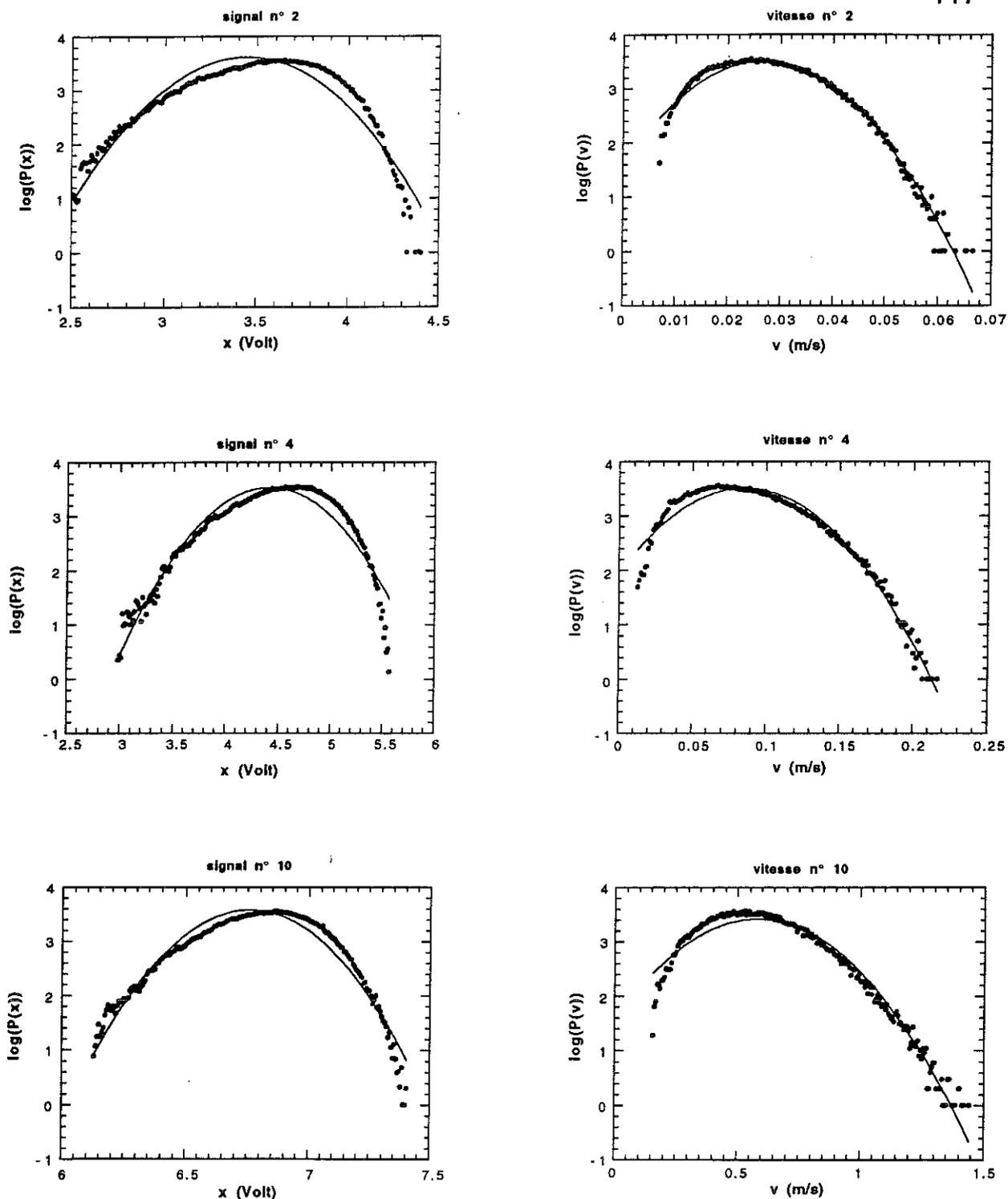


Figure IV.1 : Histogrammes du signal en volts (à gauche), et de la vitesse en mètres par seconde (à droite) pour les enregistrements 2, 4 et 10.

En premier lieu, nous avons tracé les histogrammes de la vitesse (et non des différences de vitesses). Sur la figure IV.1. sont ainsi regroupés les histogrammes du signal électrique brut, et les histogrammes du signal de vitesse correspondant (obtenus après conversion du signal électrique à l'aide de la loi d'étalonnage).

(figure IV.3). Pour chaque histogramme (et donc pour chaque écart r sur les enregistrements temporels), nous avons tracé une courbe semblable à celle représentée sur la figure IV.4., permettant d'obtenir la valeur optimale de λ .

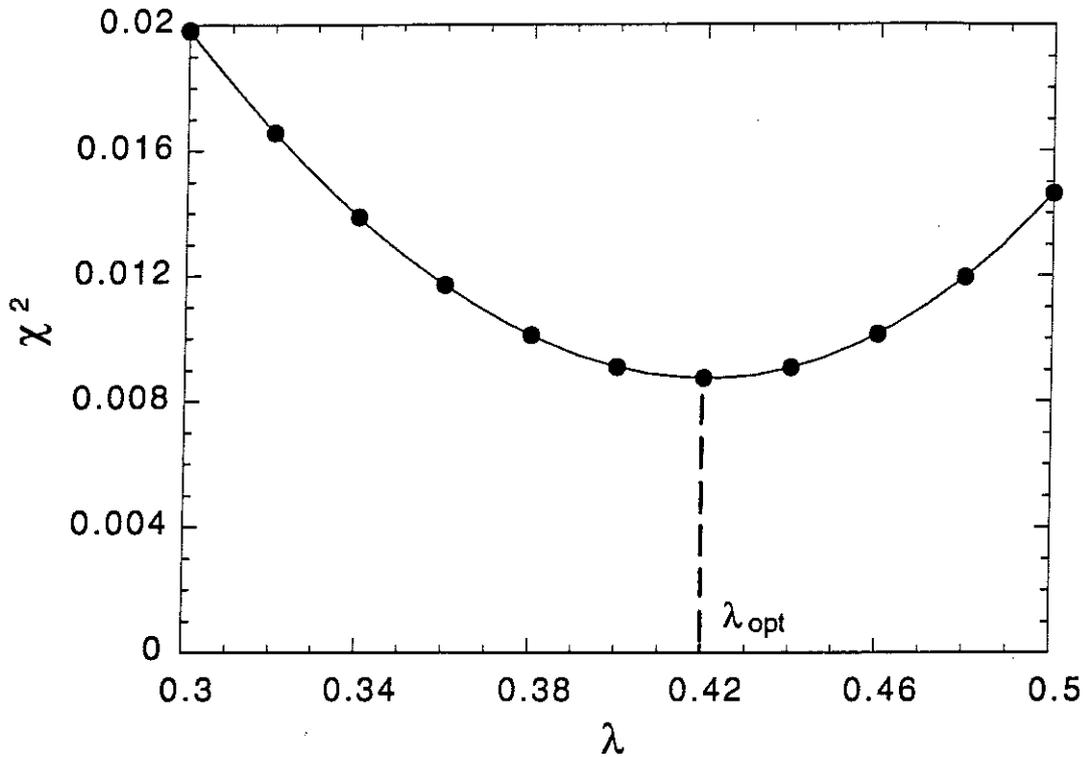


Figure IV.4 : Détermination de la valeur optimale de λ par un test de moindre carré (enregistrement n° 4 : $Re = 11300$).

Le paramètre λ devant être relié à la variance Λ^2 des fluctuations du logarithme du taux de dissipation d'énergie ε (cf. § 1.2.3.2) par :

$$\lambda^2 = \frac{\Lambda^2}{9} = \frac{\langle (\delta \ln \varepsilon)^2 \rangle}{9},$$

nous avons alors tracé la variation de la variance Λ^2 en fonction de l'écart r , dans des échelles logarithmiques (figure IV.5) :

Les droites que l'on peut ainsi raisonnablement tracer par les points obtenus semblent confirmer la validité de la loi de puissance.

En outre, les pentes β des deux enregistrements à faibles nombres de Reynolds ($Re = 4200$ et $Re = 11300$) sont voisines, alors que la pente correspondant à l'enregistrement de plus fort nombre de Reynolds ($Re = 156000$) est plus faible, ce qui va qualitativement dans le sens d'une diminution de β à Reynolds croissant, conformément aux prédictions de l'approche variationnelle exposée au chapitre I, et à des mesures précédemment réalisées avec d'autres expériences [IV.3].

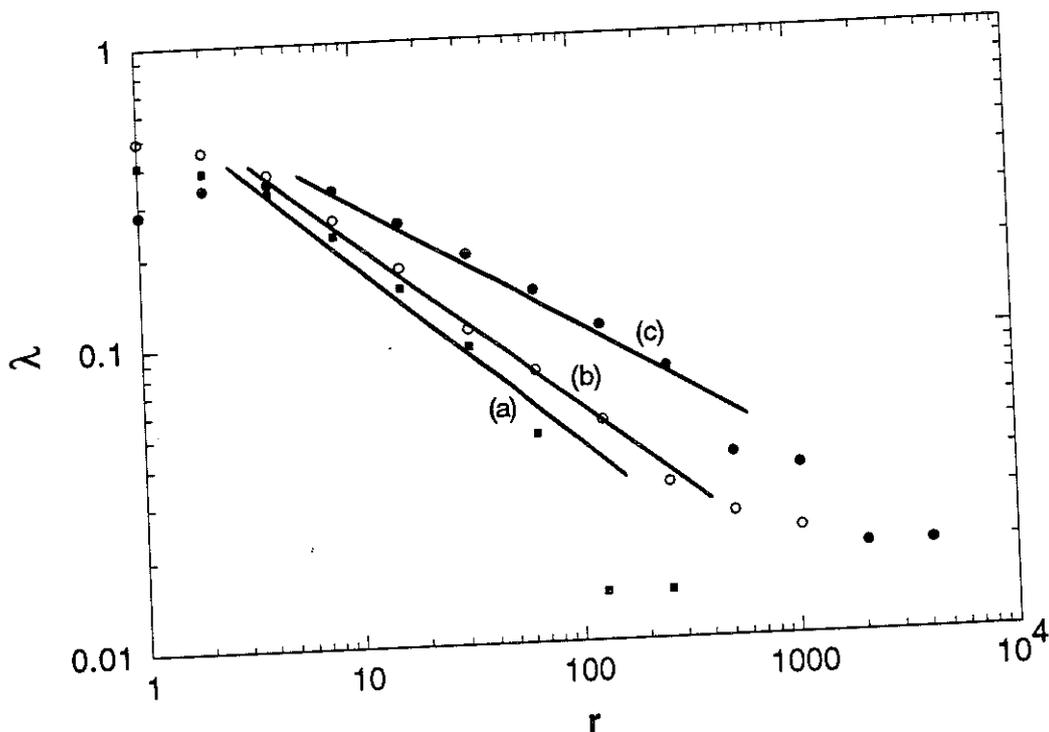


Figure IV.5 : Loi de variation de $\log \lambda$ en fonction de $\log r$.
 (a) : $Re = 4200$ (b) : $Re = 11300$ (c) : $Re = 156000$

Cependant, ces premiers résultats obtenus sur trois écoulements à nombre de Reynolds différents ne permettent pas d'évaluer quantitativement la loi de variation entre la pente β et le logarithme du nombre de Reynolds.

Au vu de ces premières mesures, il paraît indispensable de comprendre et d'optimiser la qualité du signal enregistré afin d'augmenter notre confiance dans les histogrammes qui en sont issus.

Références Chapitre IV

- [IV.1] *Turbulent jets* : N. Rajaratnam - Developments in Water Science 5, Elsevier Sci. Pub. Comp. (1976).
- [IV.2] *Measurements of dissipation rate and some other characteristics of turbulent plane and circular jets.* R. A. Antonia, B. R. Satyaprakash, A. K. M. F. Hussain - Phys. Fluids vol. 23, n°4 (Avril 1980).
- [IV.3] *Velocity probability density functions of high Reynolds number turbulence* B. Castaing, Y. Gagne, E.J. Hopfinger
Physica D 46 (1990) 177.
- [IV.4] *Une représentation universelle sans invariance globale d'échelle des spectres d'énergie en turbulence développée*
Y. Gagne et B. Castaing, C.R. Acad. Sci. Paris 312 série II (1991) 441.

CONCLUSION

Parallèlement, la réduction des longueurs caractéristiques d'étalement de la température du point chaud implique la réalisation de dépôts de plus faible épaisseur. La procédure d'étalonnage du détecteur étant désormais bien connue, nous espérons pouvoir réaliser ce détecteur et obtenir des mesures assez rapidement.

La troisième étape consiste à effectuer des mesures locales de fluctuations de température au sein du jet, légèrement chauffé en amont. La température constitue en effet un traceur ou colorant passif (pour autant que les différences de température soient faibles), permettant d'étudier la statistique et les propriétés de mélange dans le jet turbulent. Des études préliminaires de fabrication d'un détecteur micronique de température (jonction tunnel sur une fibre de verre) ont été menées, et ont montré la faisabilité de ce type de détecteur.

L'achèvement de ces trois étapes devrait nous permettre d'exploiter notre expérience au maximum de ses possibilités, en apportant des informations nouvelles et originales sur la physique fondamentale de la turbulence.

ANNEXE I

CARACTERISATION DE QUELQUES DETECTEURS

Date	Numéro échantillon	Ame du détecteur	Dépôt	R 300K ohm	R 4,2K ohm normal	R 4,2K ohm supra	Largeur de la transition au réchauffement	R300/R4,2	Résistivité ohm-cm	Conductivité en mW/cm/K à Tc	Commentaires
13/7/90	10	Fibre de verre D= 5 um	1000 A Cr	2000	1870,6			1,069	1,0 E-4		
16/7/90	10	Fibre de verre D= 5 um	1000 A Cr +2000 A Pb Fil cache 5 um	650	181	160,9		3,591			
17/7/90	11	Fibre de verre D= 3 um	1000 A Cr +2000 A Pb sans fil cache	440,2	13,49	0,15	5,27-5,33 mS 7,68-7,79 K	32,632			
25/7/90	13A	Fibre de verre D= 3,2 um	1000 A Cr	6880					1,7 E-4		
	13A	Fibre de verre D= 3,2 um	1000 A Cr +2000 A Pb Fil cache 5 um	720,5	25,18	0,01043	5,268-5,37 mS env 0,18 K	28,614		Pb = 83	SI RR Cr=1,07 RR Pb =31,8 77 K : 220 ohm
16/8/90	19	Fibre de verre D= 5 um	500 A Cr et 500 A Ag sans fil cache	146,7							SI rho Cr =0,0001 rho Ag = 2,8 E-6
	19	Fibre de verre D= 5 um	Id° 16/8 + 1500 A Pb + 500 A Ag Fil cache 5 um	101,6	17,5	0,326	4,64-4,83 mS 6,35-6,61 K	5,806			77 K : 60 ohm
17/8/90	19	Id° 16/8/90	Id° 16/8/90	103	17,56	0,341		5,866			77 K : 54,8 ohm
24/8/90	20	Fibre de verre D= 5 um	500 A Cr et 110 A Ag sans fil cache	1260	1095,2			1,150			SI rho Cr =0,0001 rho Ag = 9,3 E-6
17/9/90	21	Fibre de verre D= 5 um	500 A Cr et 100 A Ag sans fil cache	3780 et 4500 après 15'							
	21	Fibre de verre D= 5 um	Id° 17/9 + 2500 A Pb + 500 A Ag Fil cache 5 um	347	36,1	17,31	5,05 mS		rho Pb 300 = 46 rho Pb 4,2 = 2,2		SI rho Cr =0,0001 et R = 3800 ohm rho Ag = 1,9 E-4 RR Pb = 21
25/9/90	21	Id° 17/9/90	Id° 17/9/90	368,9	50,4	30,6	5,13				R réf = 3,16 ohm
24/9/90	22	Fibre de verre D= 5 um	500 A Cr et 100 A Ag sans fil cache	1860							
25/9/90	22	Fibre de verre D= 5 um	Id° 24/9 + 2000 A Nb Fil cache 5 um								SI rho Cr =0,0001 rho Ag = 17 à 23 E-6
26/9/90	22	Id° 25/9/90	Id° 25/9/90	1185		1080					R=Cte jusqu'à 15 mS !!!

Date	Numéro échantillon	Ame du détecteur	Dépôt	R 300K ohm	R 4,2K ohm normal	R 4,2K ohm supra	Largeur de la transition au réchauffement	R300/R4,2	Résistivité ohm-cm	Conductivité en mW/cm/K à Tc	Commentaires
2/10/90	Pbln 1	Plaques de verre	500 A Cr et 2000 A Pbln	2,328	0,28	3 E-4	5,1-5,6 mS	8,314		Pb-In = 56	Si rho Cr = 0,0001 rho Pbln = 31 E-6 à 300 K rho Pbln = 24 E-6
11/10/90	Pbln 3	Plaques de verre	2100 A Pbln	2,884	0,864	25 E-6	5,5 mS	3,338			
18/10/90	23	Fibre de verre D= 5 um	500 A Cr et 100 A Ag sans fil cache	6230 6660 après							
	23	Fibre de verre D= 5 um	Id° 18/10 + 2570 A Pbln Fil cache 5 um	824							
19/10/90	23	Id° 18/10	Id° 18/10		395,1	0,75	5-5,2 mS				RR= 2,09
23/10/90	23	Id° 18/10	Id° 18/10	820,1		0,75	5-5,2 mS				Rréf = 4,45 Mesura : 63,5% Pb; 36,5% In
	23	Avec les valeurs	mesurées: 2730 A								rho4,2 = 34 E-6
23/10/90	24	Fibre de verre D= 5 um	500 A Cr et 100 A Au sans fil cache	1590							rho Cr-Au = 52 E-6
	24	Fibre de verre D= 5 um	Id° 23/10 + 2800 A 79,4% Pb; 20,6% In Fil cache 5 um	237,5	74,84	4,6693	5,15-5,3 mS	3,173	11,4 E-6	Pb-In = 15	Rréf 300 = 2,612 Rréf 4,2 = 2,3784
26/10/90	24	Id° 23/10	Id° 23/10	230,8	71,2	4,8726-4,88		3,242			Rréf 4,2 = 2,3785
5/11/90	24	Id° 23/10	Id° 23/10	226,15	69,37	5,0417		3,260			Rréf 300 = 2,609 Rréf 4,2 = 2,38
8/11/90	24	Id° 23/10	Id° 23/10	228,74	69,3	5,193		3,301			
21/11/90	24	Id° 23/10	Id° 23/10	225,45							
	25	Fibre de verre D= 5 um	500 A Cr et 100 A Au sans fil cache	3550					1,06 E-4		
	25	Fibre de verre D= 5 um	Id° 23/10 + 2300 A 65% Pb; 35% In(mes) Fil cache 5 um	422	177,1	8,37	5,83	2,383	20 E-6	Pb-In = 9	Rréf 300 = 2,02

ANNEXE II

COMPORTEMENT STATIQUE DU DETECTEUR

L'équation de base du modèle exprime l'équilibre thermique du détecteur :

$$RI^2 = \dot{Q}_s + \dot{Q}_g$$

- * RI^2 représente la puissance produite par effet Joule et par unité de longueur au point considéré.
- * \dot{Q}_s est la puissance évacuée par conduction solide dans le fil (verre plus métal).
- * \dot{Q}_g est la puissance évacuée par convection dans le gaz environnant.

On peut expliciter les différents termes en un point quelconque du fil de la façon suivante (figure A1).

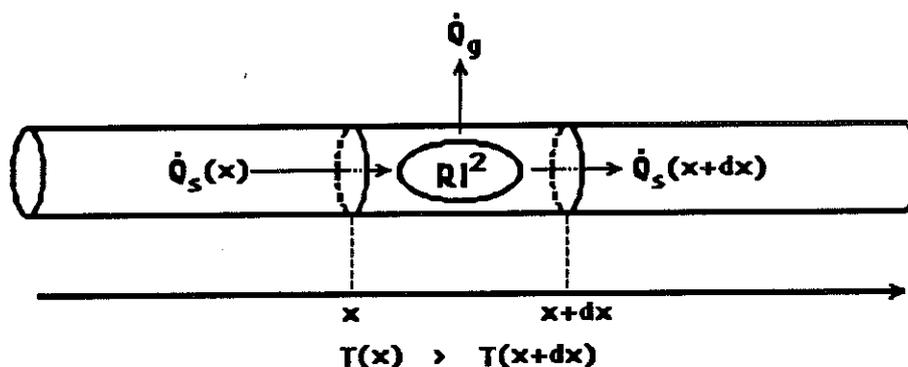


Figure A.1 : Equilibre thermique du fil chaud.

$$\begin{aligned} \dot{Q}_s &= \dot{Q}_s(x+dx) - \dot{Q}_s(x) \\ &= -K_F S \left(\frac{dT(x+dx)}{dx} - \frac{dT(x)}{dx} \right) \end{aligned}$$

où K_F est la conductibilité thermique du fil (verre plus métal en parallèle). S est la section du fil plus revêtements. T est la température au point considéré (on a supposé ici que $T(x) > T(x+dx)$).

Pour de faibles gradients de température, on peut écrire :

$$\dot{Q}_s = -K_F S \frac{d^2 T(x)}{dx^2} dx$$

Soit, en notant $K_s = K_F S$, on a par unité de longueur :

$$\dot{Q}_s = -K_s \frac{d^2 T(x)}{dx^2}$$

Le terme de convection s'écrit :

$$\dot{Q}_g = K_{He} S' \text{ grad } T$$

où K_{He} est la conductibilité thermique de l'hélium gazeux à basse température. S' est la surface d'échange thermique entre le fil et le gaz, à travers laquelle s'établit le gradient thermique.

Le gradient thermique est radial, et s'établit sur une distance au fil de l'ordre du rayon r de celui-ci :

$$\text{grad } T \approx \frac{T(x) - T_0}{r}$$

où T_0 est la température du gaz ambiant.

La surface d'échange S' s'écrit :

$$S' = \frac{2\pi r}{2} dx$$

où le dénominateur est pris égal à 2 car l'échange thermique se fait essentiellement du côté de la demi-calotte métallique du dépôt.

On arrive alors à :

$$\dot{Q}_g = K_{He}(T - T_0)\pi dx$$

Soit, en notant $K_H = \pi K_{He}$, on a par unité de longueur :

$$\dot{Q}_g = K_H(T - T_o) .$$

D'où l'équation employée au chapitre III, § 2.1. :

$$Ri^2 = -K_s \frac{d^2T}{dx^2} + K_H(T - T_o) \quad (1)$$

La solution générale de cette équation différentielle du second ordre est :

$$T(x) = T_o + \frac{R_i l^2}{K_H} + \Delta_+ e^{x/\lambda_i} + \Delta_- e^{-x/\lambda_i}$$

où Δ_+ et Δ_- sont les deux constantes d'intégration. R_i est la résistance électrique de la région i du fil considéré (figure A2). $\lambda_i = \sqrt{K_{Mi}/K_H}$ est la longueur caractéristique d'étalement de la température dans la région i , où K_{Mi} est la conductibilité thermique du fil (verre plus métal) multipliée par la section de la région i correspondante.

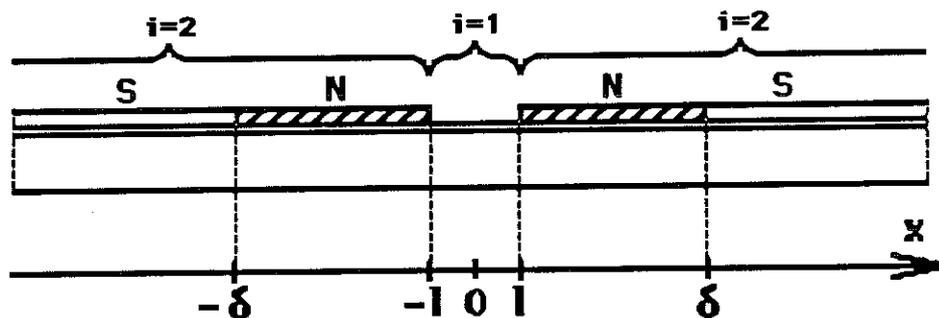


Figure A.2 : Repérage des différentes zones du fil.

Les calculs qui suivent s'appliquent à la partie $x \geq 0$ du fil. Les résultats pour $x \leq 0$ s'obtiennent par symétrie.

1. Le supraconducteur n'a pas transité

$$(I < I_s \Rightarrow R_2 = 0)$$

Dans la région 1 ($x \leq \ell$), on doit avoir par raison de symétrie :

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

D'où $\Delta_+ = \Delta_- \equiv \Delta < 0$ car $\left. \frac{d^2T}{dx^2} \right|_{x=0} < 0$. On aura donc :

$$T(x) = T_0 + 2\Delta \operatorname{ch} \frac{x}{\lambda_1} \quad x \leq \ell$$

Dans la région 2 ($x \geq \ell$), on doit avoir $\lim_{x \rightarrow \infty} T = T_0$, car loin du point chaud, la température est celle du gaz ambiant. D'où $\Delta_- = \Delta_s e^{\ell/\lambda_2}$ et $\Delta_+ = 0$.

$$T(x) = T_0 + \Delta_s e^{\frac{\ell-x}{\lambda_2}} \quad x \geq \ell$$

En écrivant ensuite la continuité de la température (a) et du flux thermique (b) en $x = \ell$, on a :

$$\begin{cases} T(\ell-\varepsilon) = T(\ell+\varepsilon) & \text{(a)} \\ K_{M1} \left(\frac{dT}{dx} \right)_{\ell-\varepsilon} = K_{M2} \left(\frac{dT}{dx} \right)_{\ell+\varepsilon} & \text{(b)} \end{cases}$$

En remarquant que $K_{Mi} = \lambda_i^2 K_H$, on a :

$$\begin{cases} \frac{R_1 I^2}{K_H} + 2\Delta \operatorname{ch} \frac{\ell}{\lambda_1} = \Delta_s \\ 2\lambda_1 \Delta \operatorname{sh} \frac{\ell}{\lambda_1} = -\lambda_2 \Delta_s \end{cases}$$

D'où :

$$\Delta = \frac{-R_1 I^2}{2K_H \left(\operatorname{ch} \frac{\ell}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \operatorname{sh} \frac{\ell}{\lambda_1} \right)}$$

et

$$\Delta_s = \frac{-R_1 I^2}{K_H \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \coth \frac{\ell}{\lambda_1}\right)}$$

Le courant seuil s'obtient pour $T(x=\ell) = T_c$, soit $\Delta_s = T_c - T_0$, d'où :

$$I_s = \left[\frac{K_H(T_c - T_0)}{R_1} \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \coth \frac{\ell}{\lambda_1}\right) \right]^{1/2}$$

2. Le supraconducteur a transitité sur une longueur δ - ℓ

($I > I_s \Rightarrow R_2 \neq 0$ pour $\ell \leq x \leq \delta$)

$$\begin{cases} T(x) = T_0 + \frac{R_1 I^2}{K_H} + 2\Delta \operatorname{ch} \frac{x}{\lambda_1} & x \leq \ell \\ T(x) = T_0 + \frac{R_2 I^2}{K_H} + \Delta_{2+} e^{\frac{\ell+x}{\lambda_2}} + \Delta_{2-} e^{-\frac{\ell-x}{\lambda_2}} & \ell \leq x \leq \delta \\ T(x) = T_0 + \Delta_s e^{-\frac{\delta-x}{\lambda_2}} & x \geq \delta \end{cases}$$

On écrit les conditions de continuité de température en $x = \delta$ (a) et en $x = \ell$ (c), ainsi que les conditions de continuité du flux thermique en $x = \delta$ (b) et en $x = \ell$ (d) :

$$\begin{cases} \Delta_{2+} e^{\frac{\ell+\delta}{\lambda_2}} + \Delta_{2-} e^{-\frac{\ell-\delta}{\lambda_2}} = \Delta_s - \frac{R_2 I^2}{K_H} & \text{(a)} \\ K_{M2n} \left[\Delta_{2+} e^{\frac{\ell+\delta}{\lambda_2}} - \Delta_{2-} e^{-\frac{\ell-\delta}{\lambda_2}} \right] = -\Delta_s K_{M2s} & \text{(b)} \end{cases}$$

où K_{M2n} et K_{M2s} représentent les conductibilités thermiques du supraconducteur dans l'état normal et supra respectivement, que l'on considère égales en première approximation.

A partir de (a) et (b), et avec l'hypothèse

$$T(x=\delta) = T_c \Rightarrow \Delta_s = T_c - T_0$$

on peut exprimer la température du fil pour $\ell \leq x \leq \delta$:

$$T(x) = T_0 - \frac{2R_2 I^2}{K_H} \operatorname{sh}^2\left(\frac{\delta-x}{2\lambda_2}\right) + \Delta_s e^{\frac{\delta-x}{\lambda_2}}$$

Nous pouvons alors exprimer (c) et (d) :

$$\frac{R_1 I^2}{K_H} + 2\Delta \operatorname{ch} \frac{\ell}{\lambda_1} = \Delta_s e^{\frac{\delta-\ell}{\lambda_2}} - \frac{2R_2 I^2}{K_H} \operatorname{sh}^2\left(\frac{\delta-\ell}{2\lambda_2}\right) \quad (c)$$

$$2\lambda_1 \Delta K_H \operatorname{sh} \frac{\ell}{\lambda_1} = -\Delta_s \lambda_2 K_H e^{\frac{\delta-\ell}{\lambda_2}} + \lambda_2 R_2 I^2 \operatorname{sh}\left(\frac{\delta-\ell}{\lambda_2}\right) \quad (d)$$

En éliminant Δ de (c) et (d), et en posant $y = \frac{\delta-\ell}{\lambda_2}$, on arrive à :

$$\frac{R_1}{R_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \operatorname{coth} \frac{\ell}{\lambda_1} \operatorname{sh} y = \frac{K_H \Delta_s}{R_2 I^2} \left[1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \operatorname{coth} \frac{\ell}{\lambda_1} \right] e^y - 2 \operatorname{sh}^2 \frac{y}{2}$$

et en faisant apparaître le courant seuil I_s , on obtient :

$$I = I_s \frac{e^{y/2}}{\left[1 + \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \operatorname{coth} \frac{\ell}{\lambda_1} \operatorname{sh} y + 2 \operatorname{sh}^2 \frac{y}{2} \right) \right]^{1/2}}$$

relation qui nous permet d'obtenir le courant I parcourant le fil lorsque le supraconducteur a transité sur une longueur $\delta-\ell$.

Enfin, on peut déterminer simplement le courant limite I_∞ correspondant à la transition du fil tout entier ($\delta \rightarrow \infty$) :

$$I_\infty \approx \sqrt{\frac{2K_H(T_c - T_0)}{R_2}}$$

ANNEXE III

CALCUL DU TEMPS DE REPONSE DU DETECTEUR

1. ETABLISSEMENT DE LA CONDITION SUR LA DERIVEE $\partial\theta/\partial x$

L'équation de départ est :

$$RI^2 = K_H(T-T_0) - K_S \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2)$$

On cherche une solution de la forme :

$$T(x,t) = \bar{T}(x) + \theta(x,t)$$

correspondant à la résistance

$$R(T) = R(\bar{T} + \theta) \approx R(\bar{T}) + \theta \frac{dR}{dT}$$

où $\bar{T}(x)$ est la solution d'équilibre thermique :

$$RI^2 = K_H(\bar{T} - T_0) - K_S \frac{d^2 \bar{T}}{dx^2}$$

En substituant $T(x,t)$ dans (2), on obtient :

$$\theta \frac{dR}{dT} \Big|_T = K_H \theta - K_S \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + C \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (3)$$

On intègre cette équation autour de la frontière normal-supra d'abscisse x_0 :

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \frac{\theta|^2}{\left(\frac{d\bar{T}}{dx}\right)} \frac{dR}{dx} dx = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \left[K_H \theta - K_S \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + C \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] dx$$

$\theta(x,t)$ est une fonction continue de x , passant par un maximum en $x = x_0$ (l'interface normal-supra est la région venant le plus lentement à l'équilibre thermique).

On considèrera alors que $\theta(x) = Cte$ au voisinage de $x = x_0$. De même, le terme $\frac{d\bar{T}}{dx}$ est pris à l'équilibre et est constant.

Le calcul du premier terme se réduit donc à :

$$\frac{\theta|^2}{\left(\frac{d\bar{T}}{dx}\right)} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \frac{dR}{dx} dx = \frac{\theta|^2}{\left(\frac{d\bar{T}}{dx}\right)} (R_2 \times \text{signe } \frac{d\bar{T}}{dx})$$

car en x_0 on passe soit d'une région où $R=0$ à une région où $R=R_2$ ($\Rightarrow \frac{d\bar{T}}{dx} > 0$),

soit d'une région où $R=R_2$ à une région où $R=0$ ($\Rightarrow \frac{d\bar{T}}{dx} < 0$).

Avec les mêmes hypothèses, l'intégration du terme de droite conduit à

$$2\varepsilon K_H \theta - 2\varepsilon C \frac{\partial \theta}{\partial t} - K_S \left(\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x_0+\varepsilon} - \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x_0-\varepsilon} \right)$$

Lorsque l'on fait tendre ε vers zéro (transition normal-supra abrupte), on obtient la condition sur les dérivées $\partial\theta/\partial x$:

$$\frac{\theta R_2 l^2}{\left| \frac{dT}{dx} \right|} = K_S \left(\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)_{x_0-\varepsilon} - \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)_{x_0+\varepsilon} \right) \quad (4)$$

2. CONSTANTE DE TEMPS DU FIL

La solution $\theta(x,t)$ est de la forme :

$$\begin{cases} \theta(x,t) = A \operatorname{ch} \frac{x}{\lambda_1} e^{-t/\tau} & \text{pour } x \leq \ell \\ \theta(x,t) = (B_+ e^{x/\lambda_2} + B_- e^{-x/\lambda_2}) e^{-t/\tau} & \text{pour } \ell \leq x \leq \delta \\ \theta(x,t) = D e^{-x/\lambda_2} e^{-t/\tau} & \text{pour } x \geq \delta \end{cases}$$

où les longueurs caractéristiques λ_1 et λ_2 s'expriment cette fois en fonction de la constante de temps τ :

$$\lambda_i^2 = \frac{K_{Si}}{K_H - \frac{C}{\tau}}$$

($i = 1 \Rightarrow$ zone purement résistive Cr-Au et $i = 2 \Rightarrow$ supraconducteur Pb-In). On écrit la continuité de température et la continuité du flux thermique en $x=\ell$:

$$\begin{cases} A \operatorname{ch} \frac{\ell}{\lambda_1} = B_+ e^{\ell/\lambda_2} + B_- e^{-\ell/\lambda_2} \\ A \operatorname{sh} \frac{\ell}{\lambda_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} (B_+ e^{\ell/\lambda_2} - B_- e^{-\ell/\lambda_2}) \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} B_+ e^{\ell/\lambda_2} = \frac{A}{2} \left(\operatorname{ch} \frac{\ell}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \operatorname{sh} \frac{\ell}{\lambda_1} \right) & (a) \\ B_- e^{-\ell/\lambda_2} = \frac{A}{2} \left(\operatorname{ch} \frac{\ell}{\lambda_1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \operatorname{sh} \frac{\ell}{\lambda_1} \right) & (b) \end{cases}$$

On exprime ensuite la continuité de température en $x = \delta$:

$$D e^{-\delta/\lambda_2} = B_+ e^{\delta/\lambda_2} + B_- e^{-\delta/\lambda_2} \quad (c)$$

ainsi que la condition (4) établie précédemment :

$$F\theta(\delta) = \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x_0-\varepsilon} - \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x_0+\varepsilon}$$

avec la notation :

$$F = \frac{R_2 l^2}{K_S \left| \frac{dT}{dx} \right|}$$

$$\text{soit} \quad \lambda_2 F D e^{-\delta/\lambda_2} = B_+ e^{\delta/\lambda_2} - B_- e^{-\delta/\lambda_2} + D e^{-\delta/\lambda_2}$$

en remplaçant $D e^{-\delta/\lambda_2}$ par son expression (c) obtenue ci-dessus, on obtient :

$$B_+ e^{\delta/\lambda_2} (\lambda_2 F - 2) + B_- e^{-\delta/\lambda_2} \lambda_2 F = 0$$

$$\text{soit} \quad \frac{B_-}{B_+} = e^{\frac{2\ell}{\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_2 \operatorname{ch} \frac{\ell}{\lambda_1} - \lambda_1 \operatorname{sh} \frac{\ell}{\lambda_1}}{\lambda_2 \operatorname{ch} \frac{\ell}{\lambda_1} + \lambda_1 \operatorname{sh} \frac{\ell}{\lambda_1}} \right) = e^{\frac{2\delta}{\lambda_2}} \left(\frac{2 - \lambda_2 F}{\lambda_2 F} \right)$$

$$\text{soit} \quad F = \frac{ey}{\lambda_2} \left(\frac{\lambda_2 \operatorname{ch} \frac{\ell}{\lambda_1} + \lambda_1 \operatorname{sh} \frac{\ell}{\lambda_1}}{\lambda_2 \operatorname{ch} \frac{\ell}{\lambda_1} \operatorname{chy} + \lambda_1 \operatorname{sh} \frac{\ell}{\lambda_1} \operatorname{shy}} \right)$$

où

$$y = \frac{\delta - \ell}{\lambda_2}$$

Par ailleurs, on peut exprimer F à partir de son expression :

$$F = \frac{R_2 \ell^2}{K_S \left| \frac{d\bar{T}}{dx} \right|}$$

En effet, on a vu que le courant I s'écrit :

$$I = I_S e^{\frac{y_0}{2}} \left[1 + \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{\lambda_{o2}}{\lambda_{o1}} \coth \frac{\ell}{\lambda_{o1}} \operatorname{sh} y_0 + 2 \operatorname{sh}^2 \frac{y_0}{2} \right) \right]^{-1/2}$$

avec

$$I_S = \left[\frac{K_H(T_c - T_o)}{R_1} \left(1 + \frac{\lambda_{o2}}{\lambda_{o1}} \coth \frac{\ell}{\lambda_{o1}} \right) \right]^{1/2}$$

où l'indice o (apparaissant dans λ_{o1} , λ_{o2} et y_0) correspond aux longueurs caractéristiques prises à l'équilibre.

D'autre part, le dénominateur de F s'écrit :

$$K_S \left| \frac{d\bar{T}}{dx} \right|_{x=\delta} = K_S \left| - \frac{(T_c - T_o)}{\lambda_{o2}} e^{\frac{\delta-x}{\lambda_{o2}}} \right|_{x=\delta} = K_S \frac{T_c - T_o}{\lambda_{o2}}$$

D'où

$$F = \frac{R_2 e^{y_0}}{R_1 \lambda_{o2}} \left[\frac{1 + \frac{\lambda_{o2}}{\lambda_{o1}} \coth \frac{\ell}{\lambda_{o1}}}{1 + \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{\lambda_{o2}}{\lambda_{o1}} \coth \frac{\ell}{\lambda_{o1}} \operatorname{sh} y_0 + 2 \operatorname{sh}^2 \frac{y_0}{2} \right)} \right]$$

En égalant enfin les deux expressions de F trouvées, et moyennant l'hypothèse y et y_0 petits (point de fonctionnement proche du seuil de transition), on arrive à :

$$\frac{\lambda_{o2}}{\lambda_2} = \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{1 + \frac{\lambda_{o2}}{\lambda_{o1}} \coth \frac{\ell}{\lambda_{o1}}}{1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \operatorname{th} \frac{\ell}{\lambda_1}} \right)$$

$$= \frac{R_2 \lambda_2}{R_1 \lambda_1} \left(\frac{1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \operatorname{th} \frac{\ell}{\lambda_{o1}}}{1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \operatorname{th} \frac{\ell}{\lambda_1}} \right) \coth \frac{\ell}{\lambda_{o1}}$$

avec
$$\frac{\lambda_{o2}}{\lambda_2} = \sqrt{1 - \frac{C}{K_H \tau}}$$

soit finalement
$$\tau \approx \frac{C}{K_H} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{R_2 \lambda_2}{R_1 \lambda_1} \right)^2 \coth^2 \frac{\ell}{\lambda_1}} \right) = \tau_0 \left(\frac{1}{1 - \alpha^2} \right)$$

où
$$\tau_0 = \frac{C}{K_H}$$

et
$$\alpha \approx \frac{R_2 \lambda_2}{R_1 \lambda_1} \coth \frac{\ell}{\lambda_1}$$

