

THÈSE
présentée par

Isabelle DAUMONT

POUR OBTENIR LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH
FOURIER - GRENOBLE 1

Arrêtés Ministériels du 5 juillet 1994 et du 30 mars 1992

SPÉCIALITÉ : PHYSIQUE

**Ordre et désordre
dans les modèles en couches
de la turbulence hydrodynamique**

Date de soutenance : 12 novembre 1999

COMPOSITION DU JURY :	Président	:	Y. GAGNE
	Rapporteurs	:	A. PUMIR
			M. VERGASSOLA
	Examineurs	:	V. HAKIM
			J.-F. PINTON
	Directeur de thèse	:	T. DOMBRE

THÈSE PRÉPARÉE AU SEIN DU CENTRE DE RECHERCHE SUR LES TRÈS
BASSES TEMPÉRATURES, CNRS, GRENOBLE

Table des matières

<i>Remerciements</i>	7
<i>Motivation et organisation de la thèse</i>	9
1 Introduction	13
1.1 Phénomènes d'intermittence en turbulence hydrodynamique	13
1.1.1 Dynamique de Navier-Stokes	13
1.1.2 Advection d'un scalaire passif	17
1.1.3 Une image multifractale	19
1.2 Une voie plus simple : les modèles en couches	23
1.2.1 Présentation du modèle GOY	25
1.2.2 Résultats divers	26
1.2.3 Une image à deux fluides du modèle GOY	29
1.2.4 Statistique des événements cohérents	30
2 Analyse semi-classique d'une version stochastique du modèle GOY	39
2.1 Présentation de la dynamique stochastique	39
2.2 Formulation en intégrale de chemin et solutions extrémales	43
2.3 Trajectoires optimales	47
2.4 Schéma itératif pour la recherche des trajectoires optimales	51
2.4.1 Principe	51
2.4.2 Théorie	52
2.4.3 Définition formelle de la densité de probabilité $P_n(z)$	54
2.4.4 Mise en pratique	57

2.4.5	Résultats	61
2.4.6	Contribution du terme de dérive de Ito	63
2.5	Effet des fluctuations quadratiques	66
2.5.1	Théorie	66
a)	les différentes étapes du calcul	66
b)	expression de l'action quadratique des fluctuations	70
c)	calcul intermédiaire d'une action quadratique avec conditions aux limites fixes et nulles	74
d)	effet des fluctuations sur le point d'arrivée et résultat final . .	75
2.5.2	Mise en pratique	77
2.5.3	Résultats	80
Annexes du Chapitre 2		85
2.6	Correspondance entre des équations stochastiques au sens de Ito ou de Stratonovich	85
2.7	Approximation adiabatique	87
2.8	Version discrète du calcul des fluctuations quadratiques	89
2.9	Modèles simples et solubles de fonctionnelles quadratiques	93
3	Arborescences et intermittence dans le modèle GOY	97
3.1	Motivation	97
3.2	Présentation des statistiques des maxima absolus du flux d'énergie .	98
3.3	Modélisation du phénomène de duplication des structures sur des arbres aléatoires	100
3.3.1	Principe et limitations du modèle le plus simple	100
3.3.2	Raffinement du modèle et conclusion	104
Annexe du chapitre 3		107
3.4	Lien entre les statistiques des maxima absolus dans les structures en arbres et la propagation d'un front de réaction-diffusion	107
4	Structures cohérentes dans des modèles en couches du modèle de Kraichnan	109

4.1	Introduction	109
4.2	Les différents modèles disponibles dans la littérature	111
4.3	Recherche des structures cohérentes	114
4.3.1	Quelques modifications préliminaires de la dynamique pour une expression plus pratique	114
4.3.2	Dynamique des structures établie à partir d'un formalisme en intégrale de chemin	115
4.3.3	Résultats, comparaison avec les simulations numériques et dis- cussion	118
Annexes du Chapitre 4		127
4.4	Présentation des détails spécifiques au cas du scalaire passif	127
4.4.1	au niveau du schéma numérique permettant la recherche des solutions cohérentes	127
4.4.2	au niveau du calcul des fluctuations quadratiques	131
4.5	Généralisation pour un modèle avec variables complexes	134
<i>Conclusion et perspectives</i>		<i>137</i>

Remerciements

Je m'estime particulièrement chanceuse dans la série de hasards qui m'ont amenée à travailler avec Thierry Dombre. Je tiens à lui exprimer ma très grande admiration pour ses qualités scientifiques et pédagogiques et toute ma gratitude pour sa gentillesse et sa confiance à mon égard. Je l'ai souvent entendu s'excuser de ne pas être davantage présent, alors que je connais peu de personnes aussi consciencieuses. Ceci m'a donc permis de disposer d'une quantité impressionnante de notes manuscrites et extrêmement limpides que je garde précieusement comme un modèle quasi inaccessible de ce qu'il faut faire en recherche. En échange, je voudrais m'excuser auprès de Thierry pour mon sens aigu de l'organisation qui lui a valu de corriger une bonne partie de ce manuscrit à des heures indues, de cacher (avec brio) une inquiétude légitime devant des répétitions de dernière minute, et d'assurer plusieurs fois mon ravitaillement (sur ce point, c'est aussi à Nathalie que je décerne une médaille).

Je remercierai encore Thierry pour le cadeau de la rencontre avec Alessandra Lanotte. Je suis très heureuse et fière de l'équilibre que nous avons su toutes deux trouver entre travail et amitié, et je n'ai qu'un souhait, c'est de pouvoir continuer ainsi. Avec elle, mais aussi avec Luca Biferale, j'ai pu découvrir une façon de faire de la physique à l'italienne qui, si elle n'est pas toujours de tout repos, possède beaucoup de charmes. A Luca, je voudrais aussi adresser mes remerciements pour sa disponibilité, que ce soit au cours de notre travail commun, mais aussi pour la constitution de ces horribles dossiers de financement de post-doc, dans l'espoir d'aller voir l'au-delà des modèles en couches. Un grand merci à l'italien d'adoption Alain Noullez avec qui il est si agréable et fructueux de discuter de science ou de grammaire. Je suis également reconnaissante à Jean-Louis Gilson, pour m'avoir bien facilité l'approche

des techniques analytiques épineuses utilisées au cours de ce travail, et pour tous les résultats qu'il a apporté de son côté. Enfin, le bon déroulement de cette thèse doit énormément à Patrick Butaud, depuis le premier jour, où il m'a aidée à franchir le pas, jusqu'au dernier où il m'a fourni les transparents et les croissants : il a été un irremplaçable soutien à tous les niveaux, scientifique, humain, et informatique, car comme beaucoup d'autres, j'ai bénéficié de son dévouement à la collectivité dans l'entretien du réseau.

Yves Gagne, Vincent Hakim et Jean-Francois Pinton m'ont fait l'honneur de participer à mon jury, Alain Pumir et Massimo Vergassola ont en outre accepté la tâche d'être rapporteurs. Je les remercie vivement et je voudrai encore une fois leur exprimer ma reconnaissance pour leur patience vis-à-vis de mes légendaires retards.

Cette thèse a été menée à bien au sein du CRTBT, et je remercie P. Monceau et B. Hébral de m'y avoir accueillie, ainsi que les chercheurs, techniciens, et administratifs, que j'ai eu plaisir à cotoyer dans ce laboratoire (ou sur le terrain de foot d'à côté). Je réserverai une mention speciale à Daniele Devilliers, pour son aide a propos de certaines commandes latex récalcitrantes, et à Yves, Claude et Gilles pour les derniers secours logistiques.

Enfin, je n'oublie pas ma famille, ainsi que tous les amis avec qui j'ai partagé de bons moments, ou qui m'ont permis d'adoucir les mauvais, qu'ils soient à Lyon, Grenoble, Nice et plus loin encore. La liste est longue, tant mieux, merci donc dans l'ordre géographique à Amandine, Jérôme, Alain, Cécile, Jacques, Dédé, Fred, Géraldine, Yves, David, Pierre, Corinne, Christophe, Alessandra, Haud, Cendrine et Johan.

Motivation et organisation de la thèse

La turbulence hydrodynamique pleinement développée pose encore beaucoup d'énigmes aux physiciens, alors qu'on connaît depuis longtemps les équations la gouvernant. L'extrême complexité de ce problème se reflète dans la diversité des approches tentées pour l'aborder. Certaines se concentrent sur les aspects statistiques et cherchent à interpréter les lois d'échelles anormales exhibées par les fonctions de structure d'ordre élevé de la vitesse. D'autres essayent de comprendre les fluctuations intenses et intermittentes présentes à petite échelle dans l'écoulement en termes de dynamique de structures cohérentes. Mais le lien entre ces deux aspects est encore loin d'être élucidé et il faut se contenter pour l'instant de modèles phénoménologiques. Parmi ceux-ci, les modèles en couches ont pu constituer ces dernières années une sorte de banc d'essai pour de nouvelles idées.

L'objet de cette thèse est de prolonger des efforts tentés par le passé, pour dégager les "atomes" responsables de l'intermittence des modèles en couches et de bâtir à partir d'eux une théorie statistique effective. La tâche est rendue plus facile dans le cadre de ces modèles à nombre de degrés de liberté réduits car, contrairement au cas de l'équation d'Euler, l'existence (et l'unicité) de solutions type structures singulières auto-similaires sont établies pour la dynamique inviscide. Précisons ici le sens donné au mot "structure" : elles n'ont pas d'extension spatiale, car toute information sur l'organisation géométrique de l'écoulement a disparu dans la schématisation des équations du mouvement sous forme d'une dynamique unidimensionnelle et discrète. Leur cohérence est seulement temporelle et elles nous renseignent sur les modes de

transfert de l'activité des grandes vers les petites échelles. Mais il a été prouvé que ces structures sont modifiées par l'environnement turbulent dans lequel elles évoluent, lorsqu'on tient compte de la dissipation. Nous avons essayé d'évaluer cet effet à partir d'une modélisation stochastique des fluctuations aux petites échelles. Dans la même optique, et toujours pour des modèles en couches, nous nous sommes aussi intéressés au problème du transport d'une quantité scalaire (telle que la concentration d'un polluant) par un écoulement turbulent. Le champ de vitesse est ici choisi comme un bruit blanc gaussien, suivant les prescriptions du modèle de Kraichnan qui a servi récemment de cadre aux avancées les plus décisives concernant la compréhension du phénomène d'intermittence.

La thèse s'articule suivant quatre chapitres, de longueurs très inégales :

Le premier chapitre commence par un rappel succinct des principaux résultats connus pour la turbulence pleinement développée des écoulement incompressibles tri-dimensionnels et pour l'advection d'un scalaire passif. En particulier, nous insisterons sur le formalisme multifractal car il est à la base du lien entre les propriétés statistiques et dynamiques étudiées par la suite. Puis, nous présenterons les modèles en couches qui constituent le cadre exclusif de ce travail. Enfin, nous exposerons les résultats des statistiques concernant des structures identifiables dans ces modèles, extraites de simulations numériques à très grand nombre de Reynolds, qui constituent les données expérimentales auxquelles sera confrontée une théorie effective développée dans le chapitre suivant.

Ce deuxième chapitre est consacré à une analyse semi-classique du modèle GOY, vu comme la superposition de structures de type pics localisés et d'un fond turbulent gaussien et delta-corrélé en temps. Dans la limite de bruit de faible largeur, nous proposons une méthode itérative qui nous permet de capturer les solutions rares mais capables de dominer cependant les statistiques. Le succès de cette démarche est mitigé. Nous avons réussi à résoudre une dynamique de Langevin non-linéaire à grandes dimensions, et ce résultat peut avoir une portée plus générale. Mais lorsqu'on calcule les distributions de probabilités des différentes structures singulières ainsi mises à jour, l'accord avec les expériences reste d'ordre qualitatif, au moins en

ce qui concerne le régime intermittent de la zone inertielle atteint asymptotiquement dans la limite des nombres de Reynolds infinis.

Le troisième chapitre constitue une ouverture pour tenter de comprendre les phénomènes de duplication des structures, à mesure qu'elles progressent vers les petites échelles, et qui sont à l'origine des propriétés d'intermittence très marquées du modèle GOY . Ceci se manifeste par une prolifération des pics d'activité dans le signal du flux d'énergie mesuré sur le modèle GOY lorsque l'on sonde des échelles de plus en plus petites. Il y a une grande différence dans les résultats statistiques sur la distribution de l'amplitude de ces pics si on cherche à suivre pas à pas des structures ou au contraire si l'on se concentre uniquement sur les pics les plus intenses (sans lien de causalité) dans une fenêtre de temps donnée. Nous montrons qu'il est possible de rendre compte de cet écart en supposant qu'à chaque étape de la cascade une structure a une possibilité, tirée aléatoirement, de se dupliquer ou non, et en imaginant que ces différents événements forment un arbre dans l'espace des échelles et des temps.

Le dernier chapitre concerne la version en couches du modèle de Kraichnan pour l'advection d'un scalaire passif par un champ de vitesse aléatoire. De profondes analogies avec la dynamique stochastique étudiée au chapitre 2 nous ont à nouveau permis d'identifier des structures auto-similaires, produites par des réalisations particulières du bruit, de poids gaussien optimal. Nous pouvons comparer les exposants d'échelle des fonctions de structure du scalaire avec celles issues de simulations numériques préexistantes dans la littérature. Nous trouvons un bon accord en ce qui concerne les exposants d'ordre élevé, pour lesquels notre approche est la plus légitime.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Phénomènes d'intermittence en turbulence hydrodynamique

1.1.1 Dynamique de Navier-Stokes

L'évolution du champ de vitesse $\mathbf{u}$ d'un fluide incompressible est gouvernée par les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Une fois données les conditions initiales et les conditions de bord, l'écoulement ne dépend plus que d'un unique paramètre de contrôle, le nombre de Reynolds défini selon :

$$Re = \frac{LU}{\nu} \quad (1.2)$$

où U désigne une fluctuation de vitesse caractéristique sur une longueur L , typique de la taille du système, et ν la viscosité cinématique du fluide. C'est cette propriété de similitude qui permet de comparer les expériences de tailles très différentes, comme celles réalisées sur l'air dans de grandes souffleries ou avec de l'hélium dans de petites cellules.

Ce paramètre constitue une mesure de l'intensité relative des effets non-linéaires qui combinent les forces d'inertie avec celles de la pression, par rapport aux effets visqueux. Il est bien connu que les effets non-linéaires ont tendance à être déstabilisant,

en provoquant la croissance des inévitables perturbations qui viennent se superposer à un écoulement, tandis que la dissipation les fait relaxer.

Ainsi, pour les faibles nombres de Reynolds, les fluides ont des mouvements laminaires et réguliers parfaitement prédictibles. A l'opposé, pour les très grands nombres de Reynolds, les fluides présentent des mouvements turbulents, caractérisés par un désordre tant sur le plan temporel que spatial. On distingue toutefois encore des sortes de structures, ou de tourbillons, auxquelles on associe une échelle spatiale r , concept très important dans l'étude de la turbulence. Il ne s'agit pas à proprement parler de véritables formes géométriques, mais plutôt de régions de l'espace sur lesquelles la vitesse varie de façon significative. Pour les plus grands nombres de Reynolds accessibles dans les expériences, il existe plusieurs décades entre les échelles des grandes structures, les plus instables, et celles des plus petites, où la dissipation contrebalance les non-linéarités.

Afin de se concentrer sur le désordre à un instant donné et de se débarrasser d'un courant moyen d'advection des structures, on s'intéresse aux incréments de vitesse : $\delta_{\mathbf{r}}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Bien que déterministe, ce signal a une allure stochastique qui justifie une description statistique et les quantités étudiées sont les moments¹ d'ordre p :

$$S_p(\mathbf{r}) = \langle (\delta_{\mathbf{r}}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))^p \rangle. \quad (1.3)$$

La transition vers le chaos spatio-temporel a lieu pour un nombre de Reynolds qui varie d'un écoulement à un autre, selon leur géométrie, mais qu'on situe généralement dans une fourchette allant de 1 à 10^2 . Elle s'étudie naturellement avec les outils développés dans le cadre des systèmes dynamiques, bien adaptés lorsqu'un petit nombre de modes instables entre en jeu.

Lorsque le nombre de degrés de liberté devient très grand, ce type d'approche n'est guère efficace pour décrire la turbulence directement à partir des équations de Navier-Stokes. En revanche, on pourrait espérer gagner sur un autre tableau, celui de la mécanique statistique. Si la diminution de la viscosité ν s'accompagnait d'une

¹il s'agit de moyennes d'ensemble, mais dans le cadre d'une turbulence stationnaire et homogène du point de vue statistique, elles coïncident avec des moyennes temporelles et spatiales.

disparition du taux de dissipation moyen :

$$\epsilon = \nu \langle (\nabla \mathbf{u})^2 \rangle, \quad (1.4)$$

on attendrait un spectre d'équipartition en $E(k) \sim k^2$ pour la densité d'énergie cinétique $E(k)$ des modes de Fourier de norme k . Mais les expériences montrent que $E(k)$ évolue avec une loi de puissance proche de $E(k) \sim k^{-5/3}$ et que le taux de dissipation garde une valeur finie. Ceci est dû au fait que des échelles toujours plus petites entrent en action à mesure que l'on augmente le nombre de Reynolds.

Corrélativement, un régime statistiquement stationnaire ne peut être atteint que si de l'énergie est injectée en permanence au système et on en rend compte au niveau de l'équation de Navier-Stokes en ajoutant un terme de forçage $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$. Généralement, cet apport externe a lieu à grande échelle, notamment à travers le cisaillement exercé dans les couches limites, puis cette énergie cinétique est transférée de manière conservative vers les petites échelles sous l'effet de distorsions et de déstabilisations successives de tourbillons en tourbillons de taille plus petites mais néanmoins comparables, jusqu'à atteindre les échelles où le frottement visqueux la dissipe sous forme de chaleur. Le taux de dissipation (1.4) est donc égal au taux d'injection d'énergie par les forces extérieures et au taux de transfert par les non-linéarités. On a coutume de désigner sous le nom d'échelles intégrales ($r \geq L$) et d'échelles dissipatives ($r \leq \eta$) l'amont et l'aval de cette "cascade d'énergie", décrite initialement par Richardson en 1922. Entre les deux se situe la zone inertielle $L \gg r \gg \eta$.

La propriété de localité de la cascade vis-à-vis des échelles implique que les mouvements des petites structures sont indépendants des grandes et ont perdu la mémoire des mécanismes de production de la turbulence. Ainsi loin des bords, les symétries permises par l'équation de Navier-Stokes et brisées au cours des bifurcations menant au chaos, peuvent être rétablies statistiquement pour les très grands nombres de Reynolds et on parle alors de turbulence "pleinement développée". A partir de telles considérations, Kolmogorov [43] a élaboré une théorie en 1941 qui reste la grande référence des recherches actuelles. En s'appuyant sur des hypothèses d'homogénéité et d'isotropie et sur la valeur finie du taux moyen de dissipation, il a prouvé que les

moments d'ordre 3 des incréments de vitesse (longitudinaux) vérifient :

$$S_3(r) = -\frac{4}{5}\epsilon r \quad \text{pour } \eta \ll r \ll L. \quad (1.5)$$

Cette loi des 4/5 constitue le test de contrôle de toute nouvelle théorie. Kolmogorov est allé plus loin et a prédit le comportement des autres moments :

$$S_p(r) = C_p \epsilon^{p/3} r^{p/3} \quad (1.6)$$

où les constantes C_p sont censées être universelles, ainsi que la forme du spectre en 5/3 déjà évoqué. Ces derniers résultats reposent sur une hypothèse supplémentaire d'auto-similarité. Nous y reviendrons au début de la section 1.1.3, mais cela revient à dire que toutes les étapes de cascades sont identiques d'un point de vue statistique dans la zone inertielle. Au prix d'une renormalisation, les densités de probabilités associées aux incréments de vitesse ne doivent pas évoluer avec les échelles.

Dimensionnellement, on peut déduire les propriétés suivantes :

- l'écart-type de la vitesse d'un tourbillon à l'échelle r diminue très vite le long de la cascade selon $\delta_r u \sim r^{1/3}$.
- il y a une accélération des temps caractéristiques de retournement, dont l'ordre de grandeur est donné par $\tau_r \sim r/\delta_r u \sim r^{2/3}$.
- le cisaillement augmente au contraire très rapidement comme $\delta_r u/r \sim r^{-2/3}$.

Pourtant l'hypothèse d'invariance d'échelle sous-jacente à la théorie K41 est remise en cause par des phénomènes d'intermittence : aux petites échelles, les fluctuations de grande amplitude par rapport à l'écart-type deviennent bien plus probables que pour les statistiques quasi-gaussiennes du sommet de la zone inertielle, ce qui en termes imagés, se traduit par une remontée des ailes des histogrammes associés aux incréments de vitesse. Parallèlement les zones de calme se trouvent renforcées aussi. Ainsi l'activité se concentre-t-elle spatialement au fur et à mesure qu'elle est transférée vers les petites échelles.

D'autres variables adéquates pour mettre en évidence l'intermittence spatiale sont les fonctions de structure d'ordre $p > 3$ élevé qui donnent davantage de relief aux éléments les plus rares. Elles gardent l'allure de lois de puissance : $S_p(r) \sim r^{\zeta_p}$,

mais leurs exposants diffèrent de ceux prévus par Kolomogorov par des corrections $\zeta_p - p/3 < 0$, comme il a été observé expérimentalement par Anselmet *et al* [3].

Mais jusqu'à maintenant, il n'existe pas de théorie permettant le calcul des exposants anormaux à partir de l'équation de Navier-Stokes. La difficulté essentielle réside dans un problème de non-fermeture des équations d'évolution des corrélations d'ordre p , qui font intervenir les fonctions de corrélations d'ordre $p + 1$.

Une autre difficulté sur le plan théorique est de traiter les structures telles que les nappes ou les filaments de vorticité qui ont tendance à apparaître aux petites échelles dans les écoulements à grands Reynolds, comme le révèlent à la fois les simulations numériques [64, 61] et les expériences [22]. Toutefois, il faut reconnaître que le rôle joué par ces structures (en particulier les filaments de vorticité qui correspondent à des événements trop rares pour avoir une importance statistique [1]) dans les propriétés d'intermittence inertielle reste controversé, bien qu'intuitif.

1.1.2 Advection d'un scalaire passif

On retrouve la même problématique lorsque l'on s'intéresse au transport par un écoulement turbulent d'une quantité scalaire, qui ne joue pas de rôle moteur dans la dynamique du fluide. En raccourci, on parle du problème du scalaire passif qui peut être, selon le contexte, la concentration d'un polluant ou bien la température, lorsque les effets de convection sont négligeables.

La dynamique du scalaire θ est gouvernée par une équation d'advection-diffusion

$$\partial_t \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \kappa \Delta \theta + f, \quad (1.7)$$

où le champ de vitesse $\mathbf{u}$ est solution des équations de Navier-Stokes, f désigne une source externe, et κ la diffusivité moléculaire. On peut toujours absorber le terme $-\mathbf{u} \cdot \nabla \langle \theta(\mathbf{x}, t) \rangle$ au niveau du terme de source f , afin que θ représente directement une fluctuation de la quantité scalaire considéré.

De la même manière, on s'intéresse aux incréments du scalaire entre deux points : $\delta_{\mathbf{r}} \theta(\mathbf{x}, t) = \theta(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \theta(\mathbf{x}, t)$. Lorsque la viscosité et la diffusion² sont suffisamment faibles, une cascade combinant l'énergie cinétique $\langle \mathbf{u}^2 \rangle$ du fluide et la variance

²cette condition est remplie si un autre paramètre sans dimension, le nombre de Péclet, est grand : $Pe = LU/\kappa \gg 1$.

$\langle \theta^2 \rangle$ du scalaire peut avoir lieu sur plusieurs décades d'échelles. Dans ce contexte, Obukhov [53] et Corrsin [18] ont généralisé la théorie K41 et ils ont de nouveau prédit un spectre en $-5/3$ pour le scalaire passif et des lois de puissance pour les moments d'ordre p données par :

$$\langle (\delta_r \theta)^p \rangle \sim \epsilon_\theta^{p/2} \epsilon^{-p/6} r^{p/3}, \quad (1.8)$$

où $\epsilon_\theta = \kappa \langle (\nabla \theta)^2 \rangle$ représente le taux de dissipation de la variance du scalaire.

Mais, comme pour le champ de vitesse, on constate des effets d'intermittence sur le champ du scalaire passif, qui se traduisent par l'évolution de la forme des distributions de probabilité associées à $\delta_r \theta$ le long de la zone inertielle et par l'existence d'exposants anormaux des moments d'ordre p , pour $p > 2$ [4].

Mais ces phénomènes ne se déduisent pas directement du champ de vitesse et ils semblent intrinsèques à l'équation 1.7 car l'intermittence apparaît de manière encore plus prononcée pour ce qui concerne le scalaire passif. Cela a été suggéré notamment par Ruiz-Chavarria *et al* [59] qui ont comparé les exposants des moments de vitesse et de température et ont trouvé que les anomalies sont bien plus fortes dans le second cas. Mais surtout Kraichnan [47] a montré récemment qu'un champ de vitesse stochastique non intermittent est capable de produire des anomalies au niveau du scalaire qu'il transporte. Il avait auparavant [46] introduit ce modèle qui porte son nom pour s'affranchir des problèmes de non-fermeture qui se pose pour l'équation (1.7), tout comme pour l'équation de Navier-Stokes. Dans le modèle de Kraichnan, le champ de vitesse déterministe $\mathbf{u}$ est remplacé par un signal aléatoire, delta-corrélé en temps, gaussien et dont le spectre suit une loi de puissance $E(k) = k^{-1-\xi}$.

Ce modèle a depuis fait l'objet de nombreux travaux et pour la première fois des exposants anormaux ont pu être dérivés directement à partir de l'équation originelle. Mathématiquement, l'intermittence trouve sa source dans l'existence de modes zéros, solutions particulières des équations aux dérivées partielles auxquelles obéissent les fonctions de corrélations d'ordre p du scalaire, présentant des dimensions d'échelles dépendant de l'ordre p considéré de manière non linéaire. En général, ces équations ne sont pas solubles et on ne peut construire explicitement ces modes zéros qu'en se plaçant au voisinage de situations limites où les corrections intermittentes disparaissent et la statistique reste gaussienne (grande dimensionalité [16], champ de

vitesse extrêmement irrégulier $\xi \rightarrow 0$ [31], ou au contraire lisse pour la limite plus délicate $\xi \rightarrow 2$ [38]) et en mettant en oeuvre une théorie de perturbations. Toutefois on constate que le rayon de convergence de ces calculs perturbatifs décroît rapidement avec l'ordre du moment calculé. Aussi, d'autres approches [15, 7], basée sur un formalisme d'instantons sur lequel nous aurons l'occasion de revenir longuement, ont été tentées pour prédire le comportement asymptotique des moments d'ordre très élevé, dans la limite de grande dimension. En particulier, une saturation des exposants ζ_p vers une constante est attendue.

Sur le plan numérique, ces résultats sont validés par des calculs récents [28, 29] utilisant une représentation Lagrangienne des trajectoires. La saturation est interprétée en terme de structures quasi-discontinues identifiées dans les simulations numériques [23], pour lesquelles des variations du scalaire caractéristiques de l'échelle intégrale se retrouvent concentrées sur des échelles très petites³. Comme des structures équivalentes ont aussi été visualisées tant numériquement [58] qu'expérimentalement [65, 66] pour le vrai problème du scalaire passif, il est permis de penser qu'une bonne partie de la physique est correctement appréhendée par le modèle de Kraichnan.

1.1.3 Une image multifractale

L'équation de Navier-Stokes dans la limite inviscide est invariante sous un nombre infini de transformation d'échelles : $(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \rightarrow (\lambda^{1-h}t, \lambda\mathbf{x}, \lambda^h\mathbf{u})$, où l'exposant h est arbitraire. Dans la théorie K41, un unique exposant h apparaît car une invariance globale d'échelle globale est présumée. La valeur $h = 1/3$ se déduit ensuite du fait que le taux de dissipation d'énergie reste fini et uniforme dans la limite des très grands Reynolds.

Mais l'hypothèse selon laquelle la turbulence est globalement auto-similaire est remise en cause par les phénomènes d'intermittence. Plus on sonde de petites échelles, plus l'activité semble localisée spatialement et diverses approches ont conduit à penser que ces régions avaient un caractère fractal. Parisi et Frisch [57] ont alors suggéré

³dans le formalisme introduit dans la section suivante, ces structures correspondront à un exposant de singularité $h_{min} = 0$ pour les incréments du scalaire.

qu'une gamme continue d'exposants $[h_{min}, h_{max}]$ est présente et que h fluctue en différents points du fluide. Dans leur description initiale, les exposants h sont reliés à des singularités du champ de vitesse $\partial_r u(x) \sim r^h$ qui se concentrent sur des ensembles fractals $x \in S(h) \subset R^3$ dont la dimension de Hausdorff, notée $d(h)$, varie avec h .

La probabilité de trouver un exposant h dans une sphère de rayon r diminue donc avec l'échelle comme $P_r(h) \sim r^{3-d(h)}$ et on peut en déduire le comportement des moments d'ordre p en écrivant :

$$S_p = \langle \partial_r u^p \rangle \sim \int d\mu(h) r^{ph+3-d(h)}. \quad (1.9)$$

où $d\mu(h)$ représente le poids statistique de chaque exposant. Dans la limite des petites échelles, un argument de point-col conduit finalement à :

$$\zeta_p = \min_h [ph + 3 - d(h)] \quad (1.10)$$

Ainsi les exposants ζ_p sont-ils reliés par une transformation de Legendre à la codimension fractale $c(h) = 3 - d(h)$ des ensembles $S(h)$. Si $c(h)$ est convexe, cela assure une correspondance univoque entre les deux, et permet de retrouver la non-linéarité des courbes $\zeta_p = f(p)$.

Pour être compatible avec "la loi des 4/5", la fonction $c(h)$ doit en outre vérifier $\zeta_3 = 1$. Notons au passage un résultat important par la suite : la singularité la plus forte impose le comportement asymptotique des exposants d'échelles des exposants ζ_p . On trouve en effet que $\zeta_p \sim ph_{min}$ pour $p \rightarrow \infty$.

Nous avons choisi de présenter le formalisme multifractal dans sa version originale [57], mais depuis, d'autres descriptions en ont été données, qui reposent sur les deux points suivants :

- En toute rigueur, $d(h)$ ne peut être interprétée comme une dimension fractale que si des singularités peuvent apparaître en un temps fini dans la limite des très grands Reynolds. Or cette question n'est toujours pas tranchée à propos de l'équation d'Euler en trois dimension, ce qui a amené à une reformulation purement probabiliste

du modèle multifractal (voir l'ouvrage de référence [26]) sans avoir à invoquer des réalisations individuelles du champ de vitesse. Dans le cadre des modèles étudiés dans cette thèse, il n'y a aucune ambiguïté car ce type de solutions existe.

- Le formalisme multifractal sert aussi à décrire les fluctuations du taux de dissipation d'énergie local $\tilde{\epsilon}_{loc}(r)$ moyenné sur une sphère de rayon r . Historiquement, c'est dans ce contexte que l'intermittence a été expliquée en termes de processus multiplicatifs aléatoires (voir Monin et Yaglom [52]), dont le caractère fractal a été démontré ensuite par Mandelbrot[50]. Nous allons en donner une description simplifiée et brève, car ils permettent une interprétation différente de la fonction $c(h)$. Par souci de cohérence avec les grandeurs que nous étudierons dans cette thèse, nous revenons pour cela à des variables relatives à la zone inertielle (incrément de vitesse et taux de transfert d'énergie).

lien avec la théorie des grandes déviations

Le principe des processus multiplicatifs aléatoires est de décomposer la cascade d'énergie en une série d'étapes décorrélées les unes des autres au cours desquelles des "tourbillons pères" se déstabilisent en "tourbillons fils" de plus taille plus petite, mais voisine. Les générations successives de tourbillons ont des échelles $r_n = r_0/2^n$ où r_0 désigne l'échelle intégrale. Avec ce choix arbitraire de rapport d'aspect, le nombre de tourbillons croît à chaque étape d'un facteur 8 et pour une échelle donnée, leur intensité caractéristique (écart-type des incréments de vitesse $\delta u_n = \delta_{r_n} u$) fluctue. On leur associe individuellement une variable $\epsilon_n = \delta u_n^{1/3}/r_n$ qui correspond, d'un point de vue dimensionnel, au flux d'énergie.

Mathématiquement, on traduit le caractère accidentel des mécanismes du transfert énergétique supposé local et statistiquement invariant d'échelle, par la relation :

$$\epsilon_n = W_n W_{n-1} \dots W_1 \epsilon_0 \quad (1.11)$$

où les facteurs W_i désignent des variables aléatoire strictement positives, indépendantes et identiquement distribuées. De plus la constance du flux d'énergie moyen implique que $\langle W \rangle = 1$.

Les exposants des fonctions de structures s'obtiennent ensuite sans difficulté comme :

$$\zeta_p = p/3 - \log_2 \langle W^{p/3} \rangle, \quad (1.12)$$

où $\langle . \rangle$ désigne la moyenne sur la distribution des W_i .

Le lien avec la théorie des grandes déviations nécessite de faire apparaître la somme de n variables aléatoires normalisées par n . Dans le contexte de la turbulence, on l'exprime sous la forme :

$$S_n = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log_2 W_i, \quad (1.13)$$

de sorte que $\epsilon_n = \epsilon_0 r_n^{S_n}$.

D'après le théorème limite centrale, les déviations de S_n de l'ordre de $0(1/\sqrt{n})$ autour de la valeur moyenne $\langle \log W \rangle$ ont une distribution gaussienne dans la limite $n \rightarrow \infty$. Pour des écarts plus grands, de l'ordre de $0(1)$, cette description n'est plus correcte et le théorème des larges déviations assure que la probabilité de trouver S_n proche d'une valeur de x arbitraire se comporte comme :

$$P(S_n \sim x) \sim e^{ns(x)}, - \quad (1.14)$$

où $s(x)$ est une fonction négative connue sous le nom de fonction de Cramér. Or ce sont précisément ces événements très rares qui sont impliqués dans le phénomène d'intermittence.

On peut à ce niveau établir la correspondance avec le formalisme multifractal rappelé précédemment. En effet, la probabilité figurant dans (1.14) peut se réécrire en fonction de l'échelle sondée comme $P(S_n \sim x) \sim r_n^{-s(x)/\log 2}$ et est associée à des réalisations des incréments de vitesse $\delta u_n \sim (\epsilon_n r_n)^{1/3} \sim r_n^{(x+1)/3}$. La co-dimension $c(h)$ de l'ensemble fractal $S(h)$ n'est autre que la fonction de Cramér, à un terme multiplicatif près : $c(h) = -s(3h - 1)/\log 2$.

L'un des buts ultimes des études de la turbulence est le calcul de la fonction $c(h)$ supposée universelle, tout comme les bornes h_{min} et h_{max} . Néanmoins, il n'existe pas encore de théorie capable de la déduire directement à partir des équations de

Navier-Stokes et jusqu'à maintenant, son évaluation repose sur des arguments phénoménologiques, qui ont recours à diverses hypothèses sur la forme de la fonction de distribution de $\log W$ (distribution gaussienne et permettant de retrouver le modèle log-normale de [44, 54], distribution dichotomique pour le modèle β -aléatoire [10], ou bien encore distribution poissonnienne pour le modèle de She-Lévêque [62]). Il a été ainsi possible de reproduire la courbure des fonctions ζ_p obtenue expérimentalement jusqu'à des valeurs plus ou moins élevées de l'ordre p .

Tout au long de cette thèse, nous nous concentrerons sur la détermination de la fonction $c(h)$ à partir de structures singulières préalablement identifiées, dans le cadre restreint de systèmes dont la formulation évoque les processus multiplicatifs aléatoires, mais qui à la base, sont déterministes.

Enfin, l'ensemble du formalisme a été décrit pour le cas de la turbulence de Navier-Stokes, mais peut être adapté à pour expliquer l'intermittence d'un scalaire passif.

1.2 Une voie plus simple : les modèles en couches

Les processus de cascade d'énergie peuvent être abordés de façon plus simple grâce à des systèmes de type hydrodynamique introduits dès le début des années 70 par l'école russe, puis redécouverts par Siggia. Il s'agit cette fois de systèmes déterministes comportant un nombre réduit de degrés de liberté, ce qui présente deux avantages :

- ils permettent des simulations numériques correspondant à des nombres de Reynolds beaucoup plus élevés que ceux accessibles pour l'équation de Navier-Stokes,
- ils peuvent être analysés avec les outils développés dans le cadre des systèmes dynamiques (bifurcations, spectre de Lyapunov, attracteurs...).

Ces modèles ont eu un grand regain d'intérêt ces dix dernières années, en raison de leur aptitude à reproduire les lois d'échelles anormales observées dans les écoulements incompressibles tridimensionnels.

Le principe est de représenter l'espace de Fourier suivant des échelles concentriques emboîtées les unes dans les autres, de rayon $k_n = k_0 Q^n$. A chaque couche

($k_n \leq \|k\| < k_{n+1}$) est associée une variable réelle ou complexe $u_n(t)$, censée être un mode de Fourier caractéristique des fluctuations de la vitesse $\delta_r u$ sur des échelles $r \sim 1/k_n$. Le rapport d'aspect Q est arbitraire et usuellement choisi comme $Q = 2$.

Afin de mimer l'équation de Navier-Stokes, l'évolution temporelle de la variable $u_n(t)$ comporte les caractéristiques suivantes :

- i) le terme linéaire est purement dissipatif et est décrit par $-\nu k_n^2 u_n$.
- ii) le terme non-linéaire d'advection est une combinaison de la forme $k_n u_{n'} u_{n''}$
- iii) en l'absence de forçage et de dissipation, le modèle doit conserver l'énergie cinétique :

$$E = \frac{1}{2} \sum_n |u_n|^2 \quad (1.15)$$

- iv) les interactions entre échelles sont limitées aux proches voisins (n' et n'' valent $n \pm 1$ ou $n \pm 2$)

Si les propriétés i), ii), iii) sont également valides pour l'équation originale de Navier-Stokes exprimée dans l'espace de Fourier, en revanche la propriété iv) résulte d'une hypothèse de localité pour l'interaction entre les différents modes (par analogie avec l'image de Richardson selon laquelle la cascade d'énergie est assurée par toute une hiérarchie de tourbillons).

Dans une représentation vectorielle que nous adopterons souvent par la suite, la dynamique des modèles en couches se retranscrit suivant :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{D} = \mathbf{N}[\mathbf{u}] + \mathbf{F}. \quad (1.16)$$

Dans l'équation ci-dessus, le vecteur $\mathbf{u}$ a pour $n^{\text{ième}}$ composante la variable $u_n(t)$. $\mathbf{F}$ est le terme de forçage aux grandes échelles et on le fait généralement agir seulement sur la première couche, c'est-à-dire $F_n = f \delta_{0n}$; $\mathbf{D}$ est le terme de dissipation et d'après i), $D_n = -\nu k_n^2 u_n$; $\mathbf{N}[\mathbf{u}]$ est un noyau non linéaire, avec des coefficients permettant de réaliser la condition iii).

Dimensionnellement, on peut identifier le nombre de Reynolds comme $Re = 1/\nu \sqrt{f/k_0^3}$, tandis que la couche dissipative, évaluée avec les hypothèses de Kolmogorov, vaut :

$$n_d = \frac{3}{4} \frac{\log Re}{\log Q}. \quad (1.17)$$

On peut ainsi distinguer le domaine inertiel comme l'ensemble des couches d'indices $0 \ll n \ll n_d$. Le nombre de couches est théoriquement infini, mais en pratique, dans les simulations numériques, on se restreint à un nombre N excédant n_d de quelques unités (typiquement N est compris entre 20 et 30). Précisons aussi que les conditions de bord sont fixées telles que : $u_i = 0$ pour $i = -2, -1, N, N+1$.

Notons que cette dynamique unidimensionnelle et discrète perd toute trace d'information sur l'organisation géométrique de l'écoulement. Il est donc difficile d'établir un lien direct entre les structures que nous étudierons dans ce manuscrit et les structures spatiales couramment observées en turbulence. Il n'est cependant pas exclu que les propriétés locales de l'étirement soient correctement appréhendées par les modèles en couches.

Enfin mentionnons que les modèles en couches sont utilisés pour reproduire d'autres dynamiques turbulentes que celle de Navier-Stokes. Nous verrons notamment le cas de l'advection d'un scalaire passif au chapitre 4.

1.2.1 Présentation du modèle GOY

Le modèle en couches le plus étudié est sans doute le modèle GOY, baptisé ainsi par référence à Gledzer [34] qui l'a introduit, Ohkitani et Yamada [55] qui l'ont ensuite reformulé pour des variables complexes et en ont proposé la première étude numérique. Le noyau non-linéaire s'écrit alors :

$$N_n[\mathbf{u}] = k_n \left[\frac{1-\varepsilon}{Q} u_{n-1}^* u_{n-2}^* + \varepsilon u_{n-1}^* u_{n+1}^* - Q u_{n+1}^* u_{n+2}^* \right]. \quad (1.18)$$

La contrainte de la conservation de l'énergie dans la région inertielle laisse un paramètre arbitraire ε . Plus il est faible, plus le transfert d'énergie des grandes aux petites échelles (assurés par le couplage $u_{n-1}^* u_{n-2}^*$) est efficace.

On vérifie que, dans la région inertielle, l'énergie cinétique obéit à un principe de conservation locale en déduisant de (1.18) que l'énergie cinétique $E_n = 1/2 |u_n|^2$ portée par la couche d'indice n évolue suivant l'équation :

$$\frac{dE_n}{dt} = \epsilon_n - \epsilon_{n+1} \quad (1.19)$$

où ϵ_n s'interprète comme le flux d'énergie entrant dans la couche n et vaut :

$$\epsilon_n = k_n \Re \left[u_n u_{n-1} \left(\frac{1-\varepsilon}{Q} u_{n-2} + u_{n+1} \right) \right], \quad (1.20)$$

$\Re$ désignant la partie réelle.

Le paramètre ε permet aussi de discerner 2 classes de modèles GOY :

- ceux adaptés à l'étude des cascades directes d'énergie typiques de la turbulence 3D, pour lesquels des spectres d'énergie en $k_n^{-5/3}$ ont été mis en évidence (voir par exemple [55]).

- ceux adaptés à l'étude des cascades directes d'enstrophie propres à turbulence 2D, avec des spectres d'énergie en k_n^{-3} [70].

Cette distinction est à relier à la dépendance en ε d'une seconde quantité quadratique conservée par le terme non-linéaire :

$$W_2 = \frac{1}{2} \sum_n \left(\frac{1}{\varepsilon - 1} \right)^n |u_n|^2, \quad (1.21)$$

dont on peut trouver un équivalent dans les vrais écoulements.

En effet, en dimension 3, l'équation d'Euler conserve l'hélicité moyenne

$$H = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) \, d\mathbf{r}^3 \quad (1.22)$$

qui est une quantité non positive, comme W_2 pour $\varepsilon < 1$.

En dimension 2, H disparaît, mais comme les vortex n'ont plus la possibilité de s'étirer, un second invariant prend la place. Il s'agit de l'enstrophie moyenne

$$\Omega = \frac{1}{2} \iint |\nabla \times \mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{r}^2, \quad (1.23)$$

positive comme W_2 pour $\varepsilon > 1$.

Néanmoins, les modèles de type 3D semblent plus raisonnables, car ils donnent des résultats qualitatifs beaucoup plus proches de la réalité.

1.2.2 Résultats divers

Nous allons rappeler brièvement les principaux résultats des études dynamiques et statistiques réalisées sur les modèles en couches, dont on peut trouver une revue exhaustive dans le livre de T. Bohr *et al* [14].

- Par construction, ces modèles possèdent un point fixe de type Kolmogorov :

$$u_n = k_n^{1/3} g(n), \quad (1.24)$$

où la fonction $g(n)$ est de période trois, à cause d'une invariance de jauge présente dans ce problème. En effet la dynamique est inchangée (à un déphasage du forçage près) par la transformation $u_n(t) \rightarrow e^{i\theta(n)}u_n(t)$, telle que les $\theta(n)$ vérifient la relation $\theta(n) + \theta(n+1) + \theta(n+2) = 0$. Modulo cette transformation, le point fixe est réel, ce qui permet d'optimiser le flux d'énergie ϵ_n sur la couche n .

Ce point fixe est compatible avec les conditions aux limites, le forçage et la dissipation, à condition de modifier légèrement la dynamique des deux premières couches selon :

$$N_0[\mathbf{u}] = -k_0 \frac{(2-\varepsilon)}{Q} u_1^* u_2^* \quad ; \quad N_1[\mathbf{u}] = -k_1 \left[u_0^* u_2^* - \frac{1}{Q} u_2^* u_3^* \right]. \quad (1.25)$$

Lorsque on augmente la valeur de ε , le point fixe peut devenir instable et une transition vers le chaos a été détectée pour $\varepsilon_c = 0.3953$ par Biferale *et al* [11].

- Les écarts à la loi de Kolmogorov ont été calculés numériquement pour les phases chaotiques, à partir des fonctions de structures :

$$S_p(n) = \langle |u_n|^p \rangle \quad (1.26)$$

Dans la région inertielle, des lois d'échelle $S_p(n) \sim k_n^{-\zeta_p}$ ont pu être mises en évidence⁴ par différents auteurs [39], [41]. Les exposants ζ_p présentent des déviations par rapport à la prévision dimensionnelle $\zeta_p = p/3$ imputables au phénomène d'intermittence, et de plus en plus fortes à mesure que ε s'écarte du seuil de transition ε_c . En revanche la courbure des fonctions $\zeta_p = f(p)$, synonyme de multifractalité, est plus prononcée pour des valeurs du paramètre relativement proches de ε_c .

Pour la valeur particulière $\varepsilon = 1/2$ qui sera la seule utilisée dans le reste du manuscrit, le second invariant quadratique (1.21) se réécrit $W_2 = 1/2 \sum_n (-1)^n k_n |u_n|^2$ et dimensionnellement correspond donc exactement à l'hélicité H . Il se trouve alors que les exposants de structure obtenus par Jensen *et al* [39] reproduisent de manière étonnante ceux mesurés dans les vrais écoulements turbulents incompressibles [3].

⁴elles sont en fait entachées par des oscillations dues à la symétrie de jauge mentionnée plus haut, et d'autres observables ont été proposées, comme $\langle |\varepsilon_n|^{p/3} \rangle$.

Présence de structures singulières

Une voie radicalement différente pour comprendre les propriétés d'intermittence temporelle des modèles en couches a été très tôt proposée par Siggia [63]. Il a remarqué que leur caractère unidimensionnel favorisait la formation de pulses de type solitons dont l'amplitude croît de manière auto-similaire avec les échelles. Dans le cas du modèle GOY, Ohkitani et Yamada ont retrouvé cette image : ils ont observé que l'énergie pouvait être transportée sous forme de "burst", faisant suite à des phases de calme [55].

De son côté, Parisi a proposé, dans un papier non publié très fameux [56] de voir l'écoulement turbulent comme un gaz de "solitons" présentant une gamme continue d'exposants d'échelle, ce qui conduit naturellement à la multifractalité.

Lorsque $f = \nu = 0$, Dombre et Gilson ont mis au point une méthode numérique permettant de capturer de telles structures, qui conduisent à une singularité en un temps fini, physiquement liée à l'explosion de l'enstrophie [21]. Ce sont en fait les gradients de vitesse $b_n(t) = k_n u_n(t)$ qui sont les variables dynamiques pertinentes pour décrire des structures localisées et auto-similaires de la forme :

$$b_n(t) = \frac{1}{t - t^*} F[(t - t^*)Q^{nz}] = Q^{nz} G[(t - t^*)Q^{nz}] . \quad (1.27)$$

Lorsque ces structures se propagent, elles laissent dans leur sillage un spectre en Q^{nz} (qui serait établi sur toutes les échelles au temps t^* si la dissipation ne venait pas empêcher d'atteindre t^* dans la réalité).

Pour un paramètre ε donné, l'exposant de croissance z est unique [21]. Dans le cas des modèles GOY présentant le plus d'intermittence ($\varepsilon_c \ll \varepsilon \leq 1$), les fluctuations les plus rares et les plus intenses sont bien matérialisées par les structures singulières ainsi sélectionnées par le seul effet des non-linéarités. Autrement dit, l'accord est très bon entre l'exposant z et la pente asymptotique du graphe des exposants $\zeta_p = f(p)$ tiré des simulations directes du modèle complet (incluant les effets de forçage et de dissipation).

Mais cela correspond à des statistiques unifractales peu réalistes au regard de la vraie turbulence. En revanche pour la valeur intéressante $\varepsilon = 1/2$, l'exposant z est trop proche de $z_K = 2/3$ (correspondant à la théorie de Kolmogorov) pour

que les structures singulières puissent à elles seules suffire à expliquer les déviations intermittentes. De plus, l'unicité des solutions singulières va à l'encontre de l'image multifractale qui s'est imposée pour la turbulence de Navier-Stokes.

1.2.3 Une image à deux fluides du modèle GOY

L'idée est que les structures singulières décrites plus haut demeurent les atomes élémentaires pour expliquer l'intermittence du modèle GOY avec $\varepsilon = 1/2$, mais qu'elles ont une croissance trop faible pour échapper au milieu dans lequel elles évoluent. En effet, essayons d'imaginer le devenir des pulses pour le modèle complet : ces vagues d'activité sont émises aux grandes échelles sous l'effet du forçage, puis se propagent jusqu'aux échelles dissipatives qui constituent une sorte de barrière sur laquelle elles viennent se briser. Chaque nouvelle structure rencontre donc sur son passage le fruit de la relaxation des précédentes, qui constitue une sorte de mer désordonnée (suite à de multiples instabilités dues aux non-linéarités) et sans cesse renouvelée.

Ainsi Gilson et Dombre [33] ont proposé de voir la turbulence du modèle GOY comme une superposition de deux types de fluides, l'un cohérent et l'autre non. Cette interaction est susceptible de renormaliser les pulses, et de leur donner des exposants effectifs z , notablement supérieurs (ou inférieurs) à z_0 . Notons que cette description est plus simple que celle proposée par Parisi [56] puisqu'elle ne met l'accent que sur une seule structure et néglige les interactions entre pulses. Cette hypothèse paraît raisonnable en vertu de l'accélération des temps caractéristiques (le temps de retournement à l'échelle n est au moins de l'ordre de $k_n^{-2/3}$), qui rend très peu probable la collision entre deux structures cohérentes.

A l'appui de cette image à deux fluides, ils ont commencé par identifier les mécanismes dynamiques locaux pouvant conduire à un tel effet, en étudiant les collisions entre un pulse idéal et un défaut piégé dans la cascade. On observe un "dopage" momentané du pulse, lorsqu'il est en opposition de phase avec le défaut. Localement cela correspond à une inversion du flux d'énergie⁵.

⁵en suivant une tout autre approche, Biferale *et al* [11] ont aussi suggéré que la possibilité de bloquer la cascade pouvait expliquer les propriétés d'intermittence des modèles en couches.

Il convenait ensuite de détecter la présence des structures cohérentes dans les vrais signaux et de préciser leur poids statistique. Dans la suite, on définira précisément une densité de probabilité $P_n(z)$ de mesurer une structure cohérente ayant cru (en module) d'un facteur Q^{nz} en n pas de cascade. Dans l'image multifractale, ces structures correspondent à des singularités se raréfiant comme :

$$P_n(z) \sim e^{ns(z)}, \quad (1.28)$$

où $s(z)$ désigne la fonction de Cramér de la théorie des grandes déviations [26]. Dans sa thèse [32], Jean-Louis Gilson avait entrepris le calcul de $s(z)$; pour des nombres de Reynolds de l'ordre de $Re \sim 10^6$, ses simulations n'excluaient pas que la multifractalité observée puisse être liée à des effets de Reynolds fini et disparaisse dans la limite $Re \rightarrow \infty$. A l'Institut Weizmann (Department of Complex Systems, Israel), il a mis au point une procédure permettant l'accès à des nombres beaucoup plus élevés. Nous décrivons ses résultats dans la sous-section suivante.

Parallèlement, on peut essayer de proposer une théorie semi-quantitative de l'image à deux fluides. Le plus simple est de paramétrer la partie déstructurée de l'écoulement par un bruit blanc gaussien⁶ qui a l'avantage de fournir une dynamique stochastique tractable analytiquement (du moins dans ses grandes lignes). En effet, nous pourrions lui appliquer, dans la limite de faible largeur du bruit, une technique d'instantons récemment introduite dans le contexte de la turbulence [24]. Le chapitre 2 est consacré à ce problème, et la fonction $s(z)$ sera comparée à celle issue des simulations de la vraie dynamique.

1.2.4 Statistique des événements cohérents

Notion d'événement cohérents

L'observable adéquate pour détecter le passage de structures cohérentes est le taux de transfert $\varepsilon_n = k_n^{-2} \text{Re}\{2b_{n-2}b_{n-1}b_n + b_{n-1}b_{n+1}b_n\}$ (dans la théorie de champ moyen de Kolmogorov, ε_n est une constante indépendante de l'échelle considérée et du temps). L'arrivée sur une couche n d'un pic d'activité doit se traduire par

⁶les motivations physiques seront données au début du chapitre 2.

un maximum relatif dans l'enregistrement de $\varepsilon_n(t)$. On commence par se donner une couche de référence n_0 située en début de zone inertielle (tout en restant suffisamment loin de l'échelle intégrale pour éviter d'être trop sensible aux fortes perturbations induites par le forçage). Repérons un maximum relatif survenant à une date t_{n_0} , le suivant intervenant alors un temps de retournement Δt_{n_0} plus tard. Nous considérons cet événement comme le germe d'une structure dont il faut ensuite chercher la trace sur les couches d'indice plus élevé. Mais il s'avère délicat de suivre la propagation d'une structure, car sous l'effet d'instabilités, elle peut se fractionner en passant d'une couche à une autre. Compte tenu de l'accélération des temps caractéristiques le long de la cascade, le nombre de maxima relatifs recensés pendant Δt_{n_0} sur les couches en aval croît exponentiellement avec l'indice de couche n (à peu près comme $Q^{2n/3}$ comme on peut l'extraire de la figure 1.1 et comme un argument dimensionnel à la Kolmogorov le prédirait).

On peut alors répartir ces différents événements sur un arbre "généalogique" dans le plan (n, t) . L'ancêtre commun est $\varepsilon_{n_0}(t_{n_0})$ et chaque temps de retournement sur la couche n_0 , l'arbre est renouvelé. Tout le problème pour définir une trajectoire cohérente réside donc dans la détermination des liens de filiation corrects. Le plus simple consiste à privilégier les branches aînées que nous nommerons aussi les "premiers essais". Une réalisation d'un pulse cohérent se propageant de la couche n_0 à la couche n correspond ainsi aux $n - n_0$ noeuds de l'arbre les plus proches chronologiquement de l'ancêtre sur la couche n_0 , pour autant qu'ils apparaissent également suivant un ordre croissant de l'indice de couche.

Précisons aussi qu'on écarte les événements non pertinents, car trop faibles, en imposant que sur la couche de référence, ε_{n_0} soit supérieur à la moitié du flux moyen d'énergie.

La figure 1.2 montre un histogramme des amplitudes logarithmiques $A_n = \ln |\varepsilon_n|^{1/3}$ pour une couche située à mi-chemin dans la zone inertielle. Les statistiques ont été réalisées pour $Re = 10^8$ et portent sur 6×10^4 temps de retournement de la plus grande échelle. En moyenne, il existe trois trajectoires cohérentes pour deux temps de retournement. On peut observer que la statistique des trajectoires cohérentes est très proche d'être log-normale pour la région $|\varepsilon_n| \geq \mathcal{O}(1)$.

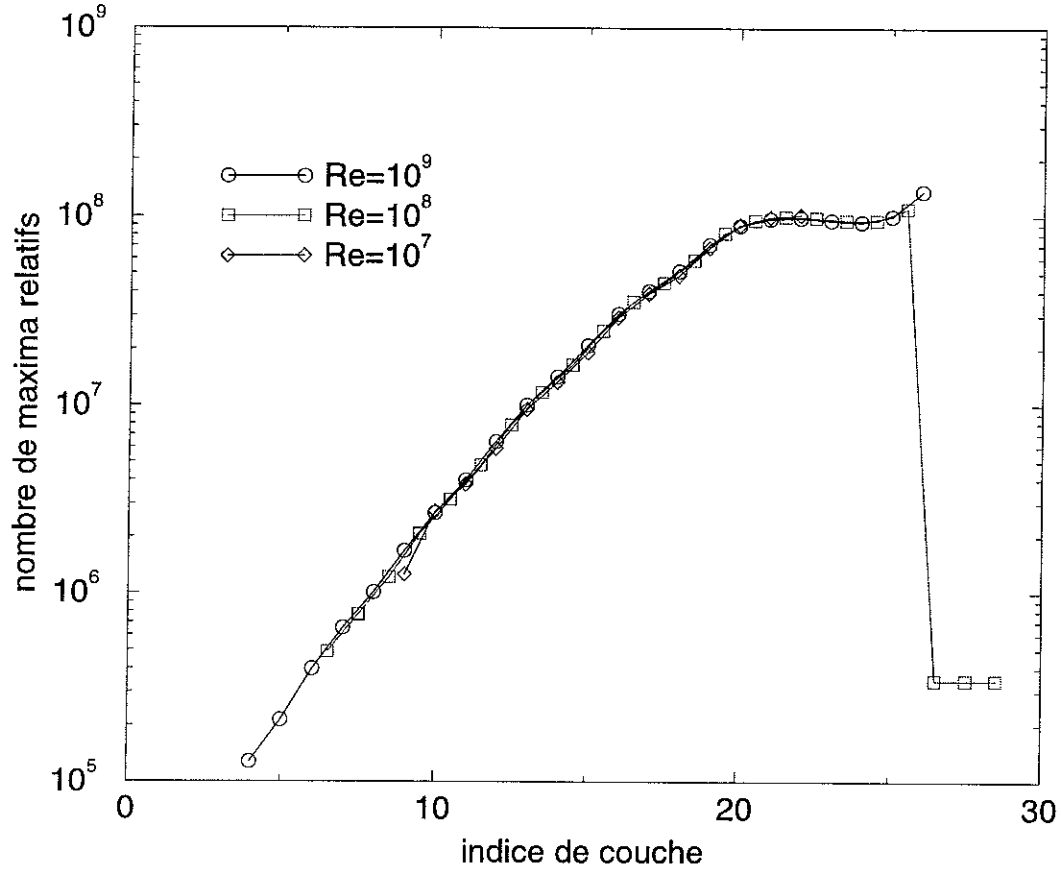


FIG. 1.1: croissance du nombre de maxima relatifs le long de la cascade. Les courbes pour $Re = 10^7, 10^8$ sont décalées de telle sorte que l'indice de leur couche dissipative soit le même que celui pour $Re = 10^9$.

L'exposant effectif z associé à un pulse cohérent ayant parcouru n pas de cascade se déduit de la relation :

$$A_n = A_{n_0} + (n - n_0)(z - 2/3) \ln Q \quad (1.29)$$

La forme de l'histogramme sur la figure 1.2 suggère que pour les événements intenses, la fonction de Cramér $s(z)$ a un comportement quadratique. Mais pour avoir une loi multifractale du type 1.28, il faut aussi que la moyenne D_n et la variance Σ_n^2 tirée de la partie gaussienne des histogrammes pour $A_n - A_{n_0}$ suivent un comportement

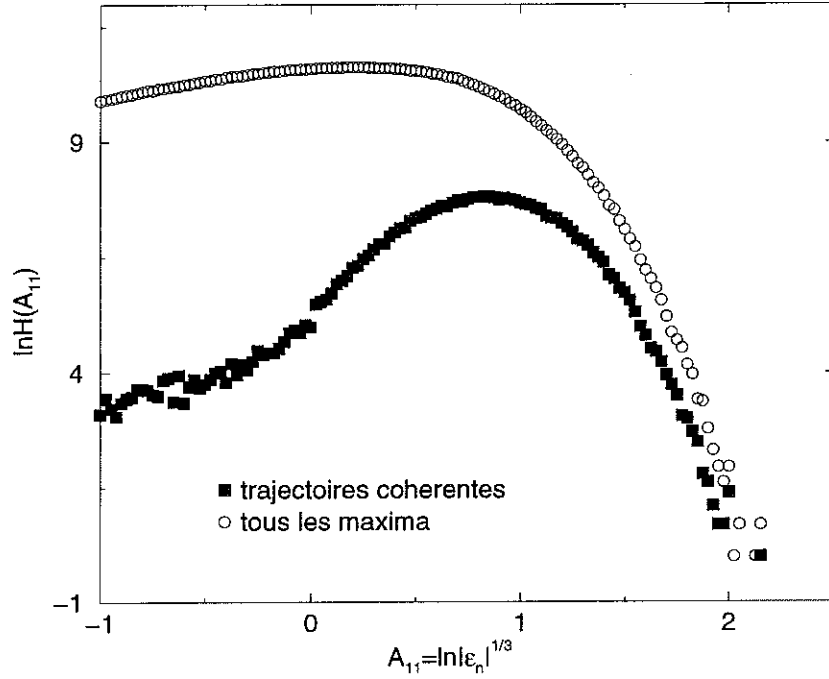


FIG. 1.2: Histogrammes du flux d'énergie pour tous les extrema relatifs de ε_n ou pour la restriction aux événements cohérents. L'indice de couche est $n = 11$, le nombre de Reynolds $Re = 10^8$ et les données ont été enregistrées pour $6 \cdot 10^4$ temps de retournement aux grandes échelles.

linéaire avec n . Ainsi $s(z)$ peut s'exprimer comme :

$$s(z) = -a(z - z_*)^2, \quad (1.30)$$

à condition que D_n et Σ_n^2 vérifient pour n assez grand :

$$\begin{aligned} D_n &\sim n \ln Q(z_* - 2/3) \\ \Sigma_n^2 &\sim \frac{n}{2a} (\ln Q)^2. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Résultats

L'évolution de la dérive D_n le long de la cascade est représentée figure 1.3 et celle de la variance Σ_n^2 figure 1.4. Elles sont relatives à un nombre de Reynolds $Re = 10^9$, les couches dissipatives étant alors situées au delà de $n = 23$. Les barres d'erreur ont été estimées en faisant varier le domaine sur lequel les histogrammes de $A_n - A_{n_0}$

peuvent être approchées par une gaussienne, ainsi que le domaine des amplitudes initiales A_{n_0} utilisé.

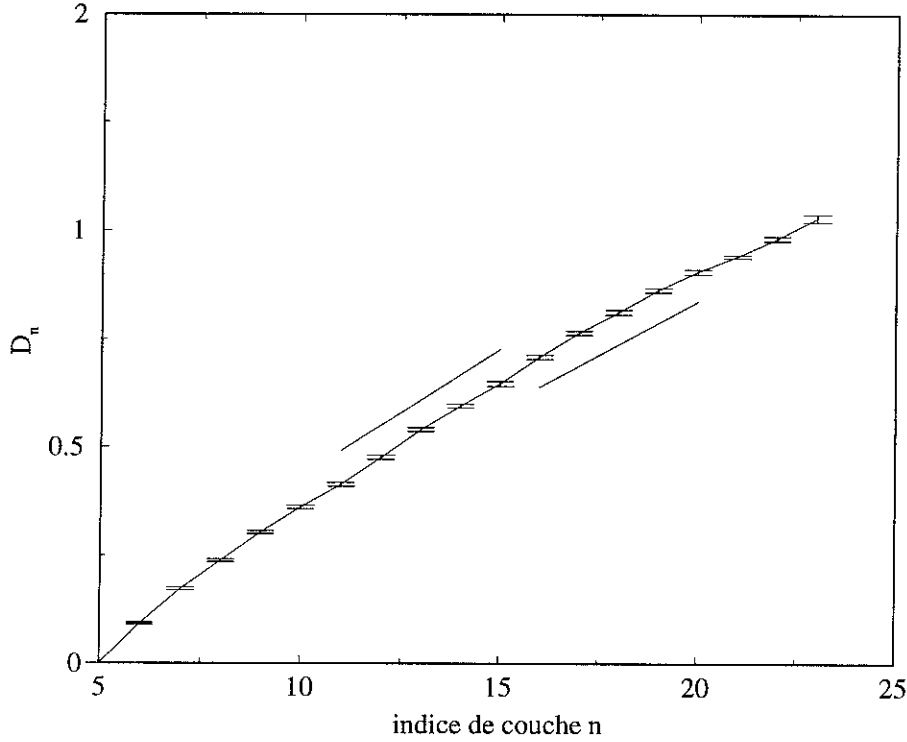


FIG. 1.3:

On peut constater que l'hypothèse d'invariance d'échelle qui est à la base du formalisme multifractal, n'est pas respectée tout au long de la cascade. C'est sur le comportement de la variance que cet effet est le plus visible. Il nous semble cependant qu'on peut distinguer deux domaines de couches pour lequel un comportement linéaire reste décent :

-i) l'intervalle $[11 - 15]$, menant aux estimations suivantes des deux paramètres : $a = 45$ et $z_* = 0.75$.

-ii) les couches $[16 - 20]$, correspondant aux paramètres $a = 29 \pm 4$ et $z_* = 0.74 \pm 3.10^{-3}$. Elles sont donc le siège de fluctuations plus grandes⁷ (en revanche, les pulses ont alors moins tendance à se dupliquer, comme on le verra par la suite).

⁷une plus petite valeur de a signifie en effet une plus grande dispersion des exposants z .

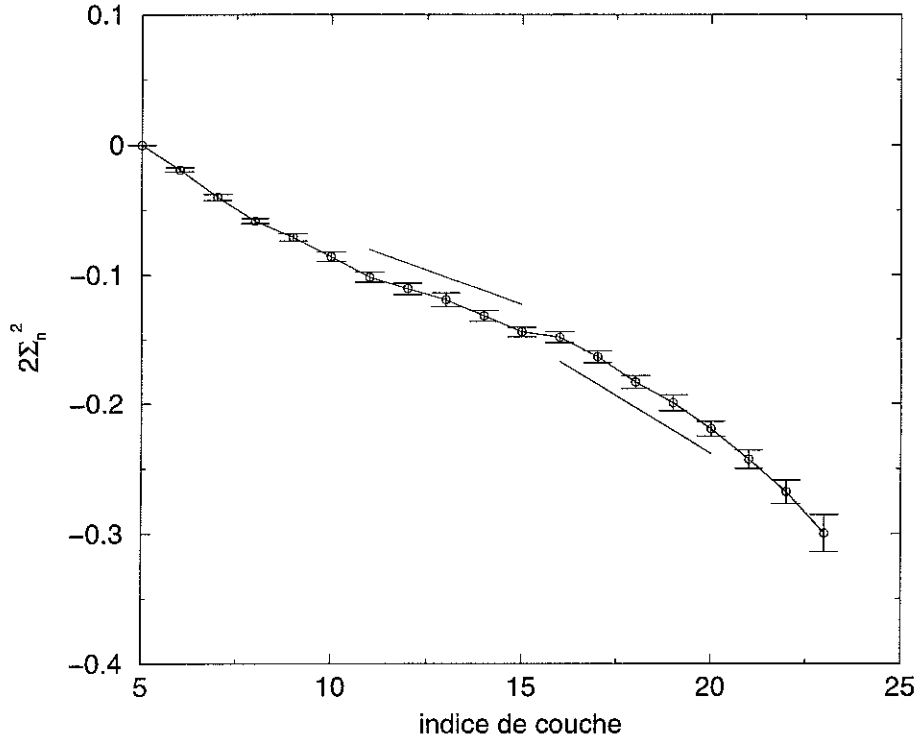


FIG. 1.4:

Toute la question est de savoir laquelle de ces deux régions va ultimement dominer la zone inertielle dans la limite des grands Reynolds. Un indice assez probant provient de l'observation de la figure 1.1 où est portée l'évolution, en échelles logarithmiques, du nombre $N_{max}(n)$ de maxima relatifs recensés sur la couche n , en fonction de n . Cela concerne trois nombres de Reynolds $Re = 10^7, 10^8, 10^9$, pour lesquels la couche dissipative se place respectivement à l'indice : $n_d = 17.4, 19.9, 22.4$ (les valeurs réelles, obtenues à partir de la formule (1.17), ont été gardées pour montrer qu'elles s'intercalent de la même manière avec le réseau discret de couches pour les deux nombres de Reynolds extrêmes).

Les courbes correspondant à l'observable $N_{max}(n)$ ont une forme quasiment invariante avec le nombre de Reynolds, lorsqu'on ajuste la numérotation des couches de sorte que ce soient les indices relatifs aux petites échelles qui coïncident.

Pour $n < 16$, on observe un comportement en loi de puissance $N_{max}(n) \sim Q^{2/3n}$, puis on retrouve la zone ii) pour $16 \leq n \leq 20$ qui est marquée par un changement

drastique de l'exposant de croissance : $N_{max}(n) \sim Q^{0.39n}$. Enfin, pour $n > 20$ le nombre de maxima sature⁸.

Ainsi le nombre de couches telles que $N_{max}(n) \sim Q^{0.39n}$ ne varie pas avec le nombre de Reynolds. Nous pouvons en conclure que c'est le domaine de type i) qui finit par dominer dans la limite $Re \rightarrow \infty$ tandis que le domaine de type ii) reste toujours le même et ne fait que se déplacer avec la couche dissipative auquel il est rigidement lié.

Dans le chapitre 2, nous essaierons de rendre compte de ces statistiques en calculant la fonction $s(z)$ à partir des équations d'un modèle stochastique simulant l'interaction entre les parties cohérentes et incohérentes de l'écoulement et ne contenant qu'un paramètre ajustable. Nous verrons alors que les paramètres a et z_* concernant uniquement le domaine ii) peuvent être conjointement bien reproduits par cette approche. Pour le domaine i), physiquement le plus intéressant, l'action des fluctuations incohérentes, modélisée comme un bruit blanc gaussien de moyenne nulle, ne permet pas d'obtenir une distribution d'exposants z centrée sur une valeur suffisamment grande. Néanmoins, l'accord serait sans doute restauré en invoquant la possibilité d'un biais systématique pour le terme de bruit. Cela revient à dire que les structures ont alors plus de chances de rencontrer des fluctuations pouvant remonter la cascade que l'inverse.

Le chapitre 3 s'attaque de manière préliminaire à une problématique différente, ayant trait à l'organisation temporelle globale de l'intermittence dans les modèles en couches. Nous reviendrons alors sur le phénomène de duplication des maxima qui est trop fortement non-linéaire pour être accessible par des techniques d'instantons. En effet, parmi tous les maxima relatifs mesurés par temps de retournement des grandes échelles, nous nous sommes concentrés jusqu'ici sur les premiers essais, mais une autre possibilité est de suivre le maxima absolu sur chaque couche (on ne suit pas alors toujours la même structure).

Les statistiques obtenues ainsi vérifient alors beaucoup mieux la propriété d'inva-

⁸au niveau de la dérive D_n , ce régime correspond d'ailleurs à un exposant effectif z_* identique à celui de la solution idéale $z_0 = 0.72$.

rianche d'échelle que celles des premiers essais, et sont caractérisées par des déviations beaucoup plus intermittentes ($z_* \sim 0.8$). Pour le domaine de type i), il est possible de rendre compte qualitativement de l'écart entre ces deux distributions statistiques, en introduisant des modèles en arbres assez simples, où la possibilité qu'une structure a, ou non, de se dupliquer à chaque pas de cascade, est aléatoire.

Chapitre 2

Analyse semi-classique d'une version stochastique du modèle GOY

2.1 Présentation de la dynamique stochastique

En reprenant la notation vectorielle introduite au chapitre précédent, la dynamique du modèle GOY peut s'écrire, dans la zone inertielle et pour le champ gradient de vitesse, sous la forme :

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = N[\mathbf{b}], \quad (2.1)$$

avec

$$N_n[\mathbf{b}] = 2b_{n-2}^*b_{n-1}^* + \frac{1}{2}b_{n-1}^*b_{n+1}^* - \frac{1}{4}b_{n+1}^*b_{n+2}^*. \quad (2.2)$$

Nous avons rappelé que cette dynamique déterministe conduit à la formation de structures cohérentes singulières sous forme de pulses se propageant des grandes vers les petites échelles. Lorsque les effets de forçage et de dissipation sont pris en compte, une image à deux fluides de la cascade d'énergie s'est imposée, ayant pour principe que de telles solutions persistent, mais interagissent avec un fond turbulent [33]. Afin de rendre cette image physique quantitative, un terme de forçage aléatoire modélisant l'action des fluctuations incohérentes sur un pulse peut être ajouté à la dynamique (2.1).

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \mathbf{N}[\mathbf{b}] + D[\mathbf{b}]\boldsymbol{\eta} \quad (2.3)$$

où $\mathbf{b}$ désigne la partie cohérente de l'écoulement et $\boldsymbol{\eta}$ un champ aléatoire modélisant l'effet des fluctuations incohérentes. L'hypothèse la plus simple est de choisir pour $\boldsymbol{\eta}$ un bruit blanc gaussien de moyenne nulle, dont les corrélations sont par hypothèse de la forme suivante :

$$\langle \eta_m^*(t) \eta_{n'}(t') \rangle = \Gamma \delta_{nn'} \delta(t - t') \quad (2.4)$$

Commentons les différents hypothèses sous-jacentes à cette notation.

L'aspect complètement incohérent du forçage provient avant tout de la très grande séparation des échelles caractéristiques de temps entre les couches intégrales et dissipatives.

Le choix de décorrélation entre les échelles est motivé par l'observation dans les simulations du modèle complet d'un très fort mélange induit par les degrés de liberté de phase (et déjà noté par Benzi *et al* [8])

Le choix de décorrélation temporelle est sans doute plus discutable, mais il est indispensable pour mener à bien les calculs qui suivront.

Le paramètre Γ est un nombre sans dimension arbitraire, permettant d'ajuster l'intensité relative des fluctuations incohérentes vis à vis de la partie cohérente de l'écoulement. Par la suite, nous serons intéressés par la limite de faible Γ , qui autorise une analyse semi-classique de la dynamique stochastique.

Enfin la matrice $D[\mathbf{b}]$ est introduite pour restaurer entre autres l'invariance d'échelle de la dynamique stochastique (2.3), compte tenu de la forme des corrélations choisie (2.4). Cela revient à dire que le niveau de bruit rencontré par un pulse est toujours adapté à la hauteur de ce pulse. En effet, si au contraire les fluctuations incohérentes obéissaient à une loi d'échelle intrinsèque, on attendrait des statistiques unifractales dans la limite $Re \rightarrow \infty$, puisque seule la solution idéale d'exposant z_0 serait alors à même de survivre indéfiniment.

Lorsque le champ $\mathbf{b}$ subit le changement d'un facteur λ :

$$\mathbf{b} \rightarrow \lambda \mathbf{b}, \quad (2.5)$$

on trouve dimensionnellement que les autres variables vérifient le changement suivant :

$$t \rightarrow \lambda^{-1}t \quad (2.6)$$

$$\eta \rightarrow \lambda^{1/2}\eta \quad (2.7)$$

Pour être efficace tout le long de la cascade, le terme stochastique de forçage $D[\mathbf{b}]\eta$ doit alors être multiplié par le même facteur que le terme déterministe, c'est à dire par λ^2 , ce qui impose :

$$D[\mathbf{b}] \rightarrow \lambda^{3/2}\mathbf{b}. \quad (2.8)$$

On en déduit que la matrice $D[\mathbf{b}]$ peut se réécrire sous la forme suivante :

$$D[\mathbf{b}] = (\mathbf{b}^* \cdot \mathbf{b})^{3/4} B[\mathbf{C} = \frac{\mathbf{b}}{(\mathbf{b}^* \cdot \mathbf{b})^{1/2}}] \quad (2.9)$$

Cette expression fait apparaître une nouvelle matrice $B[\mathbf{C}]$ qui s'interprète comme un facteur de forme au niveau de la dynamique stochastique (2.3). Physiquement les différents choix possibles pour ce facteur de forme reviennent à faire agir le bruit plus ou moins en avant du pulse¹.

Nous nous proposons de traiter cette dynamique stochastique en utilisant les techniques de théorie des champs² développées dans [51]. Afin d'alléger les notations, nous avons fait les choix suivants :

i) nous adopterons le plus souvent possible une représentation continue de la dynamique stochastique, même si mathématiquement cela peut poser des problèmes d'existence. L'interprétation la plus satisfaisante de l'équation de Langevin (2.3) est alors la forme intégrale suivante :

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{b}(0) + \int_0^t \mathbf{N}[\mathbf{b}(t')] dt' + \int_0^t D[\mathbf{b}(t')] d\mathbf{W}(t'), \quad (2.10)$$

où $\mathbf{W}(t)$ est un processus de mouvement brownien tel que $d\mathbf{W}(t) = \boldsymbol{\xi}(t)dt$.

¹c'est en effet ce qui se passe en aval du pulse qui peut affecter sa croissance.

²pour une application plus récente dans le cadre des systèmes dynamiques, voir les références [35, 36, 42].

Néanmoins lorsqu'il s'agit de réaliser des simulations numériques ou, comme dans notre cas, d'utiliser un formalisme en intégrale de chemin, il est nécessaire de discrétiser l'intégrale stochastique (2.10).

Découpons l'intervalle de temps $[0, t]$ en N tranches de durée $\Delta t = t/N$. Chaque instant est repéré selon $t_i = i \Delta t$. Dans ces conditions, la dynamique (2.3) devient :

$$\mathbf{b}(t_N) = \mathbf{b}(0) + \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{N}[\mathbf{b}(t_i^*)] \Delta t + D[\mathbf{b}(t_i^*)] \Delta \mathbf{W}_i, \quad (2.11)$$

avec : $t_i \leq t_i^* \leq t_{i+1}$ et $\Delta \mathbf{W}_i = \mathbf{W}(t_{i+1}) - \mathbf{W}(t_i)$.

Deux choix sont usuels concernant le point intermédiaire t_i^* , dont va dépendre la limite de la somme de Riemann ci-dessus.

La convention dite de Stratonovich ou "du point milieu" correspond à prendre $t_i^* = (t_i + t_{i+1})/2$, ou pour plus de maniabilité $\mathbf{b}(t_i^*) \equiv [\mathbf{b}(t_{i+1}) + \mathbf{b}(t_i)]/2$. Lorsqu'on utilise un bruit de corrélation finie et qu'on cherche la limite delta-corrélée, c'est sous cette forme que se transforme la dynamique. Un autre avantage est que seule cette convention permet d'utiliser les règles de changement de variable du calcul ordinaire. Il existe une autre convention dite de Ito, ou de "pré-point", qui consiste à prendre $t_i^* = t_i$. La dynamique devient alors Markovienne et cette convention est beaucoup plus pratique en vue d'une formulation en intégrale de chemin.

Dans notre cas, la dynamique (2.3) est à interpréter au sens de Stratonovich pour la raison physique citée auparavant. Mais il existe une correspondance entre les deux que nous allons utiliser afin de faciliter nos calculs [30] et dont nous donnons une justification dans l'annexe 2.6. La version continue à la Ito de l'équation différentielle stochastique (2.3) comporte un terme supplémentaire dit "de dérive de Ito". Elle s'écrit :

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \mathbf{N}_\Gamma[\mathbf{b}] + (\mathbf{b}^* \cdot \mathbf{b})^{3/4} B[\mathbf{C}] \boldsymbol{\eta}, \quad (2.12)$$

avec pour nouvelle définition du noyau non-linéaire :

$$\mathbf{N}_{\Gamma n}[\mathbf{b}] = \mathbf{N}_n[\mathbf{b}] + \frac{1}{2} \Gamma \frac{\partial (\mathbf{b}^* \cdot \mathbf{b})^{3/4} B_{nj}}{\partial b_k^*} (\mathbf{b}^* \cdot \mathbf{b})^{3/4} B_{kj}^*. \quad (2.13)$$

ii) nous nous restreindrons dans un premier temps à des champs $\mathbf{b}$ et $\boldsymbol{\eta}$ réels. Au niveau de la dynamique déterministe, les solutions singulières auto-similaires sont réelles, modulo la transformation de jauge du modèle GOY :

$$b_n(t) \rightarrow e^{i\theta(n)} b_n(t), \quad (2.14)$$

où les $\theta(n)$ vérifient la relation : $\theta_n + \theta_{n+1} + \theta_{n+2} = 0$. Nous nous attendons à ce qu'il en soit de même au niveau des solutions de type instantons.

Nous n'avons pas encore tout à fait la forme finale de l'équation différentielle stochastique à partir de laquelle nous voulons travailler. Nous avons déjà indiqué que la dynamique déterministe, unidimensionnelle et non-linéaire, (2.1) conduisait génériquement à la formation de singularité en un temps fini t^* . Il est usuel dans ce cas de repousser l'apparition de cette singularité à l'infini en introduisant un temps désingularisant, typiquement $\tau = -\log(t - t^*)$ (voir les notations 4.15 du chapitre 1). En fait, nous allons choisir une variable qui impose aux structures de se propager à vitesse constante jusqu'aux petites échelles. Dans la variable de départ t , le temps d'évolution caractéristique d'une structure s'évalue comme $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^{-1/2}$, ce qui amène au changement suivant :

$$\frac{d\tau}{dt} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^{1/2}. \quad (2.15)$$

Parallèlement, on redéfinit le champ aléatoire par $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^{-1/4} \boldsymbol{\eta}$ de manière à obtenir comme équation différentielle stochastique :

$$\frac{d\mathbf{b}}{d\tau} = \frac{N_\Gamma[\mathbf{b}]}{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^{1/2}} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^{1/2} B[C] \boldsymbol{\xi} \quad (2.16)$$

et

$$\langle \xi_n(\tau) \xi_{n'}(\tau') \rangle = \Gamma \delta_{nn'} \delta(\tau - \tau'). \quad (2.17)$$

2.2 Formulation en intégrale de chemin et solutions extrémales

Nous cherchons dans un premier temps à calculer la probabilité $\mathcal{P}$ pour que le champ cohérent $\mathbf{b}$ évolue de $\mathbf{b}_0$ à $\mathbf{b}_f$ en un temps τ_f . Son expression peut être

obtenue à l'aide d'un formalisme d'intégrales de chemin appliqué, dans le cadre des dynamiques stochastiques, à l'équation (2.16) :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbf{b}_0, 0 | \mathbf{b}_f, \tau_f) &= \int \mathcal{D}\mathbf{b} \mathcal{D}\boldsymbol{\xi} \exp \left[- \int_0^{\tau_f} \frac{\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}}{2\Gamma} d\tau \right] \times \\ &\quad \delta \left[\frac{d\mathbf{b}}{d\tau} - \frac{N_\Gamma[\mathbf{b}]}{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^{1/2}} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^{1/2} B[C]\boldsymbol{\xi} \right]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Revenons momentanément à la notation discrète qui sous-tend cette expression et qui permet d'en préciser les termes de mesures. Notre but n'est pas ici d'en donner une dérivation rigoureuse, mais seulement une intuition.

L'idée est d'obtenir $\mathcal{P}(\mathbf{b}_i, \tau_i | \mathbf{b}_f, \tau_f)$ en sommant sur les probabilités de toutes les trajectoires $\mathbf{b}(\cdot)$ joignant les points $\mathbf{b}(\tau_0) = \mathbf{b}_0$ et $\mathbf{b}(\tau_N) = \mathbf{b}_f$ en un temps $\tau_N = N\Delta\tau = \tau_f$. Chaque trajectoire (ou chemin) est représentée comme une ligne brisée, dont un morceau correspond à l'intégration de la dynamique stochastique (2.16) :

$$\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i = \frac{N_\Gamma[\mathbf{b}_i]}{(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_i)^{1/2}} \Delta\tau + (\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_i)^{1/2} B[C_i] \Delta\mathbf{W}_i, \quad (2.19)$$

où $\mathbf{b}_i = \mathbf{b}(\tau_i)$ et comme dans la section précédente, les $\Delta\mathbf{W}_i$ représentent les incréments indépendants d'un processus de mouvement brownien, caractérisé par :

$$\langle \Delta\mathbf{W}_i \rangle = 0 \quad , \quad \langle \Delta\mathbf{W}_i^2 \rangle = \Gamma \Delta\tau. \quad (2.20)$$

La probabilité d'une trajectoire $\mathbf{b}(\cdot)$ s'obtient alors comme le produit des probabilité de chaque réalisation $\Delta\mathbf{W}_i$ nécessaire pour construire morceau par morceau cette trajectoire. Les incréments étant distribués suivant une gaussienne $e^{-\Delta\mathbf{W}_i^2/2\Gamma\Delta\tau}$ (correspondant à $e^{-\boldsymbol{\xi}_i^2\Delta\tau/2\Gamma}$ pour le bruit blanc) , cela nous mène à :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbf{b}_0, 0 | \mathbf{b}_f, \tau_f) &= \int \frac{d\mathbf{W}_0}{(2\pi\Gamma\Delta\tau)^{d/2}} \prod_1^{N-1} \frac{d\mathbf{W}_i d\mathbf{b}_i}{(2\pi\Gamma\Delta\tau)^{d/2}} \exp \left[- \frac{\Delta\mathbf{W}_i \cdot \Delta\mathbf{W}_i}{2\Gamma\Delta\tau} \right] \times \\ &\quad \delta \left[\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i - \frac{N_\Gamma[\mathbf{b}_i]}{(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_i)^{1/2}} \Delta\tau - (\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_i)^{1/2} B[C_i] \Delta\mathbf{W}_i \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

Dans cette expression, les opérateurs de Dirac sont introduits afin d'imposer que chaque chemin $\mathbf{b}(\cdot)$ corresponde à une solution de la dynamique (2.19). Il est alors bien agréable d'avoir opté pour la convention de Ito plutôt que celle de Stratonovich : cette dernière aurait engendré l'apparition d'un Jacobien supplémentaire qui, dans la limite $\Delta\tau \rightarrow 0$, fait apparaître un terme inhabituel pour le formalisme en intégrale de chemin. Au contraire, dans le cas d'une convention de Ito, $\mathbf{b}_{i+1}$ apparaît de manière linéaire et triviale dans la fonction $\delta(\cdot)$ assurant la bonne évolution de $\mathbf{b}$ entre les instants t_i et t_{i+1} , et ainsi le Jacobien vaut 1.

Quant à la mesure d'intégration, elle nécessite pour être définie sans ambiguïté, de travailler avec un nombre de couches fini, que nous noterons par la suite d .

La version continue (2.18) est enfin retrouvée en utilisant la relation entre le bruit blanc et le mouvement brownien : $\xi = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta W / \Delta\tau$.

Nous pouvons ensuite obtenir la formulation à la Martin-Siggia-Rose [51], si nous utilisons la représentation de Fourier des opérateurs de Dirac :

$$\delta[\mathbf{x}] = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{p}, \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \quad (2.22)$$

et qui conduit à l'intégrale de chemin suivante :

$$\mathcal{P}(\mathbf{b}_i, \tau_i | \mathbf{b}_f, \tau_f) = \int \mathcal{D}\mathbf{p} \mathcal{D}\mathbf{b} \mathcal{D}\xi e^{-S[\mathbf{b}, \mathbf{p}, \xi]}. \quad (2.23)$$

Dans l'équation (2.23), l'argument de l'exponentielle S est une action effective qui dans la limite du continu peut s'écrire sous la forme :

$$S = \frac{1}{\Gamma} \int_{\tau_i}^{\tau_f} \mathcal{L} d\tau \quad (2.24)$$

avec pour Lagrangien :

$$\mathcal{L}(\mathbf{b}, \mathbf{p}, \xi) = \frac{1}{2} \xi \cdot \xi + i\Gamma \mathbf{p} \cdot \left(\frac{d\mathbf{b}}{d\tau} - \frac{N_\Gamma[\mathbf{b}]}{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^{1/2}} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^{1/2} B[\mathbf{C}]\xi \right). \quad (2.25)$$

Le champ $\mathbf{p}$ peut donc s'interpréter comme un champ conjugué au champ physique $\mathbf{b}$ et joue le rôle d'un facteur de Lagrange associé à la contrainte de la dynamique (2.16).

La sommation sur le champ aléatoire ξ puis sur le champ conjugué $\mathbf{p}$ se fait sans difficulté et l'intégrale de chemin est alors exprimée dans l'espace configurationnel [48] :

$$\mathcal{P}(\mathbf{b}_i, \tau_i | \mathbf{b}_f, \tau_f) = \int \mathcal{D}\mathbf{b} e^{-\int_0^{\tau_f} \mathcal{L}[\mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}]}, \quad (2.26)$$

où le Lagrangien prend une forme standard :

$$\mathcal{L}[\mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}] = \frac{1}{2} \left[\frac{B^{-1}}{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^{1/2}} \left(\frac{d\mathbf{b}}{d\tau} - \frac{\mathbf{N}_\Gamma[\mathbf{b}]}{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^{1/2}} \right) \right]^2. \quad (2.27)$$

La mesure $\mathcal{D}\mathbf{b}$ de l'intégration représente maintenant la limite quand $\Delta\tau \rightarrow 0$ de la mesure discrète :

$$\mathcal{D}\mathbf{b} = \left(\frac{1}{2\pi\Gamma\Delta\tau} \right)^{\frac{dN}{2}} \frac{1}{(\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_0)^{d/2} |\det B_0|} \frac{1}{|\det B_0|} \prod_{i=1}^{N-1} \left[\frac{d\mathbf{b}_i}{(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_i)^{d/2} |\det B_i|} \right]. \quad (2.28)$$

Par la suite nous verrons que la quantité qui nous intéresse, à savoir la probabilité $P_n(z)$ qu'une singularité se soit développée avec un exposant z après n pas de cascade, se relie facilement à $\mathcal{P}(\mathbf{b}_i, \tau_i; \mathbf{b}_f, \tau_f)$, à condition de sommer sur les points d'arrivée compatibles avec ce que l'on désire observer.

Dans la limite de faible bruit ($\Gamma \ll 1$), le calcul de l'intégrale de chemin (2.23) peut être mené à bien grâce à une analyse semi-classique, analogue à la méthode WKB. Selon un argument de point col, la statistique est alors dominée par les trajectoires associées à une probabilité faible, mais maximale du bruit, ce qui revient à dire qu'elles minimisent l'action (2.24). Dans le contexte de la turbulence, des travaux récents [24, 6, 5, 7], ont été consacrés à la recherche de ces trajectoires particulières, les désignant sous le nom d'instantons, par analogie avec la théorie quantique des champs.

Donnons les grandes lignes de la démarche qui fait l'objet de ce chapitre :

- Dans un premier temps, le calcul de ces solutions extrémales va nous permettre de déterminer le terme dominant l'action, que nous noterons S^0 , et qui est d'ordre $0(1/\Gamma)$ dans le développement en puissance de Γ .

• Le terme e^{-S^0} se factorise alors au niveau de l'intégrale de chemin (2.23) et il nous reste alors pour compléter l'analyse à calculer le poids des solutions "classiques" dans l'espace configurationnel :

$$\Pi = \int \mathcal{D}\delta\mathbf{b} e^{-(\delta S^2 + \delta S^3 + \dots)}, \quad (2.29)$$

où $\delta\mathbf{b}$ représente les fluctuations des trajectoires permises par rapport aux trajectoires optimales $\mathbf{b}^0$.

Au niveau de l'action, nous pouvons nous contenter d'évaluer le terme δS^2 , quadratique par rapport aux fluctuations $\delta\mathbf{b}$. En effet, la taille typique des fluctuations des trajectoires contribuant significativement à l'intégration "gaussienne" de δS^2 est donnée par $\delta\mathbf{b} \sim \sqrt{\Gamma}$. Cet argument permet d'estimer que δS^2 est de l'ordre $0(1)$, δS^3 de l'ordre $0(\sqrt{\Gamma})$ et ainsi de suite.

Une dernière prévision sur la forme attendue de la densité de probabilité $P_n(z)$ peut être faite. La statistique doit refléter la propriété d'auto-similarité de la cascade qui a été préservée dans la définition de la dynamique stochastique (2.16). Cela entraîne que le coût en action pour une solution qui progresse d'une couche à une autre doit être le même tout au long de la cascade. Autrement dit, l'action d'une solution d'exposant z atteignant la couche n doit pouvoir s'écrire en faisant apparaître une action par unité de pas de cascade indépendante de n .

Dans la limite $\Gamma \ll 1$, la densité de probabilité prendra alors la forme suivante :

$$P_n(z) \sim \sqrt{n} \exp \left[-n \left(\frac{s_0(z)}{\Gamma} + s_1(z) \right) \right], \quad (2.30)$$

le facteur $\sqrt{n}$ assurant la normalisation.

L'argument de l'exponentielle $-\left(\frac{s_0(z)}{\Gamma} + s_1(z)\right)$ n'est alors rien d'autre que la fonction de Cramér de la théorie des larges déviations rappelée dans le chapitre 1.

2.3 Trajectoires optimales

Lorsque l'on veut rechercher les solutions de type instanton, le plus simple et le plus instructif est de repartir de l'expression (2.24) de l'action effective.

L'extrémisation de l'action par rapport au champ aléatoire ξ conduit à la relation :

$$\xi = i\Gamma(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^{1/2} {}^t B \mathbf{p}. \quad (2.31)$$

Afin de travailler à l'ordre dominant avec des variables réelles, nous introduisons un nouveau champ auxiliaire : $\varphi = i\Gamma \mathbf{p}$. En revanche les fluctuations de φ autour des trajectoires optimales doivent être imaginaires pures, sans quoi l'intégrale (2.29) n'est pas définie.

Ensuite l'extrémisation de l'action par rapport au champ physique $\mathbf{b}$ et au champ auxiliaire φ conduit à deux dynamiques duales :

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{\mathbf{N}_\Gamma}{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^{1/2}} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) B^t B \varphi \quad (2.32)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -{}^t \mathcal{M}[\mathbf{b}] \varphi - \frac{1}{2} {}^t \partial_{\mathbf{b}} ((\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) B^t B \varphi) \varphi \quad (2.33)$$

où $\mathcal{M}$ désigne la matrice Jacobienne du noyau $\frac{\mathbf{N}_\Gamma}{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^{1/2}}$:

$$\mathcal{M} = \frac{\partial_{\mathbf{b}} \mathbf{N}_\Gamma}{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^{1/2}} - \frac{\mathbf{N}_\Gamma \otimes \mathbf{b}}{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^{3/2}}, \quad (2.34)$$

en notant $\otimes$ le produit tensoriel.

Les équations (2.32) et (2.33) peuvent naturellement être interprétées sous une forme canonique :

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} \quad (2.35)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{b}} \quad (2.36)$$

avec pour le Hamiltonien $\mathcal{H}$, l'expression :

$$\mathcal{H} = \varphi \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt} - \mathcal{L} = \varphi \cdot \frac{\mathbf{N}_\Gamma}{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^{1/2}} + \frac{1}{2} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) (\varphi \cdot B^t B \varphi). \quad (2.37)$$

Le problème possède alors deux invariants :

i) Le premier est constitué par le recouvrement $h = \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{b}$ du champ physique et du champ auxiliaire, et est relié à la symétrie auto-similaire imposée par hypothèse à la dynamique stochastique (2.16). En effet la statistique est inchangée sous le changement d'échelle : $\mathbf{b} \rightarrow \lambda \mathbf{b}$ et $\boldsymbol{\xi} \rightarrow \boldsymbol{\xi}$. Compte tenu de l'équation (2.31), cela implique $\boldsymbol{\varphi} \rightarrow \lambda^{-1} \boldsymbol{\varphi}$.

ii) Comme $\mathcal{H}$ ne dépend pas explicitement du temps, sa valeur est conservée le long des trajectoires extrémales et jouera le rôle d'une pseudo-énergie. Examinons alors l'expression de l'action $S[\mathbf{b}, \boldsymbol{\varphi}]$ faisant apparaître $\mathcal{H}$:

$$S[\mathbf{b}, \boldsymbol{\varphi}] = \frac{1}{\Gamma} \int_0^{\tau_f} d\tau \left(\boldsymbol{\varphi} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{d\tau} - \mathcal{H} \right). \quad (2.38)$$

Lorsqu'on autorise une fluctuation sur le temps d'arrivée $\delta\tau_f$, le premier terme est invariant par une reparamétrisation $\tau'(\tau)$ telle que $\tau'(0) = 0$ et $\tau'(\tau_f + \delta\tau_f) = \tau_f$. En revanche le second sera invariant seulement à la condition que les trajectoires extrémales soit de pseudo-énergie nulle : $\mathcal{H} = 0$. Cette dernière condition impose :

$$\left(\frac{d\mathbf{b}}{d\tau} \cdot \boldsymbol{\varphi} \right) = \frac{1}{2} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) (\boldsymbol{\varphi} \cdot B^t B \boldsymbol{\varphi}). \quad (2.39)$$

Les deux invariants font donc apparaître la projection du champ auxiliaire $\boldsymbol{\varphi}$ sur deux directions particulières $\mathbf{b}$ et $\frac{d\mathbf{b}}{d\tau}$, dont nous verrons l'importance par la suite.

Venons en à la recherche des solutions auto-similaires correspondant à une action extrémale, que nous noterons dorénavant $\mathcal{S}^0$. Formellement, nous attendons des solutions vérifiant :

$$b_{n+1}^0(\tau + T) = \exp(AT) b_n^0(\tau) \quad (2.40)$$

$$\xi_{n+1}^0(\tau + T) = \xi_n^0(\tau) \quad (2.41)$$

où T est la période et A le taux de croissance du champ $\mathbf{b}^0$.

La forme auto-similaire du champs $\boldsymbol{\varphi}^0$ se déduit de l'équation subsidiaire (2.31) :

$$\varphi_{n+1}^0(\tau + T) = \exp(-AT) \varphi_n^0(\tau). \quad (2.42)$$

Nous pouvons relier les grandeurs T et A à l'exposant d'échelle z qui nous intéresse et qui exprime le comportement $b_n^0 \sim k_n^z$:

$$z = \frac{AT}{\log Q}. \quad (2.43)$$

Au vu des propriétés des solutions extrémales, nous nous attendons à trouver toute une famille d'exposants d'échelle z , conformément à l'image multifractale décrite dans la section 1.1.3, paramétrisée par le recouvrement h . Notons que pour un bruit nul ($h = 0$), nous devrions retrouver la valeur déterministe z_0 . Dans le cas de variables réelles, nous pensons par analogie avec le cas déterministe qu'à une valeur $h \neq 0$ correspond une unique solution $\mathbf{b}^0$.

Du côté analytique, comme les équations à résoudre sont non-linéaires et couplées, nous ne pouvons rien prédire de plus que les formes auto-similaires (2.40, 2.42), si ce n'est des comportements asymptotiques possibles du côté des très grandes et des très petites échelles

Du côté numérique, la voie n'est pas aisée non plus. Les équations dynamiques (2.32) et (2.33) ont des propriétés de stabilité dynamique inverses l'une de l'autre, à cause du signe “-” en facteur de l'équation (2.33). Cela apparaît plus clairement lorsque qu'on regarde la dynamique des fluctuations du champs $\mathbf{b}$ autour d'une trajectoire extrémale, pour une configuration optimale du bruit ξ^0 fixée. Elle est gouvernée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \delta \mathbf{b} &= \mathcal{M} \delta \mathbf{b} + \partial_{\mathbf{b}} \left((\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^{1/2} B^t \xi \right) \Big|_{\mathbf{b}^0, \xi^0} \delta \mathbf{b} \\ &= \mathcal{M} \delta \mathbf{b} + \frac{1}{2} \partial_{\mathbf{b}} \left((\mathbf{b}^0 \cdot \mathbf{b}^0) B^t B \varphi^0 \right) \Big|_{\mathbf{b}^0, \varphi^0} \delta \mathbf{b} \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$= L \delta \mathbf{b} \quad (2.45)$$

tandis que d'après (2.33), φ^0 obéit à la dynamique duale :

$$\frac{d\varphi^0}{d\tau} = -{}^t L \varphi^0, \quad (2.46)$$

Cette constatation nous a amenés à proposer un schéma itératif approprié pour la recherche de solutions auto-similaires.

2.4 Schéma itératif pour la recherche des trajectoires optimales

2.4.1 Principe

Avant de la décrire plus formellement, nous voudrions exposer en quelques mots l'idée à la base de notre recherche des instantons auto-similaires :

Une solution auto-similaire optimale $\mathbf{b}^0(\tau)$ d'exposant z doit constituer un attracteur pour toutes les conditions initiales $\mathbf{b}(0)$, à partir du moment où on impose une certaine réalisation du bruit $\xi^0(\tau)$. Sinon, des fluctuations seraient capables de croître au détriment de la structure $\mathbf{b}^0(\tau)$ pour en former une autre, et ainsi augmenter son exposant z sans qu'il en coûte quoi que ce soit en termes d'action (qui resterait toujours égale à $1/2 \int_0^\tau \xi^0(\tau') \cdot \xi^0(\tau') d\tau'$). Or ceci serait en complète contradiction avec l'hypothèse que la structure $\mathbf{b}^0(\tau)$ est optimale vis-à-vis de l'action.

Nous montrerons dans les sous-section suivantes comment imaginer un schéma itératif qui permette de calculer la solution $\mathbf{b}(\tau)$ développant le taux de croissance A le plus élevé possible en présence d'une configuration choisie pour le bruit $\xi(\tau)$, tandis que pour φ , sera sélectionnée la solution de plus faible taux de croissance (c'est-à-dire $-A$, conformément à la prédiction (2.42)). On aura la possibilité de converger vers la configuration optimale $\xi^0(\tau)$ en l'affinant après chaque calcul de $\mathbf{b}$ et φ , via l'équation subsidiaire (2.31).

Nous voudrions auparavant souligner que cette démarche liant les concepts de stabilité dynamique à ceux de stabilité statistique des structures est originale et se démarque à ce niveau de l'analyse en instantons menée dans différents contextes de la turbulence [24, 6, 7]. Dans ces travaux les solutions sont fortement tributaires des conditions aux limites imposées aux équations d'Euler-Lagrange. Notamment, les auteurs de [7] sont parvenus à calculer analytiquement les moments d'ordre n assez grand des fluctuations d'un scalaire passif. Si on veut établir l'analogue des conditions de bords qu'ils ont prescrites, on obtient une condition initiale pour le champ physique ($\mathbf{b} = 0$) et une condition finale pour le champ auxiliaire ($\varphi(\tau_f) = n\mathbf{b}(\tau_f)/\|\mathbf{b}(\tau_f)\|^2$ où τ_f désigne la date d'observation des moments). Ce sont des

contraintes qui semblent bien difficiles à réaliser dans notre cadre, où nous aurons besoin du secours de numérique pour résoudre les équations duales (2.32) et (2.33). Nous venons d'expliquer pourquoi la condition initiale ne joue pas un rôle important dans notre problème et pourra être choisie de norme non nulle. En ce qui concerne la condition finale, nous demanderons seulement que la norme de $\mathbf{b}$ ait crû d'un facteur donné et nous verrons comment l'exigence de solutions auto-similaires et d'énergie nulle permet automatiquement d'en déduire φ .

2.4.2 Théorie

Compte tenu des propriétés de périodicité de l'opérateur L construit à partir des solutions vérifiant (2.40,2.42), les fluctuations de $\delta\mathbf{b}$ peuvent se décomposer sur un jeu de d vecteurs de Floquet Ψ_{ir} tels que :

$$\Psi_{ir}(\tau + T) = e^{\sigma_i T} \mathcal{T}_{+1} \Psi_{ir}(\tau), \quad (2.47)$$

où $\mathcal{T}_{+1}$ désigne l'opérateur de translation d'une couche le long du réseau dans la direction des petites échelles.

Les vecteurs Ψ_{ir} sont vecteurs propres de l'opérateur de Floquet U_T :

$$U_T = \mathcal{T}_{-1} \overleftarrow{\exp} \int_0^T L d\tau, \quad (2.48)$$

où $\overleftarrow{\exp}$ indique que dans la version discrète, les produits d'opérateur de translation dans le temps $(1 + L(\tau_i)\Delta\tau)$ sont ordonnés chronologiquement en rangeant l'origine des temps $\tau = 0$ à droite.

Il est alors facile de montrer que la solution instanton $\mathbf{b}^0$ vérifie la dynamique linéarisée (2.45). En ordonnant les σ_i dans le sens des $\text{Re } \sigma_i$ décroissants, la propriété de stabilité dynamique que nous avons évoquée plus haut nous conduit à identifier le taux de croissance A de $\mathbf{b}^0$ avec σ_1 et $\mathbf{b}^0$ avec Ψ_{1r} . Dans la limite déterministe, le vecteur $\frac{d\mathbf{b}^0}{d\tau}$ est aussi solution de la dynamique (2.45), avec le même taux de croissance $A = A_0$ et correspond donc à Ψ_{2r} . En revanche, ce n'est plus le cas en présence de bruit, à cause de la dépendance temporelle de ξ^0 qui introduit un terme supplémentaire dans la dynamique de $\frac{d\mathbf{b}^0}{d\tau}$:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\mathbf{b}^0}{d\tau} \right) = L \frac{d\mathbf{b}^0}{d\tau} + (\mathbf{b}^0 \cdot \mathbf{b}^0)^{1/2} B \frac{d\xi^0}{d\tau}. \quad (2.49)$$

Inversement le champ auxiliaire φ^0 solution de la dynamique décrite par (2.46) se décompose sur une base de vecteurs duaux Ψ_{il} vérifiant :

$$\Psi_{il}(\tau + T) = e^{-\sigma_i T} \mathcal{T}_{+1}, \Psi_{il}(\tau) \quad (2.50)$$

ainsi que des relations d'orthonormalisation avec la base Ψ_{ir} :

$$\Psi_{il}(\tau) \cdot \Psi_{jr}(\tau) = \delta_{ij}. \quad (2.51)$$

Les vecteurs Ψ_{il} sont les modes propres de l'opérateur de Floquet dual tU_T :

$${}^tU_T = \exp \int_T^0 {}^t\mathcal{L} d\tau \mathcal{T}_{+1}. \quad (2.52)$$

Suivant la numérotation choisie précédemment, le vecteur propre Ψ_{1g} correspond à l'exposant de Lyapunov $-\sigma_1 = -A$.

La forme la plus générale de φ^0 est alors la suivante :

$$\varphi^0(\tau) = \sum_{i=1}^d \mu_i \Psi_{il}(\tau), \quad (2.53)$$

les coefficients μ_i étant des constantes par rapport au temps.

Dans la mesure où nous cherchons des solutions auto-similaires et que d'après le critère de stabilité dynamique, $\mathbf{b}^0 = \Psi_{1l}$, la décomposition de φ^0 doit nécessairement se réduire à :

$$\varphi^0(\tau) = \mu_1 \Psi_{1l}(\tau), \quad (2.54)$$

où μ_1 n'est rien d'autre que le recouvrement $\varphi^0 \cdot \mathbf{b}^0$.

Nous semblons disposer de tous les outils pour pouvoir mettre en oeuvre l'algorithme. Néanmoins la base de représentation $\{\Psi_r\}$ n'est pas la plus pratique pour ce problème :

i) d'une part, si l'expression (2.54) permet effectivement de fixer la valeur recouvrement $h = \mathbf{b}^0 \cdot \varphi^0$, les solutions $\mathbf{b}^0$ et φ^0 doivent également vérifier une seconde contrainte : être d'énergie nulle. Ceci sera plus facilement réalisable à partir d'un espace à deux dimensions faisant apparaître les directions duales de $\mathbf{b}^0$ et $\frac{d\mathbf{b}^0}{d\tau}$.

ii) d'autre part, la base $\{\Psi_{ir}\}$ n'est pas appropriée pour exprimer la quantité statistique $P_n(z)$. En effet, seules les fluctuations de $\mathbf{b}$ suivant les directions $\mathbf{b}^0$ et $\frac{d\mathbf{b}^0}{d\tau}$ agissent de manière cohérente sur le pulse, les premières modifiant l'amplitude du pulse, les secondes la date d'arrivée sur la couche n . Ceci apparaît clairement si on écrit une trajectoire perturbée sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathbf{b}(\tau) &= e^{\delta A\tau} \mathbf{b}^0(\tau + \delta\tau(\tau)) + \delta b_{inc} \\ &= \mathbf{b}^0(\tau) + \delta A \mathbf{b}^0(\tau) + \delta\tau(\tau) \frac{d\mathbf{b}^0}{d\tau} + \delta b_{inc},\end{aligned}\quad (2.55)$$

les fluctuations δb_{inc} faisant référence à des fluctuations "incohérentes", i.e. n'affectant pas en première approximation l'amplitude ou la position du pulse, dans la mesure où leur taux de croissance plus faible suggère qu'elles décrivent une déformation du pulse relativement éloignée de son centre.

L'hypothèse centrale de cette section consiste à distinguer les directions Ψ_{ir} avec $i > 2$ comme des directions de fluctuations incohérentes. Définissons alors la base $\{\Phi_{ir}\}$ telle que $\Phi_{ir}(\tau) = \Psi_{ir}(\tau)$ pour $i \neq 2$ et $\Phi_{2r}(\tau) = \frac{d\mathbf{b}^0}{d\tau}$. La base duale correspondante sera notée $\{\Phi_{il}(\tau)\}$. En utilisant les relations d'orthonormalisation $\Phi_{il}(\tau) \cdot \Phi_{jr}(\tau) = \delta_{ij}$, on peut montrer que le vecteur Ψ_{1l} possède des composantes suivant les deux directions Φ_{1l} et Φ_{2l} :

$$\Psi_{1l} = \Phi_{1l} + (\Psi_{1l} \cdot \Phi_{2r}) \Phi_{2l}. \quad (2.56)$$

Il résulte de (2.54) que le champ auxiliaire doit être recherché sous la forme suivante :

$$\varphi^0(\tau) = \mu_1 \Phi_{1l}(\tau) + \tilde{\mu}_2(\tau) \Phi_{2l}(\tau). \quad (2.57)$$

La contrainte $\mathcal{H} = 0$ permet ensuite d'identifier $\tilde{\mu}_2(\tau)$ comme :

$$\tilde{\mu}_2(\tau) = (\varphi^0 \cdot \Phi_{2r}) = \frac{1}{2}(\mathbf{b}^0 \cdot \mathbf{b}^0)(\varphi^0 \cdot B^t B \varphi^0). \quad (2.58)$$

2.4.3 Définition formelle de la densité de probabilité $P_n(z)$

A la lumière des considérations théoriques précédentes, nous sommes enfin en mesure de pouvoir donner une définition exacte de la quantité statistique $P_n(z)$. Il

faut pour cela pouvoir sommer les probabilités de transition entre tous les points de l'espace des phases permettant d'observer un même exposant d'échelle z au niveau de la couche n . Cela revient, dans l'expression (2.23), à laisser fluctuer les bornes de l'intégrale de chemin suivant certaines contraintes.

Au niveau du point de départ, le champ de référence est celui parmi les solutions extrémales qui correspond à l'exposant z . Nous exigeons alors $\mathbf{b}(0) = \mathbf{b}^0(0) = \Phi_{1r}(0)$. Toutes les fluctuations suivant les directions incohérentes $\Phi_{ir}(0)$ sont, en toute rigueur, permises, mais nous pouvons négliger leur influence, puisqu'à terme elles relâchent.

Au niveau du point d'arrivée, nous souhaitons que le maximum de la solution optimale correspondant à l'exposant z et celui du champ perturbé $\mathbf{b} = \mathbf{b}^0 + \delta\mathbf{b}$ aient la même hauteur aux instants où ils sont recensés pour la première fois sur la couche n . En revanche, ces instants (que nous noterons $\tau_n^0 = nT$ pour $\mathbf{b}^0$ et τ_n pour $\mathbf{b}$) peuvent être différents ; c'est le rôle des fluctuations le long de $\Phi_{2r}(\tau_n^0)$. De même, la forme du champ perturbé $\mathbf{b}(\tau_n)$ peut différer de celle de $\mathbf{b}^0(\tau_n^0)$ loin en amont ou en aval de leur maximum ; c'est ce que provoquent des fluctuations dans les directions $\Phi_{ir}(\tau_n^0)$, avec $i > 2$.

Ces remarques se trouvent condensées dans l'expression de $\mathbf{b}(\tau_n)$ (constituant également une définition implicite du temps d'arrivée τ_n) :

$$\mathbf{b}(\tau_n) = \mathbf{b}^0(\tau_n^0) + \sum_{i \neq 1,2} \delta\lambda_i \Phi_{ir}(\tau_n^0), \quad (2.59)$$

où les amplitudes $\delta\lambda_i$ prennent des valeurs arbitraires.

En accord avec cette relation entre $\mathbf{b}(\tau_n)$ et $\mathbf{b}^0(\tau_n^0)$, nous pouvons établir la forme de $P_n(z)$:

$$\begin{aligned} P_n(z) &\sim \int d\tau_n \mathcal{P}(\Phi_{1r}(0), 0 | \mathbf{b}(\tau_n), \tau_n) \\ &\sim \int d\tau_n \int_0^{\tau_n} \mathcal{D}\mathbf{b} \mathcal{D}\varphi \exp -S[\mathbf{b}(\tau), \varphi(\tau)] \times \\ &\quad \delta(\mathbf{b}(\tau_n) \cdot \Phi_{1l}(\tau_n^0) - 1) \delta(\mathbf{b}(\tau_n) \cdot \Phi_{2l}(\tau_n^0)). \end{aligned} \quad (2.60)$$

A partir de cette définition, il est possible de retrouver de manière rigoureuse la décomposition (2.57) du champ auxiliaire optimal φ^0 suivant la base $\{\Phi_l\}$. Cela sort naturellement lorsqu'on cherche les conditions pour que l'action $\mathcal{S}^0[\mathbf{b}^0, \varphi^0, \tau_n^0]$ soit effectivement extrémale. Au passage, nous établirons le premier terme correctif à l'action "classique" $\mathcal{S}^0$ induit par des fluctuations $\delta\mathbf{b}(\tau) = \mathbf{b}(\tau) - \mathbf{b}^0(\tau)$, $\delta\varphi(\tau) = \varphi(\tau) - \varphi^0(\tau)$ et $\delta\tau_n = \tau_n - \tau_n^0$ autour des trajectoires $\mathbf{b}^0$ et φ^0 .

- Dans la base $\{\Phi_l\}$ la forme générale de φ^0 s'écrit :

$$\varphi^0(\tau) = \sum_{i=1}^d \tilde{\mu}_i(\tau) \Phi_{il}(\tau), \quad (2.61)$$

Comme $\Phi_{ir} = \Psi_{ir}$ pour $i \neq 2$, les coefficients suivant ces directions sont identiques à ceux de la forme (2.53) ($\tilde{\mu}_i(\tau) = \mu_i = \text{constante}$) et seule l'amplitude suivant Φ_{2r} dépend du temps.

- Les contraintes (i.e. les opérateurs de Dirac) sur le terme d'arrivée nous permettent de relier la fluctuation $\delta\mathbf{b}(\tau_n)$ à $\delta\tau_n$.

A l'ordre linéaire, on obtient :

$$\delta\mathbf{b}(\tau_n) = -\delta\tau_n \Phi_{2r}(\tau_n^0) + \sum_{i \neq 1,2} \delta\lambda_i \Phi_{ir}(\tau_n^0), \quad (2.62)$$

d'où : $\delta\tau_n = -\Phi_{2l}(\tau_n^0) \cdot \delta\mathbf{b}(\tau_n)$.

- Au niveau de l'action, le terme linéaire se réduit à un terme de bord.

$$\mathcal{S}(\tau_n) = \mathcal{S}^0(\tau_n) + \delta\mathcal{S}(\tau_n) = \mathcal{S}^0(\tau_n^0) + \delta\tau_n \partial_\tau \mathcal{S}^0(\tau_n^0) + \delta\mathcal{S}(\tau_n) \quad (2.63)$$

avec :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S}(\tau_n) &= \frac{1}{\Gamma} \int_0^{\tau_n} d\tau \left(\delta\varphi \cdot \dot{\mathbf{b}}^0 + \varphi^0 \cdot \dot{\delta\mathbf{b}} - \partial_{\mathbf{b}} \mathcal{H} \cdot \delta\mathbf{b} - \partial_\varphi \mathcal{H} \cdot \delta\varphi \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma} \int_0^{\tau_n} d\tau \left(\varphi^0 \cdot \dot{\delta\mathbf{b}} + \dot{\varphi}^0 \cdot \delta\mathbf{b} \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma} \varphi^0(\tau_n) \cdot \delta\mathbf{b}(\tau_n) \end{aligned} \quad (2.64)$$

Au total, le terme linéaire à annuler pour que $\mathcal{S}^0$ soit extrémale est le suivant :

$$\begin{aligned} \delta\tau_n \partial_\tau \mathcal{S}^0(\tau_n^0) + \delta\mathcal{S}(\tau_n) &= \delta\tau_n \left(\varphi^0(\tau_n^0) \cdot \Phi_{2r}(\tau_n^0) - \mathcal{H} \right) + \varphi^0(\tau_n^0) \cdot \delta\mathbf{b}(\tau_n) \\ &= \sum_{i>2} \delta\lambda_i \varphi^0(\tau_n^0) \cdot \Phi_{ir}(\tau_n^0) - \mathcal{H} \delta\tau_n \end{aligned} \quad (2.65)$$

Cela conduit de nouveau à $\mu_i = \varphi^0(\tau_n^0) \cdot \Phi_{ir}(\tau_n^0) = 0$ pour $i > 2$, sans avoir à évoquer l'hypothèse d'auto-similarité, et aussi à $\mathcal{H} = 0$. On aboutit ainsi à la forme (2.57).

2.4.4 Mise en pratique

Nous nous proposons dans cette partie de détailler les principales difficultés que nous avons rencontrées pour implémenter l'algorithme. Nous noterons $\mathbf{b}_{in}(\tau)$ et $\xi_{in}(\tau)$ les valeurs des champs connus en entrée d'une boucle de l'algorithme et $\mathbf{b}_{out}(\tau)$ et $\xi_{out}(\tau)$ les valeurs en sortie de boucle, calculées selon le critère de stabilité dynamique décrit précédemment.

L'idée de départ se résumait à intégrer successivement les dynamiques de $\mathbf{b}$ et φ pour une configuration donnée du bruit, dans des sens opposés d'écoulement du temps, puis à recalculer le bruit via la condition d'auto-cohérence (2.31). Mais nous avons vu dans la section précédente que pour être assuré de trouver les trajectoires d'énergie nulle, il est au moins nécessaire de connaître aussi la seconde direction la plus stable de la dynamique de φ , ce qui rend une diagonalisation de l'opérateur d'évolution tU_T incontournable.

Pour avoir une bonne définition de cet opérateur, il nous faut maintenant préciser les conditions de bord choisies. Nous avons indiqué précédemment que le formalisme en intégrale de chemin nous impose de travailler avec un nombre fini d de couches. Afin que l'opérateur de translation le long du réseau $\mathcal{T}_{+1}$ soit inversible, nous allons choisir dorénavant de boucler le réseau suivant un anneau, autour duquel les couches sont repérées par un indice défini modulo d , et noté $n[d]$. Les solutions seront peu affectées par cette périodisation, à condition qu'elles soient suffisamment localisées à l'échelle du périmètre de l'anneau.

Par commodité, plutôt que d'utiliser les variables $\mathbf{b}$ et φ dont les normes varient

exponentiellement, nous privilégierons les variables $\mathbf{C} = \mathbf{b}/(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^{1/2}$ et $\boldsymbol{\xi}$ qui vérifient les relations de périodicité suivantes :

$$C_{n+1}(\tau + T) = C_n(\tau), \quad \xi_{n+1}(\tau + T) = \xi_n(\tau), \quad (2.66)$$

et

$$C_{n+d}(\tau) = C(\tau), \quad \xi_{n+d}(\tau) = \xi_n(\tau). \quad (2.67)$$

La norme de $\mathbf{C}$ reste ainsi toujours égale à l'unité et celle de $\boldsymbol{\xi}$ est fixée par le recouvrement : $\mu_1 = \mathbf{C}(\tau) \cdot {}^t B[\mathbf{C}] \boldsymbol{\xi}(\tau)$. Dans cette représentation, les structures cohérentes (et la réalisation particulière du bruit qui leur est associée) apparaissent donc comme des ondes solitaires se propageant, à vitesse constante et sans déformation, des grandes vers les petites échelles.

Chaque boucle de l'algorithme est alors constituée par les étapes suivantes :

- La dynamique de $\mathbf{C}$ est intégrée sur un nombre de périodes suffisant pour laisser à la direction la plus stable le temps de dominer les autres. Pour cela, un schéma d'Euler du premier ordre est utilisé, conformément au choix de discrétisation *à la* Ito. Il est appliqué à la dynamique :

$$\frac{d\mathbf{C}}{d\tau} = \mathbf{N}[\mathbf{C}](\tau) + B[\mathbf{C}](\tau) \boldsymbol{\xi}^{in}(\tau') - A(\tau) \mathbf{C}, \quad (2.68)$$

où le facteur de projection sur la sphère de rayon unité est :

$$A(\tau) = \left[\mathbf{N}[\mathbf{C}](\tau) + B[\mathbf{C}](\tau) \boldsymbol{\xi}^{in}(\tau') \right] \cdot \mathbf{C} \quad (2.69)$$

Deux remarques doivent être faites ici à propos des notations utilisées :

D'une part, l'indice Γ a disparu au niveau du terme $\mathbf{N}$. En effet le terme de dérive de Ito étant proportionnel à Γ , il ne participe pas à l'ordre dominant de l'action, $s_0(z)$, mais à l'ordre suivant $s_1(z)$, comme nous le verrons plus tard. Aussi peut-il être oublié à chaque itération et sa contribution ne sera-t-elle calculée qu'une fois la convergence achevée.

D'autre part, dans l'intégration de la dynamique (2.68), le bruit ξ^{in} n'est pas évalué au même instant que le champ C . En effet, la vitesse du pulse formé par C nous est *a priori* inconnue et rien n'empêche qu'elle soit différente de la vitesse du pulse ξ^{in} devinée au départ pour le bruit. Afin d'éviter que les deux pulses se désynchronisent et rendent le forçage aléatoire inopérant, nous avons asservi la position du centre de ξ^{in} à celui de C . Pour cela, nous avons repéré la position instantanée du centre du pulse par la variable $n(\tau)$ (qui a l'avantage d'être continue contrairement à l'indice de couche $n_{max}[d]$ repérant le maximum du pulse) :

$$n(\tau) = \sum_{n=0}^{d-1} n[d] (C_n(\tau))^2. \quad (2.70)$$

L'instant d'évaluation du champ ξ_{in} s'obtient alors en exigeant que :

$$n^{in}(\tau') = n(\tau) \quad \text{ou} \quad \tau' = (n^{in})^{-1}[n(\tau)]. \quad (2.71)$$

Lorsqu'un état asymptotique se dégage, il est enregistré comme C^{out} , ainsi que sa période T^{out} et son taux de croissance moyen A^{out} :

$$A^{out} = \frac{1}{T^{out}} \int_{\tau}^{\tau+T^{out}} A(\tau) d\tau. \quad (2.72)$$

- On procède ensuite à la diagonalisation de l'opérateur ${}^tU_{T^{out}}$ et les deux vecteurs propres correspondant aux deux valeurs propres de plus petites parties réelles sont identifiés comme Ψ_{1l} et Ψ_{2l} . Les vecteurs Φ_{1l} et Φ_{2l} sont ensuite construits comme combinaisons linéaires des deux précédents :

$$\Phi_{2l} = \Psi_{2l} / \left(\Psi_{2l} \cdot \frac{d\mathbf{b}^{out}}{d\tau} \right) \quad (2.73)$$

$$\Phi_{1l} = \Psi_{1l} - \left(\Psi_{1l} \cdot \frac{d\mathbf{b}^{out}}{d\tau} \right) / \left(\Psi_{2l} \cdot \frac{d\mathbf{b}^{out}}{d\tau} \right) \Psi_{2l} \quad (2.74)$$

- La nouvelle configuration du bruit est calculée suivant (2.57) :

$$\xi^{out}(\tau) = (\mathbf{b}^{out} \cdot \mathbf{b}^{out})^{1/2} {}^tB[C^{out}] (\mu_1 \Phi_{1l} + \mu_2(\tau) \Phi_{2l}), \quad (2.75)$$

où $\mu_2(\tau)$ est solution d'une équation du second degré traduisant la condition $\mathcal{H} = 0$:

$$\mu_2(\tau) = \frac{1}{2} \xi^{out}(\tau) \cdot \xi^{out}(\tau). \quad (2.76)$$

Les valeurs en sortie de boucle peuvent alors être substituées à celles d'entrée et le processus est répété jusqu'à obtenir un point fixe tel que $\mathbf{C}^{out} = \mathbf{C}^{in}$ et $\boldsymbol{\xi}^{out} = \boldsymbol{\xi}^{in}$. L'exposant z est finalement obtenu grâce à la formule (2.43) et l'action par unité de pas de cascade $s_0(z)$ associée à cet exposant est donnée par :

$$s_0(z) = \frac{1}{2} \int_0^{T_{out}} (\boldsymbol{\xi}^{out} \cdot \boldsymbol{\xi}^{out}) d\tau. \quad (2.77)$$

Pour une valeur du paramètre de contrôle μ_1 donnée, nous avons en général initialisé l'algorithme avec les configurations d'essai $\mathbf{C}^{in(\tau)} = \mathbf{C}_0(\tau)$ et $\boldsymbol{\xi}^{in(\tau)} = \mu_1(\mathbf{b}^0 \cdot \mathbf{b}^0)^{1/2} B[\mathbf{C}_0] \boldsymbol{\Phi}_{1l}(\tau)$, où $\boldsymbol{\Phi}_{1l}(\tau)$ est le vecteur dual de $\mathbf{b}^0$. Cependant pour explorer les plus grandes valeurs de l'exposant z , il s'est avéré plus efficace évidemment d'augmenter le paramètre de contrôle à petits pas et d'utiliser comme condition initiale la solution finale trouvée précédemment, convenablement renormalisée.

Le pas de temps $\Delta\tau = T^{in}/N$ utilisé dans le schéma d'Euler relatif à la dynamique (2.68) était environ 350 fois plus petit que la période des pulses. Nous n'avons pas utilisé d'interpolation afin d'affiner l'estimation des périodes T_{out} : elles étaient déterminées comme le multiple de $\Delta\tau$ permettant de satisfaire au mieux les relations de périodicité (2.66). En revanche, le pas de temps $\Delta\tau$ était modifié à la fin de chaque boucle de manière à conserver toujours la même résolution en temps N , à quelques unités près. En effet, connaissant la variation du bruit $\delta\boldsymbol{\xi}(\tau) = \boldsymbol{\xi}^{out}(\tau) - \boldsymbol{\xi}^{in}(\tau')$ entre chaque boucle, il est possible d'évaluer la variation de la période $\delta T = T^{out} - T^{in}$, par une méthode variationnelle (dont les détails sont exposés dans l'annexe 2.7). Elle s'obtient en projetant $\delta\boldsymbol{\xi}$ sur la direction $\boldsymbol{\Phi}_{2l}$:

$$\frac{\delta T}{T^{in}} = -(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^{1/2} \boldsymbol{\Phi}_{2l} \cdot {}^t B \delta\boldsymbol{\xi}. \quad (2.78)$$

Nous avons donc choisi après chaque boucle de redéfinir un nouveau pas de temps $\Delta\tau^{out} = \Delta\tau^{in}(1 - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^{1/2} \boldsymbol{\Phi}_{2l} \cdot {}^t B \delta\boldsymbol{\xi})$.

Avec le mode opératoire qui vient d'être décrit, la convergence vers des solutions d'exposant stable à 10^{-5} près et de pseudo-énergie $\mathcal{H} \leq 10^{-5}$ est atteinte typiquement en moins de 20 itérations.

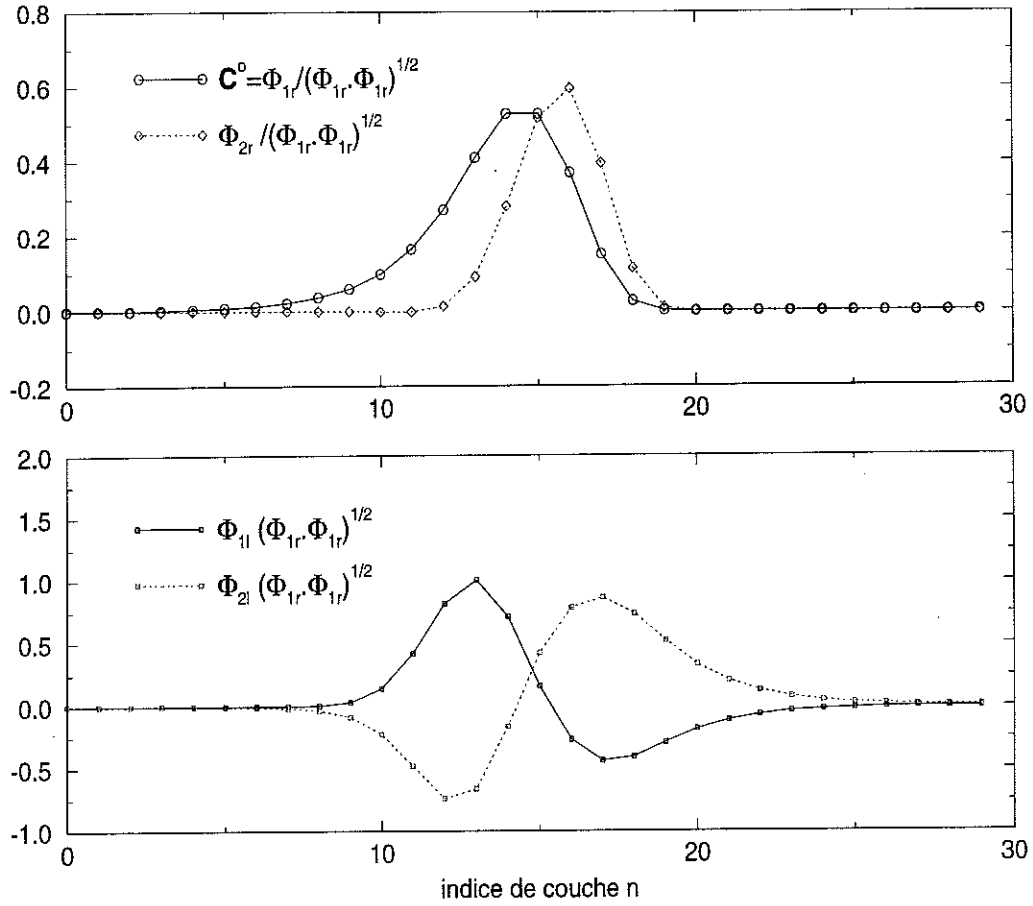


FIG. 2.1: Figure du haut : les configurations des deux modes de Floquet d'exposant de Lyapunov maximum A_0 dans le cas déterministe et pour le modèle le plus simple (matrice $B[C] = 1$). Figure du bas : les configurations des deux modes duaux d'exposant $-A_0$.

2.4.5 Résultats

L'algorithme ainsi construit s'est avéré très efficace pour calculer des instantons associés à toute une gamme des exposants d'échelle z depuis la valeur déterministe $z_0 = 0.72$ jusqu'à des valeurs de l'ordre de 0.95 (les valeurs de z inférieures à 0.72 s'avèrent plus délicates à traiter).

La figure 2.1 montre l'allure des vecteurs Φ_{1r} et Φ_{2l} à un instant donné. Ces profils évoluent assez peu lorsque l'exposant z s'éloigne de z_0 : c'est essentiellement la

traînée exponentielle qui s'en trouve affectée (respectivement à gauche en Q^{nz} pour C , à droite en Q^{-nz} pour Φ_{1l}).

La figure 2.2 montre la densité d'action $s_0(z)/\Gamma$ pour trois choix différents du facteur de forme $B[C]$:

- i) $B_{nn} = 1$. Le bruit ξ est ainsi complètement délocalisé.
- ii) $B_{nn} = C_{n-1}^* C_{n-2}^*$. Ce choix revient à introduire le bruit au niveau du coefficient d'un des termes non-linéaires du modèle GOY. Dans ces conditions, le bruit est actif juste à l'avant du pulse C .
- iii) $B_{nn} = \|C_{n-4}\|^2 + \|C_{n-5}\|^2$, ce qui permet de délocaliser encore un peu plus le bruit à l'avant du pulse.

Précisons que ces choix particuliers sont empiriques et n'ont pas de justification rigoureuse à partir de la dynamique complète du modèle GOY, mais ils nous permettent de sonder les divers comportements du modèle stochastique proposé.

Comme attendu, les courbes $s_0(z)/\Gamma$ présentent un minimum nul pour la valeur déterministe z_0 . Les valeurs de Γ ont été ajustées de manière à obtenir la même courbure autour du point z_0 pour les trois modèles. Nous pouvons observer que plus le bruit est localisé et décentré par rapport au pulse, plus les courbes sont abruptes. Pour le modèle i), un comportement asymptotique linéaire se dégage, déjà perceptible sur la figure 2.2. Cela nous conduit à rejeter ce modèle puisqu'un tel comportement empêche l'existence de moments de vitesse au-delà d'un certain ordre. Ce comportement linéaire peut être prédit par une approche variationnelle exposée en annexe 2.7, et basée sur l'hypothèse que toute solution d'exposant $z \neq z_0$ est obtenue par renormalisation de la solution déterministe C_0 et une reparamétrisation du temps appropriées.

Les figures 2.3, 2.4, 2.5 montrent le champ normalisé C et le terme de forçage $B\xi$ intervenant dans la dynamique, pour les trois modèles et différentes valeurs de l'exposant z . Dans tous les cas, la force aléatoire devient négative à l'avant du pulse C , ce qui est en accord avec la phénoménologie déjà mise en évidence dans [33] : la croissance des solutions est renforcée par la frustration du transfert d'énergie.

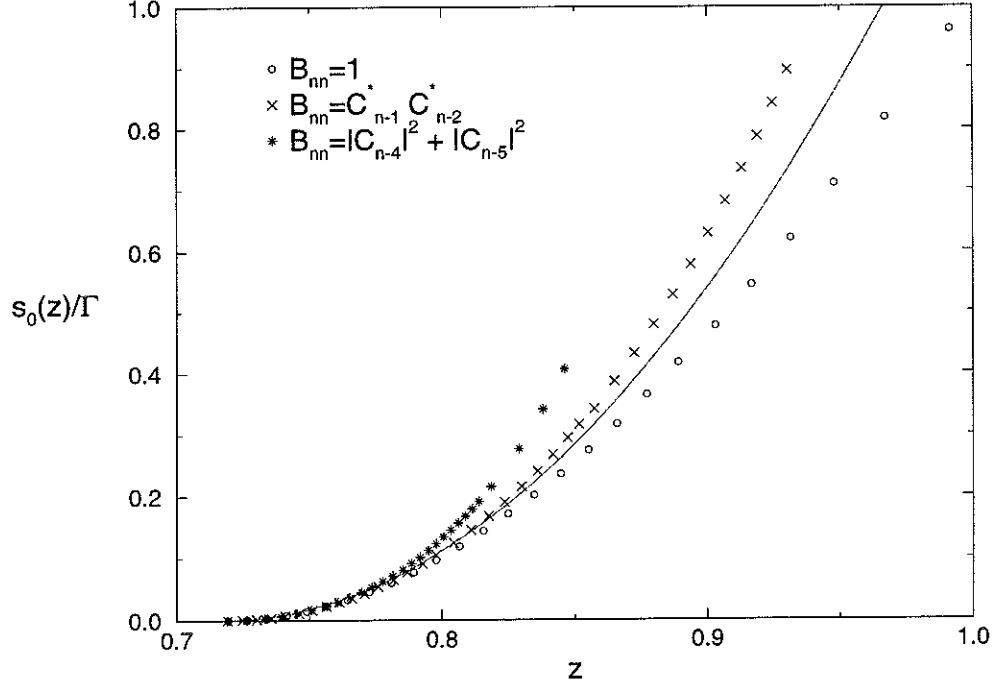


FIG. 2.2: évolution de l'action par unité de pas de cascade $s_0(z)$ en fonction de l'exposant de croissance z pour les trois modèles. La ligne pleine représente la parabole tangente aux trois courbes au point minimum déterministe z_0 .

Pour le modèle iii), le champ cohérent $\mathbf{C}$ devient lui aussi négatif à l'avant. Nous nous retrouvons ainsi dans des conditions analogues aux expériences de [33] qui consistaient à placer des défauts en aval d'un pulse déterministe $\mathbf{C}_0$ et à observer l'effet produit par la collision : seuls les défauts négatifs sont susceptibles d'augmenter l'exposant de croissance des solutions.

2.4.6 Contribution du terme de dérive de Ito

Nous avons indiqué auparavant que le terme de dérive de Ito englobé dans le noyau non-linéaire étant proportionnel à Γ , il ne contribue pas à l'ordre dominant $O(1/\Gamma)$ dans le développement de l'action $\mathcal{S}(z)$ en fonction de Γ (cf 2.30). Nous allons montrer maintenant qu'il est d'ordre $O(1)$ et doit ainsi être comptabilisé au niveau

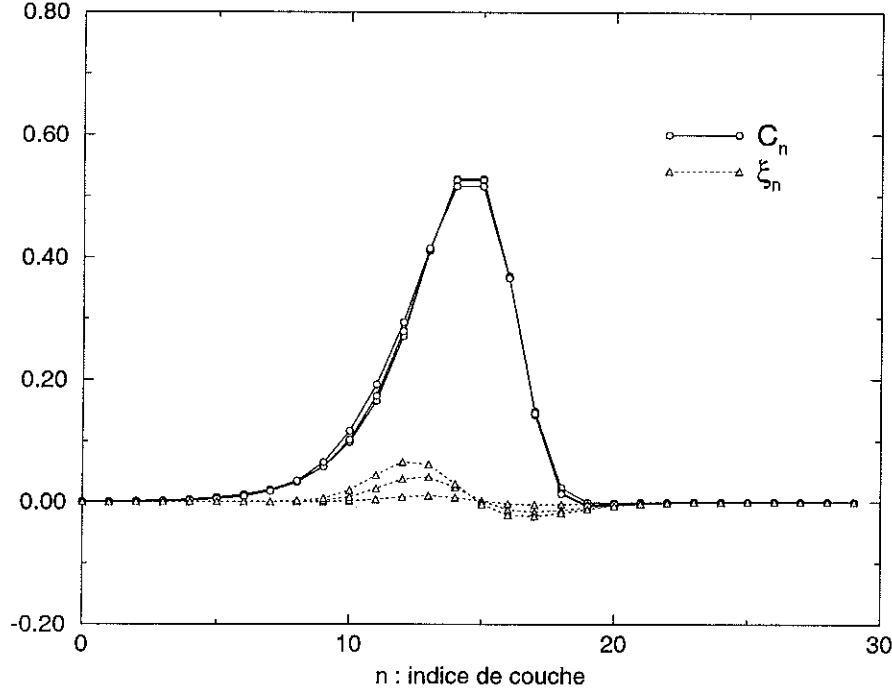


FIG. 2.3: configurations pour le modèle i) du champ cohérent normalisé $\mathbf{C}$ et de la force aléatoire $B[\mathbf{C}]\xi$, correspondant à trois exposants différents : $z = 0.75, 0.85$ et 0.95 .

de $s_1(z)$.

Dans cette section, nous repèrerons par $\mathbf{b}_\Gamma^0$ les trajectoires optimales solutions des équations de Hamilton (2.32, 2.33) où le terme de Ito figure dans le noyau non-linéaire, par contraste avec les solutions $\mathbf{b}^0$ calculées numériquement sans en tenir compte. Il en sera de même pour les quantités $S_\Gamma[\mathbf{b}(\tau)]$ et $S[\mathbf{b}(\tau)]$, pour lesquelles nous utiliserons l'expression (2.24).

La différence entre l'action optimale $S_\Gamma[\mathbf{b}_\Gamma^0]$ et la quantité calculée par l'algorithme $S[\mathbf{b}^0]$ peut être estimée en tirant avantage des propriétés d'extremum de $\mathbf{b}_\Gamma^0$:

$$\begin{aligned} S_\Gamma[\mathbf{b}_\Gamma^0] - S[\mathbf{b}^0] &= S_\Gamma[\mathbf{b}_\Gamma^0] - S_\Gamma[\mathbf{b}^0] + S_\Gamma[\mathbf{b}^0] - S[\mathbf{b}^0] \\ &\approx S_\Gamma[\mathbf{b}^0] - S[\mathbf{b}^0] = \frac{1}{\Gamma} \int_0^{\tau_n^0} \varphi^0 \cdot \frac{\mathbf{N}[\mathbf{b}^0] - \mathbf{N}_\Gamma[\mathbf{b}^0]}{(\mathbf{b}^0 \cdot \mathbf{b}^0)^{1/2}} d\tau. \end{aligned}$$

En effet, $S_\Gamma[\mathbf{b}_\Gamma^0] - S_\Gamma[\mathbf{b}^0] = O((\mathbf{b}_\Gamma^0 - \mathbf{b}^0)^2/\Gamma) = O(\Gamma)$ est négligeable à ce niveau

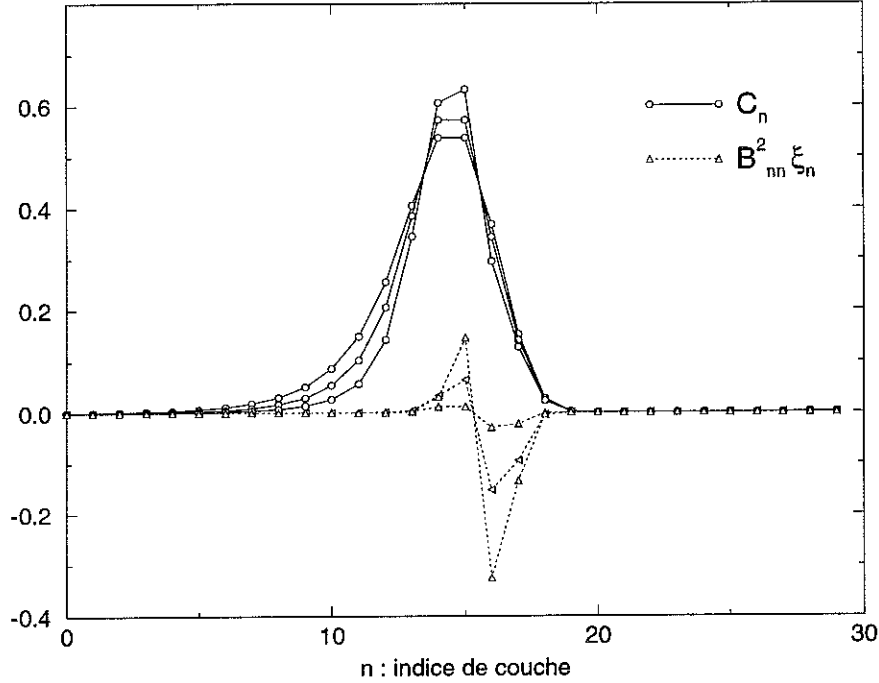


FIG. 2.4: configurations pour le modèle ii) du champ cohérent normalisé C et de la force aléatoire $B[C]\xi$, correspondant à trois exposants différents : $z = 0.75, 0.85$ et 0.95 .

d'approximation.

En utilisant l'expression du terme de Ito (2.13) et le fait que pour les différents modèles, les éléments de matrice B_{jk} sont des polynômes par rapport aux composantes C_m , on peut dégager la forme générale suivante :

$$\mathcal{I}_{1,ito}(\tau_f) = S_\Gamma[\mathbf{b}_\Gamma^0] - S_\Gamma[\mathbf{b}^0] = \frac{(2l-3)}{4} \int_0^{\tau_f} \mathbf{b}^0 \cdot B^t B \varphi^0 d\tau. \quad (2.79)$$

où $l = 0$ pour le modèle i) et $l = 2$ pour les modèles ii) et iii).

De la sorte, nous trouvons un premier effet des fluctuations quadratiques du bruit, tel que le terme de dérive de Ito les incorpore automatiquement. Il nous faut pour achever le calcul de $s_1(z)$ pousser le développement de l'action $\mathcal{S}(z)$ à l'ordre quadratique et sommer sur les perturbations de la trajectoire d'ordre $\delta\mathbf{b} \sim O(\sqrt{\Gamma})$.

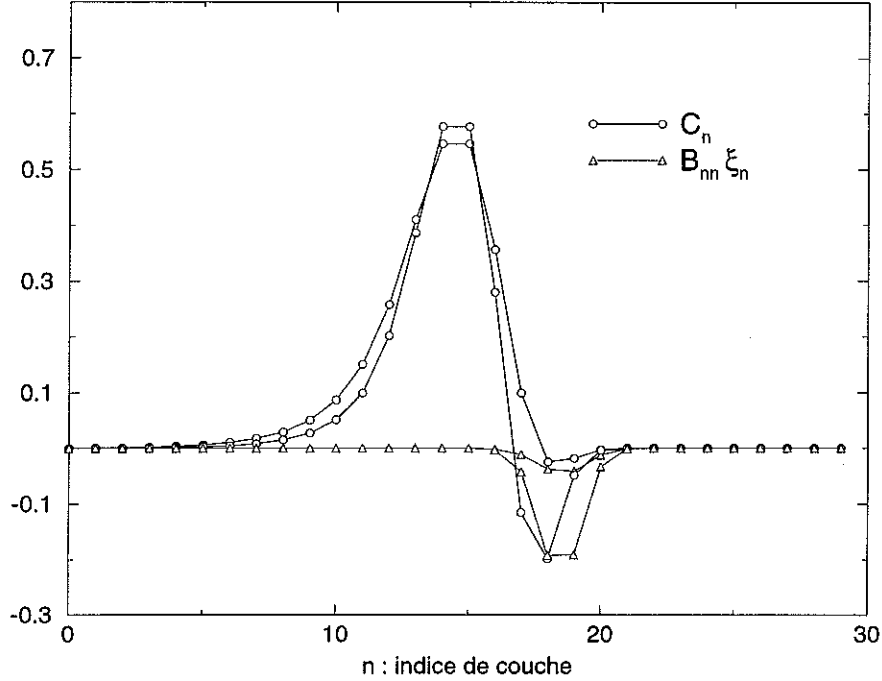


FIG. 2.5: configurations pour le modèle ii) du champ cohérent normalisé C et de la force aléatoire $B[C]\xi$, correspondant à trois exposants différents : $z = 0.75, 0.85$.

2.5 Effet des fluctuations quadratiques

2.5.1 Théorie

a) les différentes étapes du calcul

Le calcul à l'ordre quadratique des fluctuations autour des trajectoires optimales étant long et technique, nous voudrions commencer par en exposer les grandes lignes. Le lecteur pressé pourra se contenter de lire les résultats principaux résumés dans les équations 2.119 et 4.32.

Appuyons-nous sur la représentation simplifiée de la figure 2.6, pour donner une idée de ce qu'il faut faire pour répondre au problème imposé :

Une trajectoire répondant à un principe de moindre action est schématisée ici

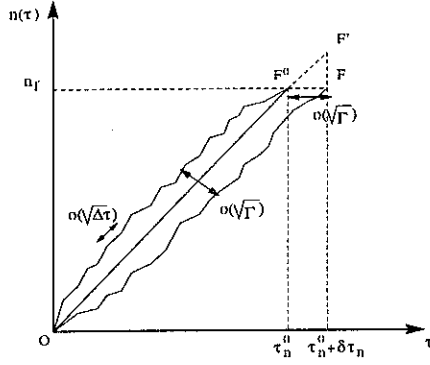


FIG. 2.6: représentation schématique d'une trajectoire optimale (ligne droite) et de deux trajectoires perturbées (lignes brisées).

par la ligne droite OF^0 . Elle correspond à une structure cohérente atteignant la couche n_f en un temps $\tau_f = \tau_n^0$. A cet instant est associé un point dans l'espace des phases, symbolisé sur la figure 2.6 par F^0 , que nous qualifierons de point d'arrivée de la trajectoire (puisqu'au delà, le devenir de la structure cohérente n'entre plus en compte dans la détermination de $P_{n_f}(z)$).

Autour de cette trajectoire optimale, on peut distinguer trois différents types de trajectoires perturbées contenues dans un fuseau de largeur $O(\sqrt{\Gamma})$.

-i) certaines trajectoires aboutissent exactement au même instant et au même point d'arrivée dans l'espace des phases que l'instanton idéal.

-ii) d'autres arrivent en un point d'arrivée différent, mais pour un même temps de parcours τ_n^0 . Dans le cas où il n'y aurait qu'une seule direction incohérente ($d = 3$), cela revient à imaginer un axe supplémentaire perpendiculaire au plan de la figure

2.6, représentant l'amplitude de $\delta \mathbf{b}(\tau_n^0)$ le long de cette direction.

-iii) une dernière possibilité correspond aux trajectoires joignant la couche n_f en un temps τ_n différent du temps optimal τ_n^0 .

En outre, les trajectoires perturbées sont dessinées comme des lignes brisées, pour rappeler le fait que le long de ces chemins, le champ physique $\mathbf{b}(\tau)$ n'est pas différentiable, mais à l'instar des marches browniennes, peut présenter des variations $\Delta \mathbf{b} = \mathbf{b}(\tau + \Delta\tau) - \mathbf{b}(\tau)$ de l'ordre de $O(\sqrt{\Delta\tau})$. Cette propriété impose en toute rigueur de mener les calculs en notation discrète, et les problèmes liés au choix de discrétisation (convention de Ito ou de Stratonovich) ont été les plus délicats à traiter, tant du point de vue théorique que numérique.

Notre but consiste à déterminer les termes quadratiques différenciant l'action d'une trajectoire perturbée $\mathcal{S}[OF]$ de l'action optimale $\mathcal{S}^0[OF^0]$. Nous pourrions ensuite utiliser des théorème connus du calcul variationnel, à condition de comparer des trajectoires se terminant toutes à la même date. Aussi proposons-nous de fractionner le travail de la manière suivante :

$$\mathcal{S}[OF] - \mathcal{S}^0[OF^0] = \underbrace{\mathcal{S}[OF] - \mathcal{S}^0[OF']}_A + \underbrace{\mathcal{S}^0[OF'] - \mathcal{S}^0[OF^0]}_B \quad (2.80)$$

où $\mathcal{S}^0[OF']$ fait référence à l'action d'un instanton poursuivant son chemin jusqu'en F' à l'instant τ_n .

Dans le cas des trajectoires de la catégorie ii), le point F' se confond avec le point F^0 et le dernier terme B est identiquement nul.

- Le terme A s'exprime comme la somme de deux contributions.

D'une part, il faut tenir compte d'un terme linéaire qui se réduit à un terme de bord déjà calculé dans la section 2.4.3 :

$$A_1 = \frac{1}{\Gamma} \varphi^0(\tau_n) \cdot \delta \mathbf{b}(\tau_n) = \frac{1}{\Gamma} \left[\varphi^0(\tau_n^0) \cdot \delta \mathbf{b}(\tau_n) + \delta \tau_n \cdot \dot{\varphi}^0(\tau_n^0) \cdot \delta \mathbf{b}(\tau_n) \right] \quad (2.81)$$

La recherche des termes quadratiques impose ici de pousser le développement de $\delta \mathbf{b}(\tau_n)$ (2.62) jusqu'à l'ordre $\delta \tau_n^2$.

D'autre part, il faut évidemment incorporer le terme provenant des variations secondes :

$$A_2 = \delta^2 S[\delta \mathbf{b}] = \frac{1}{2\Gamma} \int_0^{\tau_n} d\tau \mathcal{L}(\delta \mathbf{b}, \dot{\delta \mathbf{b}}), \quad (2.82)$$

où $\mathcal{L}(\delta \mathbf{b}, \dot{\delta \mathbf{b}})$ est un Lagrangien quadratique par rapport à $\delta \mathbf{b}$, $\dot{\delta \mathbf{b}}$ (à ce niveau d'approximation, il n'y a alors pas lieu de distinguer pour la borne d'intégration entre τ_n et τ_n^0).

- Le terme B provient simplement de la dérivation de S^0 par rapport au temps :

$$B = \delta \tau_n \partial_\tau S^0(\tau_n^0) + \frac{1}{2} \delta \tau_n^2 \partial_\tau^2 S^0(\tau_n^0) \quad (2.83)$$

Le terme linéaire se combine avec l'ordre dominant de A_1 et disparaît, puisque par construction les trajectoires autour desquelles sont effectués les développements minimisent l'action.

Si on ne tient compte que des fluctuations du type i), seul le terme A_2 est présent et il se factorise au niveau de la densité de probabilité $P_n(z)$ en un terme d'intégrale de chemin réduite :

$$P_n(z) = e^{-S^0(z)} Z [\delta \mathbf{b}_0 = \mathbf{0} \rightarrow \delta \mathbf{b}_f = \mathbf{0}, \tau_n^0], \quad (2.84)$$

avec

$$Z [\delta \mathbf{b}_0 \rightarrow \delta \mathbf{b}_f, \tau_f] = \int_{\delta \mathbf{b}(0)=\delta \mathbf{b}_0}^{\delta \mathbf{b}(\tau_f)=\delta \mathbf{b}_f} \mathcal{D} \delta \mathbf{b} \exp -\delta^2 S[\delta \mathbf{b}]. \quad (2.85)$$

On peut alors faire appel à un résultat classique des intégrales de chemin avec fonctionnelle quadratique et conditions de bord fixes.

Si on ajoute ensuite l'effet des trajectoires de type ii), là encore seul le terme A_2 est à prendre en compte (en effet $\delta \tau_n = 0$ et $\varphi^0(\tau_n) \cdot \delta \mathbf{b}(\tau_n^0) = 0$ si $\delta \mathbf{b}(\tau_n^0)$ ne se décompose que sur des directions "incohérentes"). En revanche, il faut désormais procéder à la sommation sur le point d'arrivée et $P_n(z)$ s'obtient comme :

$$P_n(z) = e^{-S^0(z)} \int d\delta \mathbf{b}_f Z [\delta \mathbf{b}_0 = \mathbf{0} \rightarrow \delta \mathbf{b}_f, \tau_n^0] \times \delta [\delta \mathbf{b}_f \cdot \Phi_{1l}(\tau_n^0)] \delta [\delta \mathbf{b}_f \cdot \Phi_{2l}(\tau_n^0)] \quad (2.86)$$

Enfin, pour achever le calcul des fluctuations quadratiques, il ne reste plus qu'à tenir compte des trajectoires de type iii). En plus du terme A_2 déjà pris en compte au niveau de l'intégrale de chemin réduite $Z[\delta\mathbf{b}(\tau)]$, cela introduit des termes de bord A_1 et B et il nous faut encore sommer sur un degré de liberté supplémentaire, à savoir la fluctuation $\delta\tau_f$ sur le temps d'arrivée. Mais comme nous l'avons déjà vu dans la section 2.4.3, $\delta\tau_f$ est directement relié à une fluctuation de $\delta\mathbf{b}_f$ le long de $\Phi_{2r}(\tau_n^0)$. On pourra alors traduire les termes de bord sous la forme quadratique : $A_1 + B = (\delta\mathbf{b}_f \cdot \delta W \delta\mathbf{b}_f)/2\Gamma$ (où δW est un opérateur que nous préciserons plus tard) et la densité de probabilité $P_n(z)$ prend sa tournure finale :

$$P_n(z) = e^{-S^0(z)} \int d\delta\mathbf{b}_f \exp\left[-\frac{\delta\mathbf{b}_f \cdot \delta W \delta\mathbf{b}_f}{2\Gamma}\right] Z[\delta\mathbf{b}_0 = \mathbf{0} \rightarrow \delta\mathbf{b}_f, \tau_n^0] \times \delta[\delta\mathbf{b}_f \cdot \Phi_{1l}(\tau_n^0)] . \quad (2.87)$$

Les détails du calcul s'organisent ainsi de la façon suivante :

-La section 2.5.1 b) est consacrée à la détermination de l'action quadratique $\delta^2 S[\delta\mathbf{b}]$.

-Le calcul de l'intégrale de chemin réduite $Z[\delta\mathbf{b}_0 = \mathbf{0} \rightarrow \delta\mathbf{b}_f = 0, \tau_f]$ avec bornes nulles est donnée section 2.5.1 c) pour la limite du continu (les détails de la version discrète sont donnés dans l'annexe 2.8).

-L'effet des fluctuations du point d'arrivée est décrit section 2.5.1 d).

b) expression de l'action quadratique des fluctuations

- dans la limite du continu

L'action $\delta^2 S[\delta\mathbf{b}, \delta\varphi]$ s'obtient aisément en développant l'expression 2.38 à l'ordre quadratique par rapport aux fluctuations $\delta\mathbf{b}$ et $\delta\varphi$.

$$\begin{aligned} \delta^2 S[\delta\mathbf{b}, \delta\varphi] &= \frac{1}{\Gamma} \int_0^{\tau_n^0} d\tau \left[\dot{\delta\mathbf{b}} \cdot \delta\varphi - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \mathbf{b} \partial \varphi} \delta\mathbf{b} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \varphi^2} \delta\varphi \right) \cdot \delta\varphi - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \varphi \partial \mathbf{b}} \delta\varphi + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \mathbf{b}^2} \delta\mathbf{b} \right) \cdot \delta\mathbf{b} \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma} \int_0^{\tau_n^0} d\tau \left[\dot{\delta\mathbf{b}} \cdot \delta\varphi - \frac{1}{2} (\mathcal{A} \delta\mathbf{b} + Q^{-1} \delta\varphi) \cdot \delta\varphi - \frac{1}{2} ({}^t \mathcal{A} \delta\varphi - \mathcal{V} \delta\mathbf{b}) \cdot \delta\mathbf{b} \right] , \end{aligned}$$

où les opérateurs $\mathcal{A}$, $\mathcal{V}$ et Q^{-1} sont définis par les relations suivantes :

$$\mathcal{A} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \varphi \partial \mathbf{b}} = \mathcal{M} + \frac{\partial((\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) B^t B \varphi)}{\partial \mathbf{b}} \quad (2.88)$$

$$\mathcal{V} = -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \mathbf{b}^2} = -\frac{\partial({}^t \mathcal{M} \varphi)}{\partial \mathbf{b}} - \frac{\partial^2((\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) B^t B \varphi)}{\partial \mathbf{b}^2} \quad (2.89)$$

$$Q^{-1} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \varphi^2} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) B^t B = \tilde{Q}^{-1/2} {}^t \tilde{Q}^{-1/2} \quad (2.90)$$

avec $\tilde{Q}^{-1/2} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^{1/2} B$.³

On peut alors poser $\delta \varphi = Q(\dot{\delta \mathbf{b}} - \mathcal{A} \delta \mathbf{b}) + i \delta \varphi'$ et procéder à l'intégration gaussienne sur $\delta \varphi'$.

L'action quadratique $\delta^2 \mathcal{S}$ est ainsi reformulée sous forme lagrangienne :

$$\delta^2 \mathcal{S}[\delta \mathbf{b}] = \frac{1}{2\Gamma} \int_0^{\tau_n^0} d\tau \left\{ \left[\tilde{Q}^{1/2} (\dot{\delta \mathbf{b}} - \mathcal{A} \delta \mathbf{b}) \right]^2 + \delta \mathbf{b} \cdot \mathcal{V} \delta \mathbf{b} \right\}. \quad (2.91)$$

Jusque là, cette notation continue désigne le prolongement de l'écriture en notation discrète avec une convention à la Ito.

Une dernière étape permet de se ramener à une forme standard, à partir de laquelle l'intégration sur les fluctuations du champ physique $\mathbf{b}$ est plus facile à réaliser. Elle consiste à se débarrasser de l'anisotropie du tenseur de "masse" Q présent au niveau du terme cinétique, en l'englobant dans le changement de variables :

$$\delta \mathbf{b} = \tilde{Q}^{-1/2} \mathbf{h} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^{1/2} B \mathbf{h} \quad (2.92)$$

tandis que $\delta^2 \mathcal{S}[\delta \mathbf{b}]$ semble devenir avec les règles de calcul ordinaire :

$$\delta^2 \mathcal{S}[\delta \mathbf{b}] = \frac{1}{2\Gamma} \int_0^{\tau_n^0} d\tau \left[\left(\dot{\mathbf{h}} - (\mathcal{A}' - \mathcal{D}) \mathbf{h} \right)^2 + \mathbf{h} \cdot \mathcal{V}' \mathbf{h} \right] \quad (2.93)$$

où les nouveaux opérateurs se relient aux anciens suivant :

$$\mathcal{A}' = \tilde{Q}^{1/2} \mathcal{A} \tilde{Q}^{-1/2} \quad (2.94)$$

$$\mathcal{V}' = {}^t \tilde{Q}^{-1/2} \mathcal{V} \tilde{Q}^{-1/2} \quad (2.95)$$

$$\mathcal{D} = \tilde{Q}^{1/2} \partial_\tau \tilde{Q}^{-1/2} = \partial_\tau \log \tilde{Q}^{-1/2} \quad (2.96)$$

³pour alléger la définition de ces différents opérateurs, on omet l'indice ⁰ au niveau des configurations optimales $\mathbf{b}^0$ et φ^0 .

- termes supplémentaires liés à la discrétisation du temps

A ce niveau, nous avons oublié certains termes dans le développement à l'ordre quadratique car les règles de changement de variable du calcul traditionnel ne sont pas applicables avec la convention de Ito.

Revenons à une notation discrète et procédons au changement de variable $\delta b_i = \tilde{Q}_i^{-1/2} \mathbf{h}_i$. Grâce au développement $B_{i+1} = B_i + \frac{B_{i+1}-B_i}{\Delta\tau} \Delta\tau$, on peut retranscrire le terme d'action quadratique sous la forme :

$$\delta^2 S[\mathbf{h}] = \frac{\Delta\tau}{2\Gamma} \sum_{i=0}^{N-1} \left[(1 + \mathcal{D}_i \Delta\tau) \frac{\mathbf{h}_{i+1} - \mathbf{h}_i}{\Delta\tau} - (\mathcal{A}'_i - \mathcal{D}_i) \mathbf{h}_i \right]^2 + \mathbf{h}_i \cdot \mathcal{V}'_i \mathbf{h}_i, \quad (2.97)$$

Il apparaît donc un terme supplémentaire d'ordre $O(\Delta\tau)$ au niveau du tenseur de masse. Celui-ci implique un seul terme correctif pertinent dans la limite du continu lorsque le carré est développé. Il s'agit du terme cinétique $\frac{1}{2\Gamma} \frac{(\mathbf{h}_{i+1} - \mathbf{h}_i) \cdot \mathcal{D}_i (\mathbf{h}_{i+1} - \mathbf{h}_i)}{\Delta\tau}$ d'ordre $O(\Delta\tau)$ qui, selon les règles de calcul conventionnelles pour les intégrales de chemin [48], peut se contracter en $\frac{1}{2} \text{Tr } \mathcal{D}_i$. Il faut ainsi ajouter à l'expression (2.93) l'intégrale suivante qui se réduit à un terme linéaire en temps lorsqu'on tient compte de la périodicité de $\mathbf{C}$:

$$\int_0^{\tau_n^0} d\tau \text{Tr } \mathcal{D} = \frac{\log \tilde{Q}^{-1/2}(\tau_n^0)}{\log \tilde{Q}^{-1/2}(0)} = dA\tau_n^0. \quad (2.98)$$

Arrivés à ce stade, nous avons besoin de passer de la prescription d'Ito à celle de Stratonovich afin de pouvoir utiliser les théorèmes généraux permettant la réduction de la forme quadratique (2.97) à un seul carré, et ainsi se ramener à une intégration gaussienne. Pour les mêmes raisons que précédemment, cela va induire l'ajout de termes cinétiques non négligeables au niveau de la limite du continu. En effet, en remplaçant h_i par $\frac{h_{i+1}+h_i}{2} - \frac{h_{i+1}-h_i}{\Delta\tau} \frac{\Delta\tau}{2}$, une unique correction d'ordre $O(\Delta\tau)$ surgit, provenant du terme de produit croisé $\frac{1}{2\Gamma} \frac{(\mathbf{h}_{i+1} - \mathbf{h}_i) \cdot (\mathcal{A}_i - \mathcal{D}_i) (\mathbf{h}_{i+1} - \mathbf{h}_i)}{\Delta\tau}$. En appliquant la formule de contraction précédente, cet effet se résume à l'ajout au niveau de l'action quadratique de :

$$\frac{1}{2} \int_0^{\tau_n^0} d\tau \text{Tr } (\mathcal{A}' - \mathcal{D}) = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\tau_n^0} d\tau \text{Tr } \mathcal{A} \right) - \frac{d}{2} A\tau_n^0 \quad (2.99)$$

-précisions sur la mesure de l'intégration

Nous pouvons aussi préciser les changements de mesure induits par le passage des fluctuations de $\delta \mathbf{b}$ à celles de $\mathbf{h}$. La mesure dans l'intégrale (2.85) qui au départ s'explicitait comme :

$$\mathcal{D}\delta \mathbf{b} = \left(\frac{1}{2\pi\Gamma\Delta\tau} \right)^{\frac{dN}{2}} \frac{1}{(\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_0)^{d/2}} \frac{1}{|\det B_0|} \prod_{i=1}^{N-1} \left[\frac{d\delta \mathbf{b}_i}{(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_i)^{d/2} |\det B_i|} \right], \quad (2.100)$$

devient :

$$\mathcal{D}\delta \mathbf{b} = \frac{1}{(\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_0)^{d/2} |\det B_0|} \mathcal{D}\mathbf{h} \quad (2.101)$$

avec

$$\mathcal{D}\mathbf{h} = \left(\frac{1}{2\pi\Gamma\Delta\tau} \right)^{\frac{dN}{2}} \prod_{i=1}^{N-1} d\mathbf{h}_i. \quad (2.102)$$

Tous les jacobiens $|\det \frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial \mathbf{h}_i}|$ (avec $0 < i < N$) introduits par le changement de variable se simplifient au niveau du terme de mesure (avec des termes provenant de l'intégration sur les champs auxiliaires φ_i). En revanche, il n'en sera pas de même pour le changement $\delta \mathbf{b}_f \rightarrow \mathbf{h}_f$ que nous devons effectuer pour la sommation sur le point d'arrivée.

On trouve un facteur exponentiel $d\delta \mathbf{b}_f = |\det \frac{\partial \delta \mathbf{b}_f}{\partial \mathbf{h}_f}| d\mathbf{h}_f = e^{A_0 \tau_f} d\mathbf{h}_f$ et nous pouvons le regrouper avec les termes provenant de la non-différentiabilité des chemins et le terme correctif de Ito. On obtient ainsi :

$$\mathcal{I}_1(nT) = n \frac{dAT}{2} - \frac{1}{2} n \int_0^T d\tau \text{Tr} \mathcal{A} + \mathcal{I}_{1,ito}(nT). \quad (2.103)$$

En résumé, dans les nouvelles variables $\mathbf{h}$, le développement semi-classique (2.87) de $P_n(z)$ prévu dans la sous-section précédente est à modifier suivant

$$P_n(z) = e^{-S^0(z)} e^{-\mathcal{I}_1(nT)} \int d\mathbf{h}_f \exp \left(-\frac{1}{2\Gamma} \mathbf{h}_f \cdot \delta W' \mathbf{h}_f \right) \delta(\mathbf{h}_f \cdot \Phi'_{1l}) Z[\mathbf{h}_0 = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{h}_f, nT], \quad (2.104)$$

où on note $\Delta W' = {}^t \tilde{Q}^{-1/2} \Delta W \tilde{Q}^{-1/2}$, tandis que $\Phi'_{il} = {}^t \tilde{Q}^{-1/2} \Phi_{il}$ et :

$$Z[\mathbf{h}_0 \rightarrow \mathbf{h}_f, \tau_f] = \int_{\mathbf{h}_0}^{\mathbf{h}_f} \mathcal{D}\mathbf{h} \exp -\delta^2 S[\mathbf{h}], \quad (2.105)$$

avec

$$\delta^2 S[\mathbf{h}] = \frac{1}{2\Gamma} \int_0^{nT} \delta\tau \left[\left(\dot{\mathbf{h}} - \mathcal{B}\mathbf{h} \right)^2 + \mathbf{h} \cdot \mathcal{V}'\mathbf{h} \right]. \quad (2.106)$$

Il importe de garder à l'esprit que l'intégrale fonctionnelle (2.106) est définie maintenant dans le cas discret suivant la prescription de Stratonovich. Enfin, $\mathcal{B}$ désigne ici $\mathcal{A}' - \mathcal{D}$.

Nous allons alors dans un premier temps nous concentrer sur le calcul de $Z[\mathbf{h}_0 = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{h}_f = \mathbf{0}, \tau_f]$ en utilisant des résultats classiques d'analyse fonctionnelle. Puis nous généraliserons ce résultat au cas où le point d'arrivée $\mathbf{h}_f$ est quelconque, et enfin nous pourrons procéder à la sommation sur toutes les fluctuations du point d'arrivée autorisées.

c) calcul intermédiaire d'une action quadratique avec conditions aux limites fixes et nulles

Une condition nécessaire pour que les instantons calculés précédemment soient statistiquement pertinents est que la fonctionnelle quadratique $\delta^2 S[\mathbf{h}]$ soit positive pour toute fonction $\mathbf{h}(\tau)$ telle que $\mathbf{h}(0) = 0$ et $\mathbf{h}(\tau_f) = 0$.

Or, d'après un théorème de calcul variationnel [25], le caractère positif de $\delta^2 S[\mathbf{h}]$ équivaut à l'absence de points conjugués au point origine $\tau = 0$ dans tout l'intervalle $[0 - \tau_f]$.

Rappelons la définition d'un point conjugué. Soit $U(\tau)$ une matrice d'ordre d vérifiant l'équation d'Euler associée à la fonctionnelle $\delta^2 S[\mathbf{h}]$:

$$\frac{d}{d\tau} (\dot{U} - \mathcal{B}U) = -{}^t\mathcal{B} (\dot{U} - \mathcal{B}U) + \mathcal{V}'U, \quad (2.107)$$

et les conditions initiales :

$$U(0) = 0 \quad , \quad \dot{U}(0) = 1, \quad (2.108)$$

alors le point $\tilde{\tau}$ est dit conjugué au point $\tau = 0$ si $\det U(\tilde{\tau}) = 0$.

En l'absence de points conjugués, le déterminant de U ne s'annule jamais et l'intégrale de chemin $Z[\mathbf{h}_0=\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{h}_f=\mathbf{0}, \tau_f]$ devient :

$$Z[\mathbf{h}_0=\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{h}_f=\mathbf{0}, \tau_f] = \left(\frac{1}{2\pi\Gamma} \right)^{d/2} \frac{1}{\sqrt{\det U(\tau_f)}}. \quad (2.109)$$

Les détails de ce résultats sont disponibles dans de nombreux ouvrages consacrés aux intégrales de chemins [20, 60] et sont explicités dans l'annexe 2.8 pour un temps discrétisé comme l'exige sa mise en oeuvre numérique.

Indiquons cependant l'idée principale de la preuve : elle consiste à réduire la forme quadratique $\delta^2\mathcal{S}[\mathbf{h}]$ en un carré parfait en introduisant un terme de bord $\delta^2\mathcal{S}'[\mathbf{h}]$ qui disparaît pour les conditions limites $\mathbf{h}(0) = \mathbf{h}(\tau_f) = \mathbf{0}$:

$$\delta^2\mathcal{S}'[\mathbf{h}] = -\frac{1}{2\Gamma} \int_0^{\tau_f} \frac{d}{d\tau} (\mathbf{h}.W\mathbf{h}) d\tau = \frac{1}{2\Gamma} [(\mathbf{h}.W\mathbf{h})(0) - (\mathbf{h}.W\mathbf{h})(\tau_f)], \quad (2.110)$$

où $W(\tau)$ est une matrice symétrique.

Pour aboutir à un carré parfait qui nous permettra ensuite une intégration gaussienne, $W(\tau)$ doit être solution d'une équation différentielle non linéaire dite de "Riccati" (voir annexe 2.8) :

$$\dot{W} = \mathcal{V}' + {}^tB\mathcal{B} - ({}^tB + W)(\mathcal{B} + W). \quad (2.111)$$

Cette équation peut se réduire à une équation différentielle linéaire du second ordre à condition de poser :

$$WU = \dot{U} - BU \quad (2.112)$$

où $U(\tau)$ est une nouvelle matrice inconnue qui s'avère être la matrice d'Euler définie par les équations (2.107) et (2.108). Le produit $WU(\tau)$ s'interprète alors comme la matrice "moment conjugué à $U(\tau)$ ".

d) effet des fluctuations sur le point d'arrivée et résultat final

Lorsqu'on veut généraliser le résultat (2.109) au cas où $\mathbf{h}_f$ est arbitraire, il faut tenir compte du terme de bord $-\delta^2\mathcal{S}'[\mathbf{h}]$ qui ne disparaît plus :

$$Z[\mathbf{h}_0 = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{h}_f, \tau_f] = \left(\frac{1}{2\pi\Gamma} \right)^{d/2} \frac{1}{\sqrt{\det U(\tau_f)}} \exp -\frac{1}{2\Gamma} \mathbf{h}_f \cdot W(\tau_f) \mathbf{h}_f, \quad (2.113)$$

Il nous faut également tenir compte des termes de bord A_1 et B causés par les fluctuations sur le temps d'arrivée. En reprenant les résultats de la section 2.5.1 a) avec la variable $\delta\mathbf{b}$, nous trouvons :

$$A_1 + B = \frac{1}{\Gamma} \left[\delta\tau_n \dot{\varphi}^0(\tau_n^0) \cdot \delta\mathbf{b}_f^q + \delta\tau_n \dot{\varphi}^0(\tau_n^0) \cdot \delta\mathbf{b}_f \right] + \frac{1}{2} \delta\tau_n^2 \partial_\tau^2 \mathcal{S}^0(\tau_n^0) \quad (2.114)$$

Explicitons les notations introduites dans cette formule : dans le développement de $\delta\mathbf{b}^q(\tau_n)$ en fonction de $\delta\tau_n$, $\delta\mathbf{b}_f^q$ fait référence à la partie quadratique, tandis que $\delta\mathbf{b}_f$ ne concerne que la partie linéaire. Ces termes s'obtiennent aisément :

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{b}(\tau_n) &= \mathbf{b}(\tau_n) - \mathbf{b}^0(\tau_n) \\ &= \mathbf{b}(\tau_n) - \mathbf{b}^0(\tau_n^0) - \delta\tau_n \dot{\mathbf{b}}_0(\tau_n^0) - \frac{1}{2} \delta\tau_n^2 \ddot{\mathbf{b}}_0(\tau_n^0) \end{aligned} \quad (2.115)$$

Par construction, le terme $\mathbf{b}(\tau_n) - \mathbf{b}^0(\tau_n^0)$ se décompose uniquement suivant les directions incohérentes $\Phi_{ir}(\tau_n^0)$ avec $i > 2$ (voir la définition de $P_n(z)$ dans la section 2.4.3), ce qui permet de trouver :

$$\delta\mathbf{b}(\tau_n) = \underbrace{-\delta\tau_n \Phi_{2r}(\tau_n^0) + \sum_{i \neq 1,2} \delta\lambda_i \Phi_{ir}(\tau_n^0)}_{\delta\mathbf{b}_f} - \frac{1}{2} \delta\tau_n^2 \ddot{\Phi}_{2r}(\tau_n^0) \quad (2.116)$$

Les termes de bord A_1 et C se ramènent à une forme quadratique sur $\delta\mathbf{b}_f$ si on utilise le lien $\delta\tau_n = -\dot{\Phi}_{2r}(\tau_n^0) \cdot \delta\mathbf{b}_f$. Tous calculs faits, on obtient :

$$\begin{aligned} A_1 + B &= \frac{1}{2\Gamma} [\Phi_{2l}(\tau_n^0) \cdot \delta\mathbf{b}_f]^2 \dot{\varphi}^0(\tau_n^0) \cdot \Phi_{2r}(\tau_n^0) - \frac{1}{\Gamma} [\Phi_{2l}(\tau_n^0) \cdot \delta\mathbf{b}_f] [\dot{\varphi}^0(\tau_n^0) \cdot \delta\mathbf{b}_f] \\ &= \frac{1}{2\Gamma} \delta\mathbf{b}_f \cdot \Delta W \delta\mathbf{b}_f \end{aligned} \quad (2.117)$$

où l'opérateur symétrique ΔW est défini suivant :

$$\Delta W = (\dot{\varphi}^0 \cdot \Phi_{2r}) \Phi_{2l} \otimes \Phi_{2l} - \Phi_{2l} \otimes \dot{\varphi}^0 - \dot{\varphi}^0 \otimes \Phi_{2l} \quad (2.118)$$

Ce terme va pouvoir être regroupé avec celui issu de la résolution de $Z[\mathbf{h}(\tau)]$, après avoir effectué le changement de variable $\delta \mathbf{b}_f = \tilde{Q}^{-1/2} \mathbf{h}_f$ qui transforme aussi ΔW en $\Delta W' = \tilde{Q}^{-1/2} \Delta W \tilde{Q}^{-1/2}$. Ainsi les termes de bord se résument à l'exponentielle de $-(\mathbf{h}_f \cdot \tilde{W} \mathbf{h}_f)/2\Gamma$ avec $\tilde{W} = W + \Delta W'$.

On arrive ainsi à l'expression finale pour $P_n(z)$, où la sommation sur les directions de $\mathbf{h}_f$ libres de fluctuer ne pose plus aucune difficulté :

$$P_n(z) \approx e^{-n \frac{s_0(z)}{\Gamma}} \frac{e^{-\mathcal{I}_1(nT)}}{\sqrt{\det U(nT)}} \int \frac{e^{-\frac{1}{2\Gamma} \mathbf{h}_f \cdot \tilde{W}(nT) \mathbf{h}_f}}{(2\pi\Gamma)^{d/2}} \delta(\Phi'_{1l}(nT) \cdot \mathbf{h}_f) d\mathbf{h}_f, \quad (2.119)$$

Nous pouvons en conclure que les instantons calculés par notre algorithme ont un sens physique si à la fois U (condition établie dans la sous-section 2.5.1 c) et $\tilde{W}_1$ (définie comme la restriction de $\tilde{W}$ à l'espace de dimension $(d-1)$ orthogonal à Φ'_{1l}) sont définies et positives.

Ces deux conditions satisfaites, $s_1(z)$ s'obtient comme la somme de trois contributions :

$$s_1(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left\{ \mathcal{I}_1(nT) + \frac{1}{2} \ln \det U(nT) + \frac{1}{2} \ln \det \tilde{W}_1(nT) \right\} \quad (2.120)$$

Les matrices $U(nT)$ et $W(nT)$ n'ont plus qu'à être calculées numériquement en laissant évoluer les équations (2.107) et (2.112) entre $\tau = 0$ et $\tau = nT$.

2.5.2 Mise en pratique

Le lecteur aura pu trouver à juste titre que le traitement analytique des fluctuations quadratiques est plutôt lourd. De la même manière, le calcul numérique de $s_1(z)$ s'est révélé plus délicat à mettre en oeuvre que l'algorithme permettant l'évaluation de $s_0(z)$ et il a nécessité bien davantage de soins.

Toute la difficulté réside dans l'intégration des dynamiques U et $\tilde{W}_1$, très sensibles au bruit numérique.

Nous avons constaté notamment que le choix de discrétisation est crucial pour

préserver la propriété de symétrie de W sur le plus grand nombre de périodes T possible. Les équations d'évolution (2.112, 2.111) à résoudre s'écrivent alors (cf Annexe 2.8) :

$$\frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta\tau} = \mathcal{B}_i \frac{U_i + U_{i+1}}{2} + \frac{W_i U_i + W_{i+1} U_{i+1}}{2}, \quad (2.121)$$

et

$$\frac{W_{i+1} U_{i+1} - W_i U_i}{\Delta\tau} = -\mathcal{B}_i \frac{W_i U_i + W_{i+1} U_{i+1}}{2} + \mathcal{V}_i' \frac{U_i + U_{i+1}}{2}. \quad (2.122)$$

Pour que la statistique soit auto-similaire, nous prévoyons un comportement constant des dérivées logarithmiques de $U(\tau)$ et $\tilde{W}_1(\tau)$ permettant l'écriture :

$$2s_1(z) = AT + \mathcal{I}_1 + T \frac{d}{d\tau} \left(\log \det U(nT) + \log \det \tilde{W}_1(nT) \right). \quad (2.123)$$

En fait, excepté pour le modèle i), nous avons observé que les dérivées logarithmiques de $U(\tau)$ et $\tilde{W}_1(\tau)$ développent chacune de leur côté un comportement linéaire avec des pentes opposées, comme le montre la figure 2.7. Elles finissent cependant par saturer vers un comportement constant, lorsque l'instanton autour duquel les fluctuations sont calculées a parcouru un tour complet du réseau périodique. Cet effet provient du caractère périodique du modèle et de la forte gamme de variations de la largeur du bruit le long du réseau de couches, inhérente à sa définition. On peut l'appréhender à partir de modèles de fonctionnelles quadratiques assez simples pour être résolus exactement. Cet argument est exposé dans l'annexe 2.9, qui permet en outre de donner les ordres de grandeurs attendus pour U et W . Seule la somme des deux contributions permet d'obtenir la forme auto-similaire désirée, montrant ainsi la nécessité de tenir compte des fluctuations sur le point d'arrivée de la formulation en intégrale de chemin, pour obtenir un résultat physiquement décent interprétable en termes de fonction de Cramér.

Un autre effet est à prendre en compte pour améliorer la précision de l'évaluation de $s_1(z)$. Le problème de départ possède deux modes de Goldstone associés pour l'un à la symétrie d'échelle et pour l'autre à l'invariance par translation dans le temps (τ).

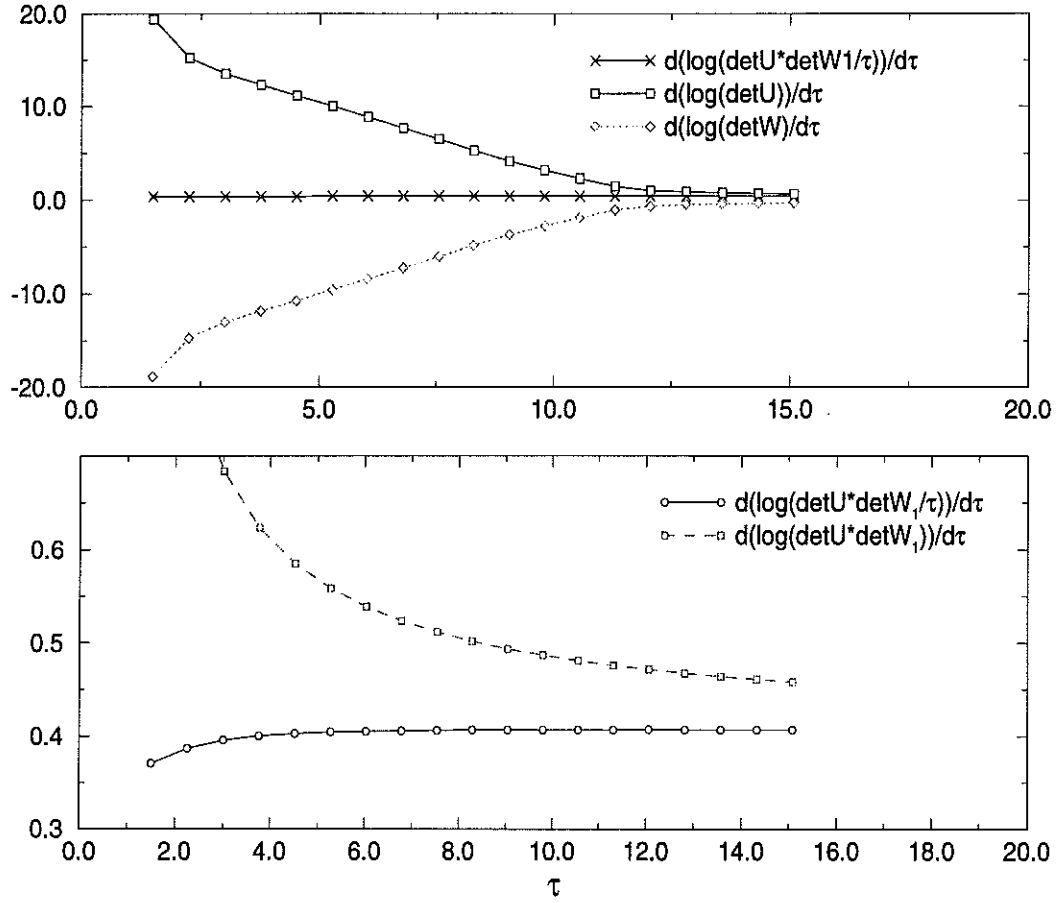


FIG. 2.7: cas du modèle ii) : test de convergence des différentes quantités intervenant dans le calcul de $S_1(z)$ pour une valeur modérée $z = 0.8$.

Ces deux modes correspondent aux directions Φ_{1r} et Φ_{2r} et induisent deux valeurs propres se comportant comme τ pour la matrice $(\mathbf{b}^0 \cdot \mathbf{b}^0)^{1/2} B U(\tau)$ (respectivement comme $1/\tau$ pour la matrice $(\mathbf{b}^0 \cdot \mathbf{b}^0)^{-1} {}^t B^{-1} \tilde{W} B^{-1}$). Quand on restreint W à un l'espace de $(d-1)$ dimensions orthogonal à Φ_{1r} , l'une de ces valeurs propres en $1/\tau$ disparaît, induisant un facteur $\sqrt{\tau}$ dans le produit $\sqrt{\det U(\tau)} \sqrt{\tilde{W}_1(\tau)}$. Ce facteur algébrique, que met en évidence la figure 6, doit être enlevé artificiellement dans le but de sonder le comportement exponentiel de $\det U(\tau) \tilde{W}_1(\tau)$. De plus si on examine une à une les valeurs propres de $\tilde{W}_1$, on s'aperçoit que le second mode en $1/\tau$ disparaît si on oublie de tenir compte de l'opérateur ΔW .

Enfin, notons qu'il est très important d'interdire les fluctuations le long de Φ_{1r}

et de réserver un traitement spécial à celles le long de Φ_{2r} . En effet, si nous avons sommé sur toutes les directions, en supposant naïvement que la différence entre $\det W$ et $\det \tilde{W}_1$ était faible, nous aurions pu estimer approximativement $s_1(z)$ comme

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{d}{d\tau} \left\{ \mathcal{I}_1 + \frac{1}{2} \det \ln WU \right\}, \quad (2.124)$$

Or la matrice WU (qui dans ce problème joue le rôle d'un moment conjugué à U) finit toujours par développer une valeur propre négative au bout d'un certain nombre d'itérations, excepté dans le cas déterministe. Cette valeur propre est précisément celle qui est éliminée lorsqu'on projette W sur l'espace restreint à $d - 1$ directions, permettant ainsi de restaurer la stabilité statistique de l'instanton. C'est sans doute le signe que le seul minimum absolu du problème est constitué par le pulse déterministe et que tous les autres instantons correspondent seulement à des minima relatifs de l'action.

Dans le cas déterministe, la sommation sur toutes les directions conduit au résultat évident $P_n(z) = 1$. En effet, en absence de bruit $\tilde{W} = W$, et la dynamique de WU se réduit simplement dans ce cas à :

$$\frac{d}{d\tau} WU = -{}^t B WU. \quad (2.125)$$

La condition initiale $\dot{U}(0) = 1$ étant équivalente à $WU(0) = 1$, on en déduit :

$$WU(nT) = \exp - \int_0^{nT} {}^t B(\tau) d\tau = \exp \left(nA_0T - \int_0^{nT} {}^t A(\tau) d\tau \right) \quad (2.126)$$

et la racine du déterminant de WU compense alors exactement le terme $\mathcal{I}_1(nT)$. Cela nous permet d'ailleurs de vérifier la nécessité d'adopter la prescription de Stratonovich au moment de résoudre l'intégrale de chemin sur les fluctuations quadratiques.

2.5.3 Résultats

Les résultats pour les trois modèles sont portés sur la figure 2.8 (la gamme d'exposants z représentée varie d'un modèle à l'autre car le calcul des fluctuations pour les grands z s'est avéré plus difficile lorsqu'on complique le modèle).

Ils conduisent tous à une correction $s_1(z)$ de la densité d'action ayant la forme d'une parabole (du moins pour des exposants z peu élevés) mais dont le centre z_1

diffère de la valeur déterministe z_0 . L'ajout de $s_1(z)$ au terme $s_0(z)/\Gamma$ permet donc de déplacer la courbe obtenue à l'ordre 0 du côté des grands ou au contraire des petits exposants, selon le signe de la différence $z_0 - z_1$ ou de la courbure de $s_1(z)$.

En effet, si on évalue $s_0(z)$ et $s_1(z)$ par des paraboles :

$$s_0(z) = a_0(z - z_0)^2 \quad ; \quad s_1(z) = a_1(z - z_1)^2 + \text{constante}, \quad (2.127)$$

la densité d'action résultante s'écrit :

$$s(z) = a(z - z_*)^2 + \text{constante}. \quad (2.128)$$

avec $a = a_0/\Gamma + a_1$ et $z_* = (a_0 z_0/\Gamma + a_1 z_1)/a$. Qualitativement, l'effet physique recherché pour les fluctuations est de favoriser statistiquement les larges exposants, ce qui est équivalent, dans cette description, à $z_* > z_0$. Un rapide calcul montre que ce sera le cas si deux conditions sont remplies : $a_1 < 0$ (la courbure de $s_1(z)$ est inverse de celle de $s_0(z)$) et $z_1 < z_0$.

On constate donc que l'action des fluctuations n'est pas universelle et dépend de la forme choisie pour les corrélations du bruit. En particulier, le modèle iii) ne remplit pas l'un des deux critères et doit donc être rejeté.

Ensuite, il convient de rechercher une valeur de Γ (si elle existe) compatible à la fois avec la valeur de a et celle de z_* estimées à partir des simulations directes et données au chapitre 1. Le modèle ii) se révèle alors être le plus apte à rendre compte de la physique émergeant du modèle GOY, car il possède le minimum z_1 le plus éloigné de z_0 et permet ainsi de décentrer davantage la courbe obtenue à l'ordre 0.

Malheureusement, cela reste insuffisant pour décrire correctement les valeurs $a = 45$ et $z_* = 0.75$ obtenues pour le régime dominant asymptotiquement dans la limite $Re \rightarrow \infty$. La figure 2.10 montre la courbe $s_0(z)/\Gamma + s_1(z)$ correspondant au modèle ii) avec une valeur de $\Gamma = 0.4$ telle que $a = 45$: le centre vaut alors seulement $z_* = 0.733$.

En revanche, la fonction de Cramer pour le domaine de 5 couches rigidement lié à la couche dissipative (qui présente les valeurs des paramètres $a = 29$ et $z_* = 0.74$) est remarquablement bien reproduite avec $\Gamma = 0.58$., comme le prouve la figure 2.9.

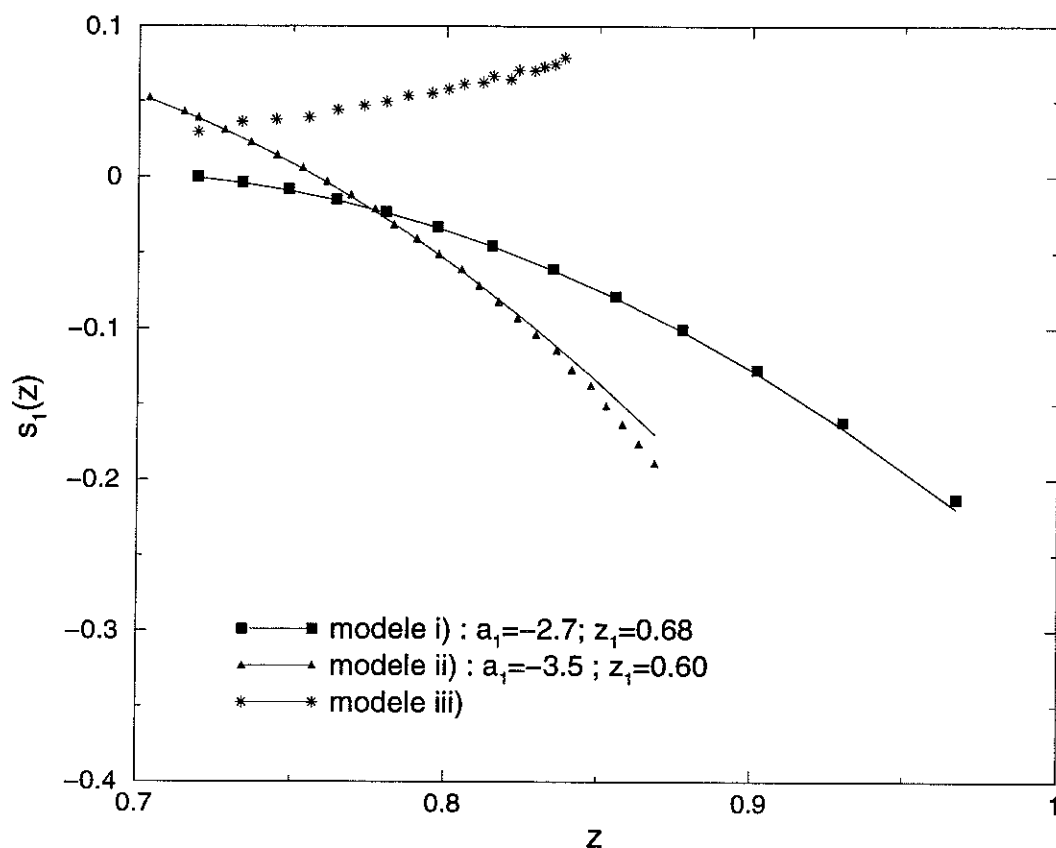


FIG. 2.8: évolution de $s_0(z)/\Gamma + s_1(z)$ en fonction de z pour le modèle ii) et $\Gamma = 0.58$. En trait plein, les régressions paraboliques

Il faut souligner que cette valeur de Γ permet aussi de corriger par l'effet des fluctuations les déviations au comportement parabolique de $s_0(z)$ survenant aux grands exposants.

On arrive alors au paradoxe suivant : le meilleur accord entre notre approche et la physique des structures cohérentes du modèle GOY concerne le domaine de couches pourtant soumis aux fluctuations les plus fortes (puisque leur ordre de grandeur est inversement proportionnel au paramètre a). Notre sentiment est que l'hypothèse d'un bruit de moyenne nulle est sans doute fausse dans ce domaine qui d'après nous, constituerait ultimement l'essentiel de la zone inertielle. Il est en effet tout à

fait envisageable que dans leur propagation vers les petites échelles, les structures cohérentes rencontrent davantage les défauts qui remontent le courant que ceux qui vont dans le même sens qu'elles. Mais il est difficile d'évaluer cet effet et l'introduction d'un second paramètre ajustable ne permet plus une confrontation critique entre les simulations directes et l'analyse du modèle stochastique.

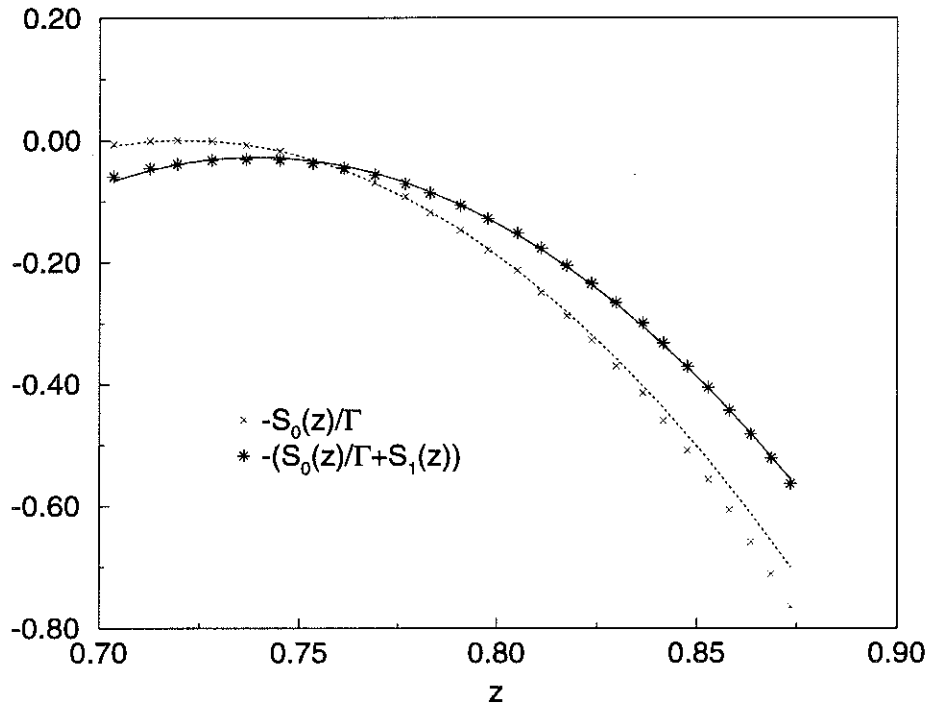


FIG. 2.9: évolution de $s_1(z)$ en fonction de z pour le modèle ii) et $\Gamma = 0.58$. En trait plein, les régressions paraboliques.

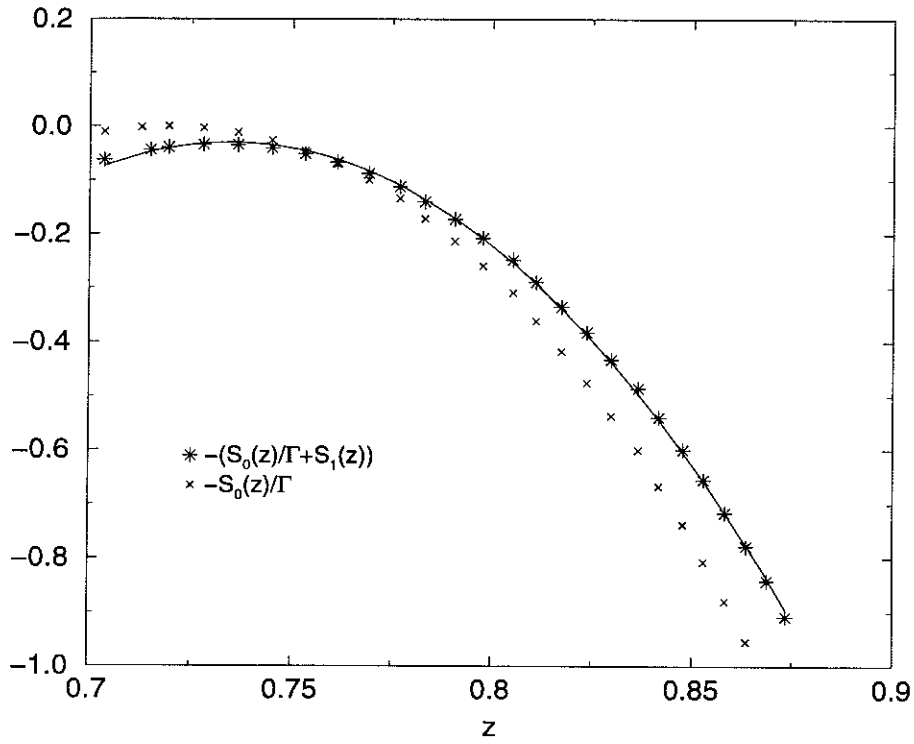


FIG. 2.10: évolution de $s_0(z)/\Gamma + s_1(z)$ en fonction de z pour le modèle ii) et $\Gamma = 0.4$. En trait plein, les régressions paraboliques

Annexes du Chapitre 2

2.6 Correspondance entre des équations stochastiques au sens de Ito ou de Stratonovich

Le but de cette annexe est d'explicitier le passage d'une représentation à la Stratonovich à celle de Ito pour une équation stochastique.

Nous partons de la version à la Stratonovich de l'équation 2.10 exprimée entre deux points de discrétisation temporelle :

$$\Delta \mathbf{b}_i = \mathbf{b}(t_{i+1}) - \mathbf{b}(t_i) = \mathbf{N} \left[\frac{\mathbf{b}(t_{i+1}) + \mathbf{b}(t_i)}{2} \right] \Delta t + D \left[\frac{\mathbf{b}(t_{i+1}) + \mathbf{b}(t_i)}{2} \right] \Delta \mathbf{W}_i \quad (2.129)$$

où $\Delta \mathbf{W}_i$ représente l'incrément d'un mouvement brownien et vérifie donc :

$$\langle \Delta \mathbf{W}_i \rangle = 0 \quad , \quad \langle \Delta \mathbf{W}_i \Delta \mathbf{W}_j \rangle = \Gamma \Delta t \delta_{ij} . \quad (2.130)$$

Ceci permet d'estimer $\Delta \mathbf{W}_i = O(\Delta t^{1/2})$. On peut alors évaluer la différence entre $(\mathbf{b}(t_{i+1}) + \mathbf{b}(t_i))/2$ et $\mathbf{b}_i$ par :

$$\frac{\mathbf{b}(t_{i+1}) + \mathbf{b}(t_i)}{2} = \mathbf{b}_i + \frac{\Delta \mathbf{b}_i}{2} = \mathbf{b}_i + \frac{1}{2} D [\mathbf{b}(t_i)] \Delta \mathbf{W}_i + o(\Delta t) \quad (2.131)$$

puis procéder aux développements limités des termes $\mathbf{N}$ et D contribuant pour l'ordre $O(\Delta t)$ dans l'équation 2.129 :

$$\mathbf{N} \left[\frac{\mathbf{b}(t_{i+1}) + \mathbf{b}(t_i)}{2} \right] \Delta t = \mathbf{N} [\mathbf{b}(t_i)] \Delta t + o(\Delta t^{3/2}) \quad (2.132)$$

$$\begin{aligned} D \left[\frac{\mathbf{b}(t_{i+1}) + \mathbf{b}(t_i)}{2} \right] \Delta \mathbf{W}_i &= D [\mathbf{b}(t_i)] \Delta \mathbf{W}_i + \\ &\quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial D[\mathbf{b}(t_i)]}{\partial \mathbf{b}} \cdot D[\mathbf{b}(t_i)] \Delta \mathbf{W}_i \right) \Delta \mathbf{W}_i + o(\Delta t^{3/2}) \end{aligned}$$

Il ne reste alors plus qu'à tenir compte de la propriété 2.130 pour obtenir une version de l'équation 2.129 à la Ito :

$$\mathbf{b}(t_{i+1}) - \mathbf{b}(t_i) = \left[\mathcal{N}[\mathbf{b}(t_i)] + \frac{1}{2} \Gamma \mathcal{D}(t_i) \right] \Delta t + D[\mathbf{b}(t_i)] \Delta \mathbf{W}_i, \quad (2.133)$$

qui se différencie de la version selon Stratonovich par le terme de dérive :

$$\mathcal{D}_m(t_i) = \frac{\partial D_{mn}[\mathbf{b}(t_i)]}{\partial b_p} D_{pn}[\mathbf{b}(t_i)]. \quad (2.134)$$

2.7 Approximation adiabatique

Cette annexe est consacrée à une prévision de borne variationnelle pour la densité d'action $s_0(z)$ à laquelle on fait allusion à la fin de la section 2.4.5. Elle consiste à chercher des solutions optimales auto-similaires dans le domaine restreint des configurations du type :

$$\mathbf{b}(\tau) = e^{x(\tilde{\tau})} \mathbf{b}^0(\tilde{\tau}), \quad (2.135)$$

où $\mathbf{b}^0(\tau)$ est la solution déterministe d'exposant de croissance z_0 et $\tilde{\tau}$ peut être interprété comme un temps "propre" associé à la véritable position du pulse. Les variables $\tau(\tilde{\tau})$ et $x(\tilde{\tau})$ paramétrisent alors les variations locales de la vitesse et de l'amplitude du pulse, qui garde le même profil qu'en l'absence de bruit. Si (2.135) représente un instanton auto-similaire d'exposant d'échelle $z \neq z_0$, $x(\tilde{\tau})$ doit satisfaire la contrainte

$$x(\tilde{\tau} + T_0) - x(\tilde{\tau}) = (z - z_0) \log Q. \quad (2.136)$$

Après avoir reporté l'hypothèse (2.135) dans l'équation du mouvement (2.16), on projette suivant les deux directions $\Phi_{1r} = \mathbf{b}^0$ and $\Phi_{2r} = \frac{d\mathbf{b}^0}{d\tau}$, ce qui conduit à :

$$\frac{d\tilde{\tau}}{d\tau} \frac{dx}{d\tilde{\tau}} = \Phi_{1l} \cdot B \xi, \quad (2.137)$$

$$\frac{d\tilde{\tau}}{d\tau} - 1 = \Phi_{2l} \cdot B \xi. \quad (2.138)$$

Si on néglige les autres dimensions de l'espace configurationnel, (2.137) et (2.138) forment un système fermé de dimension 2, qui peut être reformulé selon :

$$\frac{dx}{d\tilde{\tau}} = \zeta_1, \quad (2.139)$$

$$1 - \frac{d\tau}{d\tilde{\tau}} = \zeta_2, \quad (2.140)$$

où les fonctions de corrélations de ζ_1 et ζ_2 vérifient

$$\langle \zeta_i(\tilde{\tau}) \zeta_j(\tilde{\tau}') \rangle = \frac{d\tau}{d\tilde{\tau}} V_{ij} \delta(\tilde{\tau} - \tilde{\tau}') \quad 1 \leq i, j, \leq 2, \quad (2.141)$$

avec

$$V_{ij} = \Phi_{il} \cdot B^t B \Phi_{jl}. \quad (2.142)$$

L'action gaussienne par pas de cascade associée à ce système stochastique restreint est donnée par :

$$\tilde{s} = \frac{1}{2} \int_0^{T_0} d\tilde{\tau} \left(\frac{d\tau}{d\tilde{\tau}} \right)^{-1} \zeta_i (V^{-1})_{ij} \zeta_j, \quad (2.143)$$

qui devient, une fois exprimée en termes des variables diffusives $x(\tilde{\tau})$ et $\tau(\tilde{\tau})$,

$$\begin{aligned} \tilde{s} = & \frac{1}{2} \int_0^{T_0} d\tilde{\tau} \left\{ \left(\frac{d\tau}{d\tilde{\tau}} \right)^{-1} \left[\dot{x}^2 (V^{-1})_{11} + 2\dot{x} (V^{-1})_{12} + (V^{-1})_{22} \right] + \frac{d\tau}{d\tilde{\tau}} (V^{-1})_{22} \right. \\ & \left. - \left[\dot{x} (V^{-1})_{12} + (V^{-1})_{22} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.144)$$

L'extrémisation de $\tilde{s}$ par rapport à $\frac{d\tau}{d\tilde{\tau}}$ conduit à

$$\frac{d\tau}{d\tilde{\tau}} = \left[(\dot{x}^2 (V^{-1})_{11} + 2\dot{x} (V^{-1})_{12} + (V^{-1})_{22}) V_{22} \right]^{1/2}, \quad (2.145)$$

et à une action effective pour la variable restante x

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{eff}[x(\tilde{\tau})] = & \int_0^{T_0} d\tilde{\tau} \left\{ \left[(\dot{x}^2 (V^{-1})_{11} + 2\dot{x} (V^{-1})_{12} + (V^{-1})_{22}) (V^{-1})_{22} \right]^{1/2} \right. \\ & \left. - \left[\dot{x} (V^{-1})_{12} + (V^{-1})_{22} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.146)$$

En supposant que les coefficients V_{11} , V_{12} et V_{22} ne varient guère dans l'intervalle de temps $[0, T_0]$, on peut en déduire une expression analytique pour $s_0(z)$ à partir de $\tilde{s}_{eff}$ simplement en remplaçant dans l'intégrale 2.146 $\dot{x}$ par $(z - z_0) \log Q / T_0$ (cela provient de (2.136)). En particulier, on obtient pour des différences $z - z_0$ suffisamment grandes,

$$s_0(z) \sim (z - z_0) \log Q \left\{ ((V^{-1})_{11} (V^{-1})_{22})^{1/2} - (V^{-1})_{12} \right\}, \quad (2.147)$$

c'est à dire un comportement linéaire, comme celui observé pour la solution du modèle (i).

2.8 Version discrète du calcul des fluctuations quadratiques

Cette annexe est consacrée au calcul de l'intégrale de chemin partielle $Z[\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{h}_f, \tau_f]$ apparaissant dans l'équation (2.85) de la section 2.5. La méthode est décrite dans de nombreux ouvrages mais, à notre connaissance, toujours pour une définition continue du temps. Lorsque nous avons voulu procéder aux calculs numériques, nous nous sommes heurtés au choix de discrétisation qui s'avère crucial pour évaluer la matrice $W(\tau)$ intervenant dans ce problème, notamment pour préserver sa propriété de symétrie. C'est pourquoi il nous semble utile de montrer comment chaque étape de la limite du continu trouve une transcription exacte dans le cas discret.

Reprenons l'action quadratique des fluctuations (2.106) discrétisée suivant la prescription de Stratonovich :

$$\delta^2 S[\mathbf{h}] = \frac{\Delta\tau}{2\Gamma} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \left[\frac{\mathbf{h}_{i+1} - \mathbf{h}_i}{\Delta\tau} - \mathcal{B}_i \frac{\mathbf{h}_{i+1} + \mathbf{h}_i}{2} \right]^2 + \frac{\mathbf{h}_{i+1} + \mathbf{h}_i}{2} \cdot \mathcal{V}'_i \frac{\mathbf{h}_{i+1} + \mathbf{h}_i}{2} \right\}, \quad (2.148)$$

Après l'addition d'un terme de bord $-\frac{1}{2\Gamma} \sum_{i=0}^{N-1} \{\mathbf{h}_{i+1} \cdot W_{i+1} \mathbf{h}_{i+1} - \mathbf{h}_i \cdot W_i \mathbf{h}_i\}$, l'action quadratique prend l'expression exacte :

$$\begin{aligned} \delta^2 \tilde{S}[\mathbf{h}] = & \frac{\Delta\tau}{2\Gamma} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \left[\tilde{Q}_i^{1/2} \left(\frac{\mathbf{h}_{i+1} - \mathbf{h}_i}{\Delta\tau} - \tilde{Q}_i^{-1} \left(\mathcal{B}_i - \frac{W_i + W_{i+1}}{2} \right) \frac{\mathbf{h}_{i+1} + \mathbf{h}_i}{2} \right) \right]^2 \right. \\ & \left. + \frac{\mathbf{h}_{i+1} + \mathbf{h}_i}{2} \cdot \tilde{\mathcal{V}}_i \frac{\mathbf{h}_{i+1} + \mathbf{h}_i}{2} \right\}, \end{aligned} \quad (2.149)$$

où

$$\tilde{Q}_i = 1 - \frac{\Delta\tau}{4} (W_{i+1} - W_i), \quad (2.150)$$

et

$$\tilde{\mathcal{V}}_i = \mathcal{V}'_i + {}^t \mathcal{B}_i \mathcal{B}_i - \frac{W_{i+1} - W_i}{2} - ({}^t \mathcal{B}_i - \frac{W_i + W_{i+1}}{2}) \tilde{Q}_i^{-1} (\mathcal{B}_i - \frac{W_i + W_{i+1}}{2}). \quad (2.151)$$

Alors $\delta^2 \tilde{S}[\mathbf{h}]$ apparaît comme l'intégrale sur le temps d'un unique carré si et seulement si pour $0 \leq i \leq N-1$, W_i vérifie l'équation de Ricatti :

$$\mathcal{V}'_i + {}^t \mathcal{B}_i \mathcal{B}_i - \frac{W_{i+1} - W_i}{2} - ({}^t \mathcal{B}_i - \frac{W_i + W_{i+1}}{2}) \tilde{Q}_i^{-1} (\mathcal{B}_i - \frac{W_i + W_{i+1}}{2}) = 0. \quad (2.152)$$

On remarque que (2.152) impose à W_i de rester symétrique à tout instant, pourvu que W_0 (arbitraire à ce niveau) soit choisie comme telle.

L'équation de Ricatti peut être résolue au moyen d'un changement de variable matriciel :

$$(\mathcal{B}_i + \frac{W_i + W_{i+1}}{2}) (\frac{U_i + U_{i+1}}{2}) = \tilde{Q}_i \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta\tau}. \quad (2.153)$$

A partir de l'expression (2.150) de $\tilde{Q}_i$, il est facile de montrer que l'équation (2.153) est équivalente à (2.121).

Puis, en multipliant chaque membre de (2.152) sur la droite par $\frac{U_i + U_{i+1}}{2}$, on obtient pour $0 \leq i \leq N - 1$

$$\frac{W_{i+1}U_{i+1} - W_iU_i}{\Delta\tau} = -{}^t\mathcal{B}_i \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta\tau} + ({}^t\mathcal{B}_i\mathcal{B}_i + \mathcal{V}'_i) \frac{U_i + U_{i+1}}{2}. \quad (2.154)$$

En prenant la demi-somme des relations (2.154) exprimées à deux dates successives repérées par les indices $i - 1$ et i (et $1 \leq i \leq N - 1$), et en utilisant (2.121) après avoir noté que $\frac{W_{i+1}U_{i+1} - W_{i-1}U_{i-1}}{2\Delta\tau} = \frac{(W_{i+1}U_{i+1} + W_iU_i) - (W_iU_i + W_{i-1}U_{i-1})}{2\Delta\tau}$, on peut éliminer W et vérifier que U obéit à l'équation d'Euler, version discrétisée (2.107), comme nous l'avions annoncé dans la section 2.5.1 c).

Ainsi avons-nous prouvé que si U est une matrice inversible sur tout l'intervalle $[0, \tau_f]$, alors l'action quadratique $\delta^2 S$ est positive, puisque dans ce cas W existe à tout instant (grâce à (2.153)) et permet de transformer l'action quadratique initiale en l'intégrale temporelle d'un unique carré.

Montrons maintenant que ces matrices conduisent à une expression compacte de $Z[\mathbf{h}_0 = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{h}_f, \tau_f]$. Nous pouvons tout d'abord noter que (2.153) et (2.154) constituent $2N$ relations à $2(N + 1)$ inconnues $\{U_0, \dots, U_N\}$, $\{W_0, \dots, W_N\}$. Ceci nous laisse un certain arbitraire pour W_0 and U_0 . Dans le cas particulier où $\mathbf{h}_0 = \mathbf{0}$, le choix le plus pratique s'avère $U_0 = 0$ and $W_0 U_0 = 1$ (relations qui peuvent être conçues comme la limite pour $\epsilon \rightarrow 0^+$ de $U_0 = \epsilon$ et $W_0 = \epsilon^{-1}$, de telle sorte que W_0 est effectivement symétrique). L'examen de (2.153) et de (2.154) révèle alors que U_i et W_i se comportent alors respectivement comme $i\Delta\tau$ et $(i\Delta\tau)^{-1}$ à l'ordre dominant en $\Delta\tau$ pour $1 \leq i \ll N$. Par exemple, W_1 vérifie le résultat exact $W_1 = (\Delta\tau)^{-1} - \frac{\mathcal{B}_0 + {}^t\mathcal{B}_0}{2} + ({}^t\mathcal{B}_0\mathcal{B}_0 + \mathcal{V}'_0)$.

Ensuite, en introduisant un nouveau champ ψ_{i+1} (avec $0 \leq i \leq N-1$) comme

$$\psi_{i+1} = \mathbf{h}_{i+1} - \mathbf{h}_i - \Delta\tau \tilde{Q}_i^{-1} \left(\mathcal{B}_i + \frac{W_i + W_{i+1}}{2} \right) \frac{\mathbf{h}_i + \mathbf{h}_{i+1}}{2}, \quad (2.155)$$

on peut reformuler la quantité $Z[\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{h}_f, \tau_f]$ qui nous intéresse en :

$$Z[\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{h}_f, \tau_f] = e^{-\frac{1}{2\Gamma} \mathbf{h}_f \cdot W_N \mathbf{h}_f} \int \mathcal{D}\mathbf{h} \delta^d(\mathbf{h}_N - \mathbf{h}_f) e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \psi_{i+1} \cdot \tilde{Q}_i \psi_{i+1}}, \quad (2.156)$$

avec la mesure d'intégration $\mathcal{D}\mathbf{h}$:

$$\mathcal{D}\mathbf{h} = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{d\mathbf{h}_{i+1}}{(2\pi\Gamma\Delta\tau)^{d/2}}. \quad (2.157)$$

Avec l'aide de (2.153), le changement de variable (2.155) peut être revu comme

$$\psi_{i+1} = \mathbf{h}_{i+1} - \mathbf{h}_i - \left(\frac{U_{i+1} - U_i}{2} \right) \left(\frac{U_i + U_{i+1}}{2} \right)^{-1} (\mathbf{h}_i + \mathbf{h}_{i+1}). \quad (2.158)$$

Cette relation peut être facilement inversée en posant $\mathbf{h}_i = U_i \zeta_i$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \psi_{i+1} &= \left\{ \frac{U_i + U_{i+1}}{2} - \frac{U_{i+1} - U_i}{2} \left(\frac{U_i + U_{i+1}}{2} \right)^{-1} \frac{U_{i+1} - U_i}{2} \right\} (\zeta_{i+1} - \zeta_i) \\ &= U_{i+1} \left(\frac{U_i + U_{i+1}}{2} \right)^{-1} U_i (\zeta_{i+1} - \zeta_i) = \left(\frac{U_i^{-1} + U_{i+1}^{-1}}{2} \right)^{-1} (\zeta_{i+1} - \zeta_i). \end{aligned}$$

d'où nous en déduisons (sous l'hypothèse que $\mathbf{h}_0 = \mathbf{0}$) que pour $0 \leq i \leq N-1$,

$$\mathbf{h}_{i+1} = U_{i+1} \left[\sum_{j=0}^i \left(\frac{U_j^{-1} + U_{j+1}^{-1}}{2} \right) \psi_{j+1} \right]. \quad (2.159)$$

Puisque $\mathbf{h}_{i+1}$ dépend linéairement des ψ_{j+1} d'indice j inférieur à i , seul le bloc diagonal $U_{i+1} \left(\frac{U_i^{-1} + U_{i+1}^{-1}}{2} \right)$ est à prendre en compte dans le calcul du Jacobien associé au changement de variable. On trouve alors :

$$J_N \equiv \left| \frac{\partial \mathbf{h}_{i+1}}{\partial \psi_{j+1}} \right| = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{\det(U_i + U_{i+1})}{\det 2U_i}. \quad (2.160)$$

Pour faire respecter la condition limite $\mathbf{h}_N = \mathbf{h}_f$ à l'instant τ_f au niveau des nouvelles variables ψ_i , on introduit la représentation Fourier de la fonction δ :

$$\delta^d(\mathbf{h}_f - \mathbf{h}_N) = \int \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{(2\pi)^d} e^{-i\boldsymbol{\alpha} \cdot [\mathbf{h}_f - \sum_{i=0}^{N-1} \frac{U_i^{-1} + U_{i+1}^{-1}}{2} \psi_{i+1}]}. \quad (2.161)$$

Puis l'intégration gaussienne sur les ψ_i nous mène à :

$$Z[\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{h}_f, \tau_f] = \prod_{i=0}^{N-1} \left\{ \frac{\det(U_i + U_{i+1})}{\det 2U_i} \times \frac{1}{\sqrt{\det \tilde{Q}_i}} \right\} e^{-\frac{1}{2\Gamma} \mathbf{h}_f \cdot W_N \mathbf{h}_f} \times \int \frac{d\alpha}{(2\pi)^d} e^{-i\alpha \cdot \mathbf{h}_f} e^{-\frac{\Delta\tau\Gamma}{2} \alpha \cdot G \alpha}, \quad (2.162)$$

où

$$G = U_N \left[\sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{U_i^{-1} + U_{i+1}^{-1}}{2} \right) \tilde{Q}_i^{-1} \left(\frac{{}^t U_i^{-1} + {}^t U_{i+1}^{-1}}{2} \right) \right] {}^t U_N. \quad (2.163)$$

L'opérateur non local G se simplifie beaucoup si on adopte les conditions initiales singulières déjà mentionnées : $U_0 = \epsilon$, $W_0 = \epsilon^{-1}$ avec $\epsilon \rightarrow 0^+$. Dans ce cas, G est complètement dominé par le premier terme de la série figurant dans le membre de droite de (2.163) qui diverge comme ϵ^{-1} et on estime, à l'ordre dominant en ϵ :

$$G \approx \frac{1}{\Delta\tau} U_N \left(U_0^{-1} W_0^{-1} {}^t U_0^{-1} \right) {}^t U_N. \quad (2.164)$$

Enfin on peut effectuer la sommation sur α . Puisque G^{-1} disparaît pour la limite $\epsilon \rightarrow 0^+$, on obtient :

$$Z[\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{h}_f, \tau_f] = \left(\frac{1}{2\pi\Gamma\Delta\tau} \right)^{d/2} \frac{\det(U_0 + U_1)}{\det U_N} \times \prod_{i=1}^{N-1} \left\{ \frac{\det(U_i + U_{i+1})}{\det 2U_i} \frac{1}{\sqrt{\det \tilde{Q}_i}} \right\} e^{-\frac{1}{2\Gamma} \mathbf{h}_f \cdot W_N \mathbf{h}_f}. \quad (2.165)$$

Pour obtenir le résultat final (2.113) de la section 2.5.1 d), il ne reste plus qu'à prendre la limite du continu $\Delta\tau \rightarrow 0$ pour laquelle le produit infini figurant devant l'exponentielle de la relation (2.165) devient $\left(\frac{1}{2\pi\Gamma\Delta\tau} \right)^{d/2} \frac{1}{\sqrt{\det U_N}}$.

2.9 Modèles simples et solubles de fonctionnelles quadratiques

Nous nous proposons de montrer que le comportement quadratique observé section (2.5.2) pour les quantités $\log \det U(\tau)$ et $\log \det W(\tau)$ peut se comprendre uniquement à partir des propriétés de la variance du bruit choisie au départ.

Pour cela, nous allons définir une action quadratique modèle :

$$S_2[\mathbf{x}] = \frac{1}{2} \int_0^\tau d\tau (\dot{\mathbf{x}} \cdot Q \dot{\mathbf{x}}) \quad (2.166)$$

où, comme dans (2.90), Q^{-1} représente la variance du forçage aléatoire $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})B\xi$. Nous allons nous restreindre au cas du modèle ii) en choisissant pour champ cohérent $\mathbf{b}$ le champ déterministe. La matrice Q est alors diagonale et vérifie :

$$Q_{nn}^{-1} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) \left(C_{n-1}^0 C_{n-2}^0 \right)^2. \quad (2.167)$$

Précisons que $S_2[\mathbf{x}]$ n'a aucun sens physique dans le problème qui nous concerne, et ne correspond pas par exemple à l'action des fluctuations quadratiques autour de la solution déterministe. Mais ce choix permet d'isoler l'effet d'une masse anisotrope au niveau du terme cinétique de l'action réelle.

Les matrices U et WU s'obtiennent comme les solutions des équations de Hamilton-Jacobi associées à S_2 , avec pour conditions initiales $U(0) = 0$ et $WU(0) = 1$. Pour pouvoir les comparer aux matrices impliquées section 2.5.2, il nous faut auparavant procéder au même changement de variable $\mathbf{y} = Q^{1/2}\mathbf{x}$, qui transforme l'expression (2.166) en :

$$S_2[\mathbf{y}] = \frac{1}{2} \int_0^\tau d\tau \left(\dot{\mathbf{y}} + \frac{d}{d\tau} (\log Q^{-1/2}) \mathbf{y} \right)^2 \quad (2.168)$$

Dans ce modèle sans couplage entre échelles, les matrices U et WU restent dia-

gonales à tout instant et s'obtiennent explicitement comme :

$$W_{nn}U_{nn} = \frac{\sqrt{Q_{nn}^{-1}(\tau)}}{\sqrt{Q_{nn}^{-1}(0)}} \quad (2.169)$$

$$U_{nn} = \frac{1}{\sqrt{Q_{nn}^{-1}(0)}} \frac{1}{\sqrt{Q_{nn}^{-1}(\tau)}} \int_0^\tau Q_{nn}^{-1}(\tau) d\tau \quad (2.170)$$

Nous pouvons donc relier le comportement temporel de U et W à celui de Q^{-1} .

Les propriétés d'auto-similarité de Q^{-1} se traduisent mathématiquement de la manière suivante :

$$Q_{nn}^{-1}(\tau) = e^{2A_0\tau} F(\tau - nT_0) \quad (2.171)$$

où $F(\tau)$ est une fonction vérifiant $F(\tau + dT_0) = F(\tau)$ à cause de la périodicité du réseau de couches.

Supposons que le pulse déterministe C soit centré sur la couche d'indice $n = 0$ à l'instant $\tau = 0$. Pour $n > 0$, C_n décroît très abruptement suivant $\exp -cr^n$, avec $r = (\sqrt{5} - 1)/2^4$, tandis que pour $n < 0$, C_n développe une traînée exponentielle $C_n \sim Q^{nz_0} \sim e^{nA_0T_0}$. Comme le réseau de couches est rendu périodique suivant un anneau, les bords du pulse doivent se raccorder dans une zone où leur amplitude résiduelle est la même. La répartition des couches de chaque côté du pulse est alors d'autant plus inégale que les comportements asymptotiques sont différents, ce qui nous amène à considérer que quasiment toutes les couches se situent dans la traînée exponentielle. Si on choisit de numérotter les couches à partir du maximum du pulse, on en déduit :

$$Q_{nn}(0) \sim e^{-4(n-d)A_0T_0} \quad (2.172)$$

Tant que le centre du pulse n'est pas arrivé sur l'échelle n (soit pour $\tau < nT_0$), $Q_{nn}^{-1}(\tau)$ décroît comme $e^{-2A_0\tau}$ (car C_n décroît alors comme $e^{-2A_0\tau}$). Lorsque $\tau \sim nT_0$, $Q_{nn}^{-1}(\tau)$ remonte très rapidement à la valeur maximum :

$$Q_{nn}^{-1}(\tau_n) = e^{2nA_0T_0}. \quad (2.173)$$

⁴ce comportement peut être déduit d'une analyse des différents comportements asymptotiques autorisés par l'équation du mouvement

Puis $Q_{nn}^{-1}(\tau)$ se remet à décroître exponentiellement jusqu'au nouveau passage du pulse.

A la lumière de ces aspects dynamiques, on peut distinguer deux comportements différents pour les éléments U_{nn} et W_{nn} , suivant que le pulse a atteint ou non la couche n .

Pour les couches $n > \tau/T_0$, l'intégrale figurant dans l'expression (2.170) est dominée par le voisinage de sa borne inférieure $\tau = 0$, tandis que pour $n < \tau/T_0$ elle est dominée par le voisinage du temps $\tau_n = nT$ qui correspond au passage du pulse et donc à la valeur maximale de Q_{nn}^{-1} .

Si $n > \tau/T_0$, on obtient donc les estimations :

$$W_{nn}U_{nn} = e^{-A_0\tau} \quad (2.174)$$

$$U_{nn}(\tau) \sim \frac{e^{A_0\tau}}{2A_0} \quad (2.175)$$

$$W_{nn}(\tau) \sim 2A_0 e^{-2A_0\tau}. \quad (2.176)$$

et si $n < \tau/T_0$:

$$\begin{aligned} W_{nn}U_{nn}(\tau) &\sim \sqrt{\frac{Q_{nn}^{-1}(\tau_n)}{Q_{nn}^{-1}(0)}} e^{-A_0(\tau-\tau_n)} \\ U_{nn}(\tau) &\sim \sqrt{\frac{Q_{nn}^{-1}(\tau_n)}{Q_{nn}^{-1}(0)}} e^{A_0(\tau-\tau_n)}, \\ W_{nn}(\tau) &\sim e^{-2A_0(\tau-\tau_n)} \end{aligned}$$

En utilisant (2.172) pour $Q_{nn}^{-1}(0)$ et (2.173) pour $Q_{nn}^{-1}(\tau_n)$, on en déduit que pour $n < \tau/T_0$.

$$W_{nn}(\tau)U_{nn}(\tau) \sim e^{2dA_0T_0} e^{-A_0\tau} \quad (2.177)$$

$$U_{nn}(\tau) \sim e^{2(d-n)A_0T_0} e^{A_0\tau}, \quad (2.178)$$

$$W_{nn}(\tau) \sim e^{2nA_0T_0} e^{-2A_0\tau}, \quad (2.179)$$

Ainsi nous pouvons conclure que le déterminant de $WU(\tau)$ décroît exponentiellement avec le temps comme $e^{dA_0\tau}$. Mais cette propriété n'est pas vérifiée séparément par les déterminants de $W(\tau)$ et $U(\tau)$. En effet comme le nombre de couches ayant

été franchies par le pulse augmente linéairement avec le temps, on montre facilement à partir des estimations précédentes que :

$$\det U \sim \left(\frac{1}{2A_0} \right)^{\tau/T_0} e^{3A_0 d\tau} e^{-A_0 \frac{\tau^2}{T_0}}, \quad (2.180)$$

et

$$\det W \sim \left(\frac{1}{2A_0} \right)^{-\tau/T_0} e^{-2A_0 d\tau} e^{+A_0 \frac{\tau^2}{T_0}}. \quad (2.181)$$

Chapitre 3

Arborescences et intermittence dans le modèle GOY

3.1 Motivation

Comme nous avons eu l'occasion de le dire à la fin du chapitre 1, on peut voir les maxima relatifs du flux d'énergie $\epsilon_n(t)$ pour $n > n_0$ dans l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + \Delta t_0]$ séparant l'occurrence de deux maxima relatifs successifs sur la couche n_0 , comme "attachés" à un arbre ayant sa racine au temps t_0 sur la couche n_0 de référence. S'intéresser à la statistique des premiers essais revient à suivre un chemin sans accident sur cet arbre, mais on peut également jeter son dévolu sur la statistique des maxima absolus de $\epsilon_n(t)$ pour $t \in [t_0, t_0 + \Delta t_0]$ et étudier son évolution avec n . C'est sans surprise que l'on trouve une fonction de Cramer pour ces maxima absolus centrée sur une valeur de z'_* notablement supérieure à celle obtenue pour les premiers essais, comme nous le préciserons dans la section suivante. Ceci est lié aux phénomènes de duplication de pulses (traduit en termes de ramifications sur l'arbre) conduisant à une prolifération des chemins possibles. Ce phénomène étant hautement non-linéaire et échappant à une description semi-classique à base d'instantons, nous l'avons introduit de manière phénoménologique en considérant qu'il peut survenir de manière aléatoire à chaque pas de la cascade.

Ce travail a été réalisé avec Patrick Butaud (CRTBT).

3.2 Présentation des statistiques des maxima absolus du flux d'énergie

Nous avons déjà présenté les résultats concernant les structures cohérentes dans le chapitre 1. Ils doivent être comparés avec ceux concernant les maxima absolus du flux d'énergie ϵ_n .

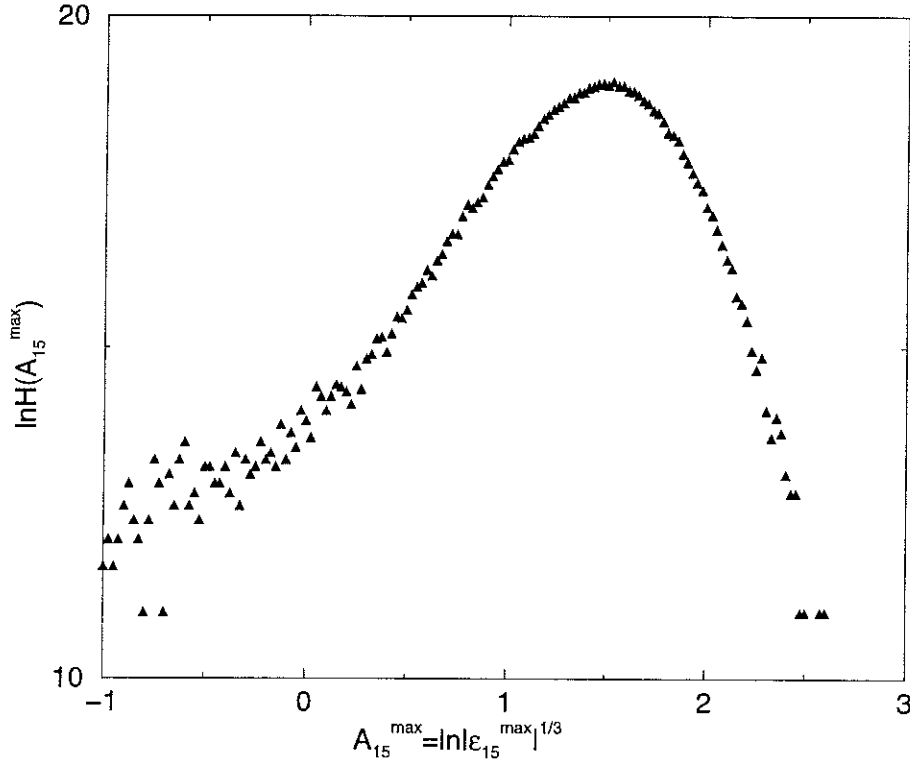


FIG. 3.1: histogramme des maxima absolus du flux d'énergie, mesurés sur la couche 15 du modèle GOY, pour un nombre de Reynolds $Re = 10^9$.

La figure 3.1 montre l'histogramme de la variable $\max_n \log(|\epsilon_n|/|\epsilon_{n_0}|)^{1/3}$, enregistré sur la couche $n = 15$. Les évolutions avec n de la moyenne D'_n et de la variance $\Sigma_n'^2$, déduites de la partie gaussienne des histogrammes, sont représentées respectivement sur la figure 3.2 et la figure 3.3.

Nous pouvons constater que, contrairement au cas des objets cohérents, un comportement linéaire, synonyme de statistique invariante d'échelle, se dégage sur l'ensemble du domaine inertiel. Dans le cas de la variance, on distingue cependant des

oscillations autour de ce comportement, mais elles sont nettement réduites lorsqu'on augmente le nombre de Reynolds.

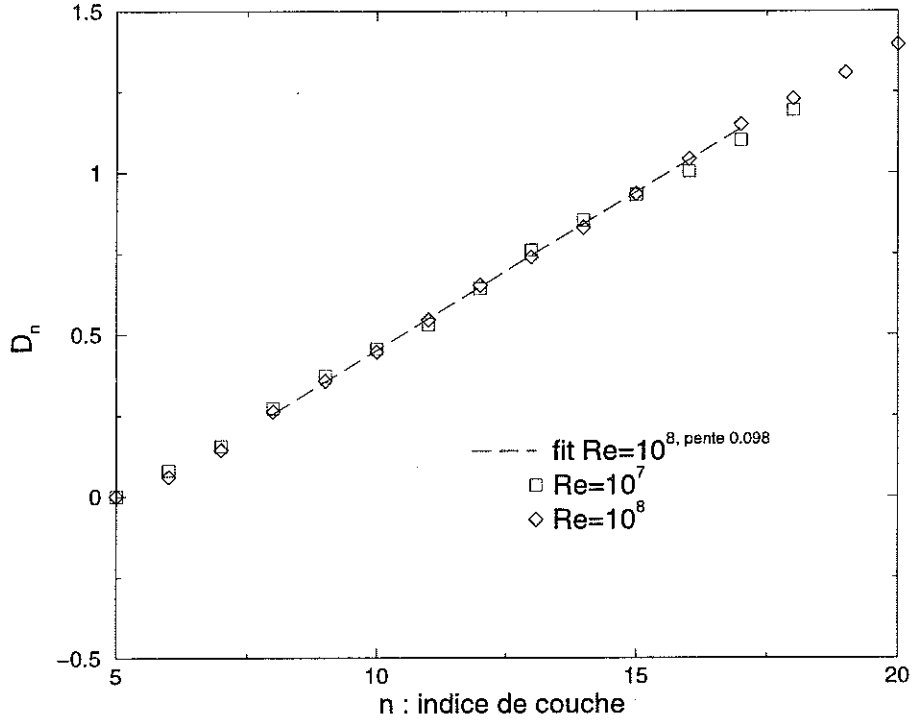


FIG. 3.2: évolution de la moyenne des histogrammes des maxima absolus en fonction de l'indice de couche pour deux nombres de Reynolds différents.

Reprenons alors la variable z introduite pour mesurer le taux de croissance des structures et, par extension, définie ici via la relation :

$$\max_{[t_0, t_0 + \Delta t_0]} |\epsilon_n|^{1/3} \sim Q^{n(z-2/3)} \quad (3.1)$$

Elle est distribuée suivant une densité de probabilité que nous noterons $P'_n(z)$, et on peut établir à partir des pentes estimées sur les figures 3.2 et 3.3 que

$$P'_n(z) \sim e^{ns'(z)} \sim e^{-na'(z-z'_*)^2}, \quad (3.2)$$

avec $z'_* = 0.81$ et $a' = 102$.

Comme nous l'avions annoncé, il existe donc un biais très prononcé entre ces valeurs et celles correspondant à la fonction de Cramér relative aux structures cohérentes.

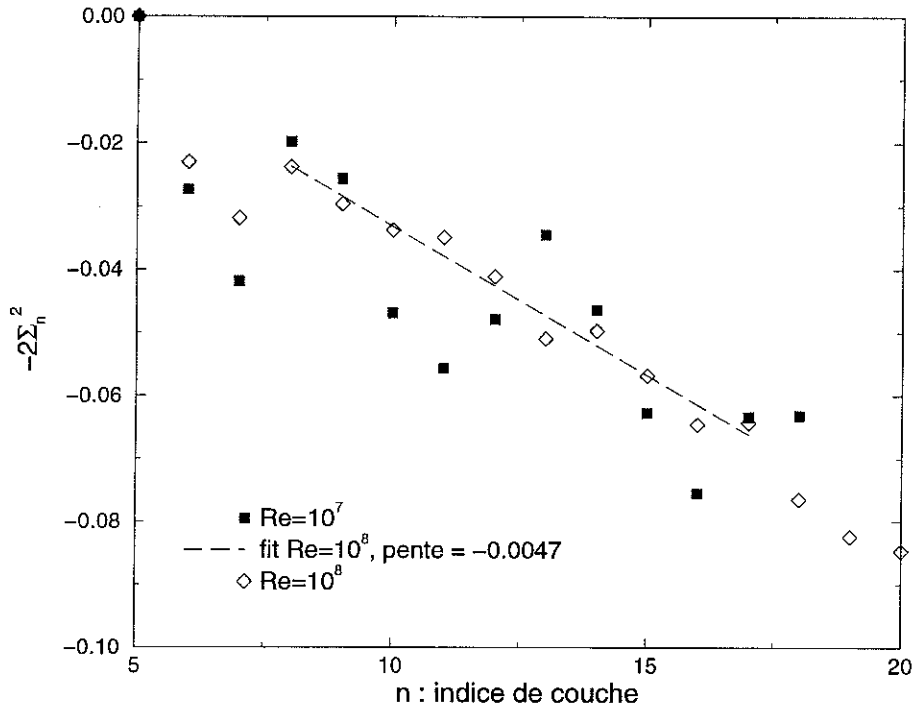


FIG. 3.3: évolution de la variance des histogrammes des maxima absolus en fonction de l'indice de couche pour deux nombre de Reynolds différents.

3.3 Modélisation du phénomène de duplication des structures sur des arbres aléatoires

3.3.1 Principe et limitations du modèle le plus simple

Le modèle phénoménologique le plus simple que nous avons envisagé équivaut à considérer qu'à chaque étape de la cascade, un maximum relatif du signal ϵ_n peut se dédoubler en deux maxima relatifs de ϵ_{n+1} , et que la quantité $a = \log |\epsilon_{n+1}|^{1/3} - \log |\epsilon_n|^{1/3}$ associée séparément à chacun de ces deux liens est distribuée aléatoirement selon une gaussienne d'écart-type unité.

$$\rho(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}}. \quad (3.3)$$

Les diverses réalisations de $\log |\epsilon_n|^{1/3}$ peuvent ainsi être rangées sur un arbre de Cayley. Le nombre de noeuds de la $n^{\text{ième}}$ génération est censé représenter le nombre $N_{\max}(n)$ de maxima relatifs répertoriés par temps de retournement de l'échelle de

référence n_0 . Mais parce que les lois de puissance observées sur la figure 1.1 du chapitre 1 diffèrent de 2^n , il convient de restreindre le nombre de sites en laissant aux structures la possibilité de ne pas se dupliquer à chaque étape de la cascade, comme le suggère un cas particulier schématisé sur la figure 3.4 .

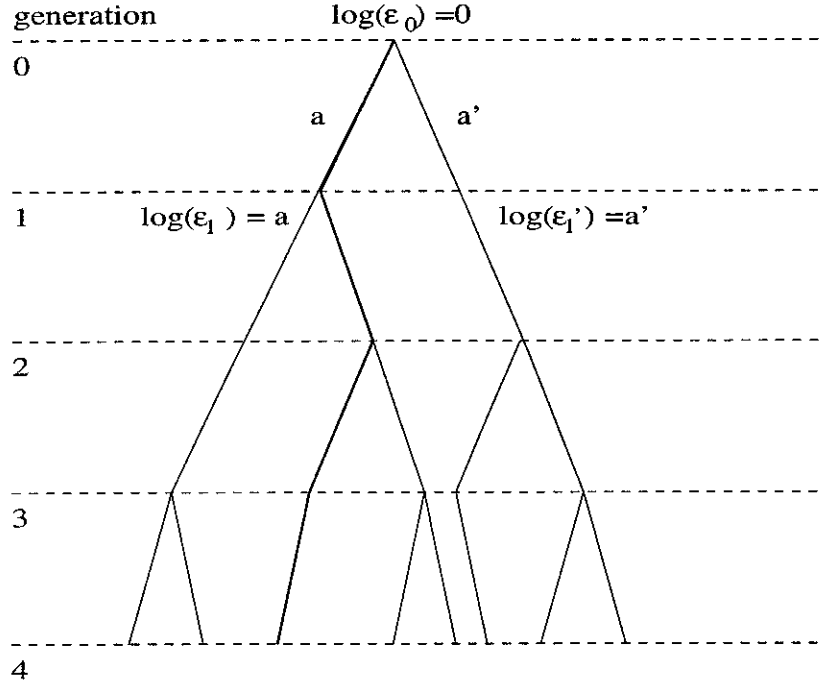


FIG. 3.4: schématisation d'une structure en arbre. En gras, est représenté le "chemin principal" menant au maximum absolu de la génération $n^{\circ}4$, qui ne passe pas nécessairement par les maxima absolus des générations précédentes.

Cela nous amène à introduire un paramètre $\beta \in [0, 1]$ qui mesure la probabilité pour chaque site de donner naissance à deux fils, tandis que $1 - \beta$ désigne la probabilité complémentaire d'une unique filiation. Ainsi le nombre de sites associées à la génération croît comme $(1 + \beta)^n$ et le paramètre β doit être ajusté à la valeur 0.59, pour rendre compte de la région des couches notée i) où $N_{max}(n) \sim Q^{2/3n}$. Pour la région de couches ii), marquée par $N_{max}(n) \sim Q^{0.39n}$, on trouve plutôt $\beta = 0.31$.

Chaque chemin constitué par une suite contiguë de branches dans l'arbre correspond à une trajectoire cohérente. On peut déduire facilement la fonction densité de probabilité $P_n(x)$ de mesurer $\log |\epsilon_n|^{1/3}/n \sim x$ sur un site de la $n^{\text{ième}}$ génération.

Elle s'obtient par une convolution d'ordre n de la formule 3.3, qui donne

$$P_n(x) \sim e^{-n \frac{x^2}{2}}. \quad (3.4)$$

Pour reproduire la distribution de probabilité $P_n(z)$ déduite des simulations numériques du modèle GOY, on peut introduire au niveau de 3.3 une moyenne non nulle et une variance différente de 1 ou interpréter différemment la quantité additive portée par l'arbre en imposant la correspondance $x^2/2 = a(z - z^*)^2$. Cela conduit à :

$$x = \sqrt{2a}(z - z_*). \quad (3.5)$$

En revanche, la densité de probabilité $P'_n(x)$ associée au maximum absolu pour chaque génération sera obtenue par simulation numérique. La moyenne D'_n et la variance $\Sigma_n'^2$ de $P'_n(x)$ reproduiront les données numériques du modèle GOY à condition de vérifier le comportement suivant :

$$D'_n \sim \sqrt{2a}(z'_* - z_*) n \quad (3.6)$$

$$\Sigma_n'^2 \sim \frac{a}{a'} n \quad (3.7)$$

où l'on retrouve les paramètres (z_*, a) et (z'_*, a') des fonctions de Cramér déduites des statistiques des "premiers essais" et des maxima absolus.

Pour la région de couches notée i), compte tenu des valeurs déduites des simulations numériques pour ces quatre paramètres, cela revient à observer :

$$D'_n \sim 0.57 n \quad ; \quad \Sigma_n'^2 \sim 0.44 n, \quad (3.8)$$

tandis que pour la région de couches notée ii), les pentes à reproduire sont

$$D'_n \sim 0.45 n \quad ; \quad \Sigma_n'^2 \sim 0.28 n. \quad (3.9)$$

Or le comportement générique pour les modèles en arbres du type de ceux considérés ici est plutôt une croissance linéaire avec n de la valeur moyenne accompagnée d'une saturation de la variance. On peut s'en convaincre en établissant une analogie [19] entre l'évolution avec n de la statistique du maximum absolu et la dynamique d'un front unidimensionnel obéissant à une équation de type réaction-diffusion non-linéaire. Les détails de cet argument sont donnés dans l'annexe 3.4.

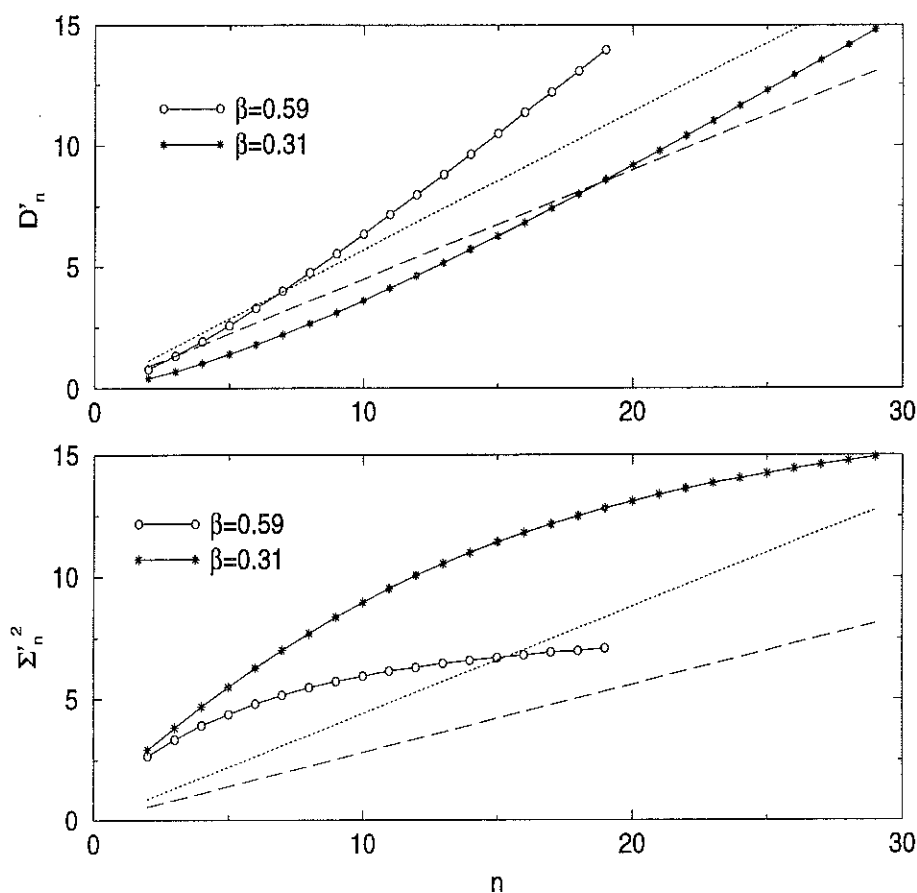


FIG. 3.5: évolution de la moyenne et la variance des histogrammes des maxima absolus en fonction du numéro de la génération considérée sur l'arbre. En traits interrompus, les comportements linéaires vérifiant (3.8) et (3.9).

Ils sont corroborés par les investigations numériques de ces modèles auxquelles nous nous sommes livrés et dont les résultats sont résumés sur la figure 3.5. Même si les comportements asymptotique sont très longs à atteindre, les déviations à la linéarité pour la variance sont marquées, et en outre, les pentes locales des graphes de D'_n et Σ_n^2 ne rendent jamais compte simultanément des valeurs obtenues pour le modèle GOY.

3.3.2 Raffinement du modèle et conclusion

Dans l'espoir d'obtenir un comportement linéaire à la fois pour la moyenne et la variance de la distribution des maxima absolus, nous avons été amenés à considérer diverses variantes plus ou moins compliquées et justifiées physiquement du modèle précédent.

Il s'avère que la tendance à la saturation de la variance est un phénomène très robuste tant que le nombre de sites sur l'arbre croît exponentiellement. Et de fil en aiguille, nous sommes venus à une nouvelle classe de modèles où la duplication n'est plus autorisée qu'à partir du site où réside le maximum absolu de chaque génération. Cette possibilité reste cependant aléatoire et gouvernée par le paramètre β .

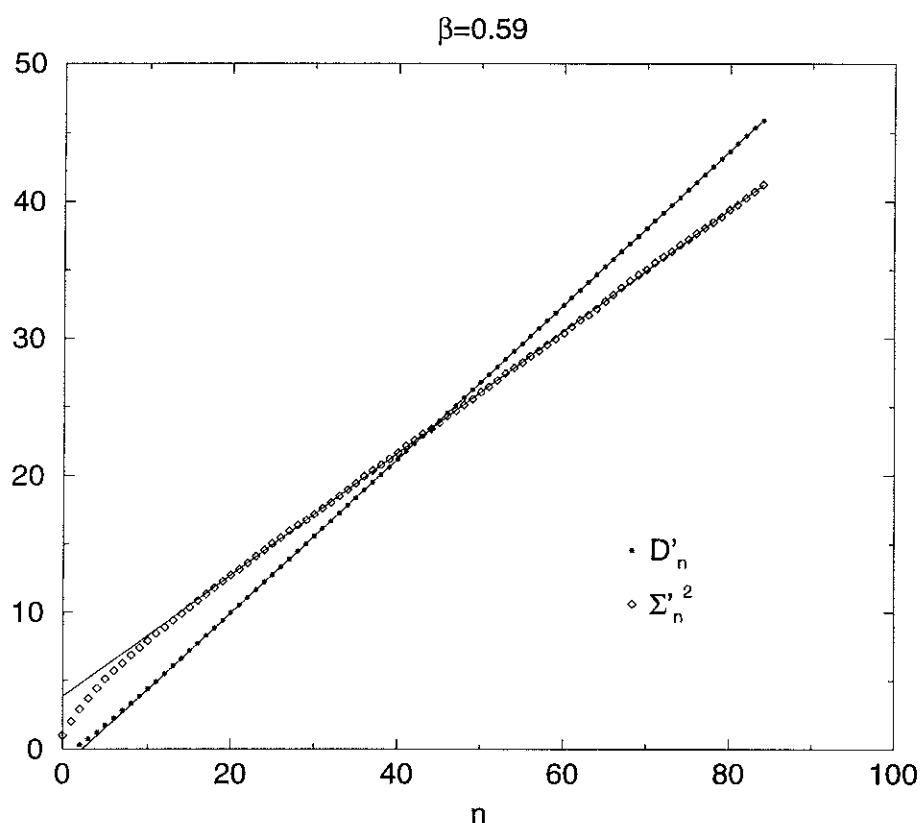


FIG. 3.6: évolution de la moyenne et la variance des histogrammes des maxima absolu en fonction du numéro de la génération considérée sur le second type d'arbre considéré. En traits pleins, des fits linéaires de pentes 0.56 et 0.44

Les résultats des simulations numériques pour la valeur $\beta = 0.59$ sont montrés sur la figure 3.6. Des comportements linéaires très propres sur toute la gamme d'itérations considérées sont observés et de surcroît, ils correspondent à des pentes de 0.56 et 0.44, respectivement pour la moyenne et la variance, qui rend compte de manière étonnante des statistiques du modèle GOY données par le jeu de formules (3.8) valant pour la région i). L'allure des histogrammes est donnée sur la figure 3.7. Le lecteur attentif notera sans doute une légère asymétrie dans la distribution de probabilité de sens opposé à celle obtenue sur la figure 3.1. On ne cherchera pas à creuser ce désaccord ici et on se contentera d'assimiler les deux courbes obtenues à des gaussiennes.

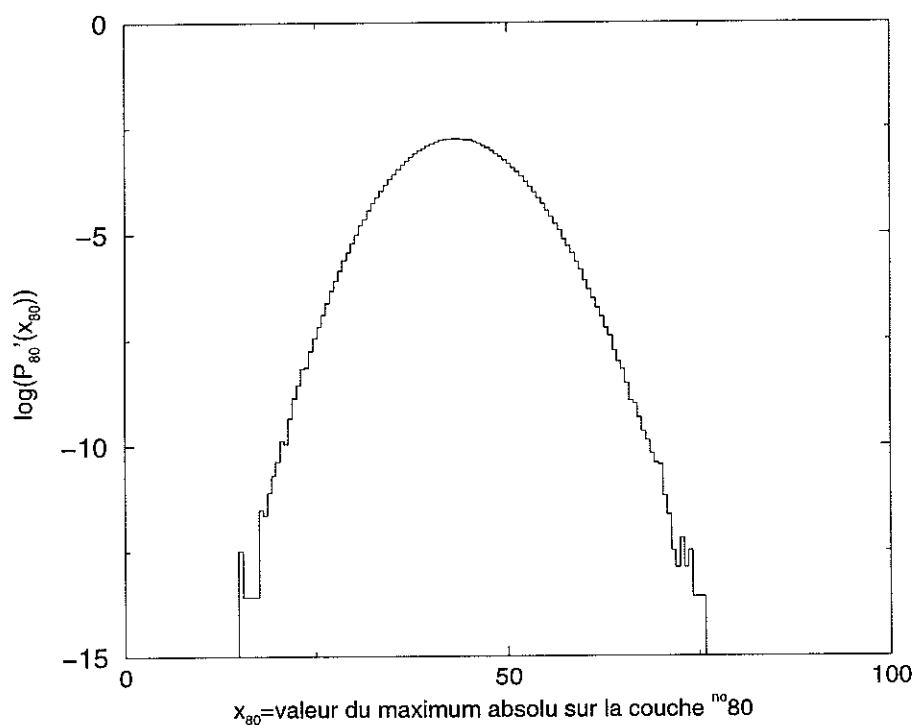


FIG. 3.7: histogramme pour les maxima absolus enregistrés sur la génération n°80 de l'arbre décrit dans la section 3.3.2.

La dérive linéaire de la variance n'est donc pas subordonnée à une croissance exponentielle du nombre de sites, puisque pour ce deuxième type de modèle, on peut estimer $N^{max}(n) \sim \beta n$. Le choix de la valeur $\beta = 0.59$ peut alors sembler paradoxal,

puisque déconnecté de la réalité du modèle GOY. Toutefois, l'image physique sous-jacente pourrait être la suivante. Tous les pics d'activité secondaire (i.e. ne portant pas le maximum absolu de $\epsilon_n(t)$) gardent la possibilité de se dupliquer à chaque étape de la cascade, si bien que le nombre total de maxima relatifs croît effectivement comme $N^{max}(n) \sim (1 + \beta)^n$. Mais lorsque cela arrive, leur second descendant est systématiquement d'amplitude plus faible que le premier, de sorte que le maximum absolu n'a aucune chance d'aller explorer ces "branches mortes" de l'arbre. Ainsi l'arbre vivant d'un point de vue dynamique aurait la structure proposée dans ce paragraphe, et non pas celle entièrement démocratique introduite dans le paragraphe précédent.

En essayant de rattacher statistiques des maxima absolus et des premiers essais, nous arrivons donc à une information fine et inattendue sur l'organisation globale du système turbulent dans le modèle GOY.

Nous concluons en disant que ce résultat valide également de manière indirecte l'hypothèse faite dans le chapitre 1, selon laquelle la région de couches i) préfigure le comportement asymptotique du système dans la limite des très grands nombre de Reynolds. En effet, c'est la seule qui, ultimement, semble compatible avec l'invariance d'échelle apparaissant très clairement dans les statistiques des maxima absolus.

Annexe du chapitre 3

3.4 Lien entre les statistiques des maxima absolus dans les structures en arbres et la propagation d'un front de réaction-diffusion

Notons $Q_n(x)$ la fonction de répartition du maximum absolu pour la $n^{\text{ième}}$ génération (c'est à dire la probabilité que le maximum absolu des réalisations de $\log |\epsilon_n|^{1/3}$ soit inférieur ou égal à la valeur x).

On peut établir une relation de récurrence entre les fonctions associées à deux générations successives, selon :

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(x) &= (1 - \beta) \int da \rho(a) Q_n(x - a) \\ &+ \beta \iint da da' \rho(a) \rho(a') Q_n(x - a) Q_n(x - a'), \end{aligned} \quad (3.10)$$

le principe étant que le chemin principal de $n + 1$ étapes suivi par un maximum absolu (i.e., l'ensemble des $n + 1$ sites qui mènent jusqu'à lui en partant de l'ancêtre commun) peut toujours être séparé en une première étape telle que $\log |\epsilon_1|^{1/3} = a$ suivie par un chemin de n étapes. Puis il faut tenir compte du fait que l'ancêtre commun a la probabilité $1 - \beta$ d'avoir un seul fils et la probabilité β d'en avoir deux et dans ce dernier cas, deux sous-arbres doivent être envisagés indépendamment.

En supposant que $Q_n(x)$ varie plus lentement que la distribution sur les liens $\rho(x)$, on peut procéder à un développement limité et à l'ordre dominant, on trouve l'équation non-linéaire discrète suivante :

$$Q_{n+1}(x) - Q_n(x) = -\beta Q_n(x) [1 - Q_n(x)] + \frac{1}{2}(1 - \beta) \frac{\partial^2 Q_n(x)}{\partial x^2}. \quad (3.11)$$

Lorsqu'on s'intéresse à la limite du continu de (3.11), on aboutit à une équation du type réaction-diffusion, connue sous le nom d'équation de Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov¹ (KPP) [45] :

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = -\beta Q(x, t) [1 - Q(x, t)] + \frac{1}{2}(1 - \beta) \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2}, \quad (3.12)$$

qui a été déjà amplement étudiée. Rappelons qu'une de ces propriétés marquantes est qu'elle admet des solutions de type onde solitaire qu'on écrira sous la forme :

$$Q(x, t) = f(x - ct). \quad (3.13)$$

Elles ont la forme de front d'onde reliant les états homogènes $f(-\infty) = 0$ (point fixe stable) et $f(+\infty) = 1$ (point fixe stable), se déplaçant à une vitesse constante.

De ces considérations, on peut en déduire le comportement de la moyenne et de la variance de la densité de probabilité $P'_n(x) = \frac{dQ_n(x)}{dx}$. Le fait que la vitesse c de l'onde solitaire soit constante implique directement que la moyenne de $P'_n(x)$ évolue linéairement avec n . La variance $\Sigma_n'^2$ est, quant à elle, reliée à la largeur du front. Pour un processus purement diffusif, on aurait évidemment retrouvé un comportement linéaire. En revanche, lorsqu'on tient compte des termes non-linéaires, la largeur Δx du front reste toujours d'ordre $\Delta x \sim O(1)$ au cours du mouvement, ce qui entraîne que $\Sigma_n'^2$ ne varie pas avec n .

¹parfois aussi identifiée comme l'équation de Fisher-Kolmogorov.

Chapitre 4

Structures cohérentes dans des modèles en couches du modèle de Kraichnan

4.1 Introduction

De profondes analogies existent entre la turbulence de Navier-Stokes et la turbulence du “scalaire passif”. Aux lois d’échelle des statistiques des vitesses d’un écoulement, anormales par comparaison avec les prévisions de Kolmogorov, correspondent celles des statistiques du scalaire, corrigeant de façon encore plus marquée les prévisions de Obukhov-Corrsin. Aux structures localisées des écoulements, constituées par les nappes ou les tubes de vorticité, répondent celles du scalaire, prenant l’apparence de concentrations de gradients dans des couches limites [58, 37].

Ces deux manifestations de l’intermittence, dont le lien, assez intuitif, n’a pourtant pas été encore quantitativement expliqué, persistent dans le modèle simplifié d’advection proposé par Kraichnan [47].

Bien que le champ de vitesse soit alors non intermittent, les fonctions de structure du scalaire passif présentent encore des exposants anormaux. Ils ont pour la première fois été calculés récemment par des techniques systématiques dans de nombreux

cas limites (grande dimensionnalité, champ de vitesse extrêmement irrégulier ou au contraire lisse).

De même, malgré la décorrélation temporelle du champ assurant le transport, des structures de type front sont encore observables sur les simulations numériques utilisant une méthode spectrale [23]. Des pics de concentration pour le gradient du scalaire ont aussi été identifiés dans un modèle unidimensionnel et compressible [68].

Devant de telles passerelles entre les deux types de turbulence, il était tentant de se pencher sur les modèles en couches d'advection et, suivant l'approche développée pour le modèle GOY, d'isoler des structures dont la croissance auto-similaire au cours de la cascade pourraient expliquer les lois d'échelle anormales observées.

Deux problèmes se posent d'emblée :

i) Contrairement au cas des modèles en couches symbolisant la turbulence de Navier-Stokes, aucune structure n'avait été encore mise en évidence dans les modèles en couches de turbulence "scalaire". Le bruit agissant ici de manière multiplicative, nous ne disposons pas de limite déterministe fournissant un point de départ naturel pour notre recherche. L'idée est alors de s'intéresser directement aux structures suffisamment singulières pour résister à l'effet des fluctuations. Leur signature devrait se retrouver dans la dépendance en échelle des moments d'ordre élevé, concernant les fluctuations du scalaire.

Cela suggère alors de suivre les auteurs de [7] sur le terrain des instantons. Les structures du scalaire sont produites par des configurations de la vitesse de poids gaussien optimal et les dynamiques de ces deux champs peuvent être déduites d'une approximation de type point-col dans une représentation en intégrale de chemin.

ii) Malheureusement, nous ne disposons pas du petit (ou grand) paramètre qui justifie pleinement une analyse semi-classique. Nous ne pouvons jouer sur la dimension comme dans [7]. D'autres instantons ont été cherchés directement sur les fonctions de structures d'ordre n supposé très grand [24]. Mais cela implique des conditions limites pour les dynamiques trop contraignantes en vue d'une intégration numérique car elles fixent la valeur du bruit au point d'arrivée. Nous avons alors choisi de faire le pari que parmi toutes les réalisations possibles, les structures auto-similaires

correspondant à une probabilité extrême du bruit jouent un rôle très particulier et peuvent expliquer les comportements asymptotiques des exposants des fonctions de structures. La confrontation de nos résultats avec l'“expérience” (les statistiques issues des simulations directes du modèle) permet *a posteriori* de juger de la validité de notre hypothèse.

Après un bref rappel sur les modèles en couches du scalaire passif que nous avons utilisés, nous expliquerons comment nous avons mis en évidence ces structures et quels enseignements elles nous apportent.

Ce travail a été réalisé conjointement avec Alessandra Lanotte (Observatoire de Nice - Côte d'Azur) et Luca Biferale (Université Tor Vergata - Rome).

4.2 Les différents modèles disponibles dans la littérature

La version sur réseaux de couches du modèle de Kraichnan pour l'advection d'un scalaire passif utilise la même discrétisation de l'espace de Fourier que le modèle GOY. Ainsi à chaque échelle n seront associées deux variables complexes $\theta_n(t)$ et $u_n(t)$ représentant les valeurs caractéristiques des fluctuations du scalaire passif et de la vitesse à ces échelles, soit respectivement $\delta_r \theta$ et $\delta_r u$ avec $r \sim 1/k_n \sim 1/Q^n$ (en reprenant les notations du chapitre 1).

L'évolution temporelle du scalaire passif $\theta_n(t)$ doit suivre les contraintes suivantes (qui sont strictement analogues aux contraintes du modèle GOY) :

- i) le terme linéaire est purement diffusif et est décrit par $-\kappa k_n^2 \theta_n$.
- ii) le terme non-linéaire d'advection est une combinaison de la forme $k_n \theta_{n'} u_{n''}$
- iii) les interactions entre échelles sont limitées aux proches voisins (n' et n'' valent $n \pm 1$ ou $n \pm 2$)

iv) en l'absence de forçage et de dissipation, le modèle doit conserver l'“énergie” du scalaire passif $E = \sum_n |\theta_n|^2$.

Enfin suivant l'esprit du modèle de Kraichnan, les variables de vitesse $u_n(t)$ sont des variables aléatoires, Gaussiennes, delta-corrélées en temps et suivant les échelles,

et leur variance vérifie une propriété d'auto-similarité :

$$\langle u_m(t)u_n(t') \rangle = \delta(t-t')k_m^{-\xi}\delta_{mn}, \quad (4.1)$$

où le paramètre ξ joue dimensionnellement le même rôle que celui du modèle de Kraichnan original, avec pour bornes physiquement acceptables $0 < \xi < 2$.

Si les propriétés i), ii), iv) sont également valides pour l'équation (1.7) exprimée dans l'espace de Fourier, en revanche la propriété iii) résulte d'une hypothèse de localité pour l'interaction entre les différents modes. Aussi peut-on s'attendre à ce que les modèles en couches pour l'advection d'un scalaire passif puissent le mieux rendre compte de la physique du modèle original pour $\xi = O(1)$.

Différents modèles ont été étudiés. Leur forme générale peut s'écrire d'une façon concise en utilisant des notations vectorielles :

$$\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} + \mathbf{D} = \mathbf{M}[\mathbf{u}]\boldsymbol{\theta}^* + \mathbf{F}, \quad (4.2)$$

Dans cette équation d'évolution, $\mathbf{F}$ est le terme de forçage aux grandes échelles et est usuellement choisi comme agissant uniquement sur la première couche $F_n = f(t)\delta_{0n}$; $\mathbf{D}$ est le terme de dissipation et d'après ii), $D_n = -\kappa k_n^2 \theta_n$; $\mathbf{M}[\mathbf{u}]$ est une matrice dépendant linéairement de $\mathbf{u}$ et de $\mathbf{k}$, avec des coefficients permettant de réaliser la condition iv). Enfin pour un modèle comprenant N couches, les conditions de bord sont fixées telles que : $u_i = \theta_i = 0$ pour $i = -2, -1, N, N+1$.

Pour le modèle de Kraichnan, les fonctions de structures d'ordre p peuvent s'écrire sous forme de lois de puissance, dont les exposants ζ_p sont universels, tandis que les constantes figurant devant ces lois dépendent du forçage et de la dissipation. Comme nous sommes intéressés uniquement par les exposants ζ_p , nous pourrions dans la suite oublier les effets de forçage et de dissipation dans l'équation différentielle stochastique (4.2) (la même restriction aux seuls effets inertiels prévaut dans la recherche des modes zéro). D'autre part, la construction des instantons que nous avons proposée au chapitre 2 suppose justement que les fluctuations du forçage à grande échelle seront rapidement oubliées dans la cascade.

Deux modèles en couches étudiés par L. Biferale et A. Wirth pour le problème du scalaire passif retiendront notre attention.

- Le premier dans l'ordre chronologique [12] correspond au terme d'advection suivant :

$$\begin{aligned} M_{mn}\theta_n^*(t) = & k_m (\theta_{m+1}^*(t)u_{m-1}^*(t) - \theta_{m-1}^*(t)u_{m+1}^*(t)) \\ & -k_{m-1} (\theta_{m-1}^*(t)u_{m-2}^*(t) + \theta_{m-2}^*(t)u_{m-1}^*(t)) \\ & +k_{m+1} (\theta_{m+2}^*(t)u_{m+1}^*(t) + \theta_{m+1}^*(t)u_{m+2}^*(t)) . \end{aligned} \quad (4.3)$$

Les couplages entre échelles rappellent ceux du modèle GOY, mais contrairement au cas du modèle étudié par Jensen et al [40], la symétrie de jauge (2.14) est ici interdite par l'absence de l'indice de conjugaison complexe des facteurs u_{m-1} et u_{m+1} . Ce choix a été dicté par le fait qu'il implique une discrétisation de la dynamique stochastique (4.2) beaucoup plus agréable.

Un des grands avantages des modèles en couches est de permettre des simulations numériques donnant les fonctions de structure jusqu'à des ordres très élevés. L. Biferale et A. Wirth ont ainsi calculé les variations des exposants ζ_p en fonction de p jusqu'à l'ordre 12, et certains de leurs résultats sont représentés sur la fig.4.5 (Par comparaison avec le modèle de Kraichnan original, rappelons que des progrès récents, basés sur une représentation Lagrangienne des trajectoires, ont permis un calcul fiable de ces exposants jusqu'à l'ordre 6 uniquement).

Comme pour le modèle original, des corrections anormales apparaissent pour toutes les fonctions de structure d'ordre $p > 2$, et tendent à disparaître dans la limite du régime laminaire. En revanche, on distingue un comportement asymptotique linéaire pour $p > 8$ sans équivalent dans les simulations [29] . Ce résultat constitue l'un des points de concordance avec notre approche et nous en discuterons dans quelques sections.

Notons qu'il était très important pour nous de disposer des valeurs de ζ_p pour des ordres les plus élevés possibles. En effet, les structures que nous rechercherons suivant un développement semi-classique, seront d'autant plus robustes vis à vis des fluctuations qu'elles seront rares, et la signature des ailes des distributions de probabilité se retrouve au niveau des moments aux grands ordres.

• Puisque l'intérêt des modèles en couches est de simplifier l'approche des dynamiques réelles, autant aller jusqu'au bout dans cette démarche et choisir le modèle le plus simple présentant encore de l'intermittence [9, 13, 2].

$$M_{mn} \theta_n^*(t) = k_{m+1} \theta_{m+1}^*(t) u_m^*(t) - k_m \theta_{m-1}^*(t) u_{m-1}^*(t). \quad (4.4)$$

En utilisant des variables réelles pour le scalaire et la vitesse, Biferale et Wirth ont cette fois obtenu une courbe qui, pour les exposants les plus élevés ($p = 11$), ne présente pas encore de comportement linéaire. Sur ce modèle, un calcul analytique du mode zéro dominant la fonction de structure d'ordre 4 a pu être réalisé de manière exacte, à condition de supposer une sorte de processus multiplicatif dans le passage d'une échelle à une autre [9].

4.3 Recherche des structures cohérentes

4.3.1 Quelques modifications préliminaires de la dynamique pour une expression plus pratique

Il nous faut procéder à quelques modifications de la dynamique (4.2) pour disposer de la forme la plus pratique pour une analyse semi-classique.

Tout d'abord, lorsqu'on omet les termes de forçage et de dissipation, il devient plus judicieux de travailler avec le champ gradient de vitesse défini comme pour le modèle GOY par $b_m = k_m u_n$, et qui transforme (4.2) en :

$$\frac{d\theta}{dt} = M[\mathbf{b}]\theta. \quad (4.5)$$

La dépendance en échelle des éléments de l'opérateur M est maintenant entièrement contenue dans la variable aléatoire $\mathbf{b}(\tau)$ dont les corrélations vérifient :

$$\langle b_m(t) b_{m'}^*(t') \rangle = \delta(t - t') k_m^{2-\xi} \delta_{mm'}. \quad (4.6)$$

Ensuite, pour des raisons identiques à celles expliquées au chapitre 2, section 2.1, nous devons considérer la dynamique (4.2) comme une équation stochastique de

Stratonovich. La formulation alternative selon Ito fait apparaître un terme supplémentaire de dérive :

$$\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} = -c_{ito} D \boldsymbol{\theta} + M[\mathbf{b}] \boldsymbol{\theta}, \quad (4.7)$$

Le coefficient c_{ito} est une constante positive qui vaut :

$$\begin{aligned} c_{ito} &= \frac{1}{2}(Q^\xi + Q^{-\xi} + Q^{\xi-2} + Q^{2-\xi} + Q^{2\xi-2} + Q^{2-2\xi}) \quad (\text{modèle complet}) \\ &= \frac{Q^2}{2}(1 + Q^{\xi-2}) \quad (\text{modèle minimal}). \end{aligned}$$

Pour les deux modèles considérés, la matrice D est diagonale et ses éléments reflètent directement la variance du bruit : $D_{mm} = k_m^{2-\xi}$. Cette propriété permet d'interpréter le terme de dérive de Ito comme une viscosité turbulente¹.

4.3.2 Dynamique des structures établie à partir d'un formalisme en intégrale de chemin

Nous allons dans un premier temps nous concentrer sur la recherche de structures cohérentes auto-similaires et réelles. Le but de ce chapitre est de calculer la fonction $f(h)$ représentant, dans le formalisme multifractal, la codimension de l'ensemble de ces solutions singulières, caractérisées par un exposant noté h . Si on observe le passage d'une telle singularité sur la couche n , sa probabilité s'écrit sous la forme :

$$P_n(\theta_n \sim Q^{-nh}) \sim e^{-nf(h)}. \quad (4.8)$$

Nous pouvons maintenant dérouler le formalisme instantons en suivant rigoureusement les mêmes étapes que dans les sections 2.2 et 2.3 du chapitre 2. Cela nous amène à introduire le champ ζ , "moment conjugué" de $\boldsymbol{\theta}$.

L'action effective formulée avant l'intégration gaussienne sur le bruit est donnée par :

$$S[\boldsymbol{\theta}, \zeta, \mathbf{b}] = \int_0^{t_f} dt \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{b} \cdot D \mathbf{b} + \zeta \cdot [\dot{\boldsymbol{\theta}} + c_{ito} D \boldsymbol{\theta} - M[\mathbf{b}] \boldsymbol{\theta}] \right\} \quad (4.9)$$

¹A noter que si l'invariance de jauge du modèle complet avait été respectée, le terme de dérive n'aurait pas été diagonal.

et les solutions extrémales vérifient les dynamiques :

$$\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} = -c_{ito}D\boldsymbol{\theta} + M[\mathbf{b}]\boldsymbol{\theta} \quad (4.10)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = c_{ito}D\boldsymbol{\zeta} - {}^tM[\mathbf{b}]\boldsymbol{\zeta} \quad (4.11)$$

tandis que la configuration du bruit $\mathbf{b}$ est imposée par l'équation subsidiaire :

$$\mathbf{b} = D {}^tM'[\boldsymbol{\theta}]\boldsymbol{\zeta}, \quad (4.12)$$

où la matrice $M'[\boldsymbol{\theta}]$ est implicitement définie par la relation $M'[\boldsymbol{\theta}]\mathbf{b} = M[\mathbf{b}]\boldsymbol{\theta}$.

On peut de nouveau choisir une représentation canonique de l'action : $\mathcal{S}[\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta}] = \int_0^{t_f} dt [\boldsymbol{\zeta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} - \mathcal{H}]$ et l'Hamiltonien de ce problème s'écrit :

$$\mathcal{H} = -\boldsymbol{\zeta} \cdot c_{ito}D\boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\zeta} \cdot M'[\boldsymbol{\theta}]D {}^tM'[\boldsymbol{\theta}]\boldsymbol{\zeta}. \quad (4.13)$$

Des symétries identiques à celles du modèle GOY sont présentes dans ce problème, à savoir l'invariance lors de la transformation $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{b}) \rightarrow (\lambda\boldsymbol{\theta}, \lambda^{-1}\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{b})$, où λ est une constante arbitraire, et l'invariance par translation dans le temps. Il en découle immédiatement que le recouvrement $\boldsymbol{\theta}(t) \cdot \boldsymbol{\zeta}(t)$ et la valeur de la pseudo-énergie $\mathcal{H}$ sont des quantités constantes dans le temps le long d'une trajectoire extrémale. Enfin le caractère extrémal de la trajectoire par rapport à une reparamétrisation du temps impose la condition supplémentaire $\mathcal{H} = 0$.

Au milieu de toutes ces analogies, pointons cependant deux différences très importantes pour la suite et décelables directement dans les expressions des variances du bruit respectives aux deux modèles.

- En l'absence d'un équivalent du petit paramètre Γ (qui a permis d'étudier la limite de faible largeur du bruit dans le chapitre 2), le terme de dérive de Ito est ici du même ordre de grandeur que le terme d'advection. Il en résulte qu'il ne peut être négligé dans la recherche des configurations optimales du bruit.

- Dans la version stochastique du modèle GOY, le comportement en loi d'échelles du bruit a été choisi de manière à ce que le niveau de bruit soit toujours adapté à

la structure cohérente et il ne peut donc être prédit au départ. Ici au contraire, c'est le bruit qui va piloter l'accélération des temps caractéristiques de la cascade et son comportement en loi d'échelle est alors entièrement déterminé, une fois le paramètre ξ fixé au niveau de l'expression de la variance (4.1).

En effet, le temps de retournement t_n requis par une structure cohérente pour franchir la couche n peut être estimé à partir de la dynamique (4.5) : $\Delta t_n \sim 1/b_n$. En se rappelant la définition de l'opérateur D et le fait que le second terme de $\mathcal{S}$ dans l'expression (4.9) est nul par construction, on en déduit que le coût en action par unité de pas de cascade varie comme :

$$\Delta S = \mathcal{S}[t_f = t_{n+1}] - \mathcal{S}[t_f = t_n] \sim k_n^{-(2-\xi)} b_n.$$

où t_n désigne le temps d'arrivée d'une structure sur la couche d'indice n .

Si on restreint la recherche des structures cohérentes à des solutions auto-similaires, ΔS doit être constante le long de la cascade. Ainsi peut-on prédire que b_n croît avec l'indice de couche selon :

$$b_n \sim k_n^{(2-\xi)}. \quad (4.14)$$

Remarquons cependant que l'existence de solutions auto-similaires vérifiant cette loi et d'action minimale (donc d'énergie nulle) est rendue possible uniquement en présence du terme de Ito. En effet, les deux termes dans l'expression (4.13) de l'Hamiltonien se comportent comme $k_n^{2-\xi}$ (puisque, d'après (4.12), $\|\theta\| \sim 1/\|\zeta\|$) et peuvent ainsi se compenser. On trouve un équivalent de ce terme de dérive dans le formalisme instantonique développé par Balkovsky et Lebedev [7] (au niveau d'un terme de moyenne non nul des statistiques des séparations de trajectoires Lagrangiennes), mais pas dans celui du travail antérieur de Chertkov [15] qui prédit du coup d'autres lois d'échelles que 4.14.

De nouveau, un schéma numérique auto-cohérent s'impose pour déterminer explicitement les solutions θ et ζ minimisant l'action. Son principe est le même que celui qui régit la recherche des instantons du chapitre 2 : cela revient à intégrer les équations 4.10 et 4.11 dans des sens opposés du temps, pour une configuration donnée du bruit. Ainsi des structures auto-similaires (la plus stable dynamiquement pour le

scalaire, la moins stable pour le champ auxiliaire) peuvent apparaître et leur exposant de croissance est fixé par le recouvrement entre ces deux vecteurs. Elles donnent lieu à une nouvelle configuration du bruit, via l'équation 4.12, et le processus est répété jusqu'à la convergence.

4.3.3 Résultats, comparaison avec les simulations numériques et discussion

concernant les solutions optimales seules

L'algorithme proposé s'est montré de nouveau très efficace pour capturer les structures auto-similaires de probabilité extrême. Nous avons ainsi obtenu un continuum de solutions dont les exposants h sont bornés inférieurement par un seuil non nul : $0 < h_{min} \leq h$, qui varie selon le paramètre ξ choisi. Au delà, la procédure numérique a toujours échoué pour trouver une solution stable. La seule borne physique que l'on pouvait donner au départ était la valeur nulle : la croissance de θ_n avec l'échelle est interdite par la conservation de son énergie $E = \sum_n |\theta_n|^2$. Cela veut dire que pour les modèles en couches que nous avons considérés, la situation la plus intermittente, où une structure emporterait une quantité constante d'énergie, n'est pas réalisée.

Avant de commenter davantage ce résultat, jetons quand même un coup d'oeil sur ces structures, inédites pour ce problème. La figure 4.1 montre l'allure d'une structure associée au scalaire, ainsi que la réalisation du bruit qui la produit et le champ auxiliaire correspondant. Leur enveloppes sont celles de pulses très localisés suivant les échelles (ce qui est une condition requise pour pouvoir adopter des conditions aux limites périodiques comme dans le chapitre 2). La variable $\Psi = D^2\theta$ représentée ici va effectivement croître avec les échelles et en pratique c'est celle que nous avons utilisée dans le schéma numérique, mais nous reviendrons sur ce détail technique dans la section suivante. En terme de la variable θ , il faut plutôt s'imaginer des sortes de fronts dont l'amplitude décroît exponentiellement le long de la cascade.

Suivant l'image multifractale dont nous avons rappelé les grandes lignes dans le chapitre 1, la présence d'un seuil dans la gamme d'exposants des structures auto-

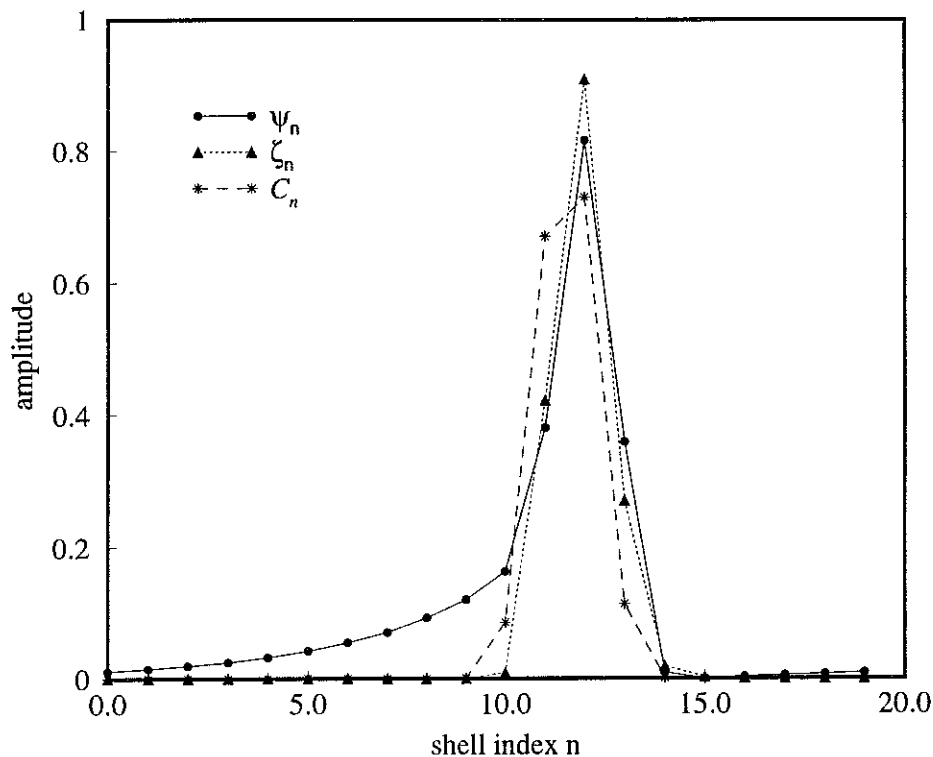


FIG. 4.1: profil typique des structures identifiées dans le modèle minimal [13]. Le champ ψ est relié au scalaire passif suivant $\psi = D^2\theta$. Ici $\xi = 1$ et l'exposant $h = 0.5$

similaires se traduit au niveau des courbes des exposants ζ_p par un comportement asymptotique linéaire, avec une pente : $\lim_{p \rightarrow \infty} \zeta_p/p = h_{min}$. Nous avons comparé nos résultats avec ceux issus des simulations numériques du modèle avec couplages à plus longue portée [12] pour deux différentes valeurs de ξ . La figure 4.2 permet ainsi de vérifier le bon accord entre notre approche et les données “expérimentales”, et par conséquent la pertinence physique des structures les plus intenses que nous avons trouvées. De plus, on peut noter que ce seuil décroît très fortement quand on approche de la limite de Batchelor (ξ tendant vers 2).

Rappelons que dans le modèle de Kraichnan formulé dans l'espace physique, les calculs analytiques d'instantons [7, 15] prévoient une saturation des courbes ζ_p vers

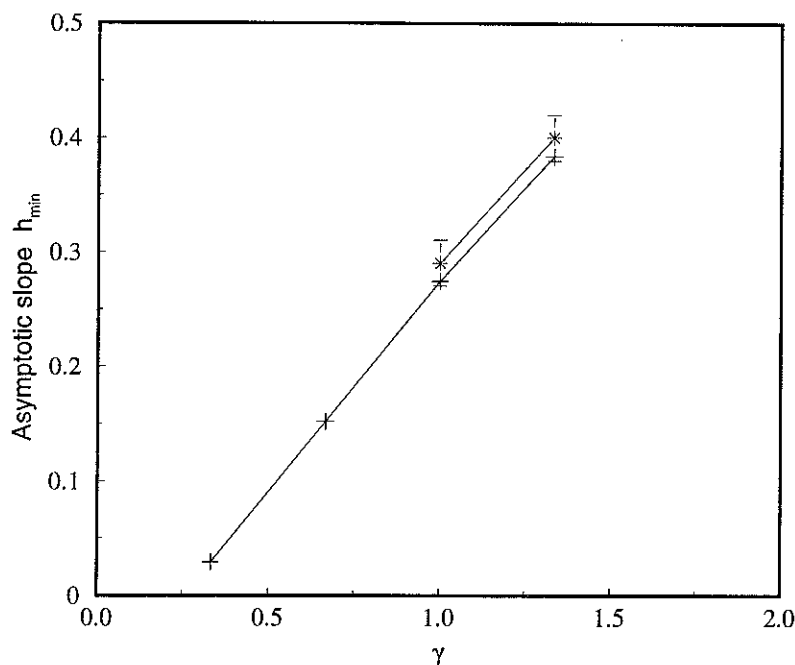


FIG. 4.2: évolution de l'action des pentes asymptotiques $h_{\min}$ en fonction de $\gamma = 2 - \xi$ pour le modèle de la ref. [12] : (+) estimations à partir du calcul d'instanton ; (*) estimations à partir de l'intégration numérique de la dynamique stochastique complète

une valeur constante dans la limite des grands ordres et à condition que $d(2 - \xi) \gg 1$. Des résultats numériques récents [29] ont vérifié cette tendance en dimension trois, pour des valeurs de ξ proches de 2. Pour de plus faibles valeurs de ξ , la question n'est pas encore tranchée, car la saturation, si elle a lieu, est attendue pour des ordres p encore inaccessibles aux simulations, même avec les nouvelles méthodes lagrangiennes. Ainsi, les modèles en couches, s'il contredisent les prédictions à grande dimension, ne sont pas nécessairement en désaccord avec la réalité du modèle de Kraichnan original sur ce point.

Néanmoins nous ne prétendons pas que les modèles en couches, dont la formulation repose sur une hypothèse de localité des interactions entre les échelles, soient capables de rendre compte des structures quasiment discontinues qui sont soupçonnées être à l'origine du phénomène de saturation. Nous noterons enfin que lorsque le

rapport d'aspect Q est réduit, les seuils h_{min} sont aussi notablement réduits et on tendrait ainsi vers une saturation, même en gardant l'hypothèse de couplage entre les échelles à très courte portée.

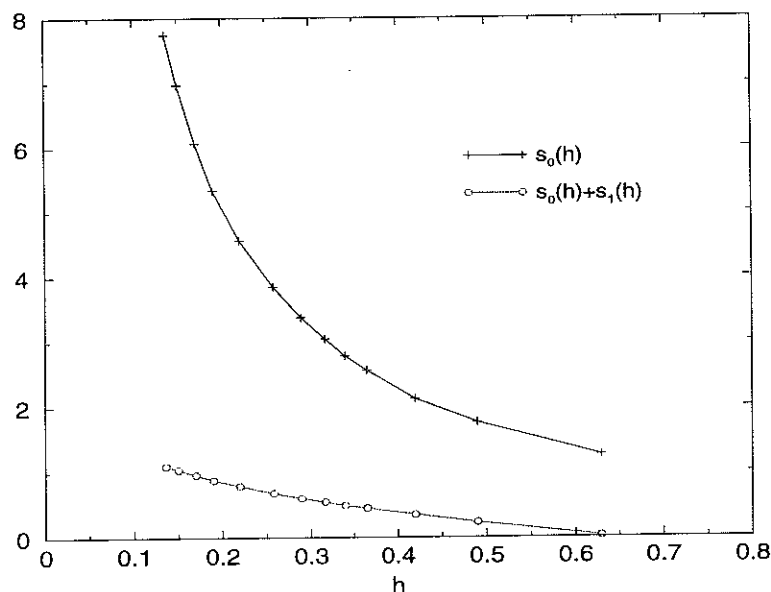


FIG. 4.3: évolution de l'action à l'ordre 0 en fonction de h pour le modèle minimal de la ref. [13] et $\xi = 1.0$.

Il est important d'insister sur le fait que la prédiction de l'existence d'un seuil h_{min} sur les exposants admissibles (qui semble bien confirmé par les simulations numériques) a un domaine de validité qui va bien au-delà de l'ordre dominant d'une approximation de point-col. En effet, l'absence de minimum de l'action pour des exposants $h < h_{min}$ incline à penser qu'il n'existe aucune réalisation du bruit d'action finie conduisant à de tels exposants. Donc la prise en compte des fluctuations autour de trajectoires extrémales ne saurait déplacer h_{min} . Toutefois, si on se contente de l'action $s_0(h)$ (représentée sur les figures 4.3 et 4.4) comme approximation pour $f(h)$, et qu'on procède à une transformation de Legendre, nous trouvons une courbe ζ_p que nous pouvons comparer à la courbe de référence issue des simulations numériques et constater que l'accord est très mauvais. La figure 4.5 correspond au modèle minimal de la ref. [13] et à la valeur $\xi = 1$: le comportement asymptotique linéaire n'a

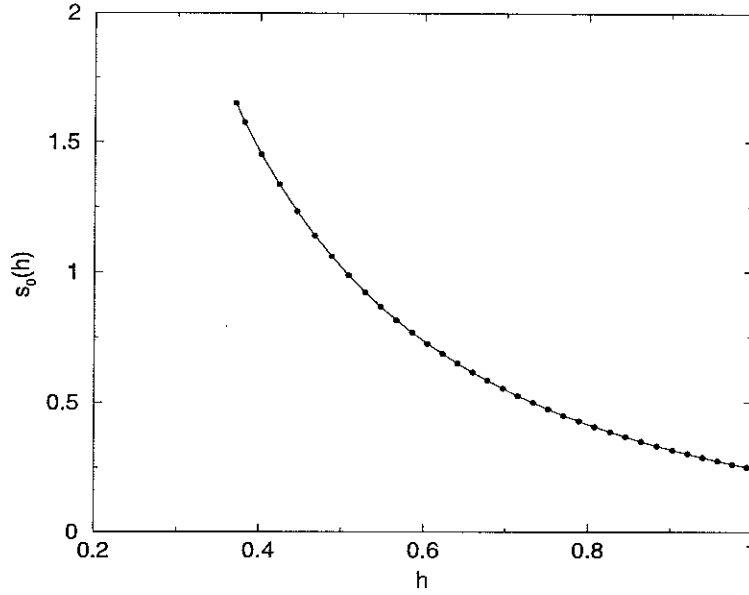


FIG. 4.4: évolution de l'action à l'ordre 0 en fonction de h pour le modèle de la ref. [12] et $\xi = 4/3$.

même pas encore été atteint pour le plus grand ordre représenté ($p = 16$). Cela suggère évidemment que les fluctuations autour des trajectoires optimales vont jouer un grand rôle. La figure 4.6 correspond au modèle de la ref. [12] et à $\xi = 2/3$, l'accord est bien meilleur.

Enfin revenons sur l'hypothèse que les solutions sont réelles. Pour le modèle en couches minimal, c'était obligatoire puisque les simulations de la ref. [13] avaient été réalisées dans ces conditions. Mais pour ce modèle, le comportement linéaire apparaît pour des ordres $p > 14$ et ne permet pas de trancher si ce comportement provient d'un artefact numérique. En revanche, pour le modèle de la ref. [12], les pentes asymptotiques sont fiables, mais les variables utilisées étaient complexes. Nous avons donc généralisé le formalisme pour permettre un degré de liberté de phase supplémentaire (cf section 4.5) et nous avons vérifié que l'algorithme convergerait toujours vers des solutions réelles, quelle que soit la réalisation du gradient de la vitesse choisie au départ de l'algorithme.

D'une façon générale, nous voudrions insister sur le fait que la solution optimale

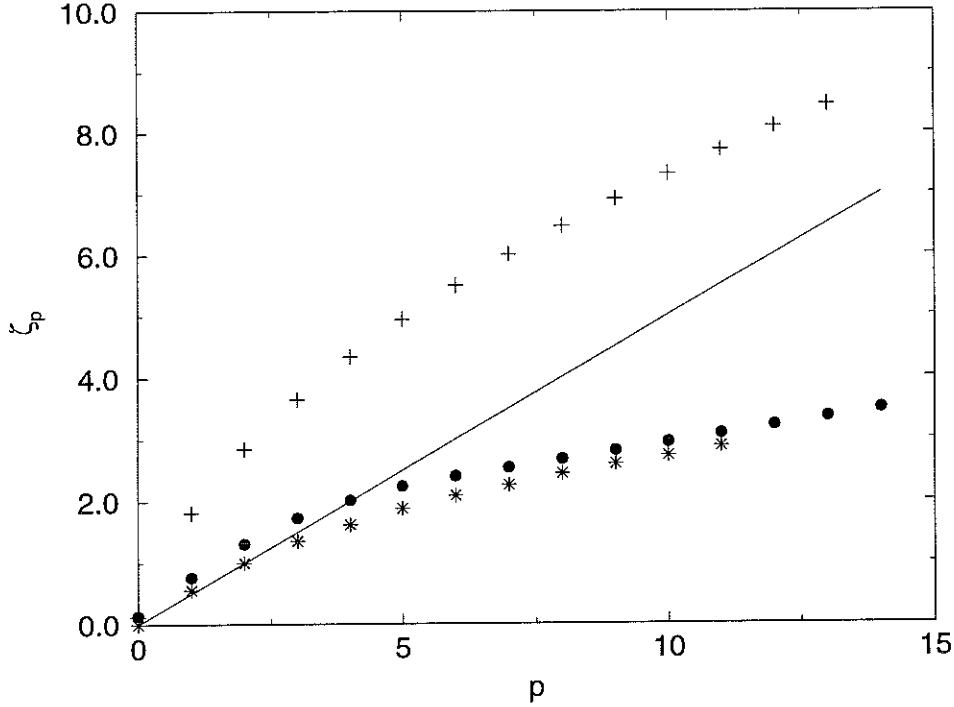


FIG. 4.5: (*) exposants d'échelle obtenus à partir des simulations numériques du modèle complet de la ref. [13]. (+) Transformation de Legendre de l'action S_0 ; (•) Transformation de Legendre de l'action $S_0 + S_1$. La droite pleine représente la prédiction dimensionnelle.

ne semble pas dépendre de l'hypothèse de départ sur la réalisation de la vitesse. A chaque valeur du paramètre de contrôle, est associée une unique structure auto-similaire optimisant l'action, ce qui revient à dire que la fonction $s(h)$ est bijective. C'est un point important puisque cela ôte la possibilité que la prise en compte du forçage à grandes échelles puisse sélectionner une structure plutôt qu'une autre.

concernant l'effet possible des fluctuations

Comme les structures optimales ne peuvent pas rendre compte à elles toutes seules des statistiques des modèles en couches que nous avons étudiés, nous avons calculé l'effet des fluctuations gaussiennes superposées à ces structures, en respectant les mêmes contraintes qu'au chapitre 2 : une structure perturbée arrive sur la couche

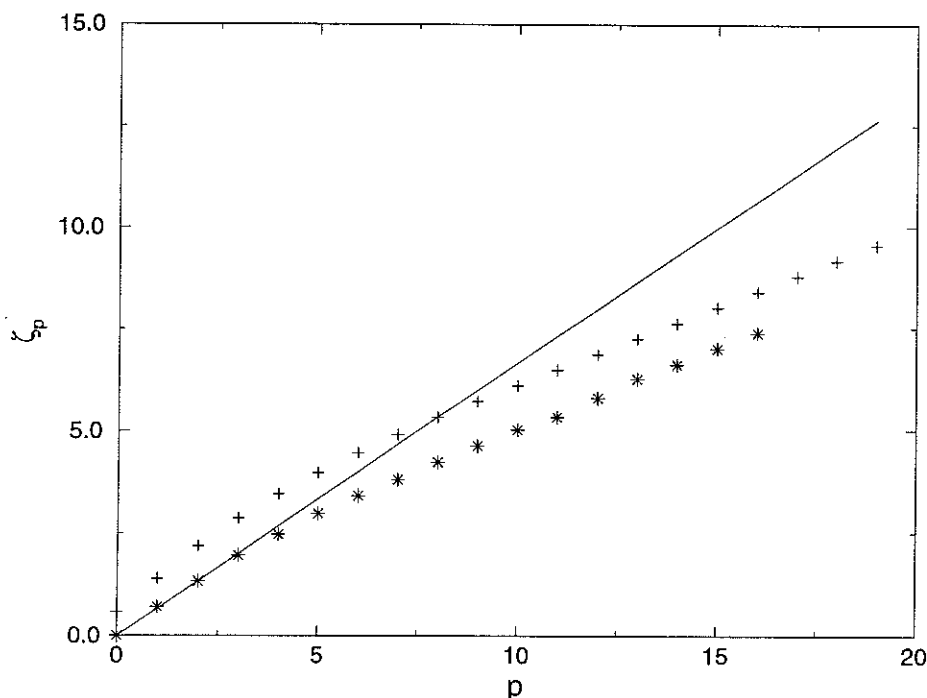


FIG. 4.6: même légende que la figure 4.5, mais pour le modèle avec couplage aux seconds voisins et $\xi = 2/3$.

n avec le même exposant que la structure optimale dont elle est proche. Ainsi nous obtenons le terme suivant $s_1(h)$ de l'analyse semi-classique, qui, ajouté à $s_0(h)$, est représenté figure 4.3 pour le modèle minimal. La transformation de Legendre de la quantité $s_0(h) + s_1(h)$ est tracée sur la figure 4.5, et cette fois cela conduit à un bel accord qualitatif avec les données numériques pour les plus grands ordres étudiés dans la ref.[13].

Comme nous ne disposons pas d'un petit paramètre dans ce problème, il nous est impossible de garantir que la correction suivante dans un développement systématique de l'action en fonction des fluctuations ne viendrait pas altérer de manière significative ce résultat. Toutefois le fait assez surprenant que s_1 soit du même ordre de grandeur que s_0 ne constitue pas la preuve que cela sera nécessairement le cas :

c'est seulement en présence d'un petit paramètre Γ qu'il existe une hiérarchie entre tous les termes du développement perturbatif de l'action autour de son point col.

Nous pensons néanmoins que la confrontation avec les données expérimentales est suffisamment convaincante pour supposer que les ordres suivants auront un effet bien moindre. Rappelons aussi que la prévision de la pente asymptotique est indépendante du calcul des fluctuations.

Il faut remarquer que lorsque le champ de vitesse devient de plus en plus irrégulier ($\xi \rightarrow 0$), l'action à l'ordre zéro $s_0(h)$ présente un comportement physiquement plus satisfaisant que dans le cas décrit plus haut : l'intersection entre la courbe ζ_p correspondante et la prévision dimensionnelle $\zeta_p = (2 - \xi)p/2$ a lieu pour des ordres p de plus en plus faibles. Pour $\xi \sim 2/3$ ², lorsqu'on ajoute l'effet des fluctuations quadratiques, le croisement a notamment lieu pour $p = 2$ qui est le résultat exact prévu par la théorie de Obukhov-Corrsin. Cela suggère que, dans certains cas, notre approche peut donner des informations statistiques pertinentes, même pour des fluctuations du scalaire peu intenses.

conclusion

En conclusion, nous avons été capables de calculer de manière exacte les structures auto-similaires les plus probables pour des modèles en couche d'advection. Elles ne vont pas émerger telles quelles du système, mais être assez fortement ré-habillées par les fluctuations ambiantes. Cet effet semble être convenablement évalué en se limitant dans le calcul aux fluctuations quadratiques.

Nous avons de bonnes indications pour penser qu'ainsi nous avons isolé les degrés de liberté pertinents dans ce problème pour rendre compte des statistiques obtenues lorsque les effets de forçage et de dissipation sont présents.

²valeur intéressante parce qu'elle a la particularité de correspondre à la prévision de Kolmogorov pour les corrélations d'un champ de vitesse turbulent ; mais malheureusement nous possédons pas de données numériques pour ce ξ .

Annexes du Chapitre 4

4.4 Présentation des détails spécifiques au cas du scalaire passif

Le schéma numérique de recherche des instantons pour le modèle GOY ne se transpose pas de manière complètement transparente au cas de l'advection d'un scalaire passif. Nous en exposerons les raisons dans la sous-section ci-dessous et donnerons le détail des “astuces” utilisées pour résoudre les problèmes rencontrés. Cela aura des répercussions sur le calcul des fluctuations quadratiques, auquel est consacrée la sous-section 4.4.2.

4.4.1 au niveau du schéma numérique permettant la recherche des solutions cohérentes

Au premier abord, le problème de l'advection peut paraître plus simple que celui qui nous a occupés dans le chapitre 2 :

-d'une part, parce que les équations du mouvement à résoudre sont linéaires pour une réalisation donnée du bruit. Ainsi elles seront traitées sur un pied d'égalité, ce qui n'était pas le cas pour le modèle GOY. Il ne sera donc pas nécessaire d'intégrer explicitement la dynamique de θ pour laisser le temps à la solution la plus stable de se dégager : elle sort directement de la diagonalisation de l'opérateur d'évolution.

-d'autre part, nous connaissons par avance la loi d'échelle que doit réaliser le gradient de la vitesse pour correspondre à un poids gaussien optimal.

Mais deux problèmes assez contraignants se posent :

choix de la variable de temps désingularisante

Sur un plan conceptuel, nous n'avons plus le confort de disposer de solution déterministe. Dans le cas du modèle GOY, cela permettrait de chercher les instantons en partant de cette solution et en augmentant progressivement les perturbations dues au bruit. Nous avons vu notamment que la vitesse d'un pulse (qui dépend de l'exposant de croissance final z) peut être estimée par une analyse variationnelle (cf annexe 2.7).

Mais nous pouvons parer à cette difficulté grâce au fait que l'on connaît la loi d'échelle de la réalisation du gradient de vitesse $\mathbf{b}$. Cela incite à adopter une variable temporelle désingularisante plus standard que celle choisie pour le modèle GOY et qui impose aux solutions non seulement d'être de vitesse constante, mais aussi indépendante de l'exposant h final. En effet, écrivons le champ $\mathbf{b}$ attendu sous la forme auto-similaire :

$$b_n(t) = \frac{1}{(t^* - t)} F(k_n^{2-\xi}(t^* - t)), \quad (4.15)$$

où t^* est le temps nécessaire aux structures pour atteindre les échelles infiniment petites en l'absence de dissipation. On peut alors définir une temps désingularisant $\tau = -\log(t^* - t)$, qui permet de réécrire $\mathbf{b}$ suivant :

$$b_n(\tau) = e^\tau \mathbf{C}(\tau), \quad (4.16)$$

Le champ $\mathbf{C}$ s'interprète comme une onde solitaire de période $T = (2 - \xi) \log Q$. Ses composantes $C_n(\tau) = F[n(2 - \xi) - \tau]$ vérifient effectivement la relation : $C_n(\tau + T) = C_{n-1}(\tau)$.

Dans cette nouvelle représentation du temps, les équations (4.10) et (4.11) deviennent :

$$\frac{d\boldsymbol{\theta}}{d\tau} = -c_{ito} D e^{-\tau} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{M}[\mathbf{C}] \boldsymbol{\theta} \quad (4.17)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{d\tau} = c_{ito} D e^{-\tau} \boldsymbol{\zeta} - {}^t\mathbf{M}[\mathbf{C}] \boldsymbol{\zeta} \quad (4.18)$$

où $\mathbf{C}$ doit vérifier l'équation subsidiaire (4.12) reformulée suivant :

$$\mathbf{C}(\tau) = D e^{-\tau} {}^t\mathbf{M}'[\boldsymbol{\theta}] \boldsymbol{\zeta}. \quad (4.19)$$

Notons alors que l'Hamiltonien associé à ces deux dynamiques dépend explicitement du temps τ et n'est donc plus conservé.

Enfin nous avons décidé de choisir comme configuration initiale du bruit, un pulse du modèle GOY déterministe ayant la période requise $T = (2 - \xi) \log Q$.

choix des conditions de bord

Sur un plan pratique, la recherche des états de Floquet des dynamiques (4.17) et (4.18) nécessite de travailler avec des conditions aux limites périodiques.

Cela exige d'avoir des champs de type pulses, qui peuvent se raccorder loin de part et d'autre de leur maximum. Si on se livre à une analyse asymptotique des comportements auto-similaires possibles pour les différents champs, on trouve que seul le scalaire θ ne peut pas obéir à cet impératif. En effet, comme nous l'avons déjà évoqué, sa croissance est interdite par la conservation de $E = \sum_n |\theta_n|^2$. Nous avons donc adapté tout le formalisme "instantons" pour une variable $\psi = D^\alpha \theta$; la puissance α est trouvée empiriquement de manière que ψ se propage en laissant une traînée exponentielle $\psi_n \sim Q^{n(\alpha(2-\xi)-h)}$, avec $\alpha > h/(2-\xi)$. Au niveau des équations à résoudre, le seul changement concerne la matrice $M[C] \rightarrow \tilde{M}[C] = D^\alpha M[C] D^{-\alpha}$.

De plus, la périodisation du réseau sur un anneau de d couches est rendue délicate par la dépendance exponentielle en échelle de l'opérateur D , présent à la fois dans le terme de dérive de Ito et dans la relation donnant C .

Remarquons que dans les équations qui nous intéressent, cet opérateur diagonal est toujours associé à $e^{-\tau}$, ce qui permet de condenser ces éléments sous la forme : $D_{nn} e^{-\tau} = e^\rho$, où $\rho = n(2 - \xi) \log Q - \tau$. La variable ρ repère la position du pulse C dans un référentiel embarqué (on notera dans la suite ρ_0 la valeur constante caractérisant le maximum de l'enveloppe de C).

Comme, indépendamment de la périodisation, la structure formée par C doit être très localisée, il paraît légitime d'éteindre artificiellement les termes D_{nn} quelques couches en aval de ce pulse. Nous l'avons réalisé en remplaçant e^ρ par $e^{f(\rho)}$, avec f

une fonction périodique telle que :

$$\begin{aligned} f(\rho + dT) &= f(\rho) \\ f(\rho) &= \rho \quad \text{si } \rho \sim \rho_0 \end{aligned}$$

En pratique, nous avons pris comme fonction périodique, une fonction en dent de scie centrée sur le maximum de $\mathbf{C}$.

en résumé

Chaque étape de l'algorithme consiste à diagonaliser l'opérateur d'évolution

$$U(T; 0) = \mathcal{T}_{-1} \exp \int_0^T \left(-c_{ito} e^{-f(\rho)} + \tilde{M}[\mathbf{C}] \right) d\tau. \quad (4.20)$$

Les exposants de Lyapunov σ sont classés par ordre décroissant de leur valeur absolue : Le vecteur propre à droite Ψ_{1r} correspond à σ_{max} ; il est normalisé au vecteur propre à gauche Ψ_{1l} . Nous sommes conduits à identifier $\psi(\tau) = \Psi_{1r}(\tau)$ et $\zeta(\tau) = \mu \Psi_{1l}(\tau)$, où le recouvrement $\mu = \psi \cdot \zeta$ est constant. Puisque l'Hamiltonien $\mathcal{H}$ n'est pas conservé, nous sommes libérés de la contrainte $\mathcal{H} = 0^3$ et il n'y a plus lieu ici d'introduire une direction duale de $\frac{d\psi}{dt}(\tau)$.

Il reste seulement à calculer une nouvelle configuration du bruit pour achever la description d'une itération de l'algorithme. Ce sera fait grâce à l'équation subsidiaire (4.12) reformulée suivant : $\mathbf{C}(\tau) = \mu e^{\rho \tau} \tilde{M}'[\Psi_{1r}] \Psi_{1l}$.

Curieusement, dans ce problème, le bon paramètre de contrôle n'est pas la valeur du recouvrement μ , mais la norme de $\mathbf{C}(0)$ qui a été maintenue constante d'une itération à l'autre. Cela revient, grosso modo, à fixer l'ordre de grandeur de l'action que nous voulons sonder.

Lorsque l'algorithme a convergé, il est très facile d'en déduire les exposants d'échelle h du scalaire passif, définis par la relation $\theta_n \sim Q^{-nh}$. En effet, le champ ψ obtenu numériquement croît avec les échelles comme $\psi_n \sim e^{n\sigma_{max}T}$. A partir des définitions de ψ et T , il vient :

$$h = (\alpha - \sigma_{max})(2 - \xi) \quad (4.21)$$

³qui sera de fait automatiquement satisfaite une fois un état auto-similaire atteint.

Puis l'action par unité de pas de cascade est calculée numériquement à partir de la formule :

$$s_0(h) = \frac{1}{2} \int_0^T C(\tau) \cdot e^{-f(\rho)} C(\tau) d\tau \quad (4.22)$$

Bien entendu, nous avons vérifié que les exposants h et leur densité d'action $s_0(h)$ étaient insensibles aux choix arbitraires faits sur la valeur de la puissance α ou sur la périodisation de l'opérateur e^ρ .

4.4.2 au niveau du calcul des fluctuations quadratiques

Cette section est réservée au calcul du premier terme non nul $s_1[h]$ dans le développement de l'action en perturbation autour d'une trajectoire extrémale et qui achève l'analyse semi-classique.

Le formalisme étant le même qu'au chapitre 2, nous nous contenterons de rappeler les équations dynamiques suivies par les fluctuations quadratiques qu'il faut intégrer pour obtenir $s_1[h]$.

Mais auparavant, il faut apporter quelques précisions sur les contraintes à vérifier au point d'arrivée des trajectoires perturbées.

nécessité d'utiliser un autre temps désingularisant

Considérons une trajectoire optimale $\theta(\tau)$ joignant la couche n avec un exposant de décroissance h . On sait que le temps d'arrivée sur la couche n est $\tau_n^0 = nT = n(2 - \xi) \log Q$. Il faut estimer le volume balayé par les trajectoires $\theta(\tau) + \delta\theta(\tau)$ proches de $\theta(\tau)$: elles doivent correspondre au même exposant de croissance, mais pas nécessairement au même temps d'arrivée sur la couche n .

Or le choix de la variable $\tau = -\log(t - t^*)$ n'est pas bien adapté au traitement particulier des fluctuations sur le temps d'arrivée que nous avons explicitées au chapitre 2. Elle a en effet le mauvais goût de fixer une fois pour toute la durée de la cascade à partir d'une même condition initiale puisque :

$$t^* - t = \int_0^{+\infty} e^{-\tau} d\tau = 1,$$

alors que dans la réalité, celle-ci dépend de toute l'histoire d'une structure.

Pour guérir ce défaut, il est judicieux de choisir un autre temps désingularisant, analogue à celui utilisé pour le modèle GOY, à travers la relation suivante :

$$\frac{d\tau'}{dt} = Q^{n(\tau')(2-\xi)}, \quad (4.23)$$

où $n(\tau')$ désigne la position instantanée du pulse formé par le scalaire passif. En pratique, on peut utiliser le caractère très localisé des pulses pour se donner une définition de $n(\tau')$:

$$\frac{d\tau'}{dt} = \frac{\boldsymbol{\theta}(\tau') \cdot D \boldsymbol{\theta}(\tau')}{\boldsymbol{\theta}(\tau') \cdot \boldsymbol{\theta}(\tau')} = \mathcal{D}[\boldsymbol{\theta}(\tau')] \quad (4.24)$$

Dans cette nouvelle représentation, le problème recouvre la symétrie de translation par rapport au temps.

expression des dynamiques des structures et de leurs fluctuations

Observons comment se transforment les dynamiques de $\boldsymbol{\theta}$ et $\boldsymbol{\zeta}$ pour cette nouvelle représentation du temps, et nous verrons qu'il n'est nullement besoin de chercher à déterminer la correspondance $\tau'(\tau)$, ce qui constitue une simplification utile dans la pratique.

• Notons $\boldsymbol{\theta}'(\tau')$ et $\boldsymbol{\zeta}'(\tau')$ les solutions correspondant à un extremum de $\mathcal{S} = \mathcal{S}[\boldsymbol{\theta}(\tau'), \boldsymbol{\zeta}(\tau')]$, tandis que $\boldsymbol{\theta}(\tau)$ et $\boldsymbol{\zeta}(\tau)$ désignent les solutions sortant de la résolution numérique des équations (4.17) et (4.18).

Il est facile d'obtenir l'Hamiltonien $\mathcal{H}'$ dans la nouvelle variable τ' :

$$\mathcal{H}[\boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\zeta}'] = -\boldsymbol{\zeta}' \cdot c_{ito} D \mathcal{D}^{-1} \boldsymbol{\theta}' + \frac{1}{2} \boldsymbol{\zeta}' \cdot M[\boldsymbol{\theta}'] D \mathcal{D}^{-1} M[\boldsymbol{\theta}'] \boldsymbol{\zeta}' \quad (4.25)$$

On peut alors vérifier que les équations d'Euler sous forme canonique associées à $\mathcal{S} = \mathcal{S}[\boldsymbol{\theta}(\tau'), \boldsymbol{\zeta}(\tau')]$ et celles associées à $\mathcal{S} = \mathcal{S}[\boldsymbol{\theta}(\tau), \boldsymbol{\zeta}(\tau)]$ sont reliées de la manière suivante :

$$\frac{d\boldsymbol{\theta}'}{d\tau'} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \boldsymbol{\zeta}'} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{d\tau} \frac{d\tau}{d\tau'} \quad (4.26)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}'}{d\tau'} = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \boldsymbol{\theta}'} = \frac{d\boldsymbol{\zeta}}{d\tau} \frac{d\tau}{d\tau'} + \mathcal{H}' \mathcal{D} \frac{\partial \mathcal{D}^{-1}}{\partial \boldsymbol{\theta}'} \quad (4.27)$$

On retrouve ici un résultat que nous avons déjà rappelé chapitre 2. A condition que $\mathcal{H}' = 0$, il y a ainsi une stricte équivalence entre les dynamiques des structures optimales, exprimées dans les représentations associées à τ' ou à τ .

• En revanche, un effet moins trivial ressort de la dynamique des fluctuations $\delta\theta$ et $\delta\zeta$ autour des solutions extrémales. En linéarisant les équations canoniques (4.26) et (4.27), on obtient :

$$\frac{d\delta\theta'}{d\tau'} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}'}{\partial \theta' \partial \zeta'} \delta\theta' + \frac{\partial^2 \mathcal{H}'}{\partial \zeta'^2} \delta\zeta' \quad (4.28)$$

$$\frac{d\delta\zeta'}{d\tau'} = -\frac{\partial^2 \mathcal{H}'}{\partial \zeta' \partial \theta'} \delta\zeta' - \frac{\partial^2 \mathcal{H}'}{\partial \theta'^2} \delta\theta' \quad (4.29)$$

où $\delta\theta'(\tau')$ et $\delta\zeta'(\tau')$ représentent des fluctuations autour de $\theta'(\tau')$ et $\zeta'(\tau')$.

Ce sont les équations que nous aurons à intégrer pour calculer $s_1(h)$. Si on veut les exprimer dans la variable de temps τ , on peut tirer partie du fait que $\mathcal{H}' d\tau' = \mathcal{H} d\tau$ et que $d\tau/d\tau'$ dépend de θ' , ce qui conduit à :

$$\frac{d\delta\theta'}{d\tau'} = \left[\frac{d\delta\theta}{d\tau} + \left(\frac{d\theta}{d\tau} \otimes \mathcal{D} \frac{\partial \mathcal{D}^{-1}}{\partial \theta} \right) \delta\theta \right] \frac{d\tau}{d\tau'} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\delta\zeta'}{d\tau'} = & \left[\frac{d\delta\zeta}{d\tau} - \left(\mathcal{D} \frac{\partial \mathcal{D}^{-1}}{\partial \theta} \otimes \frac{d\theta}{d\tau} \right) \delta\zeta + \right. \\ & \left. \left(\mathcal{D} \frac{\partial \mathcal{D}^{-1}}{\partial \theta} \otimes \frac{d\zeta}{d\tau} + \frac{d\zeta}{d\tau} \otimes \mathcal{D} \frac{\partial \mathcal{D}^{-1}}{\partial \theta} \right) \delta\theta \right] \frac{d\tau}{d\tau'} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Ainsi, les dynamiques suivies par $\delta\theta'(\tau'(\tau))$ et $\delta\zeta'(\tau'(\tau))$ diffèrent de celles de $\delta\theta(\tau)$ et $\delta\zeta(\tau)$. C'est bien sûr les premières que nous devons retenir, puisqu'elles permettent un traitement correct des fluctuations sur la durée de la cascade.

expression de la première correction à l'action

On peut alors transposer la formule 4.32 au problème du scalaire passif :

$$s_1(h) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left\{ \mathcal{L}_1(nT) + \frac{1}{2} \ln \det U(nT) + \frac{1}{2} \ln \det \tilde{W}_1(nT) \right\} \quad (4.32)$$

Nous donnons ci-dessous un répertoire des différents opérateurs figurant dans cette expression :

* U et son "moment conjugué" WU vérifient les équations de Jacobi associées à $\mathcal{S}$, et qui sont la version matricielle de (4.30) et (4.31) :

$$\frac{dU}{d\tau} = BU + Q^{-1}WU \quad (4.33)$$

$$\frac{dWU}{d\tau} = -{}^tBWU + \mathcal{V}U \quad (4.34)$$

avec pour conditions initiales : $U(0) = 0$ et $WU(0) = 1$.

Les opérateurs $\mathcal{B}$, $\mathcal{Q}^{-1}$, $\mathcal{V}$ s'expriment de façon simple en fonction des solutions optimales :

$$\mathcal{B}(\tau) = -c_{ito}e^\rho + M[C] + {}^tM'[\theta]e^\rho {}^tM''[\zeta] + \frac{d\theta}{d\tau} \otimes \mathcal{D} \frac{\partial \mathcal{D}^{-1}}{\partial \theta} \quad (4.35)$$

$$\mathcal{Q}^{-1}(\tau) = M'[\theta]e^\rho {}^tM'[\theta] \quad (4.36)$$

$$\mathcal{V}(\tau) = -M''[\theta]e^\rho {}^tM''[\theta] + \mathcal{D} \frac{\partial \mathcal{D}^{-1}}{\partial \theta} \otimes \frac{d\zeta}{d\tau} + \frac{d\zeta}{d\tau} \otimes \mathcal{D} \frac{\partial \mathcal{D}^{-1}}{\partial \theta} \quad (4.37)$$

avec les définitions implicites $M[C]\theta = M'[\theta]C$ et ${}^tM[C]\theta = M''[\theta]C$.

* La matrice W_1 est la restriction de $W + \Delta W$ à l'espace orthogonal à la structure cohérente $\theta(nT)$ d'exposant h .

ΔW provient d'un terme de bord et son expression est rigoureusement la même que (2.118) :

$$\Delta W = (\dot{\zeta} \cdot \Phi_{2r}) \Phi_{2l} \otimes \Phi_{2l} - \Phi_{2l} \otimes \dot{\zeta} - \dot{\zeta} \otimes \Phi_{2l} \quad (4.38)$$

Comme précédemment, le vecteur Φ_{2l} est construit par combinaison linéaire des deux directions d'exposant de Lyapunov les plus faibles sortant de la diagonalisation de l'opérateur ${}^tU^{-1}$.

* $\mathcal{I}_1(nT)$ est un terme provenant de la non-différentiabilité des trajectoires.

$$\mathcal{I}_1(nT) = \frac{1}{2}n \int_0^T \text{Tr } \mathcal{B}(\tau) d\tau \quad (4.39)$$

4.5 Généralisation pour un modèle avec variables complexes

La dynamique stochastique de départ prend la forme générale :

$$\frac{d\theta}{dt} = -c_{ito}D\theta + M_1[b]\theta^* + M_1[b^*]\theta^*, \quad (4.40)$$

Lorsqu'on généralise le formalisme en intégrale de chemin appliqué aux systèmes dynamiques, on doit considérer 6 champs indépendants : les composantes réelles et imaginaires du gradient de vitesse aléatoire $\mathbf{b}_r(t)$, $\mathbf{b}_i(t)$, celles du scalaire $\theta_r(t)$, $\theta_i(t)$ et enfin les composantes $\zeta_r(t)$, $\zeta_i(t)$ du champ auxiliaire ⁴.

L'action effective s'obtient comme l'intégrale temporelle du Lagrangien :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\mathbf{b}_r, \mathbf{b}_i, \theta_r, \theta_i, \zeta_r, \zeta_i] &= \frac{1}{2}(\mathbf{b}_r \cdot D \mathbf{b}_r) + \frac{1}{2}(\mathbf{b}_i \cdot D \mathbf{b}_i) \\ &+ \zeta_r \cdot [\dot{\theta}_r - L_{11}[\mathbf{b}_r]\theta_r - L_{12}[\mathbf{b}_i]\theta_i] \\ &+ \zeta_i \cdot [\dot{\theta}_i + L_{11}[\mathbf{b}_r]\theta_i - L_{12}[\mathbf{b}_i]\theta_r]\end{aligned}$$

où les opérateurs d'advection L_{11} et L_{12} sont définis par les relations :

$$L_{11}[\mathbf{b}_r] = -c_{ito}D + M_1[\mathbf{b}_r] + M_2[\mathbf{b}_r] \quad ; \quad L_{12}[\mathbf{b}_i] = M_1[\mathbf{b}_i] - M_2[\mathbf{b}_i]$$

L'extrémisation de l'action conduit alors aux équations du mouvement :

$$\begin{aligned}\frac{d\theta_r}{dt} &= L_{11}\theta_r + L_{12}\theta_i \quad ; \quad \frac{d\theta_i}{dt} = -L_{11}\theta_i + L_{12}\theta_r \\ \frac{d\zeta_r}{dt} &= -{}^tL_{11}\zeta_r - {}^tL_{12}\zeta_i \quad ; \quad \frac{d\zeta_i}{dt} = {}^tL_{11}\zeta_r - {}^tL_{12}\zeta_i\end{aligned}\tag{4.41}$$

Les deux quantités conservées le long de ces trajectoires sont l'Hamiltonien et $\mu = \zeta_r \cdot \theta_r + \zeta_i \cdot \theta_i$, qui peut s'interpréter comme le recouvrement de deux vecteurs de $2d$ dimensions, ce qui permet de généraliser automatiquement toute l'analyse menée dans le cas de variables réelles.

⁴ $\zeta_r(t)$ et $\zeta_i(t)$ sont en fait des champs réels uniquement pour les points-col de l'action.

Conclusion

La relative simplicité des modèles en couches nous a permis l'étude du lien entre les manifestations statistiques de l'intermittence des écoulements turbulents tri-dimensionnels et la présence de structures dynamiques. Dans les deux problèmes traités, la dynamique étudiée prend la forme d'une équation stochastique, où le bruit est gaussien, delta-corrélé en temps et en échelles. Nous avons recherché des structures singulières sous la forme de fluctuations rares et intenses correspondant à des réalisations optimales du bruit, complètement prédictibles dans une formulation en intégrale de chemin du système stochastique.

Dans le premier problème qui concerne la dynamique du gradient de la vitesse de l'écoulement, nous constatons un accord qualitatif entre la distribution de probabilité (associées à la croissance de structures cohérentes) calculée via une analyse semi-classique et celle issue des statistiques réalisées directement sur le modèle GOY. Notamment, la forme gaussienne de la statistique et l'accentuation de l'intermittence causée par l'effet indirect de la dissipation sont retrouvées. Nous sommes aussi en mesure de très bien rendre compte de la physique émergeant d'une gamme d'échelles "pré-visqueuses". En revanche, nous n'avons pu obtenir un accord quantitatif pour la région d'échelles dominant la zone inertielle dans la limite des nombres de Reynolds infinis. Cela pointe sans doute un défaut dans la modélisation de l'interaction d'une structure avec son environnement turbulent, sous forme d'un bruit de moyenne nulle, qui avait conduit à adopter une version stochastique du modèle GOY.

Pour le second problème, relatif au scalaire passif, nous pouvons directement comparer les lois d'échelles des fonctions de structure d'ordre p issues de simulations numériques préalables et celles déduites de pulses singuliers et auto-similaires que

nous avons réussi à mettre en évidence. La confrontation est très convaincante pour les ordres p élevés et prouve très clairement que pour ce modèle en couches, les événements intermittents les plus intenses sont correctement décrits par ces structures.

Au delà de ces problèmes spécifiques, nous avons proposé dans le cadre de cette thèse, un algorithme original apte à résoudre un certain type d'équation de Langevin non-linéaire, lorsque la forme des corrélations du bruit est compatible avec des statistiques invariantes d'échelle et cette méthode peut avoir une portée plus générale.

En particulier, une seconde étape envisageable et intéressante consisterait à incorporer les aspects géométriques des écoulements incompressibles et tri-dimensionnels, délaissés par les modèles en couches. Un modèle phénoménologique récemment introduit par Chertkov, Pumir et Shraiman [17] semble très prometteur dans cette optique. Ces auteurs sont parvenus à "fermer" les équations non-linéaires de la dynamique de quatre points matériels au milieu de l'écoulement (y délimitant donc un petit volume) et celle du tenseur de taux de cisaillement local, en remplaçant tous les effets non-locaux de la pression ainsi que les fluctuations turbulentes de petites échelles par un bruit gaussien delta-corrélé en temps. Il est tentant d'essayer de généraliser notre méthode pour ce modèle plus élaboré, et ainsi d'identifier les différentes configurations optimales du bruit et la morphologie des structures cohérentes associées, susceptibles d'être à l'origine des lois d'échelle anormales pour la dynamique de Navier-Stokes à grand nombre de Reynolds.

Bibliographie

- [1] P. Abry, S. Fauve, P. Flandrin, and C. Laroche, *Analysis of pressure fluctuations in swirling flows*, J. Phys. II France **4** (1994), 725.
- [2] K. H. Andersen and P. Muratore-Ginanneschi, *Shell Model for Time-correlated Random Advection of Passive Scalars*, e-Print archive chao-dyn/9902007.
- [3] F. Anselmet, Y. Gagne, E. J. Hopfinger, and R. A. Antonia, *High order velocity structure functions in turbulent shear flows*, J. Fluid. Mech. **140** (1984), 63.
- [4] R. A. Antonia, Y. Gagne, E. J. Hopfinger, and F. Anselmet, *Temperature structure functions in turbulent shear flows*, Phys. Rev. A **30** (1984), 2704.
- [5] E. Balkovsky and G. Falkovich, *Two complementary descriptions of intermittency*, Phys. Rev. E **57** (1998), 1231.
- [6] E. Balkovsky, G. Falkovich, I. Kolokolov, and V. Lebedev, *Intermittency of Burgers' Turbulence*, J. Phys. A. **17** (1984), 3521.
- [7] E. Balkovsky and V. Lebedev, *Instanton for Kraichnan Passive Scalar Problem*, Phys. Rev. E **58** (1998), 5776.
- [8] R. Benzi, L. Biferale, and G. Parisi, *On intermittency in a cascade model for turbulence*, Physica D **65** (1993), 163.
- [9] R. Benzi, L. Biferale, and A. Wirth, *Analytic calculation of anomalous scaling in random shell models for a passive scalar*, Phys. Rev. Lett. **78** (1997), 26.
- [10] R. Benzi, G. Paladin, G. Parisi, and Vulpiani, *On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems*, J. Phys. A **17** (1984), 3521.
- [11] L. Biferale, A. Lambert, R. Lima, and G. Paladin, *Transition to chaos in a shell model of turbulence*, Physica D **80** (1995), 105.

- [12] L. Biferale and A. Wirth, *Anomalous scaling in random shell models for passive scalars*, Phys. Rev. E **54** (1996), 4892.
- [13] ———, *A minimal model for intermittency of passive scalars*, Lecture Notes 491, 1997, p. 65.
- [14] T. Bohr, M. H. Jensen, G. Paladin, and A. Vulpiani, *Dynamical system approach to turbulence*, Cambridge University Press, 1998.
- [15] M. Chertkov, *Instanton for random advection*, Phys. Rev. E **55** (1997), 2722.
- [16] M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, and V. Lebedev, *Normal and anomalous scaling of the fourth-order correlation function of a randomly advected passive scalars*, Phys. Rev. E **52** (1995), 4924.
- [17] M. Chertkov, A. Pumir, and B. I. Shraiman, *Lagrangian Tetrad Dynamics and the Phenomenology of Turbulence*, to be published in Ph. of Fluids, 1999.
- [18] S. Corrsin, *On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in isotropic turbulence*, J. Appl. Phys. **22** (1951), 469.
- [19] B. Derrida and H. Spohn, *Polymers on disordered trees, spin glasses, and traveling waves*, Journal of Statistical Physics **51** (1988), 817.
- [20] W. Dittrich and M. Reuter, *Classical and Quantum Dynamics*, Berlin Springer Verlag, 1994.
- [21] T. Dombre and J.-L. Gilson, *Intermittency, chaos and singular fluctuations in the mixed Obukhov-Novikov shell model of turbulence*, Physica D **111** (1998), 265.
- [22] S. Douady, Y. Couder, and M. E. Brachet, *Direct observation of the intermittency of intense vorticity filaments in turbulence*, Phys. Rev. Lett. **67** (1991), 983.
- [23] A. L. Fairhall, B. Galanti, V. S. Lvov, and I. Procaccia, *Direct numerical simulations of the Kraichnan model : scaling exponents and fusion rules*, Phys. Rev. Lett. **79** (1996), 4166.
- [24] G. Falkovich, I. Kolokolov, V. Lebedev, and A. Migdal, *Instantons and intermittency*, Phys. Rev. E **54** (1996), 4896.

- [25] I. M. Fomin and S. V. Gelfand, *Calculus of Variations*, Prentice Hall, 1963.
- [26] U. Frisch, *Turbulence : the legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, 1995.
- [27] U. Frisch, A. Mazzino, A. Noullez, and M. Vergassola, *Lagrangian method for multiple correlations in passive scalar advection*, e-Print archive cond-mat/9810074.
- [28] U. Frisch, A. Mazzino, and M. Vergassola, *Intermittency in passive scalar advection*, Phys. Rev. Lett. **80** (1998), 5532.
- [29] ———, *Lagrangian dynamics and high-order moments intermittency in passive scalar advection*, Phys. Chem. Earth (1999), in press.
- [30] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry, and the Natural Sciences*, Springer Verlag, 1983.
- [31] K. Gawędzki and A. Kupiainen, *Anomalous scaling of the passive scalar*, Phys. Rev. Lett. **75** (1995), 3834.
- [32] J.-L. Gilson, *Structures singulières et intermittence dans les modèles en couches de la turbulence*, 1996, Thèse de Physique, Université de Grenoble.
- [33] J.-L. Gilson and T. Dombre, *Towards a two-fluid picture of intermittency in shell models of turbulence*, Phys. Rev. Lett. **79** (1997), 5002.
- [34] E. B. Gledzer, *system of hydrodynamic type admitting two quadratic integrals of motion*, Sov. Phys. Dokl. **18** (1973), 216.
- [35] R. Graham and T. Tel, *Weak-noise limit of Fokker-Planck models and nondifferentiable potentials for dissipative systems*, Phys. Rev. A **31** (1985), 1109.
- [36] P. Grassberger, *Noise-induced escape from attractors*, J. Phys. A : Math. Gen. **22** (1989), 3283.
- [37] M. Holzer and E. D. Siggia, *Turbulent mixing of a passive scalar*, Phys. Fluids **6** (1994), 1820.
- [38] B. I. Shraiman and E. D. Siggia, *Anomalous scaling of a passive scalar in turbulent flows*, C. R. Acad. Sci. **321** (1995), 165.
- [39] M. H. Jensen, G. Paladin, and A. Vulpiani, *Intermittency in a cascade model for three-dimensional turbulence*, Phys. Rev. A **43** (1991), 798.

- [40] ———, *Shell model for turbulent advection of passive-scalar fields*, Phys. Rev. A **45** (1994), 7214.
- [41] L. Kadanoff, D. Lhose, J. Wang, and R. Benzi, *Scaling and dissipation in the gey shell model*, Phys. Fluids **7** (1995), 617.
- [42] R. L. Kautz, *Thermally induced escape : The principle of minimum available noise energy*, Phys. Rev. A **38** (1988), 2066.
- [43] A. N. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **30** (1941), 301.
- [44] ———, *A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high reynolds number*, J. Fluid Mech. **13** (1962), 82.
- [45] A. N. Kolmogorov, I. Petrovsky, and N. Piscounov, Moscou Univ. Bull. Math. **1** (1937), 1.
- [46] R. H. Kraichnan, *Small-scale structure of a scalar field convected by turbulence*, Phys. Fluids **11** (1968), 945.
- [47] ———, *Anomalous scaling of a randomly advected passive scalar*, Phys. Rev. Lett. **72** (1994), 1016.
- [48] F. Langouche, D. Roekaerts, and E. Tirapegui, *Functional Integration and Semiclassical Expansions*, D. Reidel Publishing Co, 1982.
- [49] M. Lesieur, *Turbulence in Fluids*, Kluwer, Dordrecht, 1990.
- [50] B. Mandelbrot, *Intermittent turbulence in self-similar cascades : divergence of high moments and dimension of the carrier*, J. Fluid. Mech. **62** (1974), 331.
- [51] P. C. Martin, E. Siggia, and H. Rose, *Statistical Dynamics of Classical Systems*, Phys. Rev. A **8** (1973), 423.
- [52] A. S. Monin and A. M. Yaglom, *Statistical Fluids Mechanics*, ed. J. Lumley. MIT press, Cambridge, 1975.
- [53] A. M. Obukhov, *Structure of the temperature field in turbulent flows*, Izv. Akad. Nauk SSSR. Geogr. Geophys. Ser. **13** (1949), 58.
- [54] ———, *Some specific pictures of atmospheric turbulence*, J. Fluid Mech **13** (1962), 77.

- [55] K. Ohkitani and M. Yamada, *Temporal intermittency in the energy cascade process and local lyapunov analysis in fully developped turbulence*, Prog. Th. Phys. **81** (1989), 329.
- [56] G. Parisi, *A mechanism for intermittency in a cascade model for turbulence*, University of Rome, preprint ROM2F-90/37.
- [57] G. Parisi and U. Frisch, *On the singularity structure of fully developped turbulence*, Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics, Proceed. Intern. School of Physics 'E. Fermi', 1983, Varenna, Italy, 84-87, Eds. M. Ghil and R. Benzi and G. Parisi, North-Holland, Amsterdam, (1985).
- [58] A. Pumir, *A numerical study of the mixing of a passive scalar in three dimensions in the presence of a mean gradient*, Phys. Fluids **6** (1994), 2118.
- [59] G. Ruiz-Chavarria, C. Baudet, and S. Ciliberto, *Scaling laws and dissipation scale of a passive scalar in fully developped turbulence*, Physica D **9** (1996), 369.
- [60] L. S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration*, Wiley-Interscience, 1996.
- [61] Z. S. She, E. Jackson, and S. A. Orszag, *Intermittent vortex structures in homogeneous isotropic turbulence*, Nature **344** (1990), 226.
- [62] Z. S. She and E. L  v  que, *Univeral scaling laws in fully developped turbulence*, Phys. Rev. Lett. **72** (1994), 336.
- [63] E. D. Siggia, *Model of intermittency in three-dimensional turbulence*, Phys. Rev. A **17** (1978), 1166.
- [64] ———, *Numerical study of small scale intermittency in three-dimensional turbulence*, J. Fluid. Mech. **107** (1981), 375.
- [65] K. R. Sreenivasan, *On local isotropy of passive scalars in turbulent shear flows*, Proc. R. Soc. London Ser. A **434** (1991), 165.
- [66] C. Tong and Z. Warhaft, *On passive scalar derivative statistics in grid turbulence*, Phys. Fluids **6** (1994), 2165.
- [67] M. Vergassola, *Transport et intermittence de champs passifs*, 1997, Th  se d'habilitation    diriger des recherches, Universit   de Nice.

- [68] M. Vergassola and A. Mazzino, *Structures and intermittency in a passive scalar model*, Phys. Rev. Lett. **78** (1997), 1849.
- [69] A. Wirth, *Méthodes perturbatives, numériques et probabilistes en turbulence*, 1996, Thèse en Sciences Mathématiques, Université de Nice.
- [70] M. Yamada and K. Ohkitani, *Lyapunov spectrum of a model of two-dimensional turbulence*, Phys. Rev. Lett. **60** (1988), 983.

RESUME : Le cadre simplifié des modèles en couches permet d'étudier le lien entre les propriétés statistiques des écoulements turbulents et la présence de structures qui transportent l'activité énergétique de manière cohérente des grandes vers les petites échelles. L'idée directrice est que ces structures correspondent à des fluctuations privilégiées dans l'espace configurationnel. On commence par rappeler les propriétés de la dynamique déterministe du modèle GOY et les données statistiques réalisées sur l'enregistrement des pics du flux d'énergie. Puis en paramétrisant l'action des fluctuations des petites échelles comme un bruit blanc gaussien de faible largeur, nous menons à bien une analyse semi-classique de l'équation stochastique ainsi obtenue, au moyen d'un algorithme original. Les solutions singulières et auto-similaires reproduisent la multifractalité du problème de départ, ainsi que la forme de la distribution de probabilité associée aux objets cohérents. Un accord quantitatif est atteint pour un domaine de couches proches de celle où la dissipation équilibre les effets non linéaires. Nous approfondissons notre compréhension des mécanismes qui conduisent à l'intermittence en modélisant la hiérarchie des phénomènes de duplication des pics d'activité par une structure effective d'arbre dans l'espace des échelles et des temps, compatible avec les statistiques du modèle GOY. Enfin nous généralisons notre première approche au problème de l'advection d'un scalaire passif par un champ de vitesse stochastique. Par comparaison avec les simulations numériques directes, nous montrons que les structures que nous avons identifiées gouvernent le comportement en lois d'échelle des moments d'ordre élevé du scalaire.

ABSTRACT : In the simplified framework of shell models, we can rely the statistical properties of turbulent flows with the presence of structures which carry energy in a coherent way from large scales to small ones. The main idea is that structures are related to some singular and self-similar "preferred" fluctuations in configurational space. We first recall properties of deterministic dynamics of the GOY model and the statistical data from the recording of energy flux peaks. Then after parametrization of small scales fluctuations as a Gaussian white-in-time noise, we perform a semi-classical analysis of the resulting stochastic equation, using a new algorithm. The solutions multifractal properties of the original dynamics and a quantitative agreement is reached for a pre-viscous range of shells. Furthermore, our comprehension of the mechanisms that lead to intermittency is enriched by the modelling of the phenomenons of duplication of activity peaks as a succession of random events distributed on a tree-like structure in scale-time space. At last, we generalize our first approach of the passive scalar advection problem by a stochastic velocity field. We compare the results with direct numerical simulations and show that the scaling laws behaviours of the high order moments for the two-points fluctuations of the scalar are well described by the structures we have identified.

