

THESE

présentée par

Antoine NAERT

**Pour obtenir le titre de Docteur
de l'Université Joseph Fourier-Grenoble I
(Arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)**

Spécialité : PHYSIQUE

TURBULENCE DANS UN JET D'HELIUM GAZEUX A BASSE TEMPERATURE

Date de soutenance : 16 janvier 1995

Composition du jury :

Président :	P. ATTEN
Rapporteurs :	Y. COUDER
	S. FAUVE
Examineurs :	Y. GAGNE
	B. CASTAING

**Thèse préparée au sein du
Centre de Recherches sur les Très Basses Températures
- CNRS, Grenoble -**

P. Monceau m'a accueilli au CRTBT durant cette thèse, je l'en remercie.

Je remercie Y. Couder et S. Fauve d'avoir bien voulu assumer le rôle de rapporteurs de cette thèse malgré le peu de temps disponible, et P. Atten d'avoir accepté d'assurer la présidence du jury.

B. Castaing m'a accueilli au sein de son équipe du CRTBT comme stagiaire, puis comme thésard. J'ai appris de lui beaucoup de physique et je l'en remercie.

De B. Hébral, j'ai appris combien il faut d'exigence et de patience pour être un bon expérimentateur des basses températures, parfois douloureusement.

Le travail présenté ici est essentiellement le travail d'un groupe, auquel chacun a apporté sa contribution, suivant ses talents et ses goûts, dans une ambiance détendue et sympathique.

F. Chillà a beaucoup fait pour qu'existe une interaction fertile au sein du groupe, c'est surtout pour son amitié que je la remercie.

J. Peinke a été comme un grand frère pour ce début dans la recherche, je le remercie chaleureusement.

Je remercie B. Chabaud de m'avoir laissé avec confiance son expérience : un jet d'hélium gazeux à basse température et un détecteur de vitesse. Plus que tout ça, je le remercie pour son accueil.

Plusieurs stagiaires ont participé à ce travail : Olivier, Xavier, Anne-Claire, Samuel, Ludovic, un grand merci à chacun.

De nombreuses personnes ont participé à cette expérience : le service Electronique du laboratoire, et notamment J. L. Bret, a toujours été disponible pour nous aider à tirer le meilleur parti de la détection synchrone rapide. A. Benoit, L. Puech et B. Waksman ont écrit le programme qui pilote l'acquisition de données.

Je remercie L. Puech pour m'avoir aidé dans mes débuts de programmeur. Pour gérer les grandes quantités de données que nous avons rapidement obtenues, des solutions nouvelles ont été nécessaires. Nous avons été guidés dans ce domaine par B. Waksman et D. Gueniche.

A plusieurs reprises au cours de ma thèse, j'ai bénéficié de l'aide de nos collègues de l'IMG. Pour des conseils, pour le matériel qu'ils nous ont prêté, pour les discussions que nous avons pu avoir, je remercie M. Marchand et E. Villermoux.

Je tiens particulièrement à remercier Y. Gagne pour son accueil et son écoute à un moment difficile de ce travail. Sans lui, je n'aurais probablement pas terminé.

Je remercie J.M. Robin, R. Melin, J.L. Gilson, étudiants du CRTBT, pour les discussions que nous avons pu avoir sur la turbulence et d'autres problèmes de physique.

Je tiens encore à remercier P. Degiovanni et les membres du groupe de travail de Lyon : bien qu'étudiant des sujets très différents, les conversations que nous avons pu avoir ont été un grand plaisir et m'ont beaucoup aidé dans la compréhension des théories de la turbulence.

J'ai toujours été bien accueilli dans les ateliers du CRTBT. Je remercie pour leur aide et leurs conseils chacun des techniciens du laboratoire. Je remercie en particulier H. Rodenas qui a réalisé les photos de cette thèse.

Je remercie encore P. Poirier pour son aide dans la frappe du manuscrit, et D. Devillers qui s'est chargée du travail ingrat de mise en page finale.

TABLE des MATIERES

Pages

INTRODUCTION	5
 1. CONTEXTE	 11
1.1 Que mesure-t-on ?	15
1.2 Contexte théorique	19
1.21 Kolmogorov 1941	19
1.22 L'intermittence : Kolmogorov-Obukov 1962	22
1.23 Une vision géométrique : les modèles fractals multifractals	25
1.24 Un principe variationnel	27
1.3 Contexte expérimental	33
Références du chapitre 1	37
 2. EXPERIENCE	 39
2.1 Une expérience cryogénique	43
2.2 Montage expérimental	45
2.21 Le jet	45
2.22 Détecteur de vitesse	50
2.23 Chaîne d'acquisition des données	53
2.3 Procédure expérimentale	57
2.4 Etalonnage du détecteur	61
2.41 Quelle loi d'étalonnage ?	61
2.42 Etalonnage dans un écoulement laminaire	63
2.43 Etalonnage dans un écoulement turbulent	65
2.5 Tous les jets du monde... et le nôtre	67
2.51 Jet libre ou jet confiné : un problème de stabilité	67
2.52 Mesures de vitesse moyenne dans l'air	69
2.53 Limites de l'expérience cryogénique	74
2.6 Calcul du nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor R_θ	76
2.61 Définition de l'échelle de Taylor θ et de R_θ	76
2.62 Trois méthodes pour calculer R_θ	78
2.63 Comparaison de ces méthodes	84
2.7 Les échelles de la turbulence	87
Références du chapitre 2	89

3. MESURES ET INTERPRETATION	91
3.1 Forme des histogrammes, évolution avec le Reynolds	95
3.11 Histogrammes de vitesse	95
3.12 Histogrammes des incréments de vitesse	97
3.13 Profondeur de la cascade en fonction de l'échelle, évolution avec le Reynolds	101
3.14 Une analogie thermodynamique	114
3.2 Etude des moments	117
3.3 Que peut-on tirer d'une "mauvaise" mesure ?	123
Références du chapitre 3	127
 4. FORMES DES DENSITES DE PROBABILITE	 129
4.1 Fiabilité de la distribution log-normale	133
4.11 Distribution log-normale perturbée	133
4.12 Distribution binomiale	138
4.13 Erreur statistique : combien faut-il de points de mesure ?	141
4.2 Probabilités conditionnelles	144
4.21 Un test direct de la forme des densités de probabilité	144
4.22 Une relation entre e_r et σ	148
4.23 Densité de probabilité de e_r	155
4.24 Une autre manière de voir la relation entre e_r et σ ?	159
4.3 Le traitement de Pope et Ching	161
4.31 Généralités	161
4.32 Signal de vitesse	163
4.33 Incréments de vitesse	168
Références du chapitre 4	175
 CONCLUSION ET PERSPECTIVES	 177
 NOTATIONS ADOPTEES	 181
 RESUME	 182

INTRODUCTION

La turbulence est un phénomène naturel extrêmement ordinaire. Notre terre, dans ses profondeurs est fluide, elle est largement couverte d'océans et entourée d'une atmosphère. Tous ces fluides sont animés de mouvements turbulents.

Les fluides turbulents interviennent à bien des niveaux de notre vie ; c'est grâce au mélange de la turbulence que nous pouvons dissoudre du sucre dans du café avant que celui-ci ne soit froid. Parmi les sons que nous produisons en parlant, certains sont purement dus à la turbulence de l'air entre les dents ou contre le palais.

A cause de cette familiarité, nous avons naturellement une bonne intuition de la turbulence : chacun sait dire sans aucune hésitation si un écoulement est turbulent ou non, si celui-ci est plus turbulent que celui-là.

Les hydrodynamiciens mesurent le "degré de turbulence", la complexité d'un écoulement grâce à un nombre sans dimension, le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{VL}{\nu}$$

L et V sont respectivement une échelle et une vitesse caractéristique du système étudié, ν est la viscosité cinématique du fluide. Plus le nombre de Reynolds est grand, plus la turbulence est "forte", plus le fluide est agité.

Par exemple, pour calculer le nombre de Reynolds caractéristique du sillage d'un bateau, on choisira pour L sa longueur et pour V sa vitesse. Ainsi, plus le bateau est long, ou plus il va vite et plus Re est grand, c'est-à-dire plus son sillage est turbulent. On imagine sans difficulté que le même bateau dans un fluide plus visqueux aurait un sillage moins turbulent. Comme on peut le constater en considérant les exemples du tableau ci-dessous, le nombre de Reynolds reflète bien notre intuition de la turbulence :

turbulence produite par :	ordre de grandeur de Re :
une paramécie	10^{-2}
une cigarette	10^3
un poisson rouge	10^4
un nageur	10^6
un paquebot	10^8
la soufflerie de l'ONERA	10^8
un sous-marin	10^9
les écoulements atmosphériques	10^{10}

Si l'on veut décrire plus précisément la turbulence, on se heurte immédiatement à une difficulté : bien que l'on observe toujours dans un écoulement des formes semblables, on ne revoit jamais tout à fait les mêmes. Un recensement de toutes les structures possibles, comme une flore de la turbulence est irréalisable, une simple cigarette suffit à s'en convaincre !

Ce phénomène si familier est paradoxalement difficile à appréhender. Il n'existe par exemple pas de définition générale sans ambiguïté de la turbulence. Tout au plus peut-on en énumérer quelques propriétés nécessaires : irrégularité, désordre, imprévisibilité, etc. ...

Mais en premier lieu, comment caractérise-t-on un fluide ? Deux paramètres sont suffisants pour les fluides simples : la densité ρ et la viscosité cinématique ν . Ce dernier paramètre est le plus important car il résume la structure microscopique du liquide ou du gaz, c'est-à-dire les caractéristiques utiles des interactions moléculaires. Ainsi l'air, l'eau, le miel, un métal liquide ou l'hélium (pas l'hélium superfluide toutefois), et même le manteau terrestre sont des fluides caractérisés par leur densité et leur viscosité.

Tous ces fluides obéissent aux mêmes équations, issues de lois de conservation comme les équations de Navier-Stokes pour les fluides incompressibles :

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \nabla_j v_i = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta v_i$$

$$\nabla_i v_i = 0$$

Ces équations déterminent en principe complètement le mouvement du fluide, c'est-à-dire son champ de vitesse $v_i(x_i, t)$, si celui-ci est connu à un instant initial $v_i(x_i, t_0)$. Il suffirait donc de résoudre ces équations pour connaître exactement la forme que l'écoulement va adopter et prédire le mouvement du fluide.

Mais, hormis quelques cas particuliers d'écoulements laminaires, on ne sait en général pas résoudre ces équations, même numériquement. Il est par exemple impossible, même pour l'ordinateur le plus puissant, de calculer le sillage d'un bateau en connaissant sa vitesse et la forme de sa coque.

Cette difficulté, bien physique, tient à la très grande instabilité de certaines situations, de certains états d'un écoulement. On ne peut jamais connaître l'état d'un système assez précisément pour prédire avec certitude son évolution. Deux situations extrêmement semblables, assez proches pour être indiscernables, pourront avoir une évolution très différente. Les écoulements turbulents, de ce point de vue, sont extrêmement instables, et donc imprévisibles.

L'instabilité d'un écoulement est à l'origine des tourbillons, volutes et autres structures, et de leur évolution. Elle a pour effet la déformation ou la dislocation des structures les plus grandes, qui sont aussi les plus instables. Il ne s'agit pas ici de structures bien définies et identifiables, de tourbillons par exemple, on parle plutôt de manière vague de mouvement ayant une certaine extension spatiale, ou une taille caractéristique. La notion d'échelle joue dans l'étude de la turbulence, on le sent un peu ici, un rôle tout particulier.

La déformation ou la destruction des structures les plus grandes va donner naissance et nourrir des structures de taille inférieure. Prenons un exemple. Le vent qui souffle sur une mer plane rend sa surface instable : des vagues apparaissent et grandissent. Comme chacun sait, elles ne grandissent pas indéfiniment, même par les vents les plus violents. Des mouvements de taille bien inférieure à celle de la vague apparaissent et se nourrissent de son énergie. Ces structures sont elles-mêmes souvent encore instables : lorsque le vent est très fort, les vagues déferlent.

Cette création, ou alimentation de structures au détriment des échelles supérieures permet de limiter, de "saturer" l'instabilité. Le bilan net de ce phénomène est un transfert d'énergie, une interaction entre les structures d'échelles différentes au sein de l'écoulement.

Les détails de ces interactions sont, on l'imagine, très complexes : ces structures turbulentes, de formes et de tailles variées, agissent les unes sur les autres et sur elles-mêmes, se détruisent, se couplent, donnant lieu à une grande diversité et une grande richesse de formes.

Nous ne pourrions décrire la turbulence ainsi. En effet, que peut-on espérer dans un cas réel de turbulence développée, où le fluide est agité de mouvements désordonnés sur une gamme d'échelles couvrant parfois sept décades (de 0,1 mm à 1 000 km pour la turbulence atmosphérique), où le nombre de degrés de liberté est de l'ordre de 10^{22} ?

Au contraire, l'espoir est que dans le cas extrême des grands nombres de Reynolds, la compréhension soit plus aisée. Justement parce que le grand nombre de degrés de liberté en présence légitime l'usage de l'outil statistique, comme en thermodynamique, quelques fonctions d'état résument les 10^{23} paramè-

tres d'un système. Toute la difficulté de cette approche est alors de déterminer les "fonctions d'état" de la turbulence, les paramètres pertinents.

La viscosité, aussi faible soit-elle, est responsable de la dissipation en chaleur de l'énergie cinétique du fluide, aux plus petites échelles de l'écoulement. L'échelle à laquelle l'énergie est injectée dans le système est fixée par la géométrie de l'écoulement. La turbulence est dite développée lorsque les échelles auxquelles l'énergie est injectée sont "très grandes" devant celles où elle est dissipée (on proposera au chapitre trois un critère plus précis).

Il y a pour chaque échelle un déficit d'énergie en aval dû à la dissipation qu'un transfert venant des grandes échelles tentera de combler. Ainsi, de proche en proche, l'énergie est amenée des grandes vers les petites échelles parce qu'il y a dissipation à petite échelle. Ceci est évidemment un comportement moyen qui n'exclut pas localement un transfert inverse.

En 1926, L.F. Richardson soupçonna le premier une organisation hiérarchique universelle des structures fluides dans les écoulements à grand nombre de Reynolds. Il proposa le scénario suivant lequel l'énergie injectée de manière stationnaire est transférée d'échelle en échelle jusqu'à la dissipation. Il s'établit un courant continu d'énergie sous la forme d'une cascade de "tourbillons" au travers des échelles de la turbulence. Il suppose en plus que, si Re est assez grand, ces tourbillons sont semblables entre eux à un changement d'échelle près, au moins statistiquement.

Comme nous allons l'étudier en détail au cours de cette thèse, ce dernier point n'est pas vérifié par l'expérience ; la statistique des fluctuations de vitesse évolue au fil des échelles. Ceci traduit le fait que l'énergie qui est transférée des grandes vers les petites échelles ne se distribue pas dans l'espace de manière homogène, elle vient au fil de la cascade se concentrer dans des zones extrêmement ténues de l'écoulement où elle sera dissipée. Ce phénomène est nommé intermittence.

Le chapitre 1 tente de situer ce travail dans un résumé des études de la turbulence développée. Nous évoquons, par ordre historique les grandes familles de théories de la turbulence issues du schéma de Richardson : la théorie de Kolmogorov de 1941, sa révision en 1962 avec Obukhov pour rendre compte de l'intermittence, les modèles fractals et multifractals, et enfin le modèle variationnel de B. Castaing. Nous situons ensuite l'environnement expérimental : quelles sont les possibilités et les difficultés des mesures de vitesse dans un écoulement turbulent, quels sont les avantages et les limites du nouvel outil que sont les simulations numériques ?

Le chapitre 2 présente notre expérience, un jet d'hélium gazeux à basse température (4,2 K) qui offre l'avantage de permettre des mesures de fluctuations de vitesse sur une large gamme de Re (10^3 - 10^6). On y décrit en particulier un anémomètre original adapté aux basses températures. Nous présentons quelques expériences annexes dans l'air et dans l'eau qui ont été nécessaires pour caractériser notre écoulement.

Au chapitre 3, les mesures effectuées sont analysées. La statistique non gaussienne des fluctuations de vitesse est examinée comme une superposition de statistiques élémentaires quasi-gaussiennes. Le paramètre caractéristique de ce mélange, appelé "profondeur de la cascade", est mesuré et analysé. On met en évidence une transition entre deux régimes distincts de la turbulence.

Le chapitre 4 s'attache dans un premier temps à vérifier que notre procédure d'analyse des données est bien indépendante des modèles théoriques. La suite de ce dernier chapitre se veut une ouverture sur des moyens récents d'analyse statistique : les probabilités conditionnelles.

1. CONTEXTE

1.1	Que mesure-t-on ?	15
1.2	Contexte théorique	19
1.21	Kolmogorov 1941	19
1.22	L'intermittence : Kolmogorov-Obukov 1962	22
1.23	Une vision géométrique, les modèles fractals et multifractals	25
1.24	Un principe variationnel	27
1.3	Contexte expérimental	33
	Références du chapitre 2	37

Avant d'entrer dans une description du contexte théorique, puis expérimental de l'étude de la turbulence développée, nous nous sommes interrogés sur le sens physique des grandeurs auxquelles l'expérience donne accès. Que signifient-elles et à quelles conditions coïncident-elles avec les grandeurs sur lesquelles portent les théories ?

Le contexte théorique est abordé de manière historique : le modèle de Kolmogorov de 1941, puis une adaptation en 1962 avec Obukhov pour rendre compte de l'intermittence, les modèles fractals et multifractals, et enfin le modèle variationnel.

La dernière partie de ce chapitre situe notre expérience cryogénique parmi les autres études actuelles. On cherche en particulier à montrer comment, compte tenu de leurs spécificités, expériences et simulations numériques peuvent se compléter.

1.1 QUE MESURE-T-ON?

*Dépendance spatiale ou temporelle du champ de vitesse,
l'hypothèse de Taylor*

Dans de nombreuses configurations expérimentales, la turbulence est entraînée devant un détecteur par un courant moyen à une vitesse $\langle v \rangle$. C'est le cas en particulier pour les jets. Dans la situation considérée ici, le détecteur est un détecteur de vitesse, un anémomètre. Il délivre un signal de tension qui, par une loi d'étalonnage, nous donne la composante de la vitesse dans le sens de l'écoulement moyen (on considère ici pour simplifier un détecteur idéal).

Quelle signification doit-on donner à la dépendance temporelle de la vitesse ainsi mesurée ?

Car enfin, l'évolution de ce champ turbulent entraîné présente à la fois une dépendance spatiale - la vitesse n'est pas la même d'un point à un autre de l'écoulement au même instant - et une évolution temporelle : en chaque point, la vitesse évolue en fonction du temps. Le signal temporel que nous enregistrons contient dans le cas général un mélange de l'évolution spatiale et temporelle de la turbulence, rendant l'interprétation des mesures difficile.

La situation est toutefois plus simple lorsque la vitesse d'entraînement moyenne $\langle v \rangle$ est grande devant les fluctuations dues à la turbulence. L'hypothèse de Taylor veut que l'écoulement défilant devant la sonde à une vitesse assez grande soit pour celle-ci comme figé. On mesure alors l'évolution spatiale de l'écoulement, comme si t était fixé. Pour être dans cette situation, il faut vérifier la condition :

$$\frac{\langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle^{1/2}}{\langle v \rangle} \ll 1$$

Ce rapport est nommé taux de turbulence. Bien sûr, dans les situations expérimentales réelles, le taux de turbulence n'est pas aussi faible qu'on pourrait le souhaiter :

Écoulement :	Taux de turbulence :
axe d'une soufflerie :	7%
jet axisymétrique :	20-30%
disques contrarotatifs :	20-50% (suivant la position)
sillage d'une grille :	2-3%

Si le taux de turbulence n'est pas assez faible, la mesure de la vitesse à deux instants t et $t+\tau$, pour τ grand, ne reflète pas tout à fait la vitesse en deux points distants de $r = \langle v \rangle \tau$ au même instant. La turbulence aura un peu "vieilli" entre les deux mesures, d'autant plus que l'intervalle de temps τ et le taux de turbulence sont grands. Un défaut de l'hypothèse de Taylor sera particulièrement sensible aux grandes échelles.

De fait, lorsqu'on calcule la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation $\langle v(t+\tau) \cdot v(t) \rangle$, c'est-à-dire le spectre de puissance du signal enregistré dans le jet, on observe comme sur la figure 1.11 un bruit blanc à très basse fréquence.

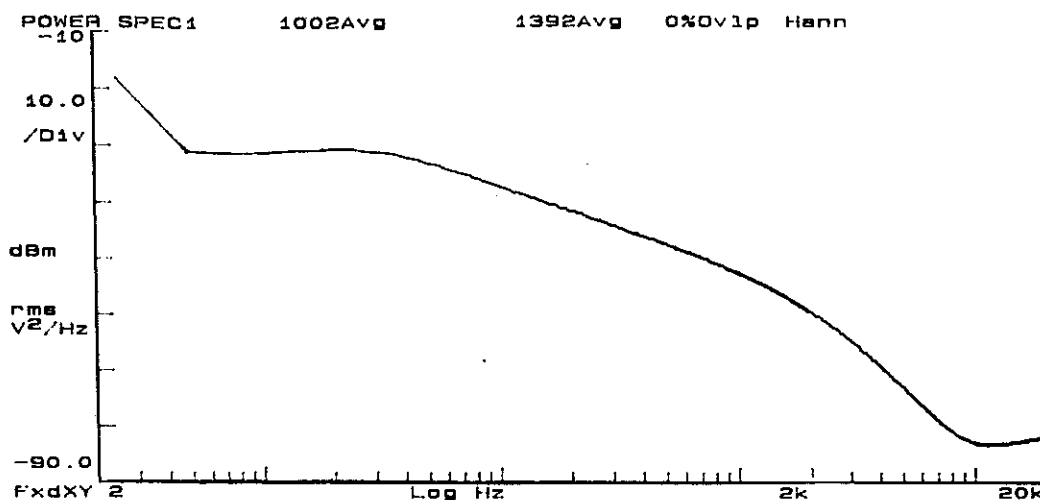


Figure 1.11 : Spectre de puissance du signal enregistré dans le jet cryogénique à $Re \approx 20\,000$, à une pression de $P \approx 50$ mb ($v \approx 1,9 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$).

On se serait plutôt attendu à ce que le spectre de puissance s'annule aux plus petits vecteurs d'onde k , lorsque l'échelle correspondante $r = 1/k$ devient de l'ordre de la taille du système. Ce comportement en bruit blanc de la vitesse ne traduit pas bien sûr l'existence de structures plus grandes que le dispositif expérimental, mais une perte de corrélation à grande distance, due à l'évolution temporelle du champ de vitesse.

Incréments de vitesse

Afin d'explorer l'évolution du processus de cascade au fil des échelles, il est nécessaire de définir une vitesse caractéristique d'une certaine échelle r . En vertu des remarques précédentes, il ne s'agit plus maintenant que d'échelles spatiales, les échelles temporelles étant considérées très longues devant $r/\langle v \rangle$, pour toutes les échelles r .

Suivant un usage répandu, nous avons choisi de transformer nos signaux en incréments de vitesse :

$$\delta v_r(x) = v(x+r) - v(x)$$

L'idée sous-jacente à ces incréments de vitesse est que la dynamique de la turbulence soit plus simplement décrite par les vitesses relatives entre les structures fluides de différentes tailles que directement par la vitesse [1]. Les incréments de vitesse présentent en plus quelques propriétés intéressantes :

- la statistique de δv_r ne dépend plus de la vitesse $\langle v \rangle$ de l'observateur par rapport au fluide
- si la statistique de $v(x)$ ne dépend pas de x , les incréments ont une moyenne nulle : $\langle \delta v_r \rangle = 0$
- le champ des incréments $\delta v_r(x)$ reste homogène même si $v(x)$ est faiblement inhomogène [2], c'est donc un outil particulièrement sûr.

Les deux configurations suivantes sont suffisantes pour décrire toutes les corrélations de vitesse en deux points [3] dans le cas de la turbulence isotrope :

- 1) Deux détecteurs placés côte à côte dans l'écoulement à la distance r désirée permettent de mesurer les incréments transverses. Dans cette configuration, l'hypothèse de Taylor n'a pas besoin d'être vérifiée puisque la mesure est directement faite en deux points. On peut cependant noter une difficulté expérimentale : la différence entre les mesures de deux instruments demande un très bon étalonnage relatif. Il est par ailleurs difficile de faire de telles mesures à de trop petites distances car les deux sondes peuvent se perturber mutuellement.



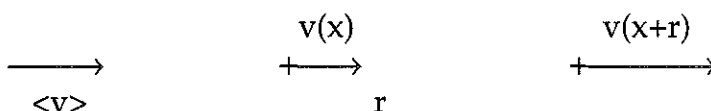
L'écoulement étant supposé localement isotrope [1], les densités de probabilité de δv sont symétriques à toutes les échelles.

- 2) Un seul détecteur (c'est notre situation actuellement). On reconstitue δv_r en faisant la différence de vitesse à deux instants. En effet, grâce à l'hypothèse de Taylor, nous avons vu que de tels incréments sont équivalents aux incréments spatiaux :

$$\delta v_\tau = v(t-\tau) - v(t) \Leftrightarrow \delta v_r$$

avec :

$$r = \langle v \rangle \tau$$



La situation présente n'a plus la symétrie spatiale de la précédente. Ainsi, on ne peut envisager une statistique symétrique de δv sans l'invariance des équations par renversement du temps, ce qui n'est pas réalisé. Effectivement, on peut vérifier expérimentalement que les incréments longitudinaux n'ont pas une statistique symétrique alors que c'est le cas pour les incréments transverses.

Comme on va le voir dans le paragraphe suivant avec l'équation de Kolmogorov, les incréments longitudinaux contiennent, du fait de leur dissymétrie, des informations concernant le transfert d'énergie entre les échelles. Ils sont donc particulièrement intéressants dans l'étude de la dynamique de la turbulence.

1.2 CONTEXTE THEORIQUE

1.21 KOLMOGOROV 1941

Dans le contexte d'une cascade à la Richardson où chaque structure est créée et nourrie par les structures de taille supérieure, et alimente à son tour en énergie les échelles inférieures, il est naturel de penser que les effets d'orientation des grandes échelles vont se perdre peu à peu au fil de la cascade [4]. Ainsi, pour des échelles pas trop grandes, on peut s'attendre à trouver un écoulement localement isotrope (donc aussi localement homogène) [1], dont les propriétés statistiques ne dépendent plus directement des caractéristiques à grande échelle. Ceci à condition toutefois d'avoir une hiérarchie d'échelles assez étendue.

L'isotropie locale est une propriété particulièrement intéressante puisqu'il existe dans ce cas une relation exacte tirée des équations de Navier-Stokes, et due à Kolmogorov [5] :

$$\langle \delta v_r^3 \rangle = -\frac{4}{5} \langle \varepsilon \rangle r + 6\nu \frac{d}{dr} \langle \delta v_r^2 \rangle$$

ν est la viscosité cinématique et $\langle \varepsilon \rangle$ est la puissance moyenne dissipée par unité de masse.

La gamme des grandes échelles, dans laquelle le terme contenant la viscosité est négligeable, est appelée zone d'inertie. On a alors :

$$\langle \delta v_r^3 \rangle = -\frac{4}{5} \langle \varepsilon \rangle r \quad (1)$$

Les plus petites échelles de l'écoulement, dans lesquelles au contraire le second terme du membre de droite devient important, sont nommées échelles de dissipation.

Les hypothèses de similitude de Kolmogorov que nous allons bientôt énoncer permettent d'étendre cette relation à tous les moments de δv_r :

$$\langle \delta v_r^n \rangle = C_n \langle \varepsilon \rangle^{n/3} r^{n/3} \quad (2)$$

On peut grâce à cette relation construire un incrément de vitesse sans dimension :

$$u = \frac{\delta v_r}{\langle \varepsilon \rangle^{1/3} r^{1/3}}$$

dont les moments sont des constantes : $\langle u^n \rangle = C_n$. Ainsi, la formule (2) signifie que la densité de probabilité de δv_r n'évolue pas en forme au fil des échelles.

Quelles sont les hypothèses de similitude de Kolmogorov 1941 qui justifient la formule (2), mais tout d'abord, de quels paramètres peut dépendre la statistique des incréments de vitesse à petite échelle ?

Le taux moyen de transfert d'énergie, que nous noterons $\langle \varepsilon^* \rangle$ pour le distinguer de la dissipation moyenne, est le paramètre de la cascade déterminant en première approximation l'influence des grandes échelles sur les petites. Dans le cas où la turbulence est stationnaire et homogène, le taux de transfert d'énergie $\langle \varepsilon^* \rangle$ est indépendant de l'échelle r et égal à la dissipation moyenne :

$$\langle \varepsilon^* \rangle = \langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} \nu \left\langle \sum_{i,j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle$$

Les fluctuations du champ de vitesse peuvent encore dépendre de propriétés physiques du fluide, comme la viscosité cinématique ν . Ceci est résumé par la première hypothèse de similitude de Kolmogorov :

Pour un nombre de Reynolds assez grand, la densité de probabilité de δv_r à une échelle r assez petite ne dépend que de r , de $\langle \varepsilon \rangle$ et de ν .

$\langle \varepsilon \rangle$ est en $m^2 s^{-3}$ et ν est en $m^2 s^{-1}$. Avec ces deux paramètres, on peut construire une longueur, appelée la longueur de Kolmogorov :

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\langle \varepsilon \rangle} \right)^{1/4}$$

Cette longueur η est la plus petite échelle de l'écoulement, l'échelle à laquelle l'énergie cinétique du fluide est transformée en chaleur. Elle est entièrement déterminée par la dissipation moyenne et la viscosité cinématique. A grande échelle, on a :

$$\langle \varepsilon \rangle \propto \frac{V^3}{L}$$

où V est une vitesse caractéristique de l'écoulement et L est l'échelle intégrale. On en déduit que :

$$\frac{L}{\eta} \propto Re^{3/4}$$

Ce qui fait dire que plus le Reynolds est grand, plus la hiérarchie d'échelles entre η et L est étendue.

On peut encore construire à partir de $\langle \varepsilon \rangle$ et ν un temps et une vitesse :

$$\tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\langle \varepsilon \rangle} \right)^{1/2} \quad v_\eta = (\nu \langle \varepsilon \rangle)^{1/4}$$

v_η est la vitesse caractéristique à l'échelle η , et τ_η est le temps de retournement des plus petites structures. On note au passage que l'inverse de ce temps n'est pas la plus haute fréquence que nous mesurons dans l'écoulement. En effet, il s'agit bien ici d'un temps caractéristique de l'évolution de la turbulence, qui doit pour que l'hypothèse de Taylor soit valide être très long devant les temps observés. De la même manière, il faut que v_η soit petite devant $\langle v \rangle$ pour que la turbulence soit "gelée". On peut remarquer qu'un nombre de Reynolds construit à partir de v_η et η est égal à un ; η est l'échelle à laquelle l'écoulement redevient stable.

La seconde hypothèse exprime l'idée que la viscosité ne doit intervenir qu'aux échelles auxquelles se fait la dissipation, les plus petites échelles :

Pour un nombre de Reynolds assez grand, la densité de probabilité de δv_r à une échelle r telle que $\eta \ll r \ll L$ ne dépend que de r et de $\langle \epsilon \rangle$.

De cette hypothèse, l'analyse dimensionnelle permet de tirer la relation (2). Cette hypothèse est supportée par la relation (1) et représente l'extension à toute la statistique de ce que l'on constate pour le troisième moment.

Cette relation nous donne un résultat très bien vérifié par l'expérience et qui fit le succès de ce modèle, le comportement en $k^{-5/3}$ du spectre de puissance :

$$\langle \delta v^2 \rangle \propto r^{2/3} \implies E(k) \propto k^{-5/3}$$

Mais l'expérience montre que la statistique des incréments δv_r évolue en forme au fil des échelles. Par ailleurs, on verra dans le paragraphe suivant que les deux hypothèses de similitude de Kolmogorov sur lesquelles se base la théorie de 1941 ne peuvent être exactement vérifiées, tout au moins sous cette forme.

Ce modèle donne cependant une base conceptuelle solide pour l'étude de la turbulence développée, et a profondément influencé les travaux théoriques qui ont suivi.

1.22 L'INTERMITTENCE : KOLMOGOROV- OBUKHOV 1962

C'est peu après la publication de la première théorie statistique de la turbulence par Kolmogorov qu'une objection vint de la part de Landau révélant une incohérence de ce modèle. De quoi s'agit-il?

Imaginons une boîte contenant de la turbulence localement isotrope. Cette boîte est coupée en deux par la pensée :

1)	2)
δv_1 $\langle \varepsilon_1 \rangle$	δv_2 $\langle \varepsilon_2 \rangle$

Dans chacun des deux volumes, comme dans le volume total, la relation de Kolmogorov 41 doit être vérifiée:

$$\begin{cases} \langle \delta v_1^n \rangle = C_n \langle \varepsilon_1 \rangle^{n/3} r^{n/3} \\ \langle \delta v_2^n \rangle = C_n \langle \varepsilon_2 \rangle^{n/3} r^{n/3} \end{cases}$$

Or dans tout le volume, δv^n est la moyenne de δv_1^n et δv_2^n , comme $\langle \varepsilon \rangle$ est la moyenne de $\langle \varepsilon_1 \rangle$ et $\langle \varepsilon_2 \rangle$:

$$\begin{aligned} \delta v^n &= \frac{1}{2} (\delta v_1^n + \delta v_2^n) \\ \Rightarrow \langle \delta v^n \rangle &= \frac{1}{2} (\langle \delta v_1^n \rangle + \langle \delta v_2^n \rangle) \\ \langle \varepsilon \rangle &= \frac{1}{2} (\langle \varepsilon_1 \rangle + \langle \varepsilon_2 \rangle) \end{aligned}$$

Ceci aboutit à une contradiction :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\langle \delta v_1^n \rangle + \langle \delta v_2^n \rangle) &= \frac{C_n}{2} (\langle \varepsilon_1 \rangle^{n/3} + \langle \varepsilon_2 \rangle^{n/3}) \cdot r^{n/3} \\ \neq \langle \delta v^n \rangle &= C_n \cdot \left(\frac{\langle \varepsilon_1 \rangle + \langle \varepsilon_2 \rangle}{2} \right)^{n/3} \cdot r^{n/3} \end{aligned}$$

car:
$$\left(\frac{\langle \varepsilon_1 \rangle + \langle \varepsilon_2 \rangle}{2} \right)^{n/3} \neq \frac{\langle \varepsilon_1 \rangle^{n/3} + \langle \varepsilon_2 \rangle^{n/3}}{2}$$

Revenons un peu en arrière pour examiner les hypothèses de Kolmogorov 1941. Si la vitesse $v(x)$ est un champ aléatoire, alors la dissipation :

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2} v \sum_{i,j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2$$

est aussi un champ aléatoire. Une fluctuations δv_r pourrait dépendre non de la valeur globale $\langle \varepsilon \rangle$, mais de la valeur locale du paramètre ε .

L'idée d'Obukhov [6] est de considérer la turbulence "réelle" comme un mélange de régimes "purs" de turbulence à la Kolmogorov 1941. Les statistiques des fluctuations de vitesse sont paramétrées par la grandeur aléatoire ε_r , définie par :

$$\varepsilon_r(x) = \frac{15v}{r} \int_{x-r/2}^{x+r/2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx$$

Ceci amène à reformuler les deux hypothèses de similitude de Kolmogorov 41 :

- Pour un nombre de Reynolds assez grand, la densité de probabilité des incréments de vitesse δv_r à ε_r fixé, à une échelle r assez petite, ne dépend que de r , ε_r et v .
- Pour un nombre de Reynolds assez grand, la densité de probabilité des incréments de vitesse δv_r à ε_r fixé, à une échelle r inertielle (telle que $\eta \ll r \ll L$), ne dépend que de r et ε_r .

Il faut maintenant ajouter une troisième hypothèse pour décrire les fluctuations de ε_r :

- Les fluctuations de $\ln \varepsilon_r$ sont gaussiennes pour Re assez grand (ε_r a une densité de probabilité log-normale). La variance de cette distribution dépend de l'échelle comme :

$$\Lambda^2 = \langle (\ln \varepsilon_r - \langle \ln \varepsilon_r \rangle)^2 \rangle = \mu \ln \left(\frac{r}{L} \right)$$

où μ est une constante universelle.

Envisager les fluctuations de ε présente une difficulté qui fut soulevée par Kraichnan en 1974 [7]. ε_r tel qu'il vient d'être défini est la moyenne de la dissipation sur un volume de taille r , et non le taux de transfert d'énergie à l'échelle r . Cette grandeur, de nature dissipative et non inertielle, peut-elle correctement décrire le transfert d'énergie au fil des échelles de la cascade, et peut-

elle être un bon paramètre des fluctuations du champ de vitesse à toutes les échelles?

La théorie de 1941, qui ne retenait comme paramètre que la moyenne du taux de transfert, égale à la dissipation moyenne $\langle \epsilon \rangle$ évitait cette difficulté.

1.23 UNE VISION GEOMETRIQUE : MODELES FRACTALS ET MULTIFRACTALS

L'idée de mêler la géométrie fractale à l'étude de la turbulence est une idée ancienne, au moins aussi ancienne que la géométrie fractale elle-même (Mandelbrot cite lui-même Richardson). L'origine en est la très large gamme d'échelles présentes dans un écoulement turbulent, 4 à 5 décades pour $Re = 10^6$. Il y a peu de systèmes naturels présentant une si large tessiture, donc évoquant les fractals avec autant de force.

On peut traduire plus précisément cette similitude en termes de symétries. L'équation d'Euler qui décrit le mouvement d'un fluide de viscosité nulle :

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \nabla_j v_i = -\frac{1}{\rho} \nabla P$$

est invariante par le changement d'échelle d'un facteur φ :

$$\begin{aligned} r &\longrightarrow \varphi r \\ v &\longrightarrow \varphi^h v \\ t &\longrightarrow \varphi^{1-h} t \end{aligned}$$

pour tout h , donc en particulier dans le cas de Kolmogorov 1941 : $h=1/3$.

L'ensemble des solutions, c'est à dire l'ensemble des champs de vitesse réalisables dans un fluide parfait a la même invariance d'échelle que l'équation d'Euler. Ou encore, ce qui revient au même, le champ de vitesse est statistiquement invariant par changement d'échelle.

Mais les vrais fluides naturels sont visqueux, et leur mouvement est décrit par l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \nabla_j v_i = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta v_i$$

Si ν est assez faible mais non nul, peut-on espérer que la symétrie ne soit pas brisée, c'est-à-dire que le champ de vitesse effectivement réalisé dans l'écoulement à grand Reynolds présente toujours une invariance d'échelle, au moins sur un certain intervalle ?

On aurait alors :

$$\langle \delta v_r^n \rangle \propto r^{\zeta_n}$$

Un grand nombre d'études expérimentales et numériques ont permis de montrer qu'à grand Re , le moment d'ordre n est une puissance de r sur une certaine gamme d'échelles, mais que ζ_n n'est pas linéaire en n ; on ne peut décrire correctement le champ de vitesse en termes de fractals homogènes.

Comme on ne peut attribuer cette rupture de symétrie qu'au terme de dissipation (c'est la seule différence entre l'équation d'Euler et l'équation de Navier-Stokes), la viscosité conserve un rôle important dans le processus de transfert d'énergie même à des échelles bien supérieures aux échelles de dissipation, même aux plus forts Reynolds accessibles à l'expérience.

Les modèles multifractals initiés par Frisch et Parisi [8] permirent de rendre compte de manière phénoménologique de la non-linéarité de ζ_n . Ils imaginèrent que le champ des incréments de vitesse, au lieu d'être fractal homogène, était une superposition de tels ensembles, de dimensions différentes. L'effort fut alors concentré sur la distribution des exposants h , et plusieurs modèles furent proposés pour relier au mieux ζ_n à n .

Mais une constante parmi ces modèles a été de considérer qu'il existait une seule distribution de h , indépendante de Reynolds, ce qui revient à considérer Re infini.

1.24 UN PRINCIPE VARIATIONNEL

Comme dans le modèle de Kolmogorov-Obukhov de 1962, nous allons considérer ici que la turbulence est un mélange de régimes purs. La densité de probabilité des fluctuations spatiales du champ de vitesse s'exprime alors comme combinaison linéaire de densités de probabilités à grande échelle distribuées suivant leurs variances :

$$\frac{1}{\sigma_r} P_r \left(\frac{\delta v_r}{\sigma_r} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma} G(\ln \sigma) P_L \left(\frac{\delta v}{\sigma} \right) d \ln \sigma \quad (1)$$

où P_L est la distribution à grande échelle des incréments δv , gaussienne pour les incréments transverses, mais légèrement dissymétrique pour les incréments longitudinaux.

En 1989, B. Castaing a montré que la distribution log-normale pour G pouvait se déduire d'un principe variationnel [9]. Nous allons dans la suite brièvement décrire ce raisonnement, et les prédictions qui en découlent.

On considère $\sigma(r)$ comme une fonction aléatoire de l'échelle r . Par commodité, on s'intéresse plutôt à la fonction :

$$\varepsilon(r) \equiv \frac{\sigma(r)^3}{r}$$

qui a l'avantage d'avoir une moyenne (d'ensemble) indépendante de r . La relation précédente est la définition de $\varepsilon(r)$, variable intermédiaire qui nous permet de calculer la densité de probabilité $G[\ln \sigma]$.

Cette fonction $\varepsilon(r)$ a les dimensions du taux de transfert d'énergie ; il peut être commode de se représenter $\varepsilon(r)$ comme tel, mais ce n'est ni justifié, ni nécessaire au raisonnement.

On cherche $G_{\varepsilon r}[\varepsilon]$, la densité de probabilité de $\varepsilon(r)$, ou plutôt le logarithme de cette densité de probabilité, l'"entropie" du processus aléatoire $\varepsilon(r)$:

$$Q[\varepsilon(r)] = -\ln G_{\varepsilon r}[\varepsilon(r)]$$

On peut se représenter les réalisations du processus $\varepsilon(r)$ comme des "chemins" de la cascade. Un très grand nombre de ces chemins sont possibles, réalisables, chacun ayant une probabilité $\exp Q[\varepsilon]$.
On cherche Q sous la forme suivante :

$$Q[\varepsilon] = L^d \int_{\eta}^L q \left(\varepsilon, \frac{d\varepsilon}{dr}, r \right) dr$$

L'entropie Q s'exprime comme la somme des contributions q de toutes les échelles, de tous les "morceaux de chemin", cette somme se faisant de la plus petite échelle, l'échelle de Kolmogorov η , à la plus grande, l'échelle intégrale.

Nous avons ce faisant utilisé la propriété d'additivité de l'entropie. Aurions-nous implicitement supposé une indépendance statistique des échelles entre elles ? Cette hypothèse qui est souvent faite en turbulence dans les modèles discrets de cascade, ne peut s'appliquer dans le cas présent d'un processus continu.

C'est la présence de $d\varepsilon/dr$ parmi les variables de q qui permet de rétablir la continuité du processus $\varepsilon(r)$. Mais c'est plus encore : imposer une contrainte sur la dérivée de $\varepsilon(r)$, c'est défavoriser à volonté les chemins les plus biscornus, c'est s'autoriser la possibilité que les chemins plus réguliers soient plus probables.

Le facteur L^d assure l'additivité de l'entropie vis-à-vis du volume, d étant la dimension de l'espace dans lequel se développe le processus, en principe 3.

Avec les trois variables $\varepsilon(r)$, $d\varepsilon/dr$, r , on ne peut construire qu'un nombre sans dimension :

$$\psi = \frac{r}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dr}$$

On peut donc exprimer simplement l'entropie "locale" q comme :

$$q\left(\varepsilon, \frac{d\varepsilon}{dr}, r\right) = \frac{1}{r^{d+1}} f(\psi)$$

L'entropie du processus $\psi(r)$ s'exprime alors :

$$Q[\psi] = L^d \int_{\eta}^L f(\psi) \frac{dr}{r^{d+1}}$$

La fonction ψ_0 pour laquelle $Q[\psi]$ est minimal décrit le processus de cascade le plus probable.

ε et donc σ ont des fluctuations log-normales

Un développement de l'entropie Q au voisinage de son minimum va permettre de décrire les fluctuations de ψ :

$$Q[\psi] - Q[\psi_0] = \delta\psi \left. \frac{dQ}{d\psi} \right|_{\psi=\psi_0} + \frac{\delta\psi^2}{2} \left. \frac{d^2Q}{d\psi^2} \right|_{\psi=\psi_0}$$

où : $\delta\psi = \psi - \psi_0$

$Q[\psi_0]$ étant un minimum, le premier terme du membre de droite est nul, et le second :

$$\left. \frac{d^2Q}{d\psi^2} \right|_{\psi=\psi_0} = L^d \int_{\eta}^L r^{-d-1} f''(\psi_0) dr > 0$$

Comme Q est le logarithme de la densité de probabilité de ψ , cette dernière est gaussienne. Qu'en est-il de ε ?

D'après la définition de ψ ,

$$\ln \varepsilon = \int \frac{\psi}{r} dr$$

$\ln \varepsilon$ sera lui-même gaussien si les $\psi(r)$ dont il est la somme peuvent être considérés, à des valeurs de r différentes, comme des variables aléatoires indépendantes. C'est à dire si les corrélations entre les échelles de l'écoulement sont de portée (en r) assez courte et la cascade assez longue pour que le théorème de la limite centrale s'applique.

Ainsi, $\ln \varepsilon$ tend vers un processus gaussien, et les densités de probabilité de ε et de σ tendent vers des distributions log-normales.

La variance de $\ln \varepsilon$

Un calcul fastidieux permet de montrer que la variance de $\ln \varepsilon$ est une puissance de r :

$$\Lambda^2 = \langle (\ln \varepsilon - \langle \ln \varepsilon \rangle)^2 \rangle = \Lambda_0^2 \left(\frac{r}{\eta} \right)^{\beta}$$

Où Λ_0 est une constante et η est l'échelle de dissipation visqueuse de Kolmogorov.

L'exposant β

Pour que dans la formule (1) la densité de probabilité des incréments de vitesse soit gaussienne comme P_L , il faut que $G(\ln \sigma)$ soit très étroite, c'est à dire $\Lambda^2 \sim 0$ à grande échelle. Comme à $r \sim \eta$, $\Lambda^2 = \Lambda_0^2$, on peut déduire l'évolution de l'exposant β avec le nombre de Reynolds :

$$\beta \propto \frac{1}{\ln\left(\frac{L}{\eta}\right)}$$

Et comme par ailleurs :

$$\begin{aligned} \frac{L}{\eta} &\approx Re^{3/4} \\ \Rightarrow \beta &\propto \frac{1}{\ln Re} \end{aligned}$$

L'exposant β décroît lorsque le nombre de Reynolds augmente.

Quelques remarques sur l'intermittence dans ce modèle

Dans le modèle log-normal de Kolmogorov comme dans le modèle variationnel, l'intermittence apparaît par les fluctuations d'une grandeur énergétique. L'écart quadratique de ces fluctuations est petit à grande échelle où l'injection d'énergie est contrôlée par les caractéristiques de l'écoulement macroscopique. L'écart quadratique de ces fluctuations va augmenter vers les petites échelles, décrivant la manière dont l'intermittence du champ de vitesse apparaît en fonction de r . Cette dépendance en loi de puissance diffère de la relation logarithmique de Kolmogorov-Obukhov 1962.

On peut noter que si Λ_0^2 est une constante, la statistique des incréments de vitesse à petite échelle est universelle : elle ne dépend ni de la géométrie de l'écoulement, ni de Re . La situation est différente dans les modèles multifractals pour lesquels les moments sont des puissances de r :

$$\langle \delta v^n \rangle \propto r^{\zeta_n}$$

et le coefficient d'aplatissement :

$$F = \frac{\langle \delta v^4 \rangle}{\langle \delta v^2 \rangle^2} \propto r^{\zeta_4 - 2\zeta_2}$$

L'expérience donnant ζ_4 inférieur à $2\zeta_2$, F augmente lorsque r décroît jusqu'à ce que la viscosité impose un changement de comportement de $\langle \delta v^n \rangle$. Puisque l'échelle visqueuse dépend de Re , le coefficient d'aplatissement à l'échelle visqueuse sera d'autant plus grand que Re est grand. Ainsi, contrairement au modèle variationnel, le modèle multifractal ne prédit pas de forme limite à petite échelle indépendante du nombre de Reynolds.

D'après le modèle variationnel, lorsque Re devient très grand, l'intermittence évolue moins vite avec les échelles (β est plus grand), la cascade "ralentit". Ainsi, dès les grandes échelles, les premiers "pas" de la cascade, l'influence de la dissipation aux plus petites échelles est sensible.

A la limite où Re tend vers l'infini, s'il existe encore une cascade d'énergie, elle tendra vers la cascade de Kolmogorov 1941. En ce sens, l'intermittence est pour le modèle variationnel un effet de Reynolds fini.

1.3 CONTEXTE EXPERIMENTAL

Comme nous venons de le voir à travers les explications qu'en donnent quelques modèles, l'intermittence est un phénomène central dans le processus de cascade, dans le fonctionnement même de la machine à dissiper l'énergie qu'est la turbulence. Qu'elle soit envisagée comme une irrégularité de la structure fractale sur laquelle l'énergie vient se concentrer, ou comme la fluctuation du taux de transfert d'énergie, ou encore comme un effet de Reynolds fini, une bonne compréhension de la turbulence développée doit rendre compte de l'intermittence.

Une étude expérimentale propre à caractériser ce phénomène se heurte principalement aux obstacles suivants :

- 1) L'intermittence est le fait d'événements rares, il faut une haute résolution statistique pour en caractériser les lois ($\sim 10^7$ points). Nous devons effectuer de longues mesures dans des conditions expérimentales bien contrôlées.
Cette contrainte est parfois difficile à négocier, en particulier aux très grands Reynolds. Par exemple, les critères de stationnarité de la turbulence atmosphérique sont délicats à définir. Dans un écoulement fermé comme la soufflerie de l'ONERA à Modane, l'énergie injectée dans l'écoulement provoque une hausse sensible de la température (de 20 à 40°C) au cours de la mesure, introduisant une variation de la viscosité de l'air et une évolution des caractéristiques des instruments de mesure qu'il faut compenser [11].
- 2) Le signal mesuré ayant une très large bande passante (5 à 6 décades à $Re=10^5$) et l'échelle des phénomènes étant une variable essentielle, il est crucial que la chaîne de mesure ait une bonne réponse sur une gamme de fréquences la plus large possible. Cette dernière contrainte impose le développement de techniques de mesure particulières comme un fil chaud ayant à la fois une faible taille et un temps de réponse court.
- 3) Le traitement faisant intervenir des différences de vitesse (incréments), nous devons manipuler de faibles valeurs. Il est essentiel que le signal soit numérisé avec une assez bonne définition (les 12 bits que nous utilisons sont un minimum) pour que des effets parasites de discrétisation ne viennent pas masquer les phénomènes physiques.

Les simulations numériques d'écoulements ont connu ces vingt dernières années des progrès importants grâce au développement d'ordinateurs de plus en plus rapides.

Dans l'investigation de la turbulence développée, cet outil présente l'avantage de donner accès au champ de vitesse dans tout l'espace, et non en un point seulement au fil du temps comme c'est souvent le cas dans les expériences. Les simulations numériques seront donc particulièrement intéressantes dans l'étude d'écoulements de géométries spécifiques (sillage d'une aile, d'une aube, écoulement dans une vallée, etc...). Leur inconvénient est la limite actuelle

de 512^3 mailles, qui pour la résolution exacte des équations de Navier-Stokes (simulation directe) correspond à $Re \approx 10^4$. La turbulence n'est alors qu'à peine développée !

Une combinaison fructueuse consiste à simuler numériquement seulement les plus grandes échelles de l'écoulement, fortement dépendantes de la géométrie (anisotropes). Les plus petites échelles, où la turbulence est isotrope, étant ensuite décrites par un modèle statistique. C'est la méthode de simulation sous-maille adoptée pour les plus grands Reynolds, par exemple pour simuler les écoulements atmosphériques et permettre des prévisions météorologiques.

Mais la précision de ces calculs dépend en partie de la qualité de nos connaissances de la turbulence à petite échelle et à grand Reynolds. Dans ce contexte, les mesures de fluctuations dans des écoulements réels à toutes les échelles sont irremplaçables pour tester la validité des modèles statistiques jusqu'à de grands Reynolds.

Une évolution récente des idées sur la turbulence développée est d'envisager que les plus grands Reynolds réalisés dans la nature n'aient pas atteint un hypothétique régime de "Reynolds infini" décrit par la plupart des modèles.

Cette évolution, d'un point de vue expérimental soulève quelques difficultés : il n'est plus suffisant de contourner dans une expérience à un nombre de Reynolds assez grand les difficultés citées ci-dessus, il faut en plus de cela pouvoir faire varier Re sur une large gamme !

Il est en général délicat de comparer des mesures faites à des nombres de Reynolds très différents. Pourquoi ?

Pour changer le nombre de Reynolds dans une expérience classique, dans l'air ou dans l'eau, on peut faire varier la vitesse V et la dimension L caractéristique. Les variations de V étant limitées, d'une part par la sensibilité des appareils de mesure, et d'autre part par la vitesse du son, on a au mieux accès à une gamme de vitesses d'une ou deux décades. En ce qui concerne la dimension L , on peut difficilement la faire varier sans changer la configuration expérimentale. Mais alors, l'aspect quelque peu arbitraire du choix des grandeurs caractéristiques L et V peut être gênant pour comparer différents systèmes expérimentaux. Par exemple, pour comparer plusieurs jets, il suffit de prendre pour L le diamètre de la buse et pour V la vitesse au centre de la buse. Mais comment choisir ces paramètres si l'on désire comparer la turbulence produite dans le sillage d'une grille, à celle d'un jet, ou d'une couche limite ?

Si nous voulons comparer des mesures faites dans différents écoulements, nous devons utiliser une autre définition du nombre de Reynolds, Re_θ , fondé sur des échelles de vitesse et de longueur intrinsèques à la turbulence, tirées des fluctuations de vitesse :

$$Re_\theta = \frac{\langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle^{1/2} \theta}{\nu}$$

où θ est la longueur de Taylor définie par :

$$\theta^2 = \frac{\langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle}{\langle \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \rangle}$$

Cette grandeur, plus universelle, est en revanche plus difficile à calculer que le nombre de Reynolds :

- Le calcul de la dérivée demande de bien résoudre les plus petites échelles de l'écoulement et de prendre en compte le bruit instrumental.
- L'écart quadratique et la moyenne de la vitesse (qui intervient dans le calcul de la dérivée spatiale) sont très sensibles à un défaut de stationnarité de l'écoulement et à la non-linéarité de la loi d'étalonnage, alors que tout le reste de notre étude, basée sur les incréments de vitesse, en dépend peu (cf. § 1.1).

Nous reviendrons sur cette définition en 2.6, notamment pour relier θ à la fonction d'autocorrélation des vitesses. Nous y exposeront plusieurs méthodes que nous avons utilisées pour calculer ce nombre de Reynolds.

L'expérience cryogénique décrite dans ce mémoire permet de mesurer les grandeurs de la turbulence réellement en fonction du nombre de Reynolds en le faisant varier proprement, à géométrie constante. Ainsi, $R\theta$ n'est qu'un moyen de comparer nos résultats à ceux obtenus dans d'autres écoulements. Notre vrai paramètre de contrôle et le seul à changer, est le nombre de Reynolds que nous pouvons faire varier continûment sur une large gamme.

REFERENCES DU CHAPITRE 1

- [1] Statistical Fluid Mechanics (The MIT Press, 1975)
Chap. 8, § 21.2
A.S. Monin, A.M. Yaglom
- [2] Statistical Fluid Mechanics (The MIT Press, 1975)
Chap. 6, § 13.1
A.S. Monin, A.M. Yaglom
- [3] Statistical Fluid Mechanics (The MIT Press, 1975)
Chap. 6, § 12.2
A.S. Monin, A.M. Yaglom
- [4] Statistical Fluid Mechanics (The MIT Press, 1975)
Chap. 8, § 21.3
A.S. Monin, A.M. Yaglom
- [5] Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence
A.N. Kolmogorov
C. R. Acad. Sci. U.R.S.S. **32**, (1941) 16, 18
- [6] Some specific features of atmospheric turbulence
A. M. Obukhov
J. Fluid Mech. (1962), 77-81
- [7] On Kolmogorov's inertial-range theories
R. Kraichnan
J. Fluid Mech. (1974), vol. **62**, part 2, pp. 305-330
- [8] Anomalous scaling laws in multifractal objects
G. Paladin, A. Vulpiani
Physics Reports **156**, No 4 (1987) 147-225, NorthHolland, Amsterdam
- [9] Conséquences d'un principe d'extrémum en turbulence
B. Castaing
J. Phys. France **50** (1989) 147-156
- [10] Velocity probability density function of high Reynolds number turbulence
B. Castaing, Y. Gagne, E. Hopfinger
Physica D **46** (1990) 177-200
- [11] Thèse M. Marchand 1994
INPG Grenoble

2. EXPERIENCE

2.1	Une expérience cryogénique	43
2.2	Montage expérimental	45
2.21	Le jet	45
2.22	Détecteur de vitesse	50
2.23	Chaîne d'acquisition des données	53
2.3	Procédure expérimentale	57
2.4	Etalonnage du détecteur	61
2.41	Quelle loi d'étalonnage ?	61
2.42	Etalonnage dans un écoulement laminaire	63
2.43	Etalonnage dans un écoulement turbulent	65
2.5	Tous les jets du monde... et le nôtre	67
2.51	Jet libre ou jet confiné, un problème de stabilité	67
2.52	Mesures de vitesse moyenne dans l'air	69
2.53	Limites de l'expérience cryogénique	74
2.6	Calcul du nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor R_θ	76
2.61	Définition de l'échelle de Taylor θ et de R_θ	76
2.62	Trois méthodes pour calculer R_θ	78
2.63	Comparaison de ces méthodes	84
2.7	Les échelles de la turbulence	87
	Références du chapitre 2	89

Après une rapide introduction sur l'hydrodynamique dans l'hélium à basse température, nous décrivons le montage expérimental lui-même : le jet, dans le cryostat, l'anémomètre, et enfin l'électronique de mesure et le système d'acquisition des données.

La procédure expérimentale est ensuite expliquée : comment contrôle-t-on la qualité d'une mesure ?

L'étalonnage du détecteur peut se faire de deux manières différentes : dans un écoulement laminaire connu (le cône potentiel de la buse), ou bien dans sa position de mesure, sur l'axe du jet turbulent grâce à la vitesse moyenne. On montre que ces deux méthodes donnent la même loi avant et après la campagne de mesures.

Le paragraphe suivant rend compte d'un travail de caractérisation de l'écoulement grâce à des expériences dans l'air et dans l'eau sur une maquette. Nous évoquons ensuite les limites actuelles du jet cryogénique pour les petits ainsi que pour les grands Reynolds et les améliorations à apporter pour repousser ces limites.

Nous avons développé trois méthodes pour calculer le nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor $R\theta$ et comparer nos résultats à des mesures dans d'autres écoulements.

Une qualité de notre jet cryogénique est de permettre de faire varier le nombre de Reynolds proprement, à géométrie constante. Nous calculons l'échelle visqueuse de Kolmogorov et l'échelle de Taylor en fonction de ce paramètre et obtenons les lois attendues.

2.1 UNE EXPERIENCE CRYOGENIQUE

Le choix d'une expérience cryogénique adoptée par B. Chabaud au cours de sa thèse [1] permet d'agir sur le dernier paramètre du nombre de Reynolds, la viscosité cinématique ν . Les mesures sont effectuées à 4,2 K, une température voisine de la température de transition liquide-gaz sous 1 atm.

La viscosité cinématique de l'hélium, rapport de sa viscosité propre à sa densité est très faible au voisinage du point critique (5,2 K, 2,26 atm). Elle augmente fortement vers les faibles pressions. En faisant varier la pression, on peut ainsi largement moduler la viscosité. Comme, de plus, la viscosité propre de l'hélium est l'une des plus faibles (voir tableau 2.1), on a accès à de grands nombres de Reynolds dans une expérience de taille réduite, bien contrôlable (pression, température).

fluide	T(K)	ν (poiseuille)	ρ (g/cm ³)	ν (m ² /s)
Air	293	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$
Eau	293	$1,0 \cdot 10^{-3}$	1,0	$1,0 \cdot 10^{-6}$
Mercure	293	$1,6 \cdot 10^{-3}$	13,6	$1,2 \cdot 10^{-7}$
H ₂ liq	20	$1,1 \cdot 10^{-5}$	$7,0 \cdot 10^{-2}$	$1,6 \cdot 10^{-7}$
H ₂ gaz	20	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$1,3 \cdot 10^{-7}$	$8,5 \cdot 10^{-3}$
N ₂ liq	77	$1,6 \cdot 10^{-4}$	0,807	$2,0 \cdot 10^{-7}$
N ₂ gaz	77	$6,5 \cdot 10^{-6}$	$4,6 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-6}$
He liq	4,2	$3,6 \cdot 10^{-6}$	0,125	$2,9 \cdot 10^{-8}$
He gaz	4,2	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$1,7 \cdot 10^{-2}$	$6,5 \cdot 10^{-8}$

Tableau 2.1: Viscosité et densité de quelques fluides à la pression atmosphérique [1]

Nous sommes donc à même, en jouant simultanément sur la vitesse et la pression du fluide, de faire varier proprement le nombre de Reynolds sur plusieurs ordres de grandeur (10^3 - 10^6) sans changer la géométrie de l'écoulement : on ne change que le nombre de Reynolds.

La faible viscosité de l'hélium apporte toutefois une difficulté : la taille des plus petites structures de l'écoulement est de l'ordre du micron pour $Re = 10^6$. Cette contrainte a rendu nécessaire le développement d'un anémomètre

tre de taille micronique, dont le principe est basé sur celui du fil chaud. Ce détecteur sera décrit en 2.22.

L'écoulement de jet a été choisi en raison de son taux de turbulence assez fort pour que de grands nombres de Reynolds soient accessibles dans un petit volume, et cependant assez faible pour que l'hypothèse de Taylor soit raisonnablement vérifiée.

Nous allons voir que malgré les difficultés techniques que présente l'hydrodynamique à basse température, la souplesse d'utilisation de cette expérience permet d'apporter un ensemble de mesures fiables sur une large gamme du paramètre de contrôle, le nombre de Reynolds.

2.2 MONTAGE EXPERIMENTAL

2.21 LE JET

L'ensemble du montage expérimental est décrit en détail dans la thèse de B. Chabaud [1]. L'hélium liquide du bain est vaporisé de façon contrôlée, puis capté par une micro-vanne et injecté dans la chambre d'expérience à travers une buse. Le jet se développe alors librement dans le "calorimètre". Il est ensuite pompé en aval, hors du cryostat.

Le cryostat a été construit spécialement pour cette expérience dans les ateliers du CRTBT. De conception classique, en acier inoxydable, il comprend une enceinte à azote liquide et une enceinte à hélium pouvant contenir trente litres de liquide (bain).

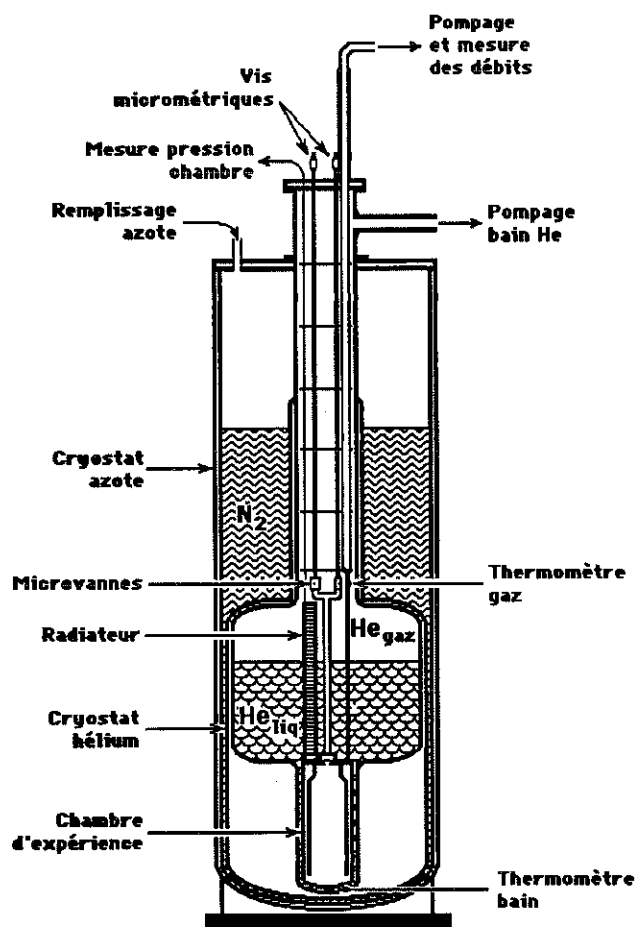


Figure 2.211 : Le cryostat.

Les pertes thermiques propres du cryostat sont assez faibles (0,15 W), elles provoquent l'évaporation de 0,2 litres d'hélium liquide par heure. A travers un clapet anti-retour taré, ce gaz évaporé du bain est conduit au gazomètre du laboratoire. Il y sera liquéfié pour un nouvel usage. Nous serons amenés à parler plus loin de la gêne que fut ce clapet pour les mesures dans certaines conditions.

Evaporation de l'hélium liquide

L'hélium liquide est évaporé par une résistance de chauffage située sous le calorimètre. La convection créée dans le bain par ce chauffage assure l'homogénéité de la température autour du calorimètre où se font les mesures. Ce chauffage permet de réguler la température du bain à la valeur choisie. Il peut développer jusqu'à 10 W, ce qui correspond à un débit de 130 l/mn TPN. Pour de plus forts débits, deux radiateurs d'appoint fournissant chacun jusqu'à 15 W peuvent être alimentés. Ces derniers sont situés juste au-dessus du calorimètre.

Admission du gaz

L'hélium gazeux est prélevé au-dessus du bain de liquide par une micro-vanne manoeuvrable de l'extérieur du cryostat (voir fig. 2.211). Le gaz descend par un tube d'acier inoxydable cannelé, permettant un bon contact thermique entre gaz et liquide. Il se thermalise ainsi à la température de l'hélium liquide. Une résistance dans le chapeau coiffant la buse permet si on le désire de réchauffer le gaz avant son entrée dans la chambre (voir fig. 2.212).

Deux galettes de micro-canaux à l'entrée de la buse assurent dans le sens de l'écoulement :

- 1) le filtrage du gaz pour éviter que des poussières ou des particules d'air solide ne viennent percuter le détecteur.
- 2) la laminarisation de l'écoulement

Il s'agit de disques de verre de 0,5 mm d'épaisseur percés d'une multitude de petits trous de 12,5 μm de diamètre pour la laminarisation et 17,5 μm pour le filtrage.

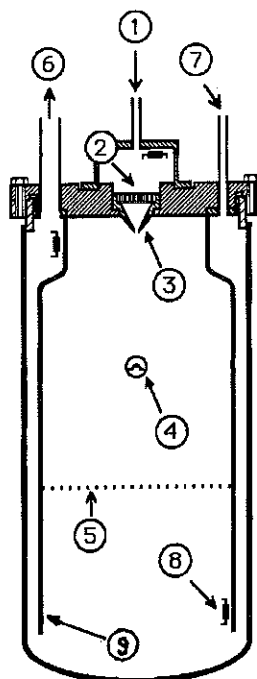


Figure 2.212 : Chambre d'expérience ou calorimètre : 1) tube d'admission du gaz. 2) galettes de micro-canaux. 3) buse. 4) détecteur de vitesse. 5) grille. 6) tube de pompage aval. 7) tube de mesure de pression. 8) thermomètre 9) chemise.

La buse

La buse (fig. 2.213), de 2 mm de diamètre, est cônica à forte convergence (contraction : 100). On s'attend donc à ce que le profil de vitesse en sortie soit plat et que le fort gradient de vitesse créé entre le jet et le gaz environnant assurent un déclenchement rapide de la turbulence.

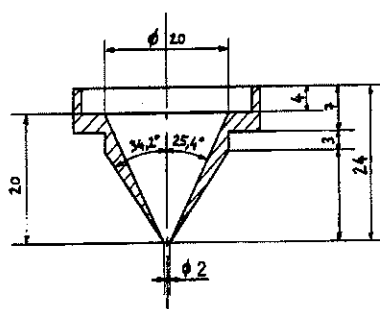


Figure 2.213 : Buse cônica de diamètre 2 mm.

Nous avons utilisé pour les étalonnages une buse de même géométrie mais de plus grand diamètre : 5 mm. Son rapport de contraction est alors égal à 16, l'angle intérieur étant le même.

Le support du détecteur

Le détecteur est placé sur l'axe du jet, à 10 cm de la buse. Il est collé sur deux cordes à piano (diamètre : 0,5 mm) tendues en travers du calorimètre par de petits ressorts. Cet ensemble est monté sur un support rigide que l'on peut déplacer verticalement dans la chemise, ou bloquer par des vis-pression. C'est avec tout cet ensemble que l'on vient positionner le détecteur juste sous la buse pour l'étalonner dans la partie laminaire du jet.

La grille

A 9 cm en aval du détecteur, une grille est fixée perpendiculairement à l'axe du jet afin de le stabiliser. En effet, comme on en discutera plus en détail au paragraphe 2.51, un jet confiné peut être instable. Le rôle de la grille est de briser les plus gros tourbillons, responsables de cette instabilité. Après quelques essais, nous avons choisi une grille dont le pas est 2mm, et le diamètre des fils qui la constituent est 0,5 mm.

Pompage

Le gaz injecté par la buse dans le calorimètre est pompé en aval de celui-ci derrière une chemise cylindrique. Nous avons utilisé pour cela deux pompes à palettes différentes, commutables facilement par un jeu de vannes :

- une pompe de fort débit (jusqu'à quelques m^3/h), dont le refoulement est directement branché sur le gazomètre du laboratoire. Cette pompe est commune à plusieurs expériences.
- une pompe de plus faible débit, située à proximité du cryostat. Elle s'est avérée nécessaire lorsque nous avons voulu faire des mesures aux faibles débits à basse pression. Les débitmètres n'étaient alors pas fiables, et nous avons dû mesurer le débit de refoulement de cette pompe à l'aide d'un compteur volumique (débit à pression atmosphérique).

Mesure du débit

En amont des pompes, à la sortie du cryostat, le gaz se réchauffe dans un échangeur à eau jusqu'à la température ambiante avant de passer dans l'un

des trois débitmètres massiques BROOKS. Nous sommes ainsi en mesure de connaître précisément le débit sur une large gamme (de 1 à 1700 l/mn).

Nous avons déterminé, grâce à un compteur volumique placé sur le refoulement de la deuxième pompe le facteur correctif à apporter aux mesures des débitmètres lorsque la pression varie de 200 mb à 1 bar (1,29 ou 1,13 suivant le débitmètre utilisé à 200 mb et 1,05 à 500 mb). Pour les mesures à des pressions plus faibles (50 mb), ces appareils ne sont plus fiables, il faut utiliser directement le compteur volumique.

Mesures de pression et de température

On mesure la pression du gaz au-dessus du bain et dans le calorimètre avec deux manomètres piézo-électriques à affichage digital. Les signaux électriques qu'ils délivrent sont tracés sur un enregistreur et permettent de contrôler que l'écoulement est en régime stationnaire au cours des mesures.

Un tube fermé à une extrémité et soumis à un gradient de température peut donner lieu à des oscillations basses fréquences (quelques Hz) appelées oscillations Taconis. Le tube de mesure de pression qui descend vers le calorimètre depuis l'extérieur du cryostat est muni d'une vanne afin d'éliminer, en ajustant finement l'ouvertures, les oscillations qui se manifestent parfois.

Des thermomètres de contrôle (résistances de carbone Allen Bradley de 68Ω à la température ambiante) sont placés en divers points du cryostat:

- au fond du bain (régulation de température)
- à coté des micro-vannes (prise de gaz)
- dans le chapeau (avant injection)
- sous la grille (dans la recirculation du jet)
- en bas de la chemise (gaz évacué)
- en haut de la chemise, à l'extérieur de celle-ci

2.22 DETECTEUR DE VITESSE

Principe du détecteur

Comme à 4,2 K la résistance des métaux ne varie pas avec la température, il a été nécessaire d'adapter aux basses températures la technique habituelle du fil chaud. Sur une fibre de verre de $5\text{ }\mu\text{m}$ de diamètre, est déposé par évaporation un métal résistif ($500\text{ }\text{\AA}$ de chrome), puis une couche supraconductrice ($2000\text{ }\text{\AA}$ de plomb-indium) interrompue en son milieu sur $5\text{ }\mu\text{m}$ grâce à un masque :

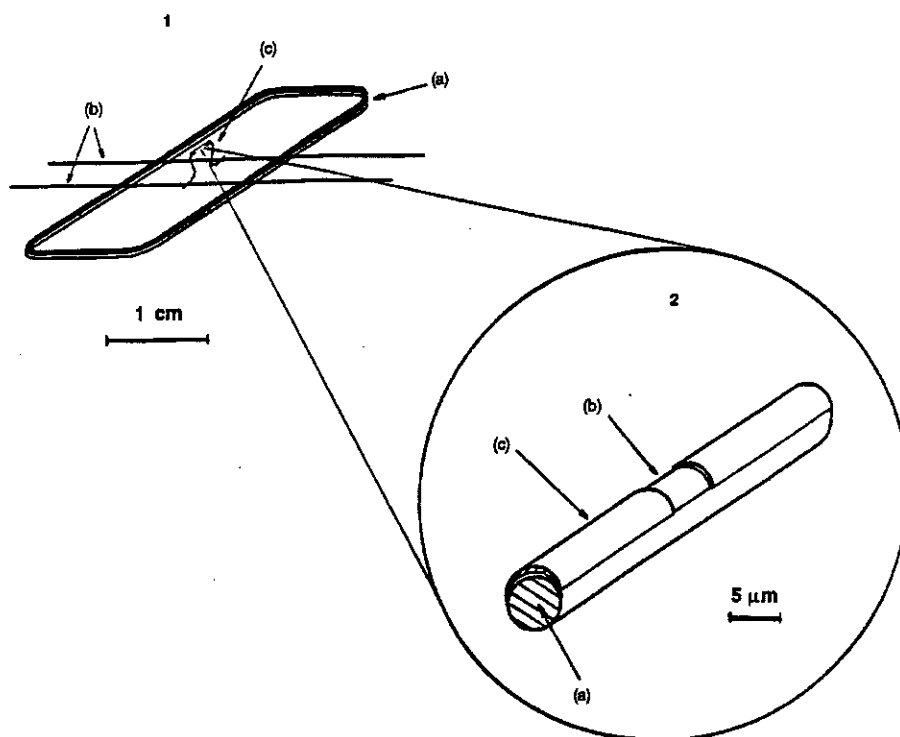


Figure 2.221 : 1) support du détecteur de vitesse :
 a) cadre en acier inoxydable, b) fils d'alimentation, c) bras d'argent.
 2) fil chaud : a) fibre de verre, b) "point chaud" : couche de chrome apparente,
 c) couche de plomb-indium.

Lorsqu'un courant électrique suffisant ($\lesssim 1\text{ mA}$) fait chauffer le chrome du point central par effet Joule, le revêtement supraconducteur voisin transite ($T_c \approx 7\text{ K}$) sur une courte longueur, et la résistance totale du fil augmente. A courant fixé, cette résistance dépend fortement du refroidissement du fil dans l'écoulement, c'est-à-dire de la vitesse locale du fluide.

Les fluctuations de vitesses sont données par l'intermédiaire d'une loi d'étalonnage à partir de la mesure du courant d'asservissement nécessaire pour garder la résistance du fil constante.

Lorsque la résistance du fil reste constante, le point chaud (zone résistive) garde la même taille. Cette longueur ($\approx 10 \mu\text{m}$) est la résolution spatiale du détecteur, qui par ce procédé de mesure reste constante.

Le détecteur ne mesure-t-il qu'une composante de la vitesse ? En réalité, il mesure le module de la vitesse. Ainsi, lorsqu'on décompose la vitesse en partie moyenne et fluctuations :

$$| \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{v} | = (\langle \mathbf{u} \rangle^2 + 2\langle \mathbf{u} \rangle \mathbf{v} + \mathbf{v}^2)^{1/2}$$

si le terme en $\mathbf{v}^2$ est négligé, c'est bien la composante de la vitesse dans le sens de l'écoulement que nous mesurons.

Convection libre autour du détecteur

Un fil chauffé comme ce détecteur provoque autour de lui un écoulement convectif, caractérisé par deux nombres sans dimensions :

- Le nombre de Prandtl, rapport des constantes caractérisant la diffusion de l'impulsion et la diffusion de la chaleur. Ce nombre est propre au fluide (dans l'hélium gazeux à 4,2 K, $\text{Pr} \approx 0,7$) :

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}$$

ν : viscosité cinématique

κ : diffusivité thermique

- le nombre de Grashof, égal au carré du nombre de Reynolds d'un fluide en chute libre. Ce nombre dépend de la pression par l'intermédiaire de la viscosité cinématique :

$$\text{Gr} = \frac{g \alpha \Delta T d_f^3}{\nu^2}$$

g : accélération de la pesanteur

α : coefficient de dilatation

ΔT : différence de température entre le fil et le gaz environnant

d_f : diamètre du fil

La puissance délivrée au détecteur en l'absence de jet permet de déterminer grâce à la loi d'étalonnage, le nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement.

ment convectif dû à cette puissance. Comme le Grashof dépend de la pression, la mesure de la puissance pour plusieurs pressions permet de tracer la courbe de Re en fonction de Gr (Figure 2.222), caractéristique de l'écoulement convectif libre autour du fil.

L'essentiel des points est concentré dans la partie droite de la courbe aux plus grandes valeurs de Rf , ils suivent dans cette gamme la loi :

$$Rf \propto Gr^{1/2}$$

représentée par une droite sur la figure 2.222.

C'est en effet le comportement attendu aux plus grands Grashof [2] lorsque le terme d'inertie est du même ordre que le terme moteur (la force d'Archimède), le terme visqueux étant alors négligeable.

Mais aux plus petits Gr , dans le régime visqueux où le terme d'inertie est négligeable, nous attendions plutôt [2] :

$$Re \propto Gr$$

Il peut s'agir ici d'un défaut de l'étalonnage à ces très faibles vitesses. Nous verrons au chapitre suivant que les probabilités d'avoir de si faibles vitesses dans le jet sont petites. L'influence de cet éventuel défaut sur le résultat des mesures est par conséquent limitée.

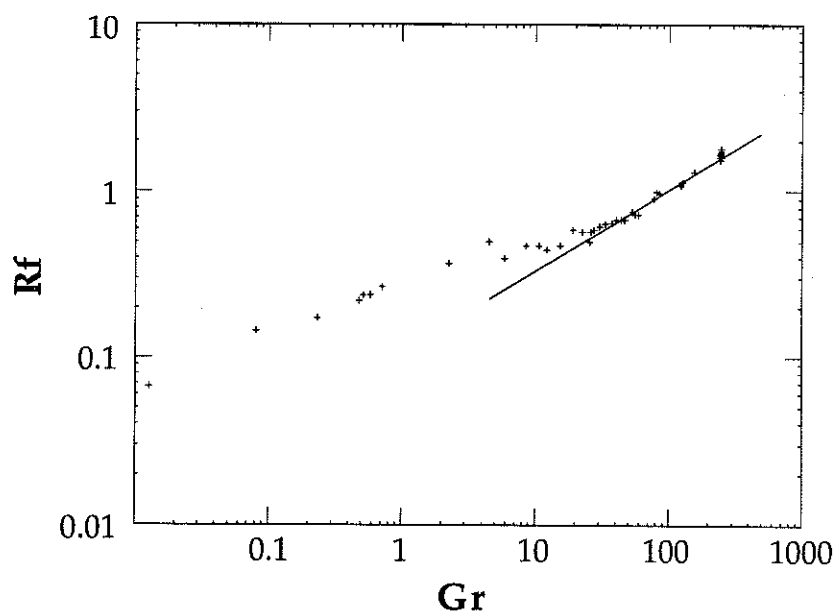


Figure 2.222 : Caractéristique Reynolds-Grashof du fil chaud en régime de convection libre

2.23 CHAÎNE D'ACQUISITION DES DONNÉES

Asservissement du détecteur à résistance constante

La mesure de la résistance du détecteur et l'asservissement en courant pour maintenir cette résistance constante sont deux fonctions distinctes (voir schémas fig. 2.231).

Le détecteur, mesuré par une méthode d'opposition, est monté en pont avec une résistance d'opposition (fil de Platine-Tungstène $R = 6\Omega = \text{constante}$). Lorsque le pont est équilibré, les deux branches sont parcourues par des courants alternatifs (10 MHz) en rapport inverse de leurs résistances. La tension de déséquilibre est recueillie à travers un transformateur d'isolement situé à froid, au dessus du calorimètre.

Les fils de cuivre (diamètre : 100 μm) qui transportent le signal de déséquilibre et les courants sont torsadés sous des blindages (tubes de cupro-nickel) indépendants.

Le signal subit une pré-amplification dès la sortie du cryostat, puis il est amené par des câbles coaxiaux vers un amplificateur de gain ajustable (1, 3, 10, 30, 100, 300). La détection synchrone multiplie le signal amplifié par un signal sinusoïdal de référence de fréquence 10 MHz. Le produit comprend une composante à 20 MHz, et une composante basse fréquence (de 0 à 1 MHz) proportionnelle au déséquilibre entre les deux branches du pont, le détecteur et la résistance d'opposition. Cette composante basse fréquence, après intégration, servira à corriger le courant du détecteur et à ramener le déséquilibre à zéro.

La puissance injectée dans le détecteur comprend donc une composante à haute fréquence (10 MHz), et une composante basse fréquence due à la correction de la boucle :

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{\text{HF}} + R_{\text{det}} I^2$$

En régime de fonctionnement normal:

$$\dot{Q}_{\text{HF}} \approx 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ W}$$

$$R_{\text{det}} \approx 25 \Omega$$

$$I \approx 10^{-4} \text{ A}$$

La loi d'étalonnage obtenue en 2.4 sera une relation entre cette puissance totale $\dot{Q}$ et le nombre de Reynolds local. Il est donc important de bien connaître $\dot{Q}_{HF}$.

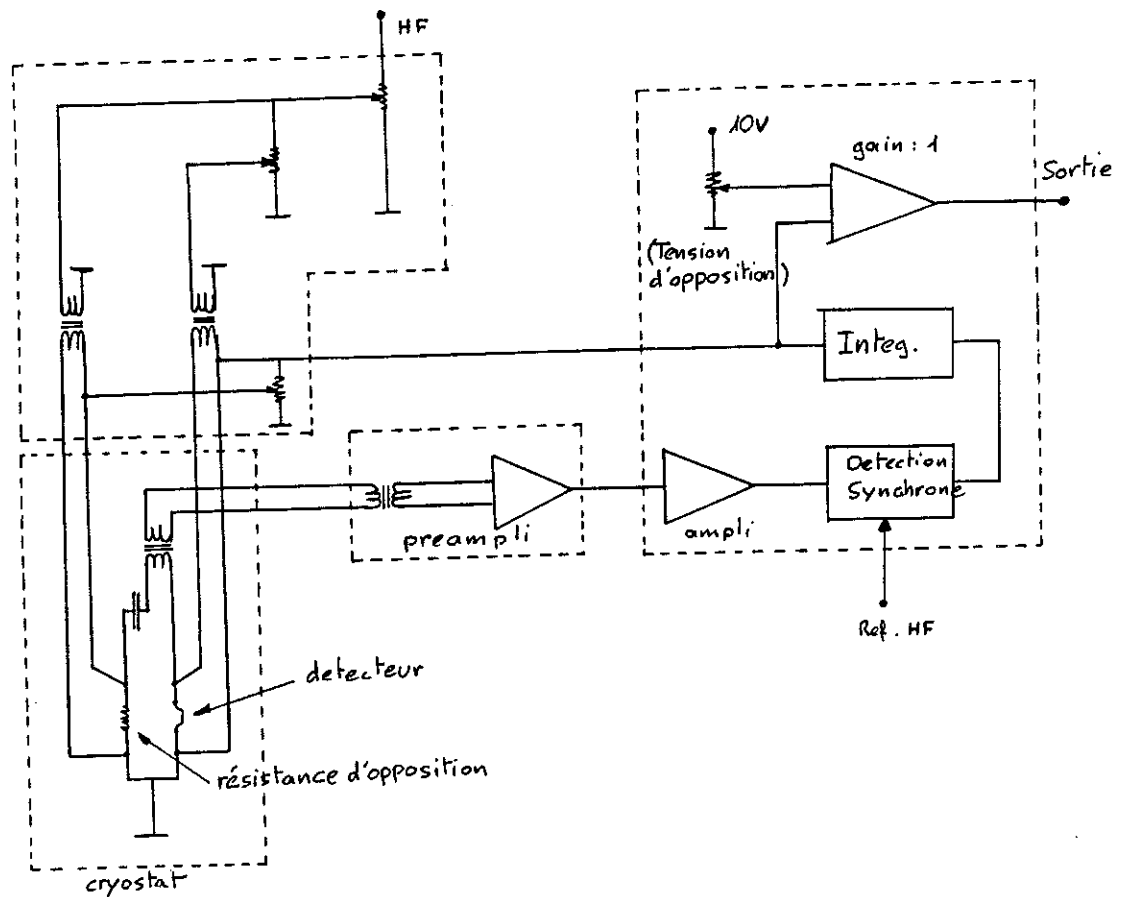


Figure 2.231 : Schéma de l'électronique de mesure.

Puissance haute fréquence $\dot{Q}_{HF}$

L'impédance des lignes qui amènent le courant au détecteur n'étant pas adaptée, on ne peut connaître directement la puissance que celui-ci reçoit à basse température à partir de celle qu'on injecte à température ambiante. Nous savons cependant que ces deux puissances sont proportionnelles. Nous utilisons la méthode suivante :

- on choisit un point de fonctionnement, c'est à dire une valeur de la résistance du détecteur, ou encore de la puissance totale qu'il reçoit
- on réduit $\dot{Q}_{HF}$ de moitié. L'asservissement corrige le courant pour rétablir une puissance totale $\dot{Q}$ identique.
- l'accroissement de $R_{det}I^2$ est alors égal à $\dot{Q}_{HF}/2$

L'usage du courant alternatif et de la détection synchrone pour la mesure des résistances est classique aux basses températures. Ils permettent de s'affranchir des effets thermoélectriques et de détecter un signal complètement pris dans le bruit comme c'est souvent le cas lorsque les courants de mesure sont très faibles.

L'originalité est ici la fréquence élevée de la détection synchrone, 10 MHz, qui permet de suivre des signaux jusqu'à 1 MHz (avec un choix adéquat du gain) comme le demande l'étude de la turbulence dans l'hélium. Cet appareil a été réalisé par le service électronique du CRTBT.

A la tension délivrée par la détection, on ajoute une tension d'opposition de manière à amener la tension moyenne du signal à zéro : on tire ainsi un meilleur parti des gammes de mesure du système d'acquisition.

Acquisition de données

Le signal ainsi obtenu est filtré passe-bas (filtre KEMO ; 48 dB/octave) de manière à éliminer la contribution du bruit au-delà des plus hautes fréquences de la turbulence.

L'étape suivante est la mesure du signal grâce à un système d'acquisition rapide HP 5183 (échantillonnage jusqu'à 4 MHz). La mesure se fait sur l'une des neuf gammes de tension, de 100 mV à 50 V, la résolution est de 12 bits.

Cet appareil est piloté par un micro-ordinateur Macintosh Quadra 700. La saisie se fait par blocs de 500 000 points (1 Mo) qui sont transférés sur le disque de l'ordinateur en quelques secondes (~10 s); l'acquisition est donc interrompue pendant ce temps. Les mesures présentées dans ce mémoire sont com-

posées de 20 fichiers de 500 000 points, soit au total un échantillon de 10^7 points pour chaque mesure.

Analyseur de spectre

Parallèlement à l'acquisition des données, un analyseur de spectre HP 3562 A nous permet d'enregistrer des spectres de puissance ou des histogrammes du signal. En particulier, le mode spectre nous permet de déterminer les fréquences de coupure et d'échantillonnage optimales pour un débit et une pression donnés, et de déceler éventuellement des fréquences de résonance parasites. Les histogrammes de cet appareil nous ont donné une première signature de l'instabilité du jet (cf. § 2.5) et nous ont permis à l'inverse de contrôler sa stabilité une fois la grille installée. Cet appareil est un outil irremplaçable pour connaître en temps réel le comportement du jet, et s'assurer de la qualité des mesures.

2.3 PROCEDURE EXPERIMENTALE

Les paramètres qui déterminent une situation expérimentale sont le débit (vitesse), et la pression (viscosité). Jouer sur le nombre de Reynolds de deux manières différentes permet, outre une large gamme de variations, de choisir la fréquence d'acquisition la plus confortable. En effet, augmenter dans la même proportion vitesse et viscosité permet d'augmenter les fréquences de l'écoulement, c'est-à-dire de réduire le temps de mesure pour le même Reynolds.

Une fréquence confortable est une fréquence pour laquelle le détecteur répond bien (≤ 100 kHz, avec le gain choisi), et pour laquelle cependant l'acquisition ne dure pas trop longtemps (≤ 1 h). Nous avons utilisé pour les mesures présentées ici quatre pressions dans le jet : 800 mb, 500 mb, 200 mb et 50 mb.

Etablissement d'un écoulement stationnaire

Quand la pression dans la chambre d'expérience est à la valeur choisie pour la mesure, la première étape est le réglage de l'ouverture de la micro-vanne. Comme la vitesse moyenne ne dépend que du débit, on peut se baser pour ajuster l'ouverture de cette micro-vanne sur le niveau moyen du signal du détecteur. On peut également faire ce réglage en contrôlant avec l'analyseur de spectre la fréquence de coupure du signal. Le choix de l'ouverture de la micro-vanne doit être fait rapidement pour que la pression dans la chambre ne dérive pas trop loin de sa valeur de consigne.

La seconde étape est de régler le débit de pompage en aval du jet pour que la pression soit constante à la bonne valeur.

L'évaporation de l'hélium qui alimente le jet refroidit le bain. On doit réguler sa température grâce à un chauffage placé sous la chambre d'expérience, dans le fond du réservoir d'hélium liquide.

On peut distinguer deux régimes de fonctionnement:

- 1) Pour les faibles débits, l'hélium gazeux au-dessus du bain se stratifie en température. Le gaz capté par les micro-vannes est "chaud", mais a le temps de se thermaliser en descendant vers la buse.

Pour les très faibles débits, plus faibles que le débit d'hélium dû aux seules pertes du cryostat (≈ 2 l/mn TPN), l'ouverture intempestive du clapet taré provoque des perturbations. Nous avons tout d'abord ouvert directement le bain d'hélium sur le gazomètre du laboratoire. Mais les fluctuations de la pression atmosphérique étaient alors gênantes.

La solution finalement adoptée a été de pomper légèrement et régulièrement à travers une micro-vanne le gaz d'évaporation du bain d'hélium.

- 2) Pour les forts débits, le gaz au-dessus du bain est agité par la convection thermique, c'est de l'hélium froid qui est aspiré par les micro-vannes. Pour faire des mesures à très grand Reynolds, nous devons monter la pression au-dessus de la pression atmosphérique afin de réduire la viscosité. Le cryostat est alors isolé de l'extérieur.

C'est le thermomètre situé dans la recirculation, sous la grille, qui nous donne la température du jet et nous permet d'ajuster éventuellement le chauffage du gaz dans le chapeau. La température donnée par le thermomètre du chapeau peut être légèrement différente à cause de la détente que subit l'hélium à la sortie de la buse ($\Delta T \lesssim 30$ mK).

On considère que le jet est "à l'équilibre" et prêt pour une mesure lorsque toutes les grandeurs mesurables (températures, pressions, débits, puissance de régulation) n'évoluent plus avec le temps. Cette situation est souvent longue à obtenir, d'autant plus longue que le débit est faible. Si on désire, après une mesure, modifier le débit pour en faire une seconde, il est avantageux de changer les réglages très progressivement en conservant le jet proche de l'équilibre. Typiquement, il faut une journée complète pour faire une, deux, parfois trois mesures à des Reynolds voisins.

Entre le début et la fin d'une mesure, l'ordre de grandeur des variations est :

$$\text{pressions} \quad : \quad \Delta P \approx 1 \text{ mb} \rightarrow \frac{\Delta R_e}{R_e} \lesssim 2 \%$$

$$\text{températures} \quad : \quad \Delta T \approx 2 \text{ mK} \rightarrow \frac{\Delta T}{T} \approx 5.10^{-4} \rightarrow \frac{\Delta R_e}{R_e} \lesssim 0,05 \%$$

$$\text{débit} \quad : \quad \frac{\Delta D}{D} \approx 1 \% \rightarrow \frac{\Delta R_e}{R_e} \lesssim 1 \%$$

ce qui donne un bruit sur le Reynolds au cours de la mesure de quelques pourcent dans les cas les plus défavorables. La valeur absolue du nombre de Reynolds est toutefois connue moins précisément à cause de l'incertitude sur la viscosité.

Mesure

En l'absence d'écoulement, le bruit du détecteur augmente proportionnellement à la fréquence, comme on peut le voir sur le spectre de la figure 2.31.

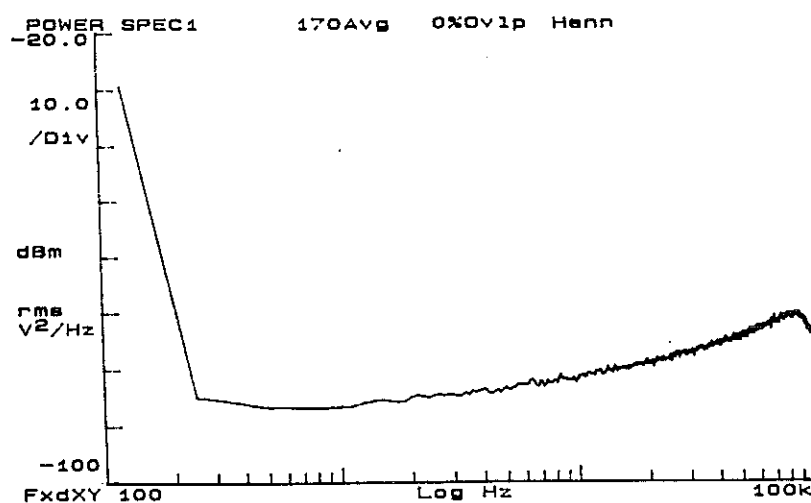


Figure 2.31 : Spectre de puissance enregistré sans écoulement.
La pression est de 600 mb ($v \approx 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$).

Lorsque le jet "souffle sur le détecteur", le spectre purement décroissant de la turbulence s'ajoute au spectre de bruit, et il apparaît un minimum à une fréquence ω_0 qui va nous servir de repère.

Nous avons pris la convention de régler le filtre passe-bas à une fréquence de $2 \omega_0$ et d'échantillonner le signal à $6 \omega_0$. La figure 2.32 représente le spectre de puissance d'un signal filtré non encore transformé en vitesse, tel qu'il est échantillonné ($Re = 45\,100$).

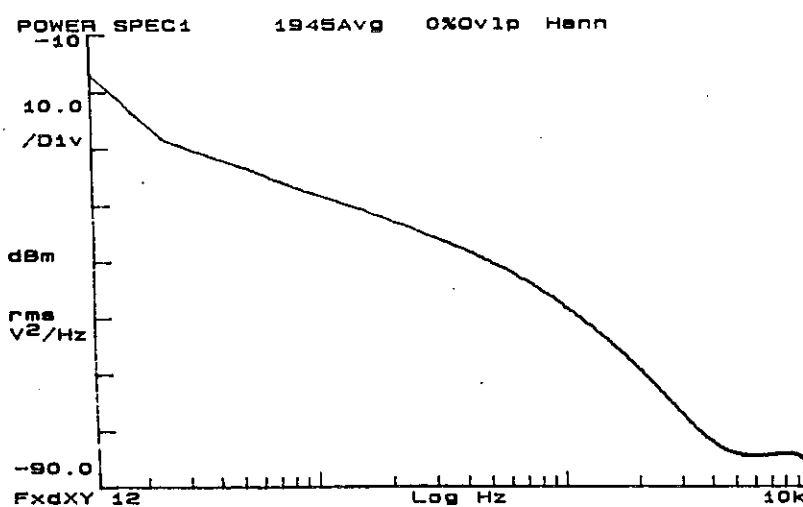


Figure 2.32 : Spectre de puissance enregistré dans un écoulement à $Re \approx 21\,000$.
La pression est de 200 mb ($v \approx 4,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$).

Re	Débit (l/mn) TPN	P (mb)	ν (m ² /s)	fréquence (kHz)	Temps de mesure
45 100	28,3	800	$9,6 \cdot 10^{-8}$	18	17 mn
4 620	2,25	200	$4,67 \times 10^{-7}$	4,2	1 h 05
1530	1,01	52	$1,88 \times 10^{-6}$	1,8	2 h 30

Tableau 2.33 : Valeur des différents paramètres adoptés pour trois mesures à des Reynolds très différents.

Le tableau 2.33 montre que les variations de viscosité permettent de faire des mesures à des Reynolds assez différents en des temps raisonnables.

2.4 ETALONNAGE DU DETECTEUR

2.41 QUELLE LOI D'ETALONNAGE ?

A la différence des fils chauds classiques, la puissance est dissipée dans notre détecteur par effet Joule seulement en son centre. A quelle forme de loi d'étalonnage peut-on s'attendre dans ce cas ?

Examinons la manière dont la chaleur est évacuée du point chaud vers le gaz et le long du fil. Le bilan du flux de chaleur qui traverse une tranche de fil d'épaisseur dx peut s'exprimer comme:

$$K_s \pi d_f^2 \left(\frac{dT}{dx}(x+dx) - \frac{dT}{dx}(x) \right) = K_g 4 \pi d_f \frac{T - T_0}{\delta} dx$$

où le second membre représente la puissance évacuée de la fibre vers le gaz
où :

d_f est le diamètre de la fibre

$T(x)$ est la température de la fibre à l'abscisse x et T_0 celle du gaz

δ est la longueur sur laquelle se fait l'échange de chaleur avec le gaz

K_s et K_g sont les conductivités thermiques de la fibre et du gaz

L'échange de chaleur le long de la fibre se fait sur une longueur l . Alors, l'équation précédente devient :

$$K_s d_f \frac{T - T_0}{l^2} = 2 K_g \frac{T - T_0}{\delta}$$

Nous pouvons exprimer la longueur l :

$$l^2 = \frac{K_s}{K_g} \delta d_f$$

La longueur sur laquelle se fait l'échange avec le gaz est de l'ordre de l'épaisseur de la couche limite. Celle-ci dépend du nombre de Reynolds construit avec le diamètre du fil, R_f :

$$\frac{d_f}{\delta} = A + B \sqrt{R_f}$$

La puissance totale évacuée du fil vers le gaz est :

$$\dot{Q} = K_g \pi r l \frac{T - T_0}{\delta}$$

En remplaçant l'épaisseur δ de la couche limite par son expression, on obtient la relation suivante entre la puissance au carré injectée par effet Joule dans la fibre et $\sqrt{R_f}$:

$$\dot{Q} = K_g K_s \pi^2 d_f^2 (T - T_0)^2 (A + B \sqrt{R_f})$$

On cherchera donc pour notre fil chaud cryogénique une loi d'étalonnage de la forme :

$$\dot{Q}^2 = c_0 + c_1 \sqrt{R_f}$$

L'exposant de R_f dans la loi de King peut parfois être sensiblement différent de $1/2$. Nous avons été amenés à considérer une dépendance en $R_f^{0.4}$.

A grand Reynolds la longueur l décroît, mais ne peut être inférieure à la dimension du point chaud : d_f . On pourra être amené à introduire un terme correctif :

$$\dot{Q}^2 = c_0 + c_1 \sqrt{R_f} + c_2 R_f$$

C'est parce que la chaleur est transférée vers le gaz sur une longueur l variable et non sur toute la fibre comme pour les fils chauds classiques que cette relation fait intervenir $\dot{Q}^2$ au lieu de $\dot{Q}$ comme la loi de King habituelle. On trouvera une modélisation et une discussion plus complète du comportement de ce détecteur en [1] et [3].

2.42 ETALONNAGE DANS UN ÉCOULEMENT LAMINAIRE

La méthode d'étalonnage la plus précise consiste à placer notre détecteur dans un flux laminaire connu. On compare alors la vitesse du fluide sur le détecteur à la puissance nécessaire pour garder la résistance constante.

Nous utilisons pour cela une buse de grand diamètre (5 mm). Le détecteur et son support sont remontés dans le calorimètre jusqu'à ce que l'anémomètre soit juste à la sortie de la buse, dans la zone laminaire de l'écoulement.

A cause de la forte contraction de la buse, le profil de vitesse est assez plat. On peut donc facilement calculer la vitesse sur le détecteur en fonction du débit massique d'hélium :

$$v_j = \frac{4D}{\pi d^2 \rho}$$

où : v_j est la vitesse moyenne à la sortie de la buse
 D : débit massique
 d : diamètre de la buse (5mm)
 ρ : densité de l'hélium gazeux à froid

Nous avons préféré utiliser des grandeurs sans dimensions chaque fois que c'était possible. On parlera donc de Reynolds-fil plutôt que de vitesse :

$$R_f = \frac{v \cdot d_f}{\nu}$$

$$R_f = \frac{4 d_f D}{\pi d^2 \rho v}$$

d_f : diamètre du fil (5 μm)

ν : viscosité propre de l'hélium ($\sim 1,1 \cdot 10^{-6}$ poiseuille, indépendante de P)

On peut voir sur la figure 2.42 le carré de la puissance injectée dans le détecteur ($\dot{Q} = \dot{Q}_{HF} + R_{\text{det}} I^2$) en fonction de la racine du Reynolds-fil, pour deux pressions différentes. La conductivité thermique de l'hélium étant indépendante de la pression, ces deux caractéristiques sont confondues.

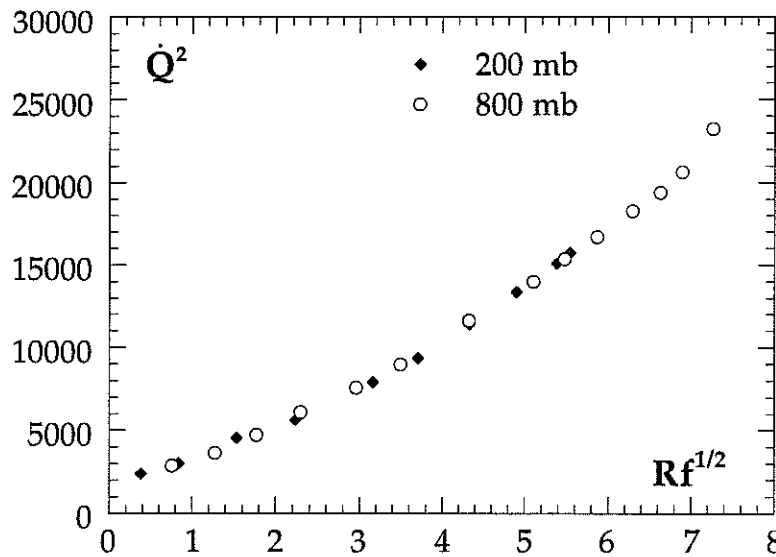


Figure 2.42 : étalonnage du fil chaud dans un écoulement laminaire à deux pressions différentes.

Par contre, la température du gaz peut influencer l'étalonnage. Pour cette raison, on corrigera cette température si besoin est grâce au chauffage dans le chapeau de manière à ce qu'elle soit toujours proche de 4,2K.

Par la méthode des moindres carrés, on fait passer par ces points une loi de la forme :

$$\dot{Q}^2 = c_0 + c_1 \sqrt{Rf} + c_2 Rf$$

Cette méthode d'étalonnage, certainement la plus précise, présente l'inconvénient d'imposer un réchauffement et un démontage de l'expérience pour déplacer le détecteur. Cette opération est longue, délicate et périlleuse pour le fil. En plus des dangers mécaniques évidents, le dépôt de plomb-indium peut s'oxyder au contact de l'air, et les cyclages thermiques peuvent amener des modifications incontrôlables de sa structure microscopique.

2.43 ETALONNAGE DANS UN ECOULEMENT TURBULENT

Le principe consiste à relier la puissance $\dot{Q}$ injectée dans le détecteur au Reynolds-fil moyen qu'il subit dans l'écoulement, dans sa situation normale de mesure, à 10 cm de la buse. La relation entre la vitesse à la buse et au centre du jet est connue [4] :

$$\frac{v}{v_j} = A \frac{d}{x}$$

v : vitesse au détecteur

v_j : vitesse au centre de la buse

d : diamètre de la buse

x : distance de la buse au détecteur

A est un facteur numérique variable d'un jet à un autre. Grâce à des mesures dans l'air qui seront décrites au paragraphe 2.5 nous avons déterminé cette constante : $A = 6 \pm 0,2$. Il nous a été alors possible, connaissant la vitesse à la buse v_j , de calculer la vitesse sur le détecteur v et de tracer l'étalonnage (points blancs de la figure 2.43).

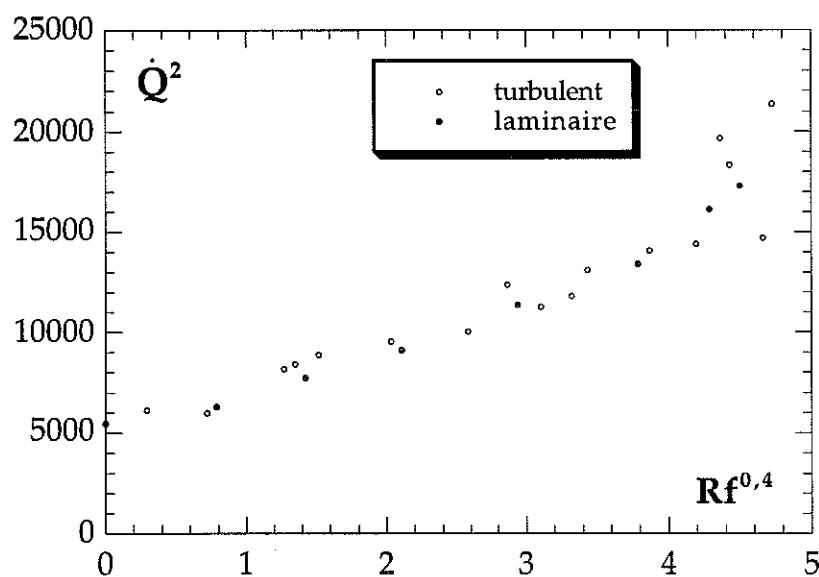


Figure 2.43 : Comparaison d'un étalonnage dans le jet turbulent avant les mesures à un étalonnage dans le cône potentiel laminaire après les mesures. Nous avons utilisé ici une loi de la forme :

$$\dot{Q}^2 = c_0 + c_1 R_f^{0,4}$$

qui correspond mieux à cette nouvelle situation. Après avoir effectué la série de mesures présentées dans ce mémoire, nous avons refait un étalonnage en régime laminaire et confirmé cette loi (points noirs de la figure 2.43).

Après plusieurs essais, la mise en place d'une grille en travers de la cellule a permis de briser les plus grosses structures supposées responsables du collage et de bien stabiliser le jet. Cette grille, placée à 9 cm en aval du point de mesure, c'est-à-dire à une distance bien supérieure à la taille des plus grosses structures de la turbulence ne doit pas perturber la mesure. On peut rappeler que le détecteur est placé à 10 cm de la buse. Des enregistrements vidéo ont permis, outre le contrôle de la stabilité du jet, de nous assurer que cette grille ne réfléchissait pas de bouffées turbulentes parasites vers l'amont, vers le détecteur.

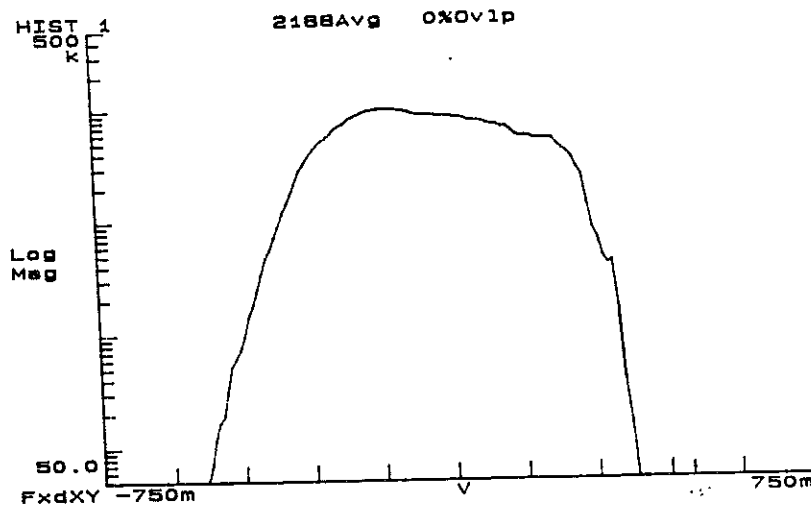


Figure 2.51 : histogramme des fluctuations de tension dans une situation particulièrement instable.

La pose de cette grille dans le jet d'hélium nous a permis de retrouver les caractéristiques d'un jet libre ordinaire : un taux de turbulence entre 25 et 30 %, des histogrammes de vitesses gaussiens (voir fig. 3.11), et l'évolution de R_θ comme $\sqrt{Re}$ (voir § 2.6).

Stabilisé par sa grille, ce jet cryogénique se comporte donc comme tous les jets du monde, mais sur une large gamme de Reynolds.

2.5 TOUS LES JETS DU MONDE... ET LE NÔTRE

2.51 JET LIBRE OU JET CONFINE : UN PROBLEME DE STABILITE

Le jet libre est un moyen simple et efficace de produire de la turbulence : le fluide est injecté par une buse dans un volume assez grand pour que les parois n'influencent pas son mouvement. Assez loin de la buse, à plus de 20 diamètres, la turbulence produite ne dépend en principe plus de la forme de la buse. Par intérêt pratique, mais aussi pour sa simplicité, le jet libre a été étudié en détail dans diverses configurations, et il existe une littérature assez complète sur cet écoulement modèle [4, 5, 6, 7].

Le souci principal lors de la construction de ce jet cryogénique a été de rester le plus proche possible du jet libre idéal afin de profiter de ces connaissances acquises.

Le jet d'hélium gazeux se développe à partir d'une buse de diamètre $d=2$ mm dans une cavité cylindrique relativement grande (diamètre : 13 cm = $65 d$, longueur : 30 cm = $150 d$). Grâce à une chemise cylindrique, le fluide est pompé de manière symétrique en aval du jet. Malgré ces précautions, ce jet s'est avéré aux premiers essais assez différent d'un jet libre standard.

Sa particularité s'est tout d'abord manifestée par un taux de turbulence anormalement haut, 35 % au lieu des 25 à 30 % attendus [5, 6], et des histogrammes de vitesse parfois très déformés comme le montre la figure 2.51. Le calcul de R_θ , le nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor (cf. §2.6) s'est ensuite avéré très difficile : nous n'avons pas de concordance entre les différentes méthodes de calcul et des valeurs parfois aberrantes de R_θ .

Pour mieux comprendre l'origine de ces particularités, nous avons construit une maquette en verre à l'échelle 1 qui nous a permis de visualiser un jet d'eau teinté d'encre. Nous avons pu ainsi constater que le jet était très instable, même aux petits Reynolds. Il venait se coller aux parois puis se décrochait et revenait au centre avant de repartir, de manière désordonnée. Ainsi le détecteur subissait dans le jet d'hélium des régimes différents de turbulence.

2.52 MESURES DE VITESSE MOYENNE DANS L'AIR

La relation entre la vitesse à la buse v_j et la vitesse v au centre du jet à une distance x en aval est [4] :

$$\frac{v}{v_j} = A \frac{d}{x}$$

où A est une constante numérique variable d'un jet à un autre [4], [7]. Afin d'étalonner in situ notre anémomètre, nous avons besoin de connaître précisément cette constante. Nous avons donc effectué dans l'air des mesures de vitesse moyenne à l'aide d'un tube de Pitot dans la même configuration que celle de l'expérience réelle (même buse, même grille et support de détecteur). Le signal du manomètre différentiel du tube de Pitot était tracé sur un enregistreur à défilement lent muni d'un filtre passe-bas. Nous pouvions ainsi précisément obtenir la pression, et donc la vitesse moyenne. On peut voir sur la figure 2.521 la constante $A = \frac{x}{d} \frac{v}{v_j}$ pour plusieurs valeurs de Re accessibles dans l'air. Dans notre configuration expérimentale, et dans la zone $Re > 5000$ qui nous intéresse, cette constante est :

$$A = 6 \pm 0,2$$

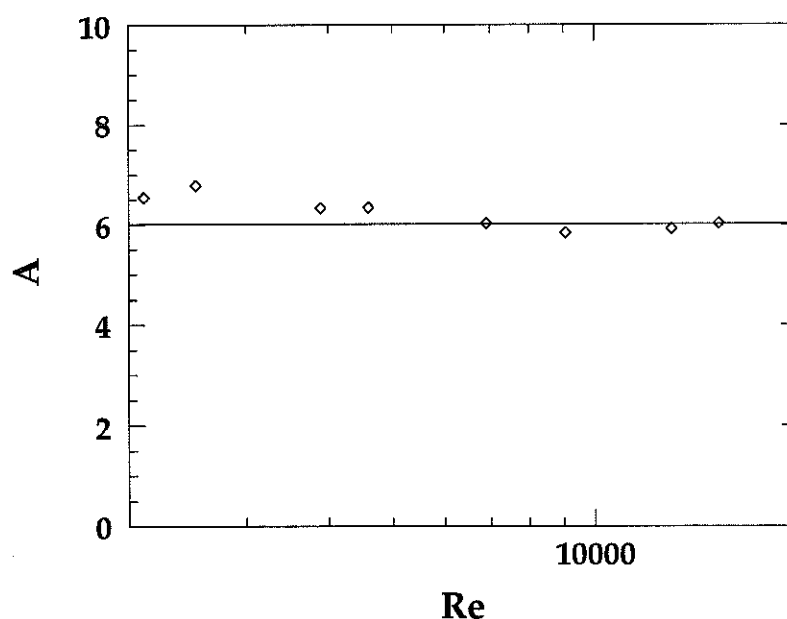


Figure 2.521 : Constante du jet A en fonction de Reynolds.

Protégé des perturbations extérieures par la chemise et la grille, nous avons pu mesurer le rapport v/v_j jusqu'à des valeurs très faibles de Re , et observer un phénomène surprenant : pour une valeur précise de Re ($Re \approx 600$), v/v_j devient très grand, proche de 1 (voir fig. 2.522). Comme si le jet était à ce Reynolds finement "collimaté" !

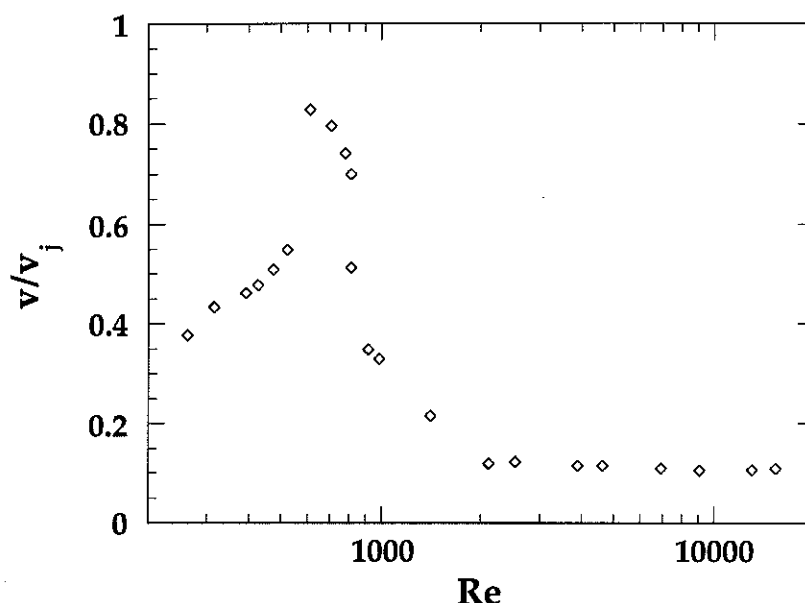


Figure 2.522 : Rapport de la vitesse à 55 diamètres (11 cm) sur la vitesse à la buse en fonction de Reynolds. Pour $Re \sim 600$, on observe une brutale montée de ce rapport : la vitesse ne diminue presque pas sur toute la longueur du jet.

Il s'agit de la transition du régime laminaire, au régime turbulent. La figure 2.523 permet de bien identifier ces deux comportements :

- 1) régime laminaire, en accord avec la solution analytique de Landau [9] qui donne $v \propto v_j^2$
- 2) régime turbulent discuté précédemment pour lequel $v \propto v_j$.

Comme on peut le voir sur la figure 2.523, il suffit d'augmenter le Reynolds d'un facteur deux pour passer d'un régime purement laminaire à un régime turbulent. Une étude systématique du scénario de transition à la turbulence dans un jet demanderait donc un contrôle très fin des paramètres de l'expérience.

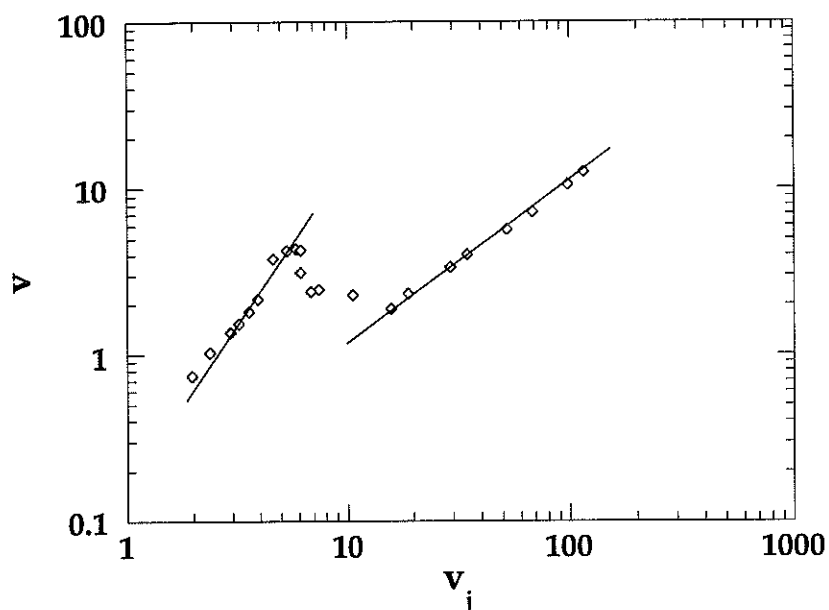
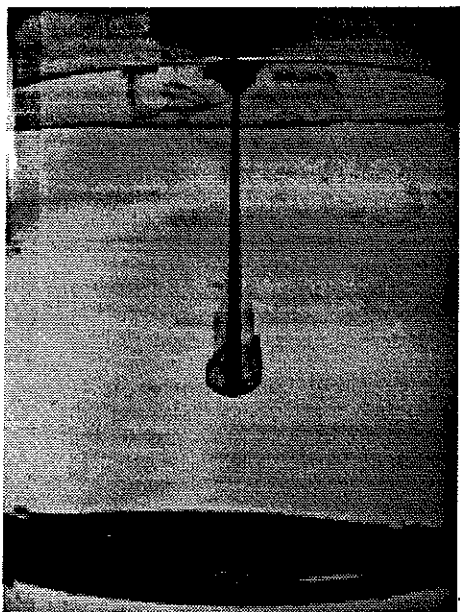
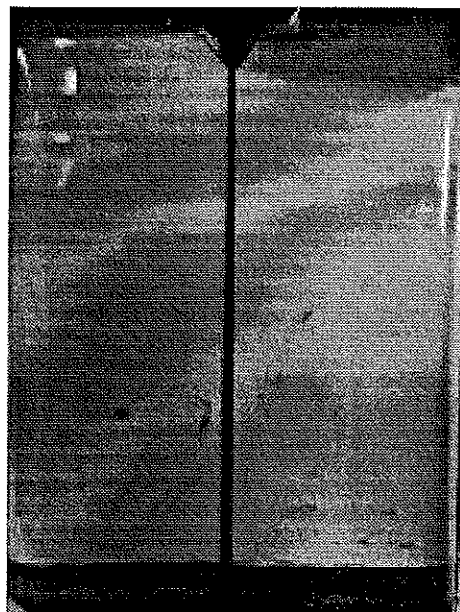


Figure 2.523 : La vitesse au centre du jet à 55 diamètres en fonction de la vitesse à la buse (en m/s). On voit nettement les deux régimes laminaire et turbulent.

Afin de visualiser ces différentes situations, nous avons repris à très faible débit le jet d'eau teinté d'encre. Même si les conditions sont difficiles à contrôler et ne permettent pas de faire de mesures, les photos des pages suivantes permettent de se faire une idée du comportement du jet dans ces conditions de faibles Reynolds.

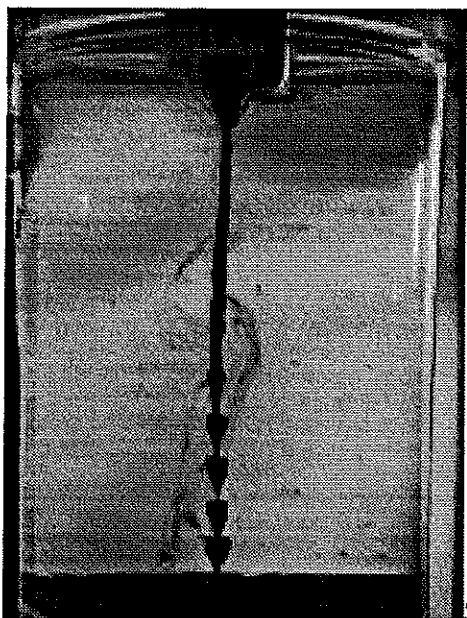


1



2

Les images ci-dessus représentent le jet dans des régimes laminaires. A gauche, le jet s'arrête au milieu de la cavité lorsque le fluide a cédé toute son impulsion. A droite, pour un Reynolds un peu plus fort, le jet descend jusque sous la grille. Il est à noter qu'un jet est toujours instable [9], même à des Reynolds aussi faibles. On peut en effet faire apparaître un régime périodique sans changer le débit, grâce à la perturbation d'un haut parleur placé contre la maquette (pour une fréquence de quelques hertz).



3

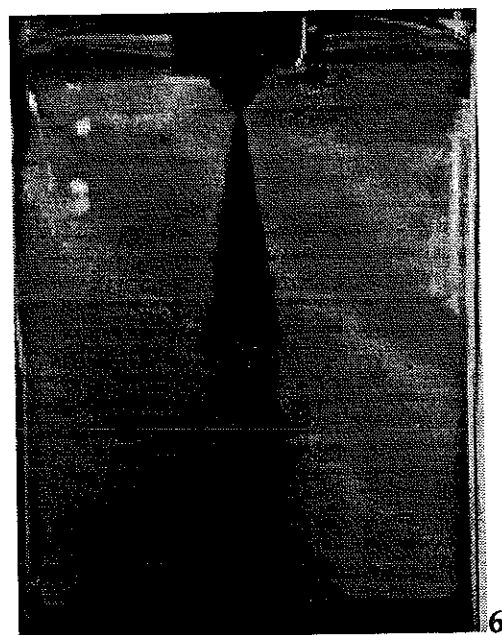
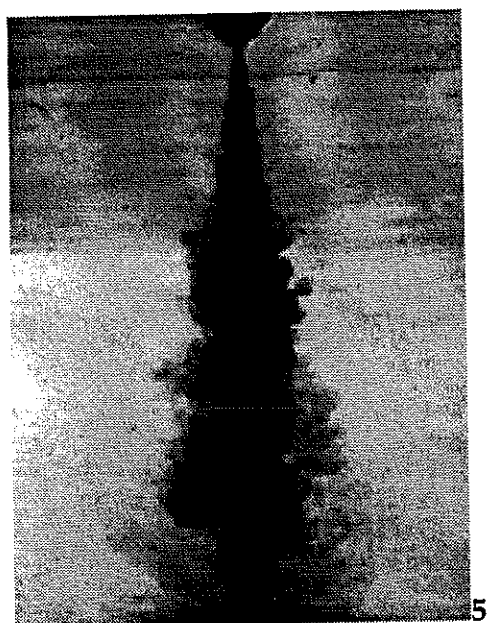


4

Si on augmente le Reynolds, le régime laminaire fait place à un régime périodique de "gouttes", habituel pour ce type de buse à forte contraction (à gauche) [9]. On peut furtivement observer le mode spiral avant que l'écoulement ne se désorganise. La buse utilisée ici est celle des expériences dans l'hélium.



On voit sur cette image le jet laminaire à la sortie de la buse se déstabiliser en un mode spirale qui laisse immédiatement place à un régime chaotique qui reste à caractériser.



Ces deux dernières images montrent le même jet d'eau marqué d'encre dans des régimes turbulents. On peut atteindre dans cette maquette d'eau des Reynolds de l'ordre de 10^4 .

Ces quelques expériences "de coin de table" dans l'air et dans l'eau nous ont permis de mieux connaître et comprendre notre jet.

2.53 LIMITES DE L'EXPERIENCE CRYOGENIQUE

Limites du jet aux plus forts débits

Nous avons été limités à des Reynolds un peu supérieurs à 10^5 par l'apparition sur le signal d'une très forte composante périodique à 14 kHz qui venait fausser les mesures (voir le spectre de la fig. 2.53). Dans ces conditions de pression et de température, la longueur d'onde correspondant à cette fréquence est de 7 mm, c'est à dire approximativement le diamètre du tube cannelé qui amène l'hélium gazeux des micro-vannes à la buse. Il peut donc s'agir de résonances acoustiques dans ce tube. Un tube lisse récemment installé devrait permettre, on l'espère, de résoudre ce problème.

Une autre limite à grand Reynolds est l'apparition de fortes distorsions sur le signal qui pourraient être dues au dépassement du courant critique dans la couche supraconductrice du détecteur. Il a été observé, sur d'autres détecteurs que le courant critique a tendance à décroître lorsque le dépôt vieillit. Ainsi, un détecteur neuf pourrait permettre des mesures à plus fort Reynolds.

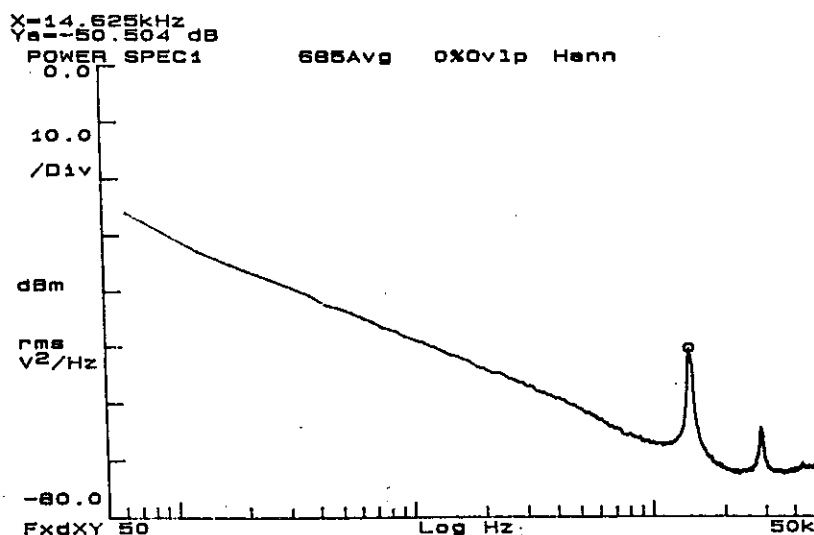


Figure 2.53 : Spectre de puissance enregistré à $Re \approx 162\,000$ à $P \approx 800\text{ mb}$
($v \approx 9,2 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$)

Limites du jet aux faibles Reynolds

Nous avons vu au paragraphe précédent que la transition entre les régimes laminaire et turbulent est accessible à notre jet. Mais des améliorations seraient nécessaires pour permettre des mesures et caractériser le scénario de transition.

Pour réaliser un écoulement à très petit Reynolds, nous avons dû baisser la pression dans le calorimètre afin d'augmenter la viscosité. Mais la différence de pression (~ 1 bar) de part et d'autre de la micro-vanne rendait le réglage fin du débit trop difficile, il a fallu aussi réduire la pression du bain. Le refroidissement résultant du pompage du bain faisait alors sortir le détecteur de sa gamme d'étalonnage ; nous ne pouvions plus transformer les tensions en vitesses. Par ailleurs, le compteur volumique est incapable de mesurer de si faibles débits (son débit minimum est $0,4$ l/mn) ; nous ne pouvons donc pas connaître le nombre de Reynolds.

Nous avons pu observer à l'oscilloscope des signaux laminaires, périodiques ou quasi-périodiques, et obtenir quelques spectres de puissance. Pour les réglages très fins de débit, nous nous sommes parfois aidés d'un amplificateur branché sur le signal et d'un haut-parleur. Le changement de son permet en effet de percevoir vite et très nettement un changement de régime hydrodynamique.

Nous avons montré qu'une telle étude est réalisable dans ce jet cryogénique, mais demande quelques adaptations pour assurer un contrôle suffisant des conditions expérimentales.

2.6 CALCUL DU NOMBRE DE REYNOLDS BASE SUR L'ECHELLE DE TAYLOR R_θ

2.61 DEFINITION DE L'ECHELLE DE TAYLOR θ , ET DE R_θ

On a évoqué en 1.3 la nécessité de définir un nombre de Reynolds basé sur des grandeurs intrinsèques à la turbulence afin de comparer nos résultats à des mesures faites dans d'autres écoulements, comme un tunnel ou le sillage d'une grille (voir § 3.1).

On se propose dans ce paragraphe, après avoir relié l'échelle θ de Taylor telle qu'elle a été définie en 1.3, à la fonction d'autocorrélation des vitesses, de présenter trois méthodes que nous avons utilisées pour calculer R_θ .

Considérons la fonction d'autocorrélation des vitesses :

$$\rho(r) = \frac{\langle v(x+r).v(x) \rangle}{\langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle}$$

Un développement au second ordre autour de zéro introduit la longueur de corrélation de Taylor :

$$\rho(r) = 1 + \frac{r^2}{2} \rho''(0)$$

$$\theta^2 = - \frac{1}{\rho''(0)}$$

C'est la distance à laquelle la parabole osculatrice coupe l'abscisse. On va définir le nouveau nombre de Reynolds R_θ avec cette longueur et l'écart-type des fluctuations de vitesse :

$$R_\theta = \frac{\langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle^{1/2} \theta}{v}$$

On peut exprimer la longueur θ de Taylor de manière plus commode, si la turbulence est homogène :

$$\frac{d^2}{dx^2} \langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle = 0$$

$$= 2 \langle v \frac{d^2v}{dx^2} \rangle + 2 \langle \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \rangle$$

or

$$\rho''(0) = \frac{\langle v \frac{d^2v}{dx^2} \rangle}{\langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle}$$

donc

$$\frac{\langle \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \rangle}{\langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle} = - \rho''(0)$$

et on retrouve bien la longueur de Taylor telle qu'elle a été définie en 1.3 :

$$\theta^2 = \frac{\langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle}{\langle \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \rangle}$$

Comme le signal enregistré est temporel, avec, d'après l'hypothèse de Taylor $x = \langle v \rangle t$, R_θ s'exprime comme :

$$R_\theta = \frac{\langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle \langle v \rangle}{v \langle \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \rangle^{1/2}} \quad (1)$$

C'est ce nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor que nous avons calculé à partir du signal de vitesse $v(t)$. R_θ s'est avéré très sensible à la non-stationnarité du signal ; lorsque nous avons commencé ces calculs à partir des mesures faites dans le jet instable, des valeurs aberrantes nous ont poussé à développer des méthodes indépendantes de calcul de R_θ que nous allons examiner dans le paragraphe suivant. Dès que le jet a été stabilisé par la grille, ces trois méthodes ont donné des résultats comparables.

Il serait certainement avantageux de calculer la dérivée grâce à la vitesse locale et non à la vitesse moyenne, afin de corriger un défaut de l'hypothèse de Taylor :

$$\frac{d}{dx} = \frac{dt}{dx} \frac{d}{dt} = \frac{1}{v(x)} \frac{d}{dt}$$

Cette amélioration a été utilisée avec profit pour le calcul des histogrammes conditionnels exposé en 4.2 et 4.4.

2.62 TROIS METHODES POUR CALCULER R_θ

Calcul direct de la dérivée $\left\langle \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right\rangle$

En partant directement du signal de vitesse échantillonné, on calcule la dérivée discrète :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\delta v}{\tau} = \frac{v(t+\tau) - v(t)}{\tau}$$

puis R_θ , d'après la formule (1).

On peut améliorer cette méthode en supposant que le bruit est statistiquement indépendant du signal. On a, d'après (1) :

$$\frac{1}{R_\theta^2} \propto \left\langle \left(\frac{\delta v_\tau}{\tau} \right)^2 \right\rangle$$

On décompose δv en signal + bruit :

$$\delta v_\tau = \delta v'_\tau + b$$

Si b est un bruit blanc, $\langle b^2 \rangle = \text{constante}$

$$\frac{1}{R_\theta^2} \propto \left\langle \left(\frac{\delta v'_\tau}{\tau} \right)^2 \right\rangle + \frac{\text{cste}}{\tau^2}$$

Comme :

$$\frac{\delta v'_\tau}{\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{1}{R_\theta^2} \propto \left\langle \left(\frac{dv'}{dt} \right)^2 \right\rangle + \frac{\text{cste}}{\tau^2}$$

Nous avons tracé sur la figure 2.621 $\frac{1}{R_\theta^2}$ en fonction de $\frac{1}{\tau^2}$:

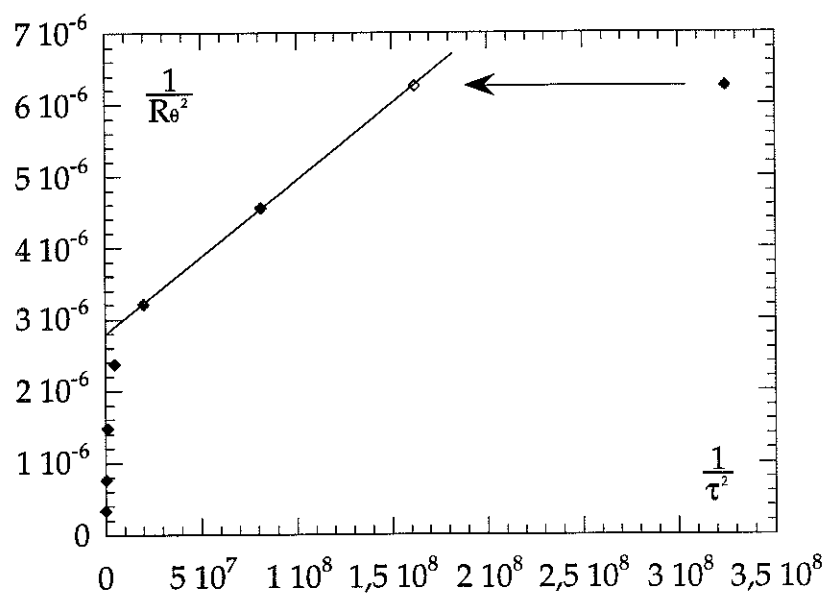


Figure 2.621 : $1/R_0^2$ en fonction de l'intervalle de temps sur lequel est fait le calcul $1/\tau^2$. $Re=45100$.

Le signal est, on s'en souvient, filtré passe-bas. Ainsi ne peut on plus considérer que le bruit a le même écart quadratique $\langle b^2 \rangle$ pour le dernier point, à la plus haute fréquence. Du fait du filtrage, $\langle b^2 \rangle$ décroît comme τ^2 à partir approximativement de 1,5 pas d'échantillonnage. En décalant ce dernier point d'un facteur $1/(1,5)^2$ (point blanc de la figure 2.621), on trouve bien un alignement des points.

L'ordonnée à l'origine de la droite joignant ces points donne une valeur de R_0 indépendante du bruit. On tire ainsi de la figure 2.621 $R_0=600$ pour $Re=45100$.

Par les spectres de puissance

On reprend le coefficient d'autocorrélation :

$$\rho(r) = \frac{\langle v(x+r) \cdot v(x) \rangle}{\langle v^2 \rangle}$$

Le spectre de puissance $E(k)$ est défini comme la transformée de Fourier de $\rho(r)$:

$$\begin{cases} E(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(r) e^{-ikr} dr \\ \rho(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(k) e^{ikr} dk \end{cases}$$

alors

$$\rho''(r) = - \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 E(k) e^{ikr} dk$$

et

$$\rho''(0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 E(k) dk$$

On peut ainsi exprimer la longueur de Taylor θ et donc R_θ en fonction du spectre de puissance (dans la pratique, le spectre de puissance tel qu'il est calculé demande à être normalisé) :

$$\theta^2 = \frac{I_0}{I_2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} E(k) dk}{\int_{-\infty}^{+\infty} k^2 E(k) dk}$$

Le calcul du spectre de puissance se fait avec un algorithme classique de transformée de Fourier rapide sur des groupes comprenant jusqu'à $2^{15} \approx 33\,000$ points. Nous devons évaluer les deux intégrales :

$$\begin{cases} I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} E(k) dk \\ I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 E(k) dk \end{cases}$$

mais comme $p(r)$ est réelle, $E(k)$ est paire :

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{\int_0^{\infty} E(k) dk}{\int_0^{\infty} E(k) k^2 dk}$$

On peut voir sur les figures 2.622 et 2.623 les fonctions $E(k)$ et $k^2E(k)$ à intégrer. La présence de bruit haute fréquence rend le choix des bornes d'intégration délicat :

- la borne supérieure des deux intégrales est choisie comme la valeur de k pour laquelle $k^2E(k)$ est minimale, car au-delà le bruit domine.

- la borne inférieure ne pose problème que pour le calcul de I_0 . Dans ce cas, on utilise le comportement en bruit blanc du spectre basse-fréquence (les vitesses sont décorréélées pour de longs intervalles de temps) pour extrapoler la valeur de l'intégrale. Ainsi, on s'affranchit des deux premiers points.

Dans le cas $Re = 45\,100$, le calcul par la méthode des spectres donne $R\theta = 538$.

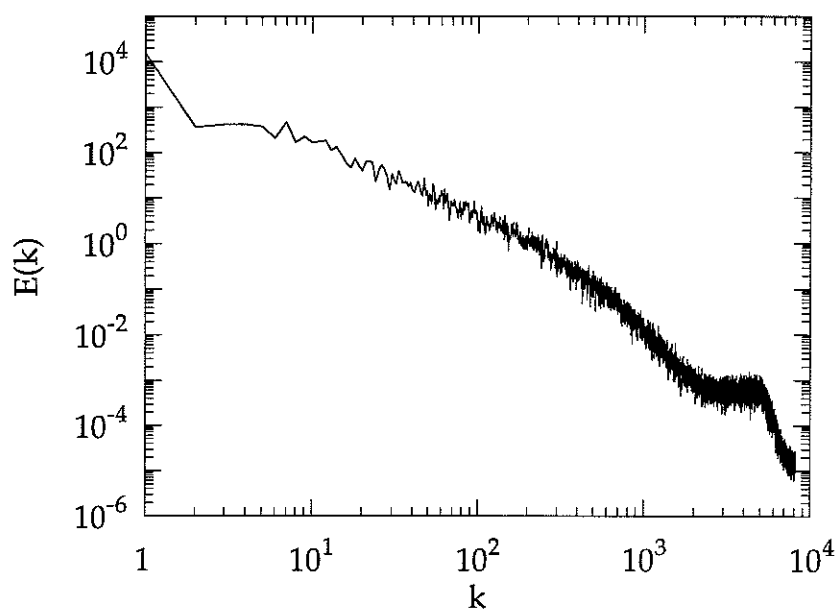


Figure 2.622 : Spectre de puissance $E(k)$ (non normalisé) à intégrer.
 $Re = 45\,100$

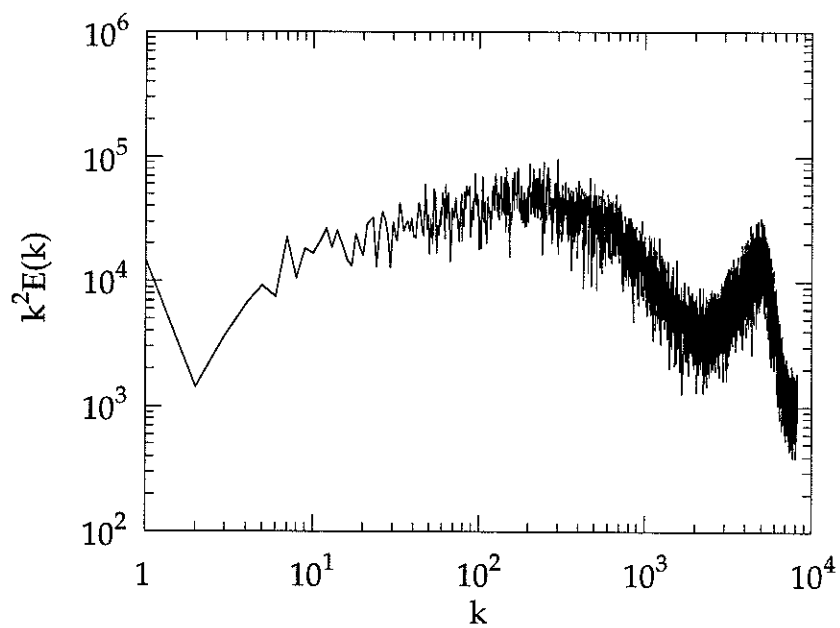


Figure 2.623 : Fonction $k^2 E(k)$ à intégrer $Re = 45\,100$.

Le troisième moment

La dissipation d'énergie par unité de masse et de temps est par définition :

$$\varepsilon = 15 \nu \left\langle \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right\rangle$$

alors, d'après ce qui précède :

$$\varepsilon = 15 \nu \frac{\langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle}{\theta^2}$$

et avec la formule de Kolmogorov dans la zone inertielle :

$$\langle \delta v^3 \rangle = - \frac{4}{5} \varepsilon r$$

on peut exprimer θ en fonction de $\langle \delta v^3 \rangle$:

$$\theta^2 = - 12 \nu r \frac{\langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle}{\langle \delta v^3 \rangle}$$

On peut calculer $\frac{\langle \delta v^3 \rangle}{r}$ à partir du signal de vitesse. On peut voir sur la figure 2.624 un plateau correspondant à la zone d'inertie. C'est l'ordonnée de ce plateau qui nous a servi à calculer le θ de Taylor et R_θ . On trouve dans ce cas : $R_\theta = 444$ pour $Re = 45\,100$.

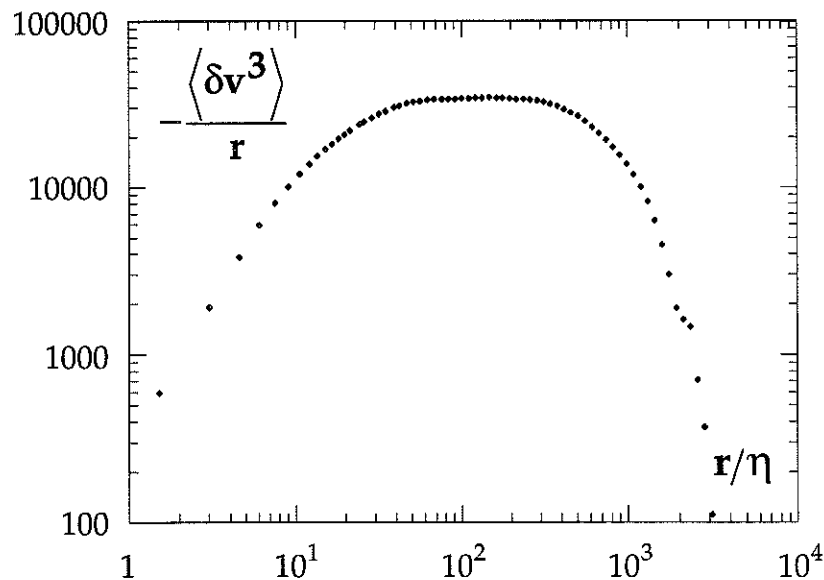


Figure 2.624 : $\frac{\langle \delta v^3 \rangle}{r} = \frac{4}{5} \varepsilon$ en fonction de l'échelle r normalisée à l'échelle de Kolmogorov η . Les unités sont des m^2s^{-3} . $Re = 45\,100$.

2.63 COMPARAISON DE CES METHODES

On sait de ce qui précède, que la dissipation moyenne est reliée à l'échelle de Taylor par :

$$\varepsilon = 15 \nu \frac{\langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle}{\theta^2} = -\frac{5}{4} \frac{\langle \delta v^3 \rangle}{r}$$

$$R_\theta^2 \propto \frac{\langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle^2 r}{\langle \delta v^3 \rangle \nu}$$

Comme à grande échelle, $\langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle$ et $\langle \delta v^3 \rangle$ sont tous deux proportionnels à $\langle v \rangle$, la vitesse moyenne,

$$R_\theta = K \sqrt{Re} \quad (2)$$

où K est une constante numérique qui dépend de l'écoulement.

Antonia et al. [7] trouvent $K = 1,74$ pour un jet axisymétrique dans l'air. On peut voir sur les figures suivantes R_θ calculé avec chacune des méthodes décrites dans ce paragraphe en fonction de Re :

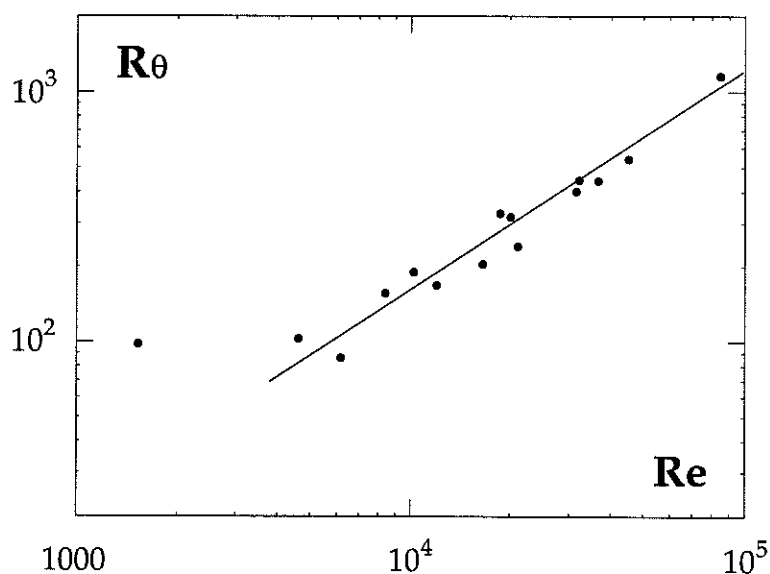


Figure 2.631 : R_θ calculé par l'intégrale du spectre.

Mis à part la mesure à très faible Reynolds, les points sont bien alignés sur cette figure. L'exposant, cependant, est plus proche de 7/8 que du 1/2 attendu.

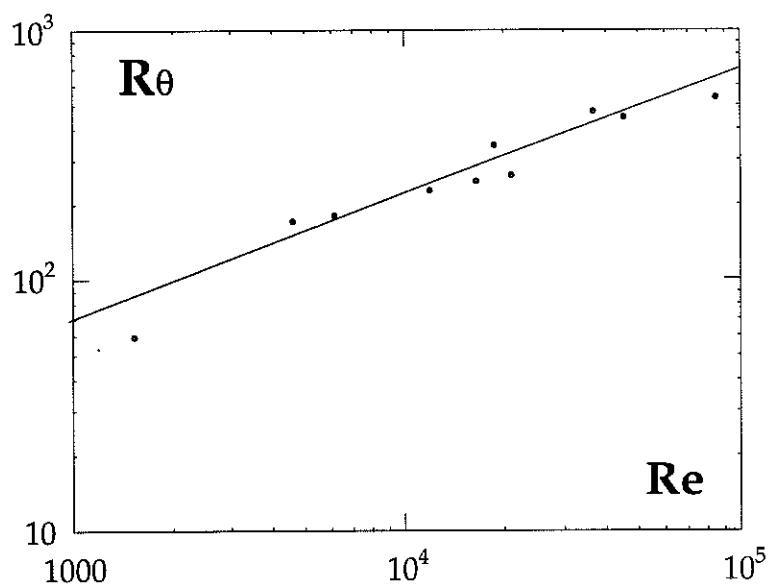


Figure 2.632 : R_θ calculé par le troisième moment.

Le calcul de R_θ par le troisième moment et l'équation de Kolmogorov donne des points bien alignés suivant la loi : $R_\theta = K \sqrt{Re}$, avec pour la constante K :

$$1,9 < K < 2,2$$

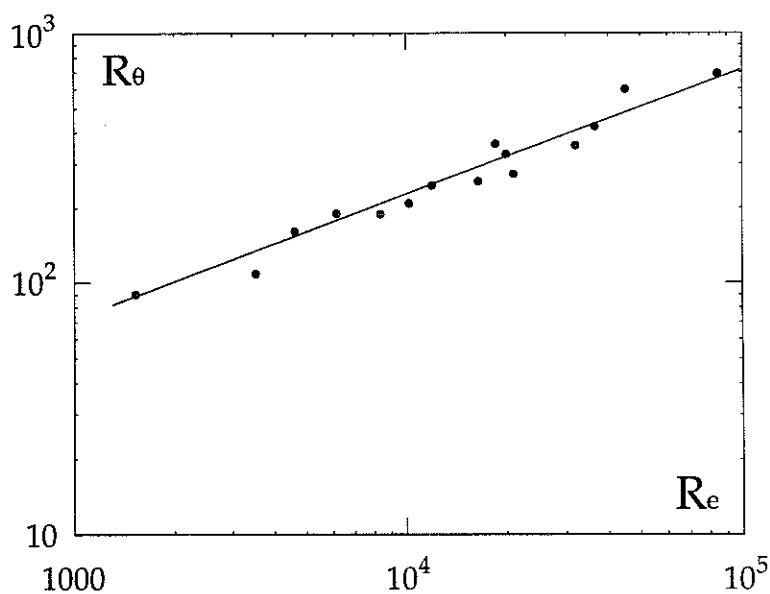


Figure 2.633 : Calcul direct de la dérivée du signal

La méthode consistant à calculer directement la dérivée du signal, donne satisfaction comme on peut le voir sur la figure 2.633. La constante K est la même que dans la méthode précédente :

$$1,9 < K < 2,3$$

Les deux dernières méthodes sont remarquablement concordantes. Compte tenu de la dispersion des points, nous sommes en bon accord avec la relation (2). Le désaccord avec la méthode des spectres reste actuellement inexpliqué.

Nous avons utilisé la méthode de la dérivée, au paragraphe 3.1 pour comparer nos mesures à d'autres.

2.7 LES ECHELLES DE LA TURBULENCE

Echelle de Kolmogorov

L'échelle de Kolmogorov est l'échelle à laquelle les effets visqueux deviennent prépondérants ; elle a été définie au paragraphe 1.2 par :

$$\eta = \left(\frac{v^3}{\langle \varepsilon \rangle} \right)^{1/4}$$

où $\langle \varepsilon \rangle$ est la dissipation moyenne, calculée à l'aide du troisième moment des incréments de vitesse et de la formule de Kolmogorov (cf. § 1.2) :

$$\langle \varepsilon \rangle = -\frac{3}{4} \frac{\langle (\delta v_r)^3 \rangle}{r}$$

on trouve que η doit se comporter comme une puissance du nombre de Reynolds :

$$\frac{L}{\eta} = Re^{3/4}$$

La droite tracée sur la figure 2.71 nous permet de vérifier que cette relation décrit bien les résultats de notre expérience.

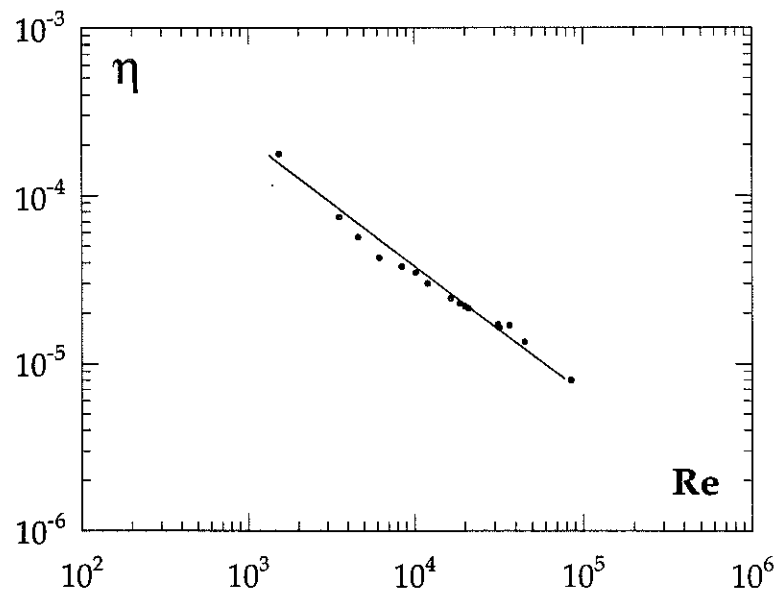


Figure 2.71 : Echelle η de Kolmogorov, en mètres, en fonction de Reynolds.

Echelle θ de Taylor

Nous avons décrit, au paragraphe 2.6 le calcul du nombre de Reynolds basé sur la longueur de Taylor, et montré que cette longueur devait être proportionnelle à la racine carrée du nombre de Reynolds.

$$R_\theta = \frac{\langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle \theta}{\nu} \propto \sqrt{Re}$$

Comme à grande échelle, l'écart quadratique des fluctuations de vitesse $\langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle$ est proportionnel à $\langle v \rangle$ donc à Re , l'échelle θ de Taylor doit être inversement proportionnelle à la racine carrée du nombre de Reynolds :

$$\theta \propto \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

On peut constater que les résultats expérimentaux vérifient cette relation, représentée par une ligne droite sur la figure 2.72 :

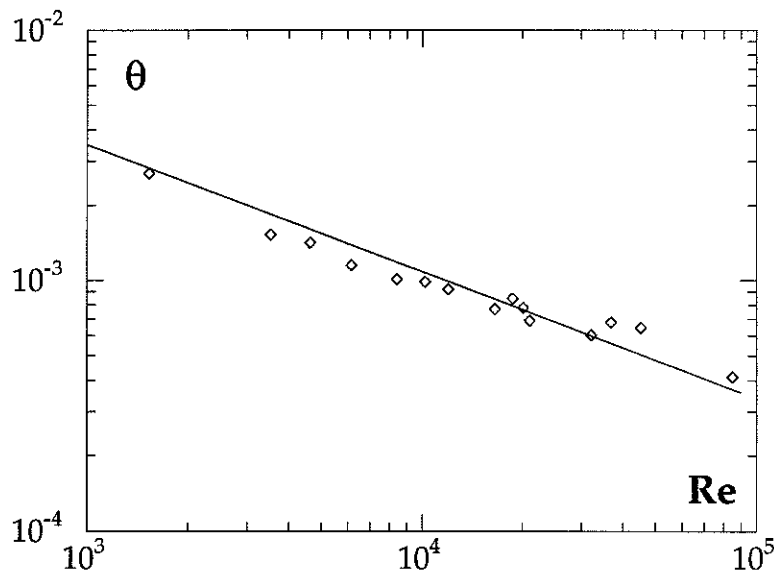


Figure 2.72 : Echelle θ de Taylor en mètres, en fonction du nombre de Reynolds.

Notre expérience cryogénique permet, en faisant varier le paramètre de contrôle Re , de retrouver des résultats communément admis dans l'étude de la turbulence.

REFERENCES DU CHAPITRE 2

- [1]: thèse B. Chabaud 1992
Université Joseph Fourier-Grenoble I
- [2]: Physical fluid dynamics, chap 14
D.J.Tritton
- [3]: Hot wire anemometer operating at cryogenic temperatures
B.Castaing, B.Chabaud, B.Hébral
Rev. Sci. Instrum. 63 (9), september 1992
- [4]: Turbulent jets
N. Rajaratnam
Developments in Water Science 5, Elsevier Sci. Pub. Comp. (1976)
- [5]: Wygnansky and Fiedler
J. Fluid Mech. (1969), vol 38, part 3, pp. 577-612
- [6]: R. A. Antonia, B. R. Satyaprakash, A. K. M. F. Hussain
Phys. Fluids 23 (4), april 1980
- [7]: R. A. Antonia, B. R. Satyaprakash, A. K. M. F. Hussain
J. Fluid Mech. (1982), vol 119, pp. 55-89
- [8]: Landau et Lifchitz, Tome 6: Mécanique des fluides
§ 23 : jet de fluide immergé
- [9]: E. Villermaux, discussion privée

3. MESURES ET INTERPRETATION

3.1	Forme des histogrammes, évolution avec le Reynolds	95
3.11	Histogrammes de vitesse	95
3.12	Histogrammes des incréments de vitesse	97
3.13	Profondeur de la cascade en fonction de l'échelle, évolution avec le Reynolds	101
3.14	Une analogie thermodynamique	114
3.2	Etude des moments	117
3.3	Que peut-on tirer d'une "mauvaise" mesure ?	123
	Références du chapitre 3	127

Après avoir montré au chapitre précédent la façon dont un signal de vitesse fiable est obtenu, nous allons décrire ici de quelle manière il est analysé.

Le paragraphe 3.1 décrit en détail l'analyse des fluctuations de vitesse : histogrammes de la vitesse, histogrammes des incréments. On tire de ceux-ci une grandeur λ^2 que nous nommons "profondeur de la cascade" et dont on examine l'évolution avec l'échelle, puis avec le nombre de Reynolds. On met ainsi en évidence une transition entre deux régimes de la turbulence : les petits et les grands Re . Ces résultats sont comparées à des mesures effectuées dans d'autres systèmes expérimentaux. Une analogie thermodynamique permet d'exprimer ces résultats de manière différente.

La seconde partie est consacrée à l'étude des moments des incréments de vitesse. Nous examinons séparément les moments pairs et impairs.

Lorsque le jet n'était pas encore stabilisé par la grille, nous avons enregistré des signaux de turbulence fortement inhomogène à divers Reynolds. Nous considérons dans le paragraphe 3.3 l'effet de l'inhomogénéité de la turbulence sur les résultats des analyses statistiques. Fait remarquable, certaines grandeurs semblent ne pas en être affectées.

3.1 FORME DES HISTOGRAMMES, EVOLUTION AVEC LE REYNOLDS

3.11 HISTOGRAMMES DE VITESSE

Après avoir calculé l'histogramme du signal délivré par l'anémomètre, on le transforme grâce à la loi d'étalonnage en un histogramme de vitesse comme il est présenté sur la figure 3.11 pour plusieurs Reynolds.

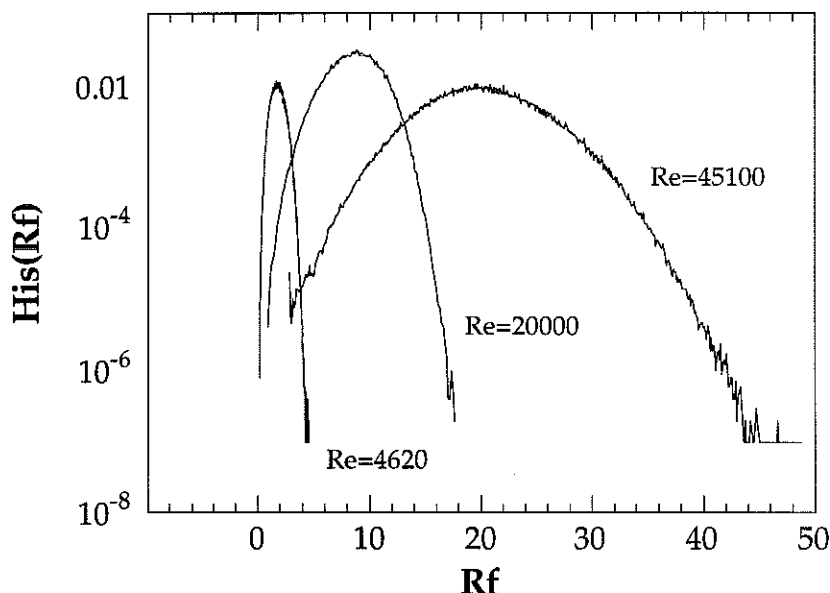


Figure 3.11 : Histogrammes de vitesse pour trois Reynolds. Chacun de ces histogrammes est calculé sur un échantillon de 10^7 points, répartis sur 1000 valeurs possibles de Rf .

Ces histogrammes sont gaussiens malgré quelques défauts pour les faibles vitesses que nous attribuons à deux origines :

- Le mode de fonctionnement du détecteur comme fil chaud. En effet, pour les plus faibles valeurs de la vitesse, la convection libre autour du fil peut biaiser nos mesures en provoquant un refroidissement parasite du détecteur. On remarque que la valeur $Rf = 0,5$ en deça de laquelle la caractéristique Reynolds-Grashof (cf. § 2.2) est mal comprise n'est atteinte qu'avec un niveau

de probabilité très faible, pour les plus petits Reynolds. L'influence de ces événements sera donc négligeable.

- D'un effet plus important : l'hypothèse de Taylor n'est pas parfaitement vérifiée. Ceci se traduit par un biais sur la vitesse que nous examinerons en détail en 4.32.

Dans toutes ces mesures, le Reynolds-fil maximum atteint est toujours inférieur à 60, valeur à partir de laquelle le détecteur commence à être peu sûr (cf. § 2.4). Le détecteur fonctionne donc dans une gamme de Reynolds où l'éta-lonnage est fiable.

3.12 HISTOGRAMMES DES INCREMENTS DE VITESSE

Partant du signal de vitesse, nous allons calculer pour plusieurs échelles r les histogrammes des incréments :

$$\delta v_r(x) = v(x+r) - v(x)$$

Comme il a déjà été discuté au chapitre 1, une étude statistique de cette variable nous donne des informations sur la dynamique interne de la turbulence, sur le processus de cascade.

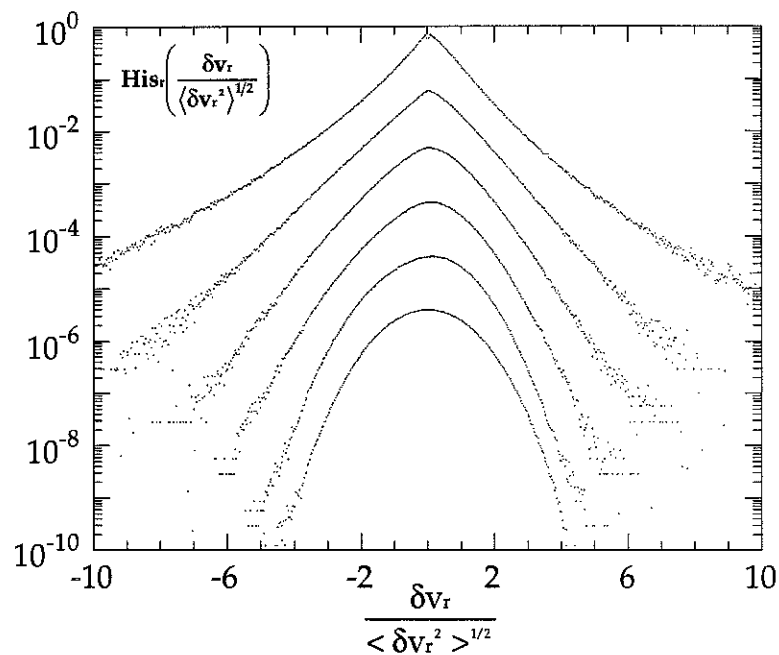


Figure 3.121 : Histogrammes de δv_r à des échelles variant de la plus grande échelle de l'écoulement ($L \approx 1,6$ cm) à la plus petite, l'échelle de Kolmogorov ($\eta \approx 13,5$ μ m), pour $Re = 45\,100$. Les histogrammes sont décalés d'un facteur dix pour plus de lisibilité. L'échantillon sur lequel est fait ce calcul comporte 10^7 points.

Contrairement à ce que prédit le modèle de Kolmogorov 41, la forme des histogrammes évolue au fil des échelles. Pour les grandes valeurs de r , ils ressemblent à des gaussiennes avec cependant une légère dissymétrie. Lorsqu'on examine des échelles de plus en plus petites, l'évolution de la statistique traduit une importance croissante des événements de forte et de faible amplitude, au détriment des événements moyens. Cette évolution de la forme vers les petites échelles est une expression de l'intermittence dans l'écoulement turbulent.

La profondeur de la cascade λ^2

L'analyse des moments est la méthode la plus immédiate pour caractériser quantitativement ces formes. Mais ce mode d'analyse a un grave défaut : les moments d'ordre élevé donnent une grande importance aux ailes des histogrammes, où la statistique est la plus pauvre [1], [2]. Comme le nombre de points nécessaire augmente exponentiellement avec l'ordre du moment, on est très vite limité dans la finesse de caractérisation des histogrammes.

La méthode adoptée ici pour l'analyse de la forme des histogrammes est d'ajuster à ceux-ci une fonction ne dépendant que d'un unique paramètre, et d'observer ensuite l'évolution de celui-ci avec l'échelle r . Nous avons utilisé :

$$\frac{1}{\sigma_r} P_r \left(\frac{\delta v_r}{\sigma_r} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma} G(\ln \sigma) P_L \left(\frac{\delta v}{\sigma} \right) d \ln \sigma$$

où G est une distribution log-normale :

$$G(\ln \sigma) = \frac{1}{\lambda \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\ln^2 \sigma / \sigma_0}{2\lambda^2}}$$

et P_L est la densité de probabilité à grande échelle pour laquelle nous utilisons l'ansatz:

$$P_L \left(\frac{\delta v}{\sigma} \right) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{\delta v^2}{2\sigma^2} \left(1 + a_s \frac{\delta v / \sigma}{(1 + (\delta v / \sigma)^2)^{1/2}} \right)}$$

Des arguments physiques qui sous-tendent le choix de la fonction P_r ont déjà été discutés en 1.2. La valeur du paramètre d'asymétrie a_s a été choisie égale à 0,18. La justification de cette valeur est fournie dans [3]. La fonction utilisée pour lisser les histogrammes est donc finalement :

$$\frac{1}{\sigma_r} P_r \left(\frac{\delta v_r}{\sigma_r} \right) = A \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\ln^2 \sigma / \sigma_0}{2\lambda^2}} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{\delta v^2}{2\sigma^2} \left(1 + a_s \frac{\delta v / \sigma}{(1 + (\delta v / \sigma)^2)^{1/2}} \right)} d \ln \sigma$$

A et σ_0 étant fixées par la normalisation de P_r , la variance λ^2 de la distribution de $\ln \sigma$, reste l'unique paramètre nécessaire pour caractériser la forme des histogrammes.

λ^2 est plus qu'un simple paramètre de forme des histogrammes. Nous étudierons en détail dans le chapitre suivant la fonction P_r pour montrer que cette méthode d'analyse ne s'appuie pas sur un modèle (log-normal par exemple) : λ^2 garde son sens même si la distribution de σ n'est pas log-normale.

Ainsi λ^2 est une grandeur physique à part entière, caractéristique du processus de cascade de la turbulence. Nous l'appellerons dans la suite "profondeur de la cascade".

On peut noter qu'il s'agit essentiellement de mesurer la variance de $\ln |\delta v|$. En effet, le changement de variable :

$$\delta v \longrightarrow \ln |\delta v|$$

fait apparaître la densité de probabilité de cette nouvelle variable comme un produit de convolution :

$$\begin{aligned} P'_r(\ln |\delta v|) &\propto \int_{-\infty}^{+\infty} G(\ln \sigma) P'_L(\ln |\delta v| - \ln \sigma) d \ln \sigma \\ &= G * P_L(\ln |\delta v|) \end{aligned}$$

La variance de δv étant constante à grande échelle :

$$\begin{aligned} \langle (\ln |\delta v| - \langle \ln |\delta v| \rangle)^2 \rangle &= \langle (\ln \sigma)^2 \rangle + \text{constante} \\ &= \lambda^2 + \text{constante} \end{aligned}$$

La variance de $\ln |\delta v|$ est donc, à une constante additive près la profondeur λ^2 . Que peut-on dire a priori de la variation de λ^2 avec r ?

- à grande échelle, on attend λ^2 proche de zéro, c'est-à-dire une distribution très étroite des σ et donc la même forme presque gaussienne pour P_r et P_L
- pour les plus petites échelles, on s'attend à voir λ^2 augmenter pour rendre compte d'une distribution de plus en plus large de l'écart-type des gaussiennes.

Détermination de λ^2

La meilleure valeur de λ^2 est déterminée à chaque échelle en minimisant :

$$\chi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\text{His}_r(x) - P_r(x))^2}{(\text{His}_r(x) + P_r(x))} dx$$

où His_r est l'histogramme expérimental. Les programmes qui permettent d'obtenir λ^2 à partir du signal ont été écrits en Fortran par J. Peinke. On

constate sur la figure 3.122 que la fonction P_r décrit l'histogramme expérimental de manière satisfaisante aussi bien au centre que dans les ailes :

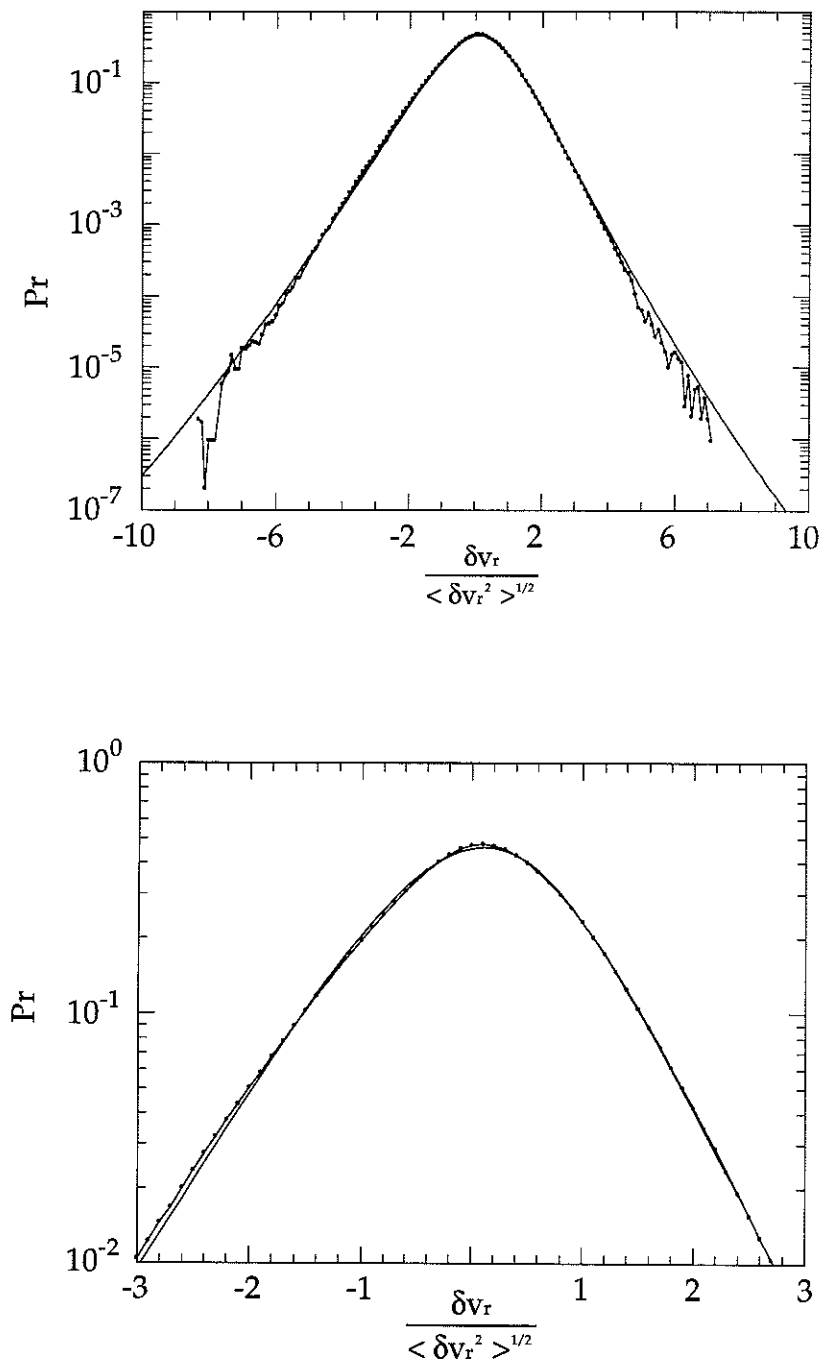


Figure 3.122 : Histogramme expérimental de δv_r (normalisé) pour $r = 20 \eta$. La mesure a été faite à $Re = 20\,000$ et comporte 10^7 points. La fonction Pr minimise χ^2 pour $\lambda^2 = 0,09$.

3.13 PROFONDEUR DE LA CASCADE EN FONCTION DE L'ECHELLE, EVOLUTION AVEC LE REYNOLDS

La figure 3.131, qui montre l'évolution de λ^2 avec l'échelle dans deux systèmes d'axes différents, révèle deux zones d'échelle dans lesquelles λ^2 dépend très différemment de r :

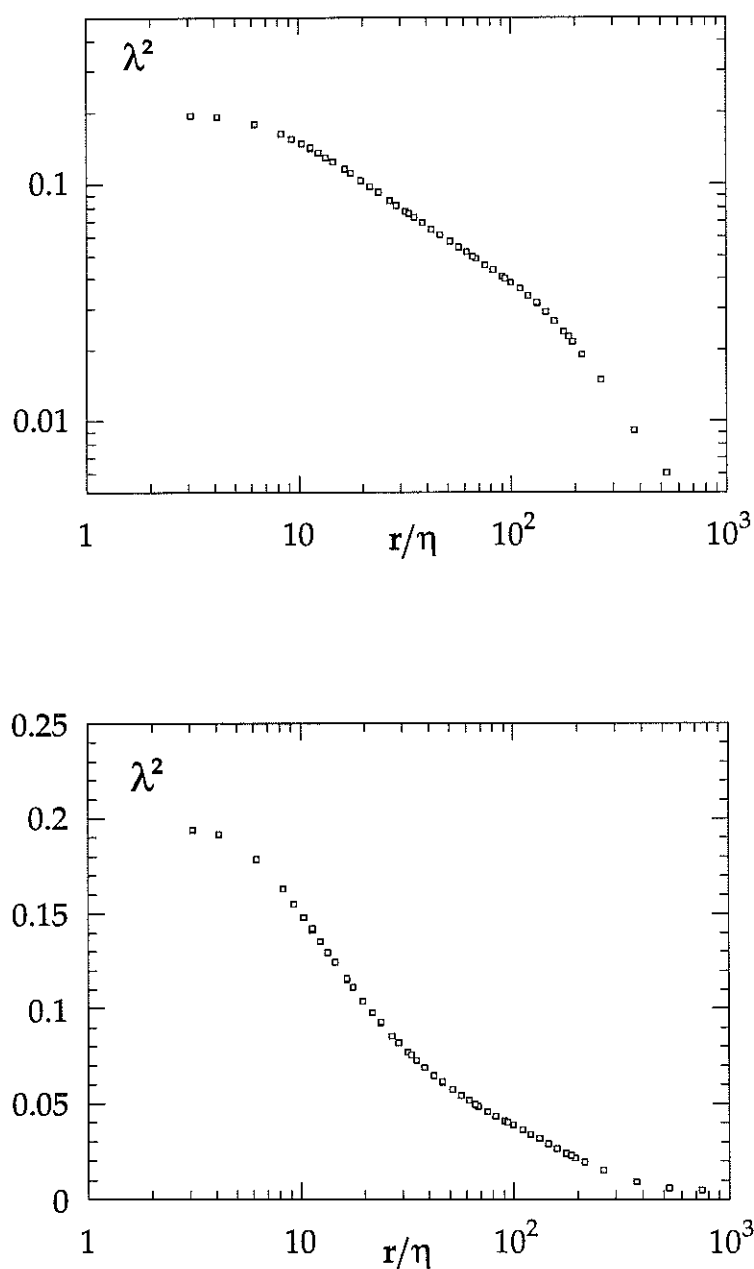


Figure 3.131 : λ^2 en fonction de l'échelle r normalisée à l'échelle de Kolmogorov pour $Re = 20\,000$ dans deux systèmes d'axes. η vaut ici $22\,\mu\text{m}$.

Le graphe du bas montre un comportement logarithmique à grande échelle, alors que celui du haut révèle une loi de puissance pour des échelles intermédiaires.

On observe pour les plus petites échelles une saturation de λ^2 , à des échelles bien supérieures à la taille du détecteur qui est de $5 \mu\text{m}$. Ce comportement traduit le fait que les histogrammes n'évoluent plus en forme, ils atteignent à l'échelle visqueuse l'histogramme du gradient de vitesse :

$$P_r\left(\frac{\delta v_r}{r}\right) \approx P\left(\frac{dv}{dx}\right)$$

Incertitude sur λ^2

Le calcul de l'incrément de vitesse δv_r se fait à des distances r variant de l'échelle visqueuse à l'échelle intégrale, c'est-à-dire de 1 à quelques 1000 pas d'échantillonnage. On comprend bien que l'échantillon contient moins de points indépendants à grande échelle, le bruit statistique est donc plus important.

Afin d'évaluer l'incertitude sur la mesure de λ^2 due à la finitude de l'échantillon, nous avons partagé notre échantillon de 10^7 points en dix blocs de 10^6 points sur lesquels nous avons reproduit le même calcul. Nous obtenons donc pour chaque échelle r dix valeurs de λ^2 dont l'écart-type est une évaluation de l'erreur statistique faite avec l'échantillon réduit.

Comme les dix parties sont statistiquement indépendantes, l'erreur commise avec un échantillon dix fois plus long est plus faible d'un facteur $\sqrt{10}$, ce qui nous donne une estimation de la barre erreur dans le cas de l'échantillon complet de 10^7 points, pour chaque échelle.

On voit sur la figure 3.132 le résultat de ce calcul dans les deux systèmes d'axes qui nous intéressent. La précision sur λ^2 est satisfaisante :

$$\frac{\Delta \lambda^2}{\lambda^2} \sim 2\%$$

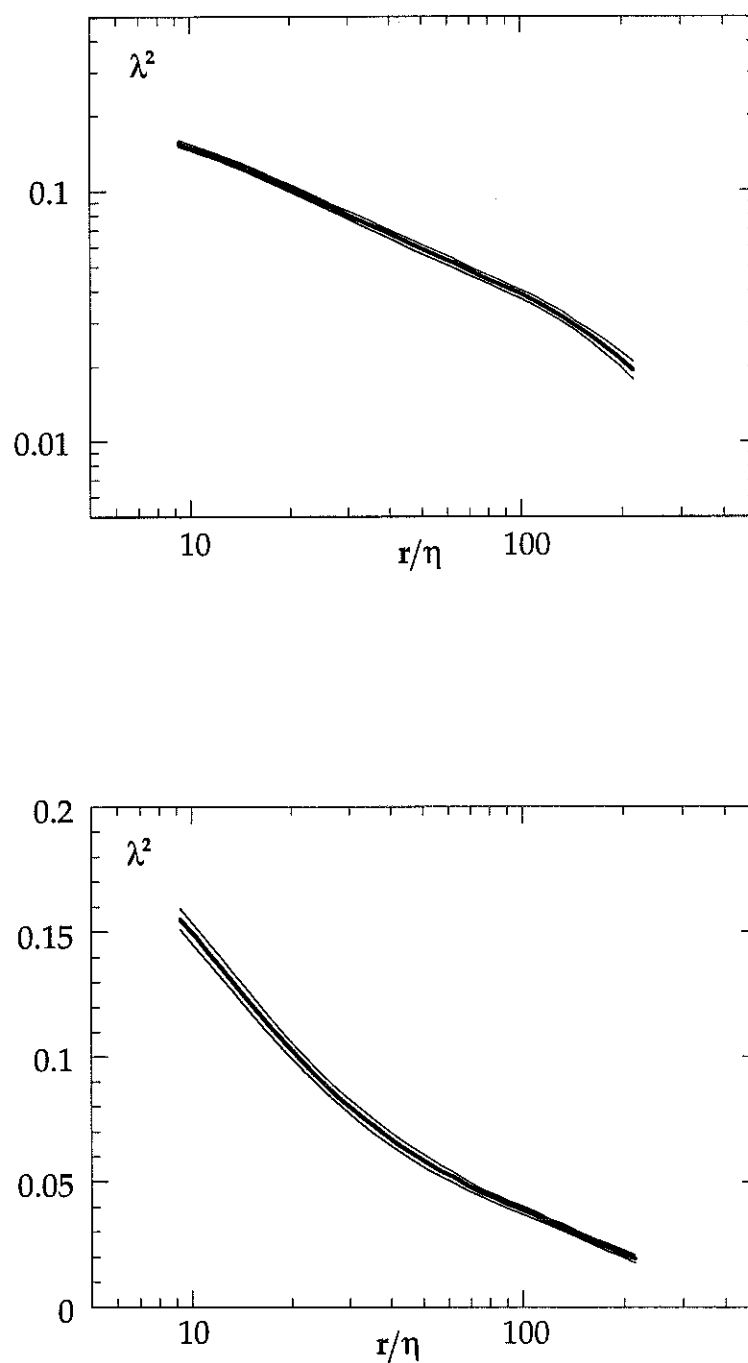


Figure 3.132 : λ^2 en fonction de l'échelle r normalisée à l'échelle de Kolmogorov pour $Re = 20\,000$. La distance verticale entre les deux lignes fines est l'écart-type des λ^2 calculés avec 10×10^6 points. La barre d'erreur sur le λ^2 calculé sur l'échantillon total (trait fort) est approximativement trois fois plus faible.

Loi de puissance

Afin d'être tout à fait sûr de la dépendance en loi de puissance de λ^2 vis-à-vis de r , nous avons voulu vérifier que la dérivée de $\ln\lambda^2$ par rapport à $\ln r$ était bien une constante. L'opération de dérivation amplifiant le bruit, il s'est avéré nécessaire d'examiner soigneusement les barres d'erreur.

De la même manière que pour λ^2 , nous avons évalué l'erreur statistique par un calcul sur des échantillons réduits. La barre d'erreur correspondant au calcul final sur 10^7 points est $\sqrt{10}$ fois plus petite que l'écart entre les deux traits fins visible sur la figure 3.133 :

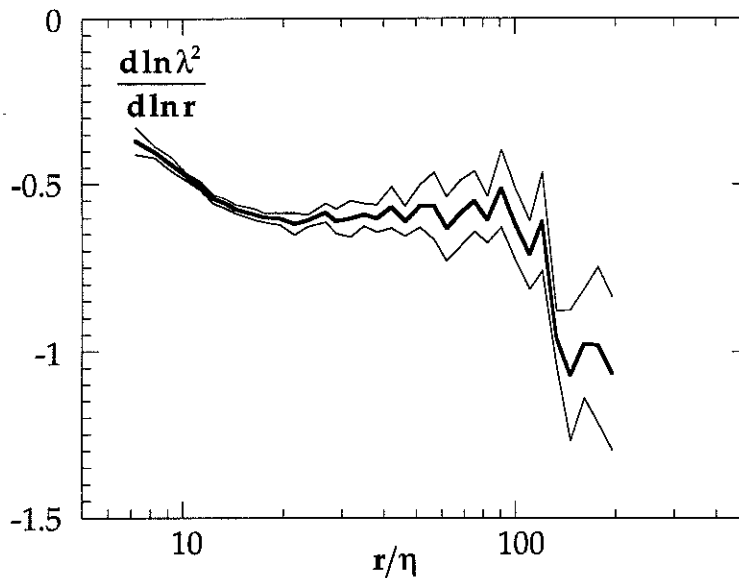


Figure 3.133 : La dérivée de $\ln\lambda^2$ par rapport à $\ln r$ en fonction de l'échelle r normalisée à l'échelle de Kolmogorov pour $Re = 20\,000$. Le trait fort représente le calcul fait sur un échantillon de 10^7 points. Comme sur la figure précédente, la distance verticale entre les deux lignes fines est approximativement trois fois la barre d'erreur.

Dans le processus de minimisation de χ^2 qui permet d'obtenir λ^2 , l'itération est interrompue lorsque la variation de λ devient inférieure à $\Delta\lambda=0,01$.

Si cette incertitude est négligeable lorsqu'on s'intéresse à la courbe λ^2 en fonction de r , en est-il encore de même pour le calcul de la dérivée moyenne, la pente β ?

Considérons deux points (r_1, λ_1^2) et (r_2, λ_2^2) dans la zone du plateau. La dérivée moyenne est :

$$\beta = \frac{\ln\lambda_2^2 - \ln\lambda_1^2}{\ln r_2 - \ln r_1}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta\beta &= \frac{\frac{\Delta \ln \lambda_2^2}{\lambda_2^2} - \frac{\Delta \ln \lambda_1^2}{\lambda_1^2}}{\ln r_2 - \ln r_1} \\
 &= \frac{2 \Delta \lambda}{\ln r_2 - \ln r_1} \left(\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_1^2} \right) \\
 &\approx 5 \cdot 10^{-2}
 \end{aligned}$$

Les oscillations que l'on voit sur la figure 3.133 sont en effet de l'ordre de l'erreur sur β due au processus de minimisation de χ^2 .

Aux erreurs expérimentales près, la profondeur de la cascade λ^2 est donc bien une puissance de l'échelle r/η . Nous vérifions ainsi une des prédictions du modèle variationnel (cf § 1.24) :

$$\lambda^2 = \lambda_0^2 \left(\frac{r}{\eta} \right)^{-\beta}$$

Une transition entre deux régimes hydrodynamiques

Sur la figure 3.134 où sont regroupées quelques mesures à des Reynolds différents, la pente en échelles log-log n'est pas toujours la même :

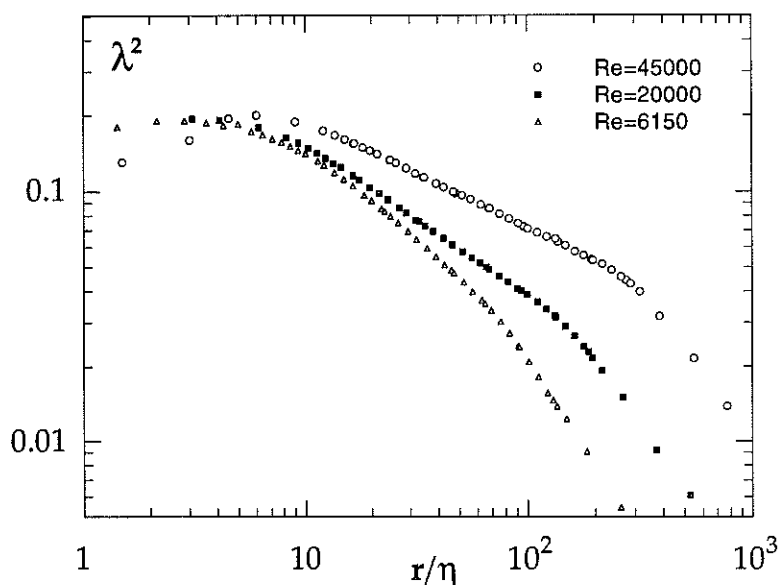


Figure 3.134 : λ^2 en fonction de l'échelle r normalisée à l'échelle de Kolmogorov pour trois Reynolds différents.

On remarque que la gamme d'échelles sur laquelle λ^2 est une loi de puissance décroît avec Reynolds, alors que l'exposant β augmente.

Il existe un Reynolds "critique" ($Re_c \approx 5\,000$, $R_\theta \approx 160$) pour lequel cette zone disparaît, β étant alors maximal. Pour de plus faibles Reynolds, la courbe $\ln\lambda^2(\ln r)$ est arondie et β n'est plus défini.

Cette transition devient évidente si l'on considère de nouveau les dérivées sur la figure 3.135 pour plusieurs Reynolds.

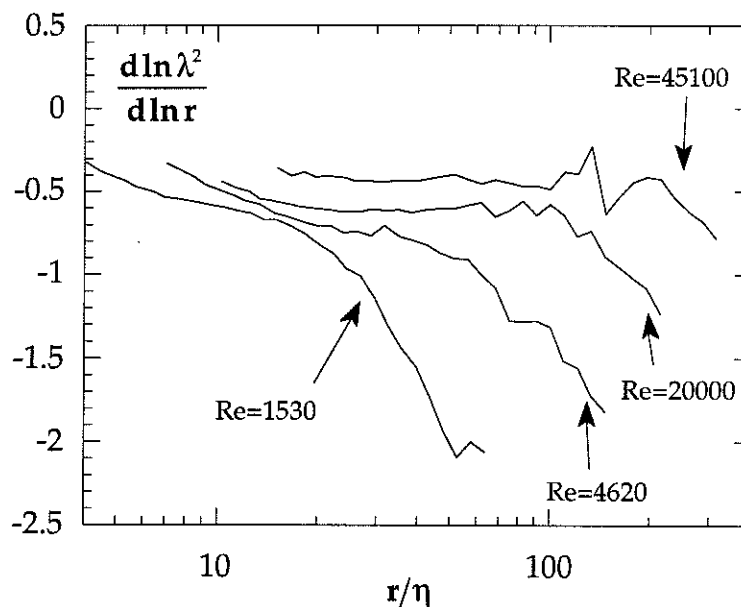


Figure 3.135 : La dérivée de $\ln\lambda^2$ par rapport à $\ln r$ en fonction de l'échelle r normalisée à l'échelle de Kolmogorov pour plusieurs Reynolds.

Il était connu depuis longtemps des hydrodynamiciens que la turbulence ne devient réellement développée que pour des Reynolds assez grands (au-delà de $Re \sim 10\,000$). La nouveauté du critère présenté ici est de pouvoir distinguer par l'expérience deux régimes hydrodynamiques distincts. Par analogie avec la convection de Rayleigh-Bénard [5], nous appelons ces deux régimes "turbulence douce" et "turbulence dure" :

Turbulence dure

Entre les grandes échelles et les échelles de dissipation visqueuse, il y a ouverture d'une zone inertielle d'autant plus large que Re est grand. On s'attend à trouver dans ce régime des propriétés universelles à la turbulence.

Turbulence douce

La gamme d'inertie disparaît. Les échelles où l'énergie est injectée et les échelles de dissipation se chevauchent.

E. Villermaux [6] a pu observer récemment dans un écoulement de grille un changement d'aspect de l'écoulement. Pour $Re > 100$, des filaments de vorticité sont visualisés qui n'existent pas sous ce seuil. S'agit-il de la même transition ? Est-il possible par là de relier les travaux sur les structures cohérentes, et les approches statistiques de la turbulence ?

Nous pouvons mesurer l'exposant β de différentes manières :

- 1) Directement en mesurant la pente de $\ln \lambda^2$ en fonction de $\ln (r/\eta)$ sur un graphique tel que celui de la figure 3.134. Cette méthode demande que la gamme d'échelles sur laquelle λ^2 est une loi de puissance soit suffisamment large. Elle sera donc peu précise pour les petits Reynolds.
- 2) En calculant la dérivée $\frac{d \ln \lambda^2}{d \ln r}$ en fonction de $\ln r$, on peut à la fois vérifier la qualité de la loi de puissance, et mesurer l'ordonnée β .

Sur la figure 3.136, $1/\beta$ calculé avec les deux méthodes est tracé en fonction de Reynolds pour toutes nos mesures, lorsqu'il existe :

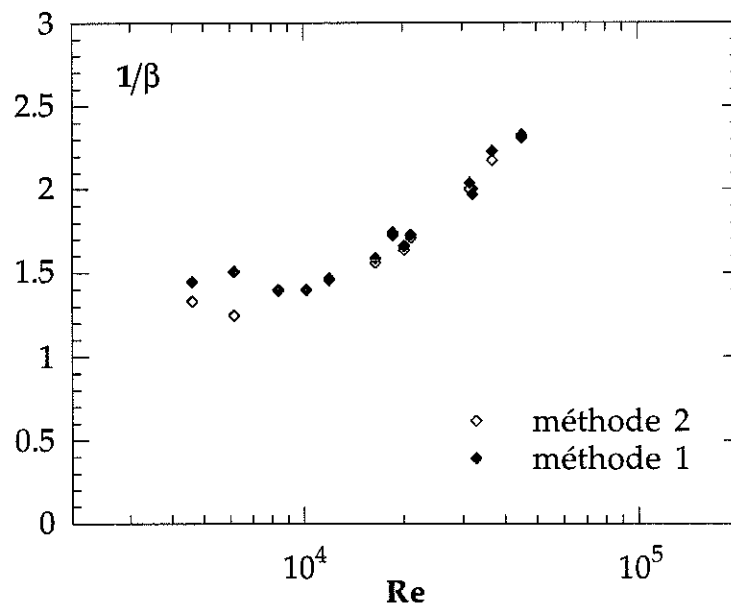
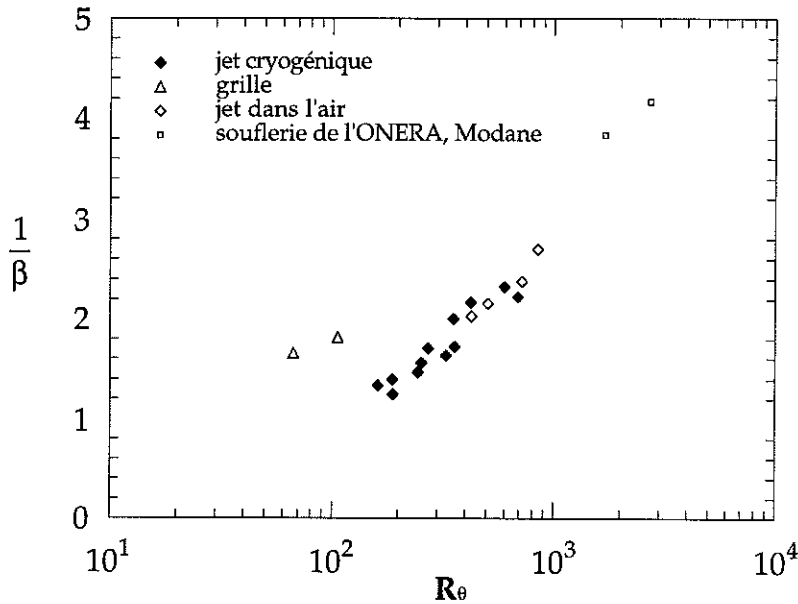


Figure 3.136 : $1/\beta$ en fonction du nombre de Reynolds.
Méthode 1: mesure directe de la pente β en diagramme log-log
Méthode 2: en calculant la dérivée.

On constate que ces deux méthodes donnent des résultats en très bon accord, un écart se faisant toutefois sentir pour les plus faibles Reynolds où la pente de $\ln \lambda^2$ devient incertaine.

Comparaison avec d'autres mesures

Le nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor R_θ (cf. § 2.6) permet de comparer ces résultats à des mesures faites par le groupe de l'IMG (Institut de Mécanique de Grenoble) dans d'autres écoulements. On voit ces résultats sur la figure 3.137 [3], [4].



nature profonde entre ce dernier écoulement et les précédents. En effet, contrairement aux écoulements de jet ou de conduite, la turbulence de sillage n'est pas stationnaire pour un observateur qui se déplacerait avec le fluide. L'écoulement est excité au passage de la grille, à une échelle de l'ordre du pas de celle-ci. L'énergie diffuse ensuite sur les échelles sans que les modes de grande longueur d'onde ne soient plus alimentés. Le fluide, brutalement mais brièvement agité, revient progressivement vers l'équilibre en dissipant son énergie alors qu'il s'éloigne de l'obstacle.

Au contraire, la turbulence produite dans un jet ou un tunnel est alimentée tout au long de l'écoulement par le cisaillement du fluide à grande échelle. Pour un observateur qui se déplace avec le fluide, l'excitation de la turbulence est stationnaire ($Re = cste$).

La cascade d'énergie qui s'organise dans les circonstances particulières d'un écoulement de sillage peut présenter des caractéristiques différentes de celles de la turbulence stationnaire. La turbulence en extinction demande peut-être pour être caractérisée un autre paramètre que le nombre de Reynolds, un paramètre qui rendrait compte de son "vieillesse".

Loi logarithmique

Pour les plus grandes échelles, nous avons observé sur la figures 3.131 que la profondeur de la cascade λ^2 présentait un comportement logarithmique :

$$\lambda^2 = -\mu \ln\left(\frac{r}{L}\right)$$

Cette dépendance est prédite par les models log-normal de Kolmogorov et Obukhov, et multifractals, mais plutôt à petite qu'à grande échelle.

Nous avons cherché à déterminer ce facteur μ . Trois méthodes sont possibles :

- 1) La mesure directe de la pente sur un diagramme tel que celui de la figure 3.134 est insuffisamment précise, surtout pour les plus faibles Reynolds.
- 2) En calculant la dérivée $\frac{d\lambda^2}{d\ln r}$ en fonction de $\ln r$.

- 3) En remarquant que λ^2 en fonction de $\ln\langle|\delta v_r^3|\rangle$ est une belle droite. Dans l'esprit des hypothèses de la cosimilitude (Extended Self Similarity), ce comportement ne fait qu'étendre à tout r ce qui se passe à grande échelle :

$$\langle|\delta v_r^3|\rangle \propto r$$

on peut exprimer λ^2 en fonction de $\langle|\delta v_r^3|\rangle$ et de μ :

$$\lambda^2 = -\mu \ln\langle|\delta v_r^3|\rangle$$

Nous pouvons tirer μ de cette relation.

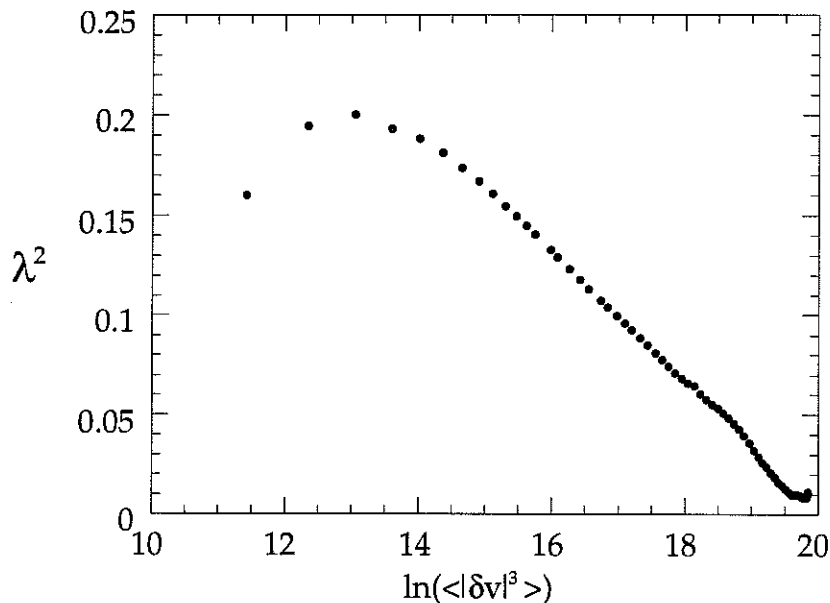


Figure 3.138 : La profondeur de la cascade en fonction du troisième moment de la valeur absolue de δv , pour $Re = 45\,100$, $R\theta = 598$.

Nous avons tracé sur la figure 3.139 en fonction de $R\theta$ le résultat de l'application des méthodes 2 et 3. La méthode de la dérivée montre une grande dispersion des points. En revanche, la méthode du moment semble révéler une dépendance du facteur μ en Reynolds, confirmée par le point à fort Reynolds mesuré dans la soufflerie de l'ONERA à Modane par M. Marchand [7].

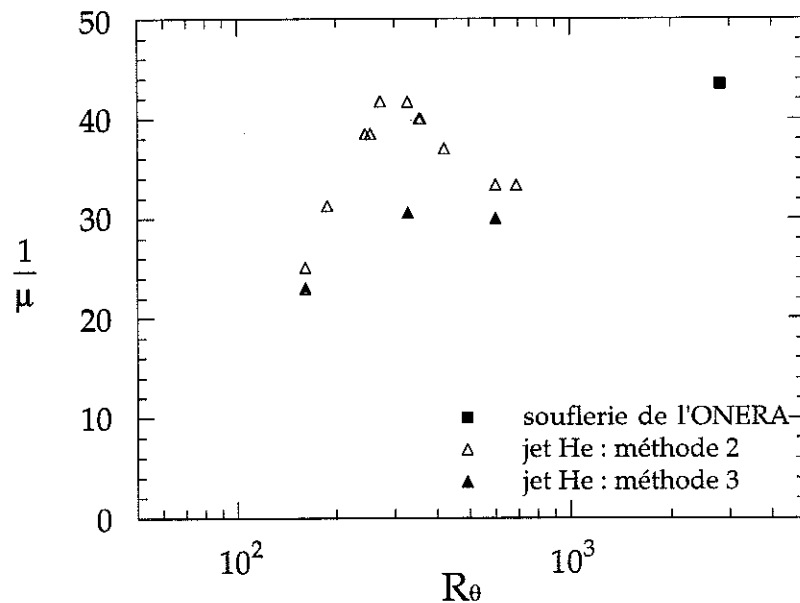


Figure 3.139 : $1/\mu$ en fonction de $R\theta$ évalués par deux méthodes indépendantes.

La barre d'erreur due au bruit statistique n'explique pas de tels écarts (voir fig. 3.132). Il en est de même de l'erreur due au processus de minimisation de χ^2 qui reste assez faible dans la zone d'échelles où se fait l'évaluation. En effet, on peut montrer que dans la zone logarithmique :

$$\frac{\Delta\mu}{\mu} \approx \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{-\mu \ln(r/L)}} \quad (\approx 5\% \text{ pour } Re = 84\,900 \text{ à } r/L=0,2)$$

(cette évaluation ne tient pas compte de l'incertitude sur la connaissance de L).

Peut-être à ces grandes échelles est-on sensible à d'autres erreurs, des erreurs systématiques que les deux méthodes décrites ne mettent pas de la même manière en évidence.

Nous pouvons toutefois noter que les valeurs de μ obtenues ($0,025 < \mu < 0,05$) sont en accord avec celles du facteur de Kolmogorov, déjà mesuré par d'autres méthodes ($0,017 < \mu < 0,028$) [1].

Echelle de passage entre le régime logarithmique et le régime en loi de puissance de λ^2

Nous avons montré plus haut que le paramètre de forme λ^2 présente des comportements différents, dans deux gammes d'échelles distinctes. A grande échelle, il présente une dépendance logarithmique alors qu'à plus petite échelle il se comporte en loi de puissance.

T. Dombre nous a suggéré d'examiner l'échelle à laquelle se fait le passage d'un régime à l'autre. Pour déterminer précisément cette échelle, nous avons utilisé comme au paragraphe 3.3 la grandeur :

$$\frac{d \ln \lambda^2}{d \ln \left(\frac{r}{\eta} \right)} \quad \text{en fonction de } \ln \left(\frac{r}{\eta} \right)$$

La zone en loi de puissance se présente dans ce graphique comme un plateau (voir fig. 3.136). La fin du plateau marque précisément l'échelle à laquelle disparaît la loi de puissance.

Il suffit alors de tracer cette échelle l , normalisée à η , en fonction du nombre de Reynolds (figure 3.42).

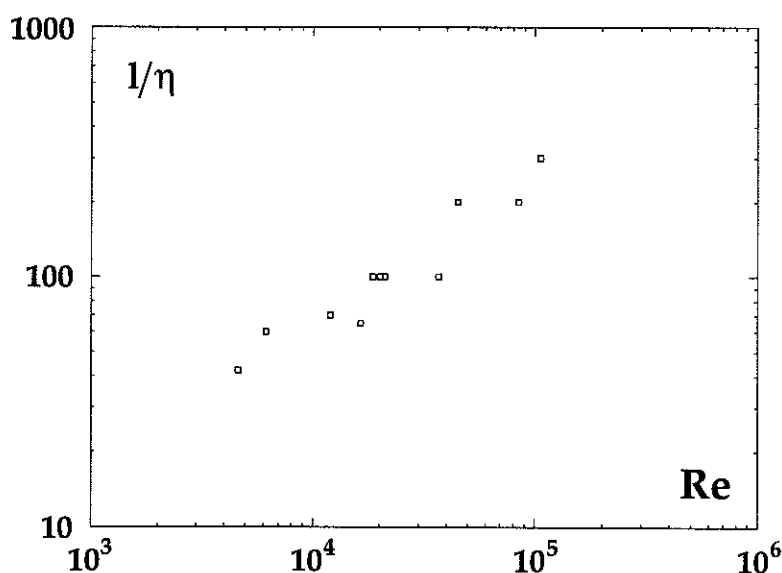


Figure 3.140 : Echelle de passage entre le régime en loi de puissance et le régime logarithmique normalisée à η , en fonction de Reynolds.

Nous constatons que cette échelle augmente avec Re , mais la dispersion des points ne permet pas de déterminer l'exposant. Si $1/\eta$ était une puissance $3/4$ de Re , l serait une fraction constante de l'échelle intégrale L , constante sur l'ensemble des mesures dans le cas présent.

Il semble exister une longueur intrinsèque au processus de cascade, puisqu'elle délimite deux modes distincts de fonctionnement, mais les points sont encore trop dispersés pour décider si cette longueur est constante ou non.

3.14 UNE ANALOGIE THERMODYNAMIQUE

Regardons à nouveau la figure 3.135, la dérivée "logarithmique" de λ^2 par rapport à l'échelle :

$$\frac{d \ln \lambda^2}{d \ln \left(\frac{r}{\eta} \right)} \quad \text{en fonction de } \ln \frac{r}{\eta}$$

Les plateaux, nous l'avons vu, confirment la dépendance en loi de puissance de λ^2 . Le réseau de courbes obtenu peut également évoquer les isothermes du diagramme d'équilibre d'un système liquide-gaz avec :

$$\frac{P}{T} = \frac{d \ln \lambda^2}{d \ln \left(\frac{L}{r} \right)} ; \quad V = \ln \left(\frac{L}{r} \right)$$

où P est la pression, T la température, et V le volume.

$$\frac{P}{T} = \frac{d \ln \lambda^2}{dV}$$

alors

$$\frac{F}{T} = \ln \lambda^2$$

et

$$\lambda^2 = Z$$

où F est l'énergie libre et Z la fonction de partition.

Que peut-on tirer de cette analogie ?

Examinons en ces termes thermodynamiques la relation prédite par le modèle log-normal de Kolmogorov-Obukhov 62 :

$$\lambda^2 = - \mu \ln \left(\frac{r}{L} \right)$$

que nous vérifions expérimentalement aux grandes d'échelles.

$$\lambda^2 = \mu V$$

$$\begin{aligned}\frac{P}{T} &= \frac{d \ln \lambda^2}{dV} \\ &= \frac{d \ln \mu V}{dV} \\ &= \frac{1}{V}\end{aligned}$$

$$PV = T$$

La loi de Kolmogorov et Obukov s'exprime dans ce langage comme une loi de gaz parfait pour la turbulence. On peut aller un peu plus loin et se servir de ce résultat pour définir une température. L'énergie s'exprime par :

$$U = T \left(\frac{d \ln Z}{d \ln T} \right)_V$$

dans le cas des gaz parfaits :

$$U = \alpha T$$

α étant une constante qui ne représente qu'un choix d'unités, on peut donc prendre $\alpha = 1$

$$U = T = T \left(\frac{d \ln Z}{d \ln T} \right)_V$$

comme :

$$Z = \lambda^2 = \mu V$$

$$1 = \left(\frac{d \ln(\mu V)}{d \ln T} \right)_V$$

$$= \left(\frac{d \ln \mu}{d \ln T} \right)_V$$

$$\ln \mu = \log T + \text{constante}$$

$$\boxed{T \propto \mu}$$

Le facteur μ de Kolmogorov-Obukhov 62 représente donc dans cette analogie la "température de la turbulence", et doit dépendre du nombre de Reynolds pour que les courbes représentant différents Re soient analogues à des isothermes.

Nous avons vu au paragraphe précédent que la mesure de μ n'a pas actuellement toute la précision souhaitable, mais semble montrer une variation systématique avec Re .

On peut encore exprimer l'entropie :

$$S = \frac{U - F}{T}$$

et si $U = T$ dans le gaz parfait;

$$S = 1 + \log \lambda^2$$

Or, si on adopte pour le processus $\sigma(r)$ la distribution log-normale :

$$G(\ln \sigma) = \frac{1}{\lambda \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\ln^2 \sigma / \sigma_0}{2\lambda^2}}$$

on trouve pour l'entropie :

$$S = - \int G \ln G \, d \ln \sigma = \frac{1}{2} (1 + \ln 2\pi + \ln \lambda^2)$$

On obtient, à une constante près, une identité entre d'une part l'entropie déduite d'une analogie thermodynamique basée sur des résultats purement expérimentaux, et d'autre part l'entropie du processus $\sigma(r)$ (ou $\varepsilon(r)$) défini par le modèle variationnel comme le mécanisme interne de la cascade (cf § 1.2).

En revenant au "diagramme P-V" de la figure 3.136, on voit qu'il existe un Reynolds "critique" pour lequel un plateau apparaît ($R_c \approx 5000$). Par analogie avec le point critique du système liquide-gaz à l'équilibre, on peut dire qu'il existe une transition de phase du second ordre entre deux régimes de la turbulence. Mais quelles sont les deux phases qui se séparent pour $Re > R_c$?

3.2 ETUDE DES MOMENTS

En 1993, Benzi et al [8] ont remarqué que les moments $\langle \delta v^n \rangle$ étaient reliés entre eux par des lois de puissance :

$$\langle \delta v^n \rangle \propto \langle \delta v^m \rangle^{\gamma(n,m)}$$

Ces lois de puissance étaient particulièrement belles pour les moments pairs comme on le voit sur la figure 3.21. On note que la théorie de Kolmogorov prédit dans la gamme inertielle :

$$\gamma(n,m) = n/m$$

ce qui est certainement vrai dans la partie dissipative.

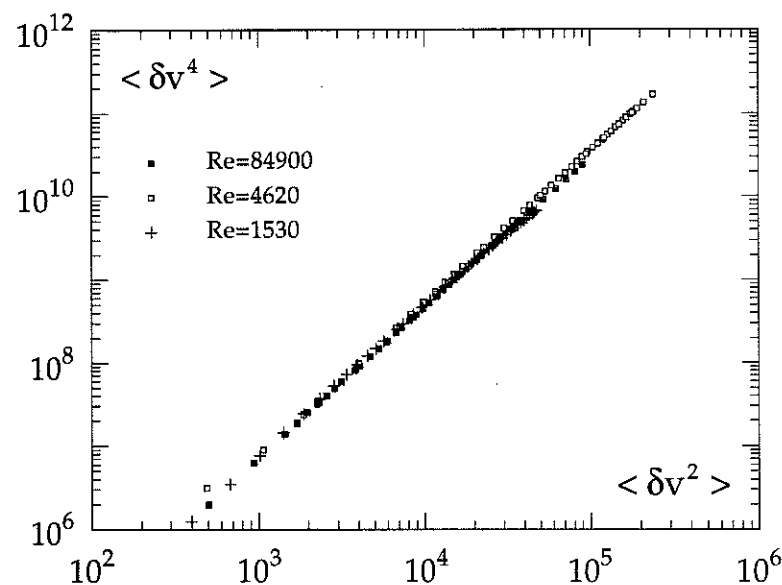


Figure 3.21 : moment d'ordre quatre en fonction du moment d'ordre deux (variance), pour trois Reynolds très différents, sur une large gamme d'échelles.

On constate une très belle relation entre ces deux grandeurs. Les points tracés sur ce graphique couvrent toute la gamme d'échelles sur laquelle se développe la turbulence : de l'échelle à laquelle λ^2 a une tangente horizontale (le bruit instrumental domine les échelles plus petites, voir § 3.13), jusqu'aux grandes échelles.

Plutôt que de tracer les moments les uns en fonction des autres pour les mesures effectuées dans le jet cryogénique, nous avons préféré porter en échelles logarithmiques la grandeur :

$$\frac{\langle \delta v^n \rangle}{\langle \delta v^m \rangle^{n/m}} \quad \text{en fonction de } \langle \delta v^m \rangle$$

Dans ce diagramme, la pente représente directement l'écart au régime de Kolmogorov 1941. En effet :

$$\frac{\ln \langle \delta v^n \rangle}{\ln (\langle \delta v^m \rangle^{n/m})} = \gamma(n,m) - \frac{n}{m}$$

Pour les plus petites échelles, cette grandeur doit tendre vers une constante quand la statistique de l'incrément rejoint celle du gradient de vitesse :

$$\delta v = r \left(\frac{dv}{dx} \right)$$

nous avons :

$$\langle \delta v^n \rangle = r^n \left\langle \left(\frac{dv}{dx} \right)^n \right\rangle \propto r^n$$

et

$$\frac{\langle \delta v^n \rangle}{\langle \delta v^m \rangle^{n/m}} = \frac{r^n \left\langle \left(\frac{dv}{dx} \right)^n \right\rangle}{r^n \left\langle \left(\frac{dv}{dx} \right)^m \right\rangle^{n/m}} = \text{cste}$$

On voit sur la figure 3.22 le tracé pour trois valeurs différentes de Re :

$$\frac{\langle \delta v^4 \rangle}{\langle \delta v^2 \rangle^2} \quad \text{en fonction de } \langle \delta v^2 \rangle$$

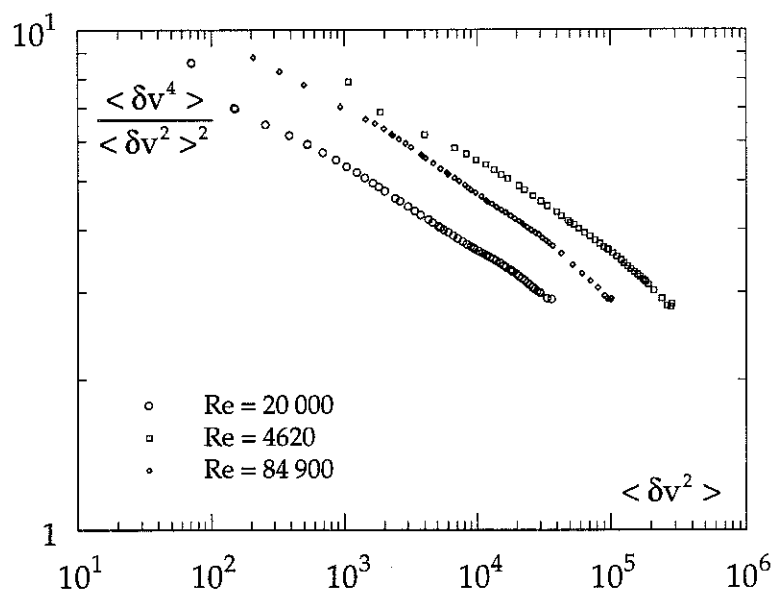


Figure 3.22 : $\frac{\langle \delta v^4 \rangle}{\langle \delta v^2 \rangle^2}$ en fonction de $\langle \delta v^2 \rangle$ pour trois valeurs très différentes du nombre de Re.

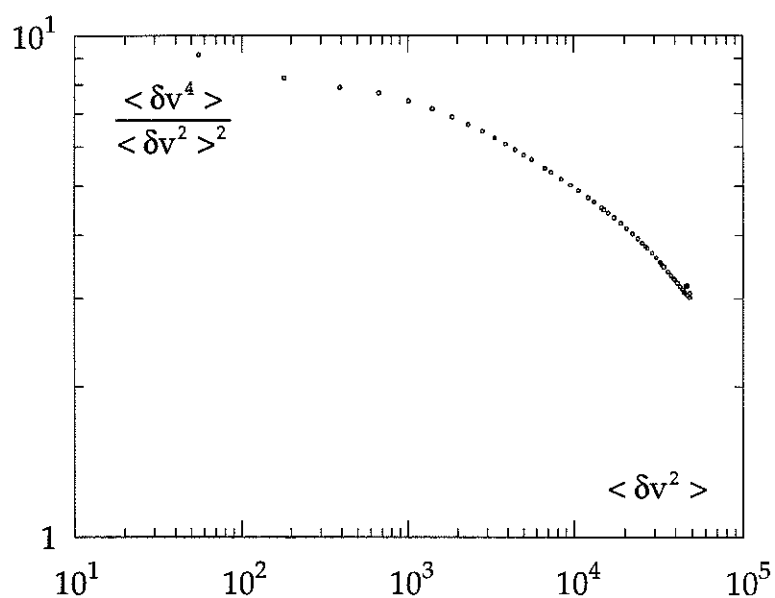


Figure 3.23 : $\frac{\langle \delta v^4 \rangle}{\langle \delta v^2 \rangle^2}$ en fonction de $\langle \delta v^2 \rangle$ pour $Re = 1530$, dans un régime de turbulence douce.

On observe bien une loi de puissance dans les régimes de turbulence dure. On remarque que l'exposant n'est pas deux, comme le veut l'hypothèse de similitude de Kolmogorov 41, mais plutôt : $\gamma(4,2) = 1,82 \pm 0,01$:

Re	$\gamma(4,2)$
84 900	1,82
20 000	1,83
4620	1,81

En revanche, l'existence d'une loi de puissance pour le régime de turbulence douce reste contestable comme le montre la figure 3.23.

Les figures suivantes montrent pour les mêmes mesures : $\frac{\langle \delta v^3 \rangle}{\langle \delta v^2 \rangle^{3/2}}$ en fonction de $\langle \delta v^2 \rangle$. Il s'agit ici du moment d'ordre trois de δv , et non du moment de sa valeur absolue.

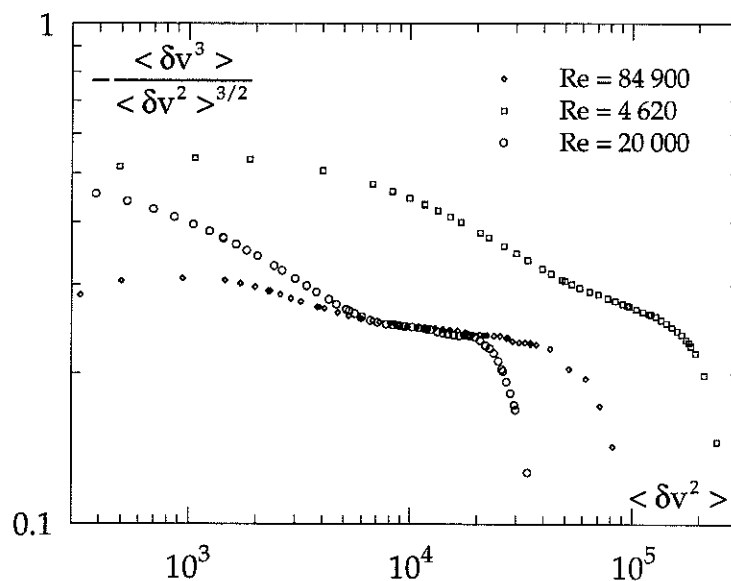


Figure 3.24 : $\frac{\langle \delta v^3 \rangle}{\langle \delta v^2 \rangle^{3/2}}$ en fonction de $\langle \delta v^2 \rangle$ pour trois Reynolds différents.

Dans le régime de turbulence dure, on ne trouve pas de loi de puissance pour les moments impairs tels qu'ils sont tracés sur la figure 3.24. Par contre, si on trace directement le moment d'ordre trois en fonction du moment d'ordre deux, nous voyons ces lois de puissance (cf fig. 3.25).

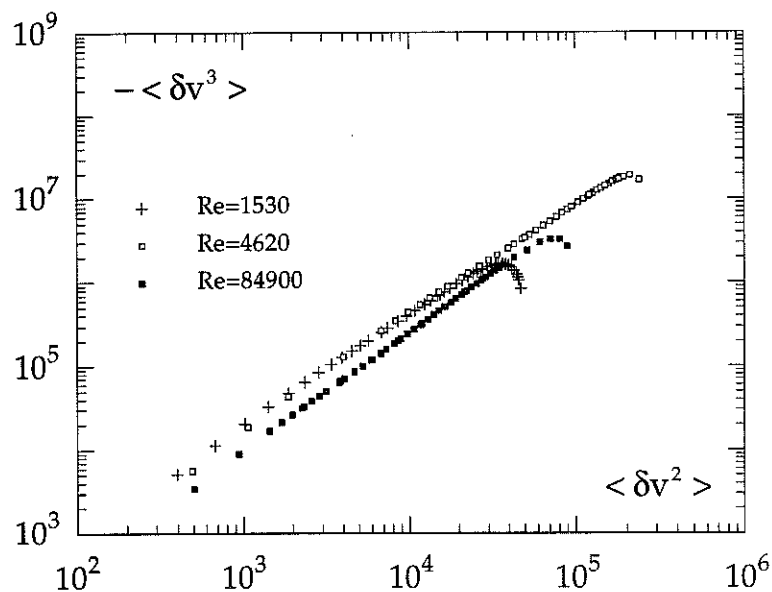


Figure 3.25 : moment d'ordre trois en fonction du moment d'ordre deux (variance), pour les trois mêmes Reynolds que ceux de la page précédente, et sur la même gamme d'échelles.

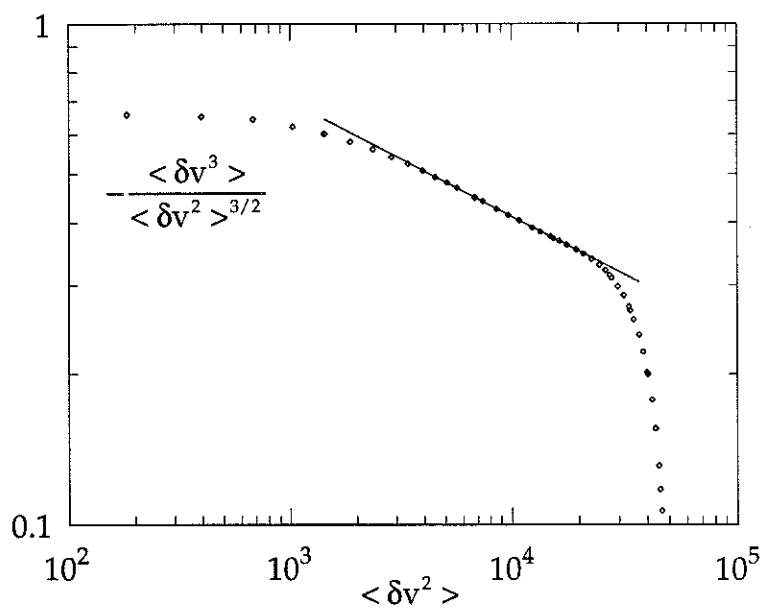


Figure 3.26 : $\frac{\langle \delta v^3 \rangle}{\langle \delta v^2 \rangle^{3/2}}$ en fonction de $\langle \delta v^2 \rangle$ pour $Re = 1530$.

On peut toutefois remarquer sur la figure 3.24 une évolution de la forme au fil des Reynolds : le creux central est moins marqué pour les petits Reynolds. Curieusement, cette courbe semble rejoindre dans le régime de turbulence douce une loi de puissance (cf fig. 3.26).

Cette étude a montré une manière originale d'examiner les moments les uns par rapport aux autres. Elle nous permet de mettre en évidence un comportement différent pour les moments pairs et impairs que nous ne pouvions voir en traçant directement les moments les uns en fonction des autres.

Il serait nécessaire de poursuivre ce travail pour caractériser proprement ces courbes, notamment en évaluant l'influence de la finitude de l'échantillon sur le calcul des moments impairs. Peut-être sera-t-il alors possible de tirer de l'évolution des moments une signature de la transition à la turbulence dure.

3.3 QUE PEUT-ON TIRER D'UNE "MAUVAISE" MESURE ?

Nous avons décrit en 2.3 la procédure expérimentale, et les critères qui nous permettaient de qualifier une mesure de "bonne" ou "mauvaise". Il s'agit avant tout de critères de stationnarité des paramètres expérimentaux comme le débit, les pressions, les températures, les puissances de chauffage.

Pour les premières mesures, le détecteur était placé très loin, à 13 cm d'une buse de 1 mm (130 diamètres), sans grille. De nombreux enregistrements ont été faits alors que le jet était franchement instable, avec toutefois une bonne stationnarité des paramètres expérimentaux.

Dans cette situation fortement instable, que voyait-on ?

- Le taux de turbulence était anormalement haut, jusqu'à 35 %.
- Les histogrammes de vitesse étaient déformés.
- Dans les pires situations, le signal présentait un aspect presque bistable, comme on peut le voir sur la figure 3.31.
- Le calcul de R_θ en fonction de Re donnait des résultats aberrants, comme on peut le voir sur la figure 3.32.

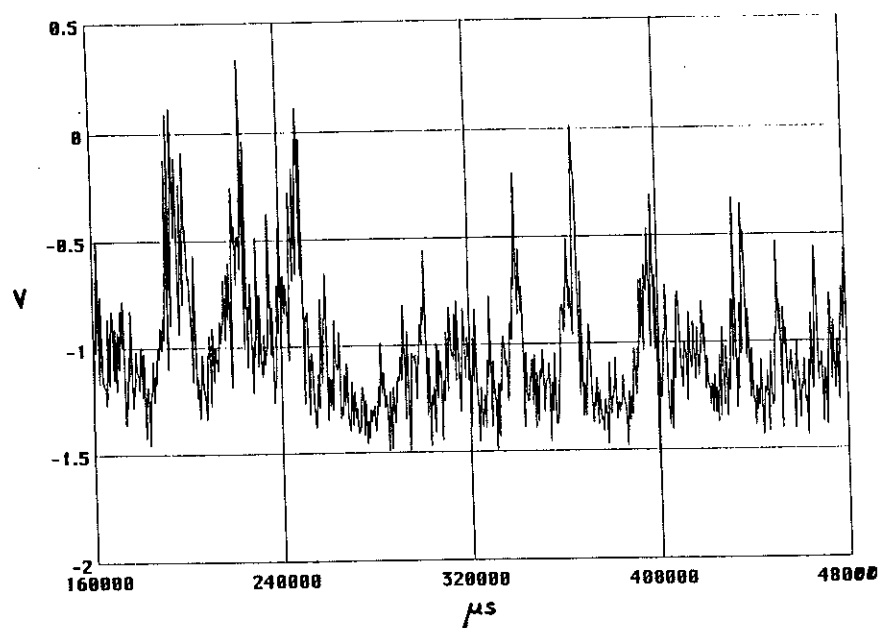


Figure 3.31 : Quelques secondes de signal de tension (non converti par la loi d'étalonnage).

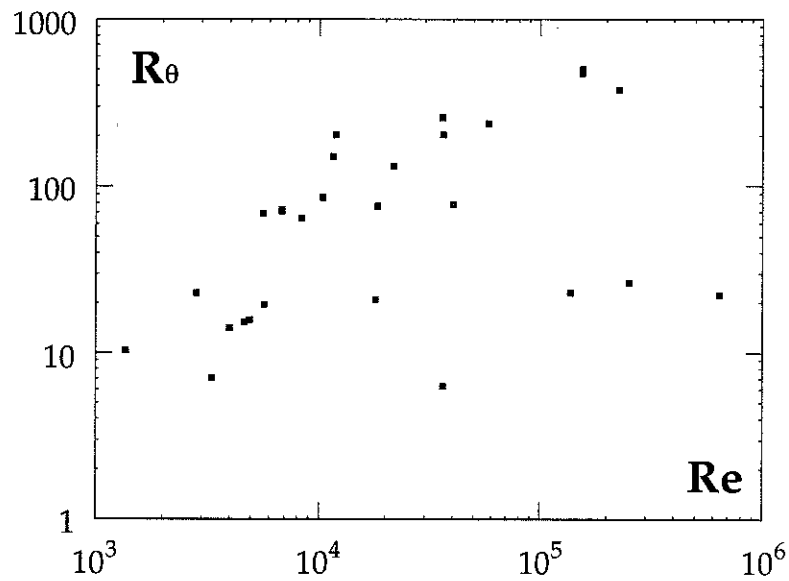


Figure 3.32 : R_θ en fonction de Re pour plusieurs mesures prises à une distance de 130 diamètres de buse dans un jet non stabilisé.

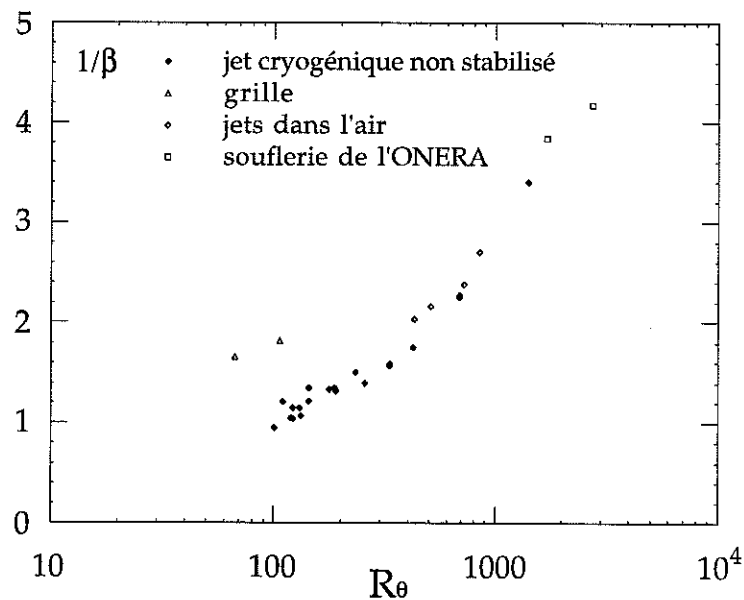


Figure 3.33 : $1/\beta$ en fonction de R_θ pour plusieurs écoulements dans l'air [3,4]. Les résultats obtenus dans le jet cryogénique non stabilisé (à 130 diamètres de la buse) sont tracés en fonction de $1,74\sqrt{Re}$.

La turbulence produite par ce jet, clairement n'était pas homogène. Pourtant tout semblait normal dans le traitement des incréments de vitesse, et la mesure de λ^2 . Le paramètre β était relié de manière correcte au nombre de Reynolds comme on peut le voir en comparant les la figures 3.33 et 3.137.

Nous avons évoqué au paragraphe 1.1 une propriété des incréments de vitesse qui pourrait être à l'origine la qualité de cet accord jusque dans des circonstances aussi défavorables : le champ des incréments $\delta v_{\tau}(t)$ reste stationnaire même si $v(t)$ est faiblement non-stationnaire. Ainsi, si le signal évolue sur des temps longs devant le temps correspondant aux grandes échelles, ou ce qui revient au même, si la vitesse moyenne n'est pas constante dans le temps, la statistique des incréments n'en sera pas sensiblement affectée. Par contre, le calcul de R_{θ} qui fait intervenir la vitesse moyenne et l'écart quadratique des fluctuations de vitesse est très sensible aux conditions à grande échelle.

REFERENCES DU CHAPITRE 3

- [1]: Thèse Y. Gagne
Grenoble 1987

- [2]: J. Peinke, B. Castaing, B. Chabaud, F. Chillà, B. Hébral, A. Naert
On a fractal and experimental approach to turbulence
Fractals in the Natural and Applied Sciences (A-41)
M.M.Novak (editor) Elsevier Science (1994) 295

- [3]: Velocity probability density functions of high Reynolds number
turbulence. B. Castaing, Y. Gagne, E. Hopfinger
Physica D **46** (1990) 177

- [4] : Log similarity for turbulent flows ?
B. Castaing, Y. Gagne, M. Marchand
Physica D **68** (1993) 387-400

- [5]: Transition to turbulence in Helium-gas
F. Heslot, B. Castaing, A. Libchaber
Phys. Rev. A December 15, 1987

- [6] E. Villermaux, à paraître

- [7] Thèse M. Marchand
INPG Grenoble 1994

- [8]: R. Benzi, S. Ciliberto, C. Baudet, G. Ruiz Chavaria, R. Tripiccion,
On the scaling of three dimensionnal homogeneous and isotropic
turbulence, à paraître

4. FORME DES DENSITES DE PROBABILITE

4.1	Fiabilité de la distribution log-normale	133
4.11	Distribution log-normale perturbée	133
4.12	Distribution binomiale	138
4.13	Erreur statistique : combien faut-il de points de mesure ?	141
4.1	Probabilités conditionnelles	144
4.21	Un test direct de la forme des densité de probabilité	144
4.22	Une relation entre e_r et σ	148
4.23	Densité de probabilité de e_r	155
4.24	Une autre manière de voir la relation entre e_r et σ ?	159
4.3	Le traitement de Pope et Ching	161
4.31	Généralités	161
4.32	Signal de vitesse	163
4.33	Incréments de vitesse	168
	Références du chapitre 4	175

On a choisi, comme il a été décrit dans le chapitre précédent, d'ajuster les histogrammes des incréments de vitesse δv_r avec une fonction de la forme :

$$\frac{1}{\sigma_r} P_r \left(\frac{\delta v_r}{\sigma_r} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma} G(\ln \sigma) P_L \left(\frac{\delta v}{\sigma} \right) d \ln \sigma$$

où G est une distribution log-normale, et P_L est la densité de probabilité à grande échelle. Des arguments physiques ont déjà été fournis sur la forme linéaire, le choix de P_L et de G .

On se demandera dans la première partie de ce chapitre, si G n'est pas log-normale, ce que représente P_r , la fonction qui s'ajuste le mieux avec l'histogramme expérimental. Autrement dit, la forme de l'histogramme est-elle très sensible à la forme de la distribution de $\ln \sigma$?

Nous comparerons ensuite l'influence de la forme de $G(\ln \sigma)$ au bruit statistique sur l'histogramme : combien faut-il de points de mesure pour pouvoir trancher sur la forme de G ?

La seconde partie rend compte d'une étude plus récente des densités de probabilité, sous la forme d'histogrammes conditionnels des incréments de vitesse [1]. La condition e_r utilisée permet de décomposer l'histogramme expérimental en une somme de distributions gaussiennes. On a vu jusqu'à présent qu'une somme de gaussiennes décrivait bien P_r . Nous suivons ici la démarche inverse et montrons que P_r se décompose en une somme de gaussiennes.

Cette condition e_r est liée dans une certaine gamme à σ par une loi de puissance. On peut tirer de cela une confirmation de la validité de notre description de P_r et enfin calculer directement la distribution de e_r .

La troisième partie de ce chapitre tente d'exploiter un théorème récemment publié par Pope et Ching sur les processus aléatoires stationnaires. Nous en tirons en particulier un moyen de tester la validité de l'hypothèse de Taylor.

4.1 FIABILITE DE LA DISTRIBUTION LOG-NORMALE

4.11 DISTRIBUTION LOG-NORMALE PERTURBEE

La méthode d'analyse des histogrammes de δv que nous avons utilisée est basée, comme on l'a vu en 3.1 sur leur lissage par une fonction de la forme :

$$\frac{1}{\sigma_r} P_r \left(\frac{\delta v_r}{\sigma_r} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma} G \left(\ln \frac{\sigma}{\sigma_0} \right) P_L \left(\frac{\delta v}{\sigma} \right) d \ln \sigma \quad (1)$$

P_L est gaussienne à une légère dissymétrie près, et G a été choisie log-normale :

$$G \left(\ln \frac{\sigma}{\sigma_0} \right) = \frac{1}{\lambda \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\ln^2 \sigma / \sigma_0}{2\lambda^2}}$$

La méthode du moindre carré permet de déterminer la valeur du paramètre λ^2 qui donne le meilleur lissage. Il s'agit réellement ici de la mesure d'une grandeur physique que nous avons nommée au chapitre précédent profondeur de la cascade. λ^2 étant le point central de la méthode d'analyse décrite au chapitre 3, il convient de s'interroger sur sa signification.

La distribution log-normale, pour le modèle de Kolmogorov-Obukhov de 1962 résulte de l'application du théorème de la limite centrale au logarithme d'une variable de la cascade, ε . On peut se demander si les nombres de Reynolds accessibles à l'expérience sont suffisants pour que ce théorème s'applique, c'est-à-dire pour que $\ln(\varepsilon)$ rejoigne un comportement gaussien.

Pour le modèle variationnel, la distribution log-normale découle du développement au second ordre d'une entropie autour de son maximum. Mais les termes d'ordre supérieur sont-ils négligeables ?

Nous voulons vérifier que l'analyse de nos résultats expérimentaux ne dépend pas de telles options théoriques.

Afin de tester la méthode, "l'appareil de mesure de λ^2 ", nous avons simulé un histogramme expérimental construit sur une distribution non log-normale des σ et lui avons fait subir le traitement en λ^2 . Nous avons choisi dans la suite $\sigma_0 = 1$ et avons utilisé comme distribution des $\ln \sigma$:

$$G_{\text{ex}}(\ln \sigma) = \frac{A(b)}{\Lambda \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\ln^2 \sigma}{2\Lambda^2}(1+b \ln^2 \sigma)}$$

A est un préfacteur de normalisation, fonction de b. Le paramètre b permet de perturber à volonté une distribution log-normale.

Afin de simplifier les calculs, nous avons utilisé pour P_L une distribution gaussienne. La densité de probabilité "expérimentale" des incréments de vitesse est obtenue grâce à la formule :

$$P_{\text{ex}}(x) = \frac{A(b)}{\Lambda \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\ln^2 \sigma}{2\Lambda^2}(1+b \ln^2 \sigma)} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} d \ln \sigma \quad (1)$$

où x est l'incrément sans dimensions.

Nous allons ajuster à P_{ex} , comme nous l'avons fait dans le chapitre précédent aux vrais histogrammes expérimentaux, une fonction P_{th} basée sur une distribution log-normale des σ :

$$P_{\text{th}}(x) = \frac{1}{\lambda \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\ln^2 \sigma}{2\lambda^2}} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} d \ln \sigma$$

Avant de comparer les deux densités de probabilité, pour ne comparer que leur forme, il est important que leurs variances soient les mêmes. Pour cela, nous effectuons les changements de variables :

$$\begin{aligned} P_e(x) &= \alpha_e P_{\text{ex}}(\alpha_e x) \\ P_t(x) &= \alpha_t P_{\text{th}}(\alpha_t x) \end{aligned}$$

où α_e et α_t sont les écarts-type de P_{ex} et P_{th} . La variance des nouvelles distributions P_e et P_t est alors 1.

Afin de déterminer la meilleure valeur de λ^2 , nous avons commencé par minimiser la fonction suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(P_e(x) - P_t(x))^2}{P_t(x)} dx$$

Mais il est apparu que si P_e et P_t ont un comportement différent pour les grandes valeurs de x, l'intégrand ne s'annule parfois pas assez vite pour que l'intégrale converge. Nous avons préféré la fonction suivante, qui ne présente pas cet inconvénient :

$$\chi^2(b) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(P_e(x) - P_t(x))^2}{P_e(x) + P_t(x)} dx$$

Nous nous sommes intéressés dans cette étude, en fixant le coefficient $\Lambda = 0,7$, à une distribution "expérimentale" P_{ex} correspondant à un histogramme à petite échelle, lorsque l'intermittence est très marquée. Nous pouvons voir sur la figure 4.111 l'évolution de la valeur minimale de χ^2 en fonction de la perturbation b :

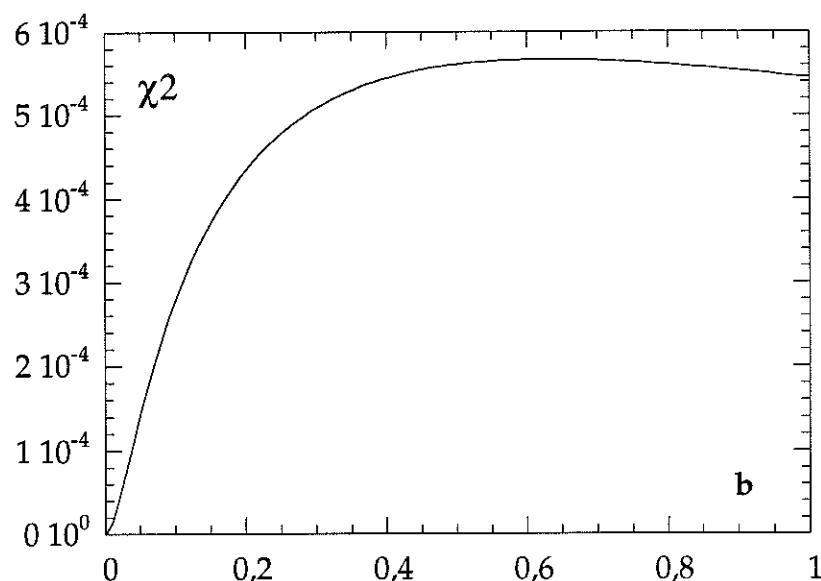


Figure 4.111 : χ^2 en fonction de la perturbation b

On peut faire sur cette courbe quelques commentaires :

- Elle part de zéro. En effet, lorsque $b=0$, la distribution des σ est log-normale, le meilleur λ^2 donne alors un ajustement parfait, aux erreurs numériques près.
- χ^2 sature à une valeur qui reste modeste : $\chi^2 = 6.10^{-4}$. $\sqrt{\chi^2} \approx 3\%$ peut être considéré comme l'erreur commise sur la distribution des incréments de vitesse δv pour des perturbation allant jusqu'à $b = 1$.
- χ^2 décroît pour les grandes valeurs de b . Ce comportement peut se comprendre en remarquant que lorsque b devient grand, la distribution $G(\ln\sigma)$ devient très étroite et tend vers une distribution de Dirac. P_{ex} redevient alors gaussienne quelle que soit la forme exacte de G . Le calcul montre en effet que pour $b = 100$, le minimum de χ^2 est $1,7 \cdot 10^{-5}$.

Nous avons calculé la variance de $\ln\sigma$ pour chaque valeur de la perturbation b afin de la comparer à λ^2 . On peut voir en 4.112 qu'à quelques pourcents près :

$$\lambda^2 \sim \langle (\ln\sigma - \langle \ln\sigma \rangle)^2 \rangle = \langle (\ln\sigma)^2 \rangle$$

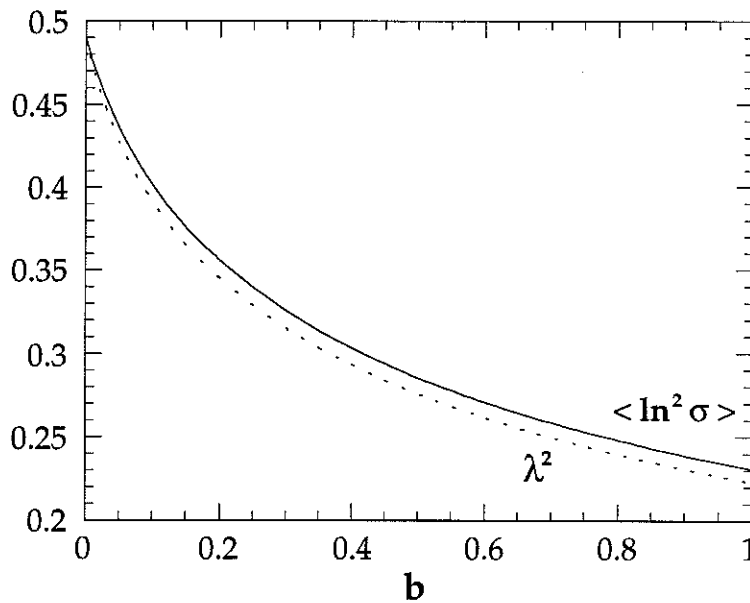


Figure 4.112 : la variance de $\ln^2 \sigma$ et le paramètre λ^2 qui minimise χ^2 en fonction de la perturbation b

En reproduisant le même calcul pour plusieurs valeurs du coefficient Λ (0,49 ; 0,7 ; 1), nous avons pu mettre en évidence une relation entre la perturbation b et l'écart χ^2 (figure 4.113) qui donne à $b\lambda$ le sens d'un écart effectif à la forme log-normale :

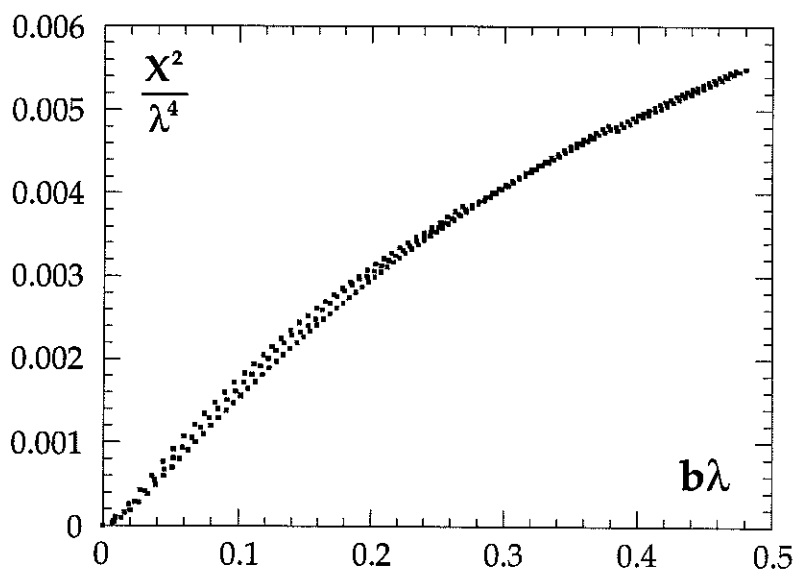


Figure 4.113 : Relation entre χ^2 / λ^4 et $b\lambda$ pour plusieurs valeurs de Λ .

D'après ce qui précède, même si la distribution des $\ln \sigma$ est fortement non gaussienne, λ^2 continue à être une très bonne approximation de sa variance. De plus, λ^2 continue à très bien caractériser la forme des histogrammes de δv .

On peut toutefois objecter que la validité de cette preuve est limitée par la spécificité de la perturbation de G . Nous présentons dans le paragraphe suivant une étude en tous points similaire à la précédente avec pour G une loi binomiale issue d'un modèle multifractal [2].

4.12 DISTRIBUTION BINOMIALE

En 1991, un modèle de cascade discrète a été proposé par Benzi et al. [2] qui amène à exprimer la densité de probabilité des incréments de vitesse sous la forme déjà évoquée (1) avec une distribution binomiale des $\ln\sigma$:

$$G(\ln\sigma) = \sum_{k=0}^n C_n^k \alpha^{n-k} (1-\alpha)^k \delta(\ln\sigma - \gamma k)$$

avec :

$$\alpha = 14/15$$

$$\gamma = (\ln 2)/3$$

Nous remarquons que contrairement à la distribution gaussienne, la distribution binomiale de $\ln\sigma$ n'est pas symétrique.

En suivant point par point la procédure du paragraphe précédent, nous avons pu vérifier que là encore, la distribution des incréments δv est bien décrite par la variance λ^2 de la distribution log-normale.

Sur la figure 4.121, on voit que la valeur minimum de la fonction χ^2 pour plusieurs valeurs de n , est encore faible :

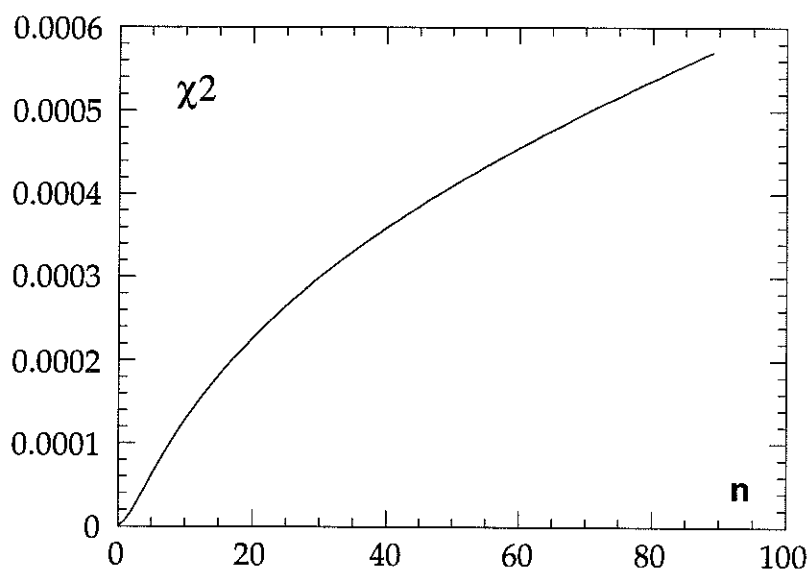


Figure 4.121 : χ^2 en fonction de n .

La figure 4.122 montre la variance de la distribution binomiale et la valeur de λ^2 qui minimise χ^2 en fonction de n . Là encore, λ^2 est proche de la variance de $\ln\sigma$.

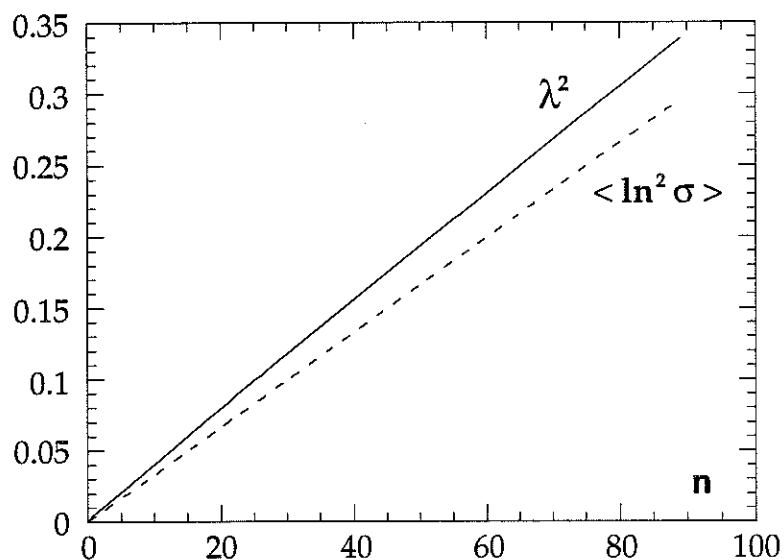


Figure 4.122 : la variance de $\ln \sigma$ et le paramètre λ^2 qui minimise χ^2 en fonction de n .

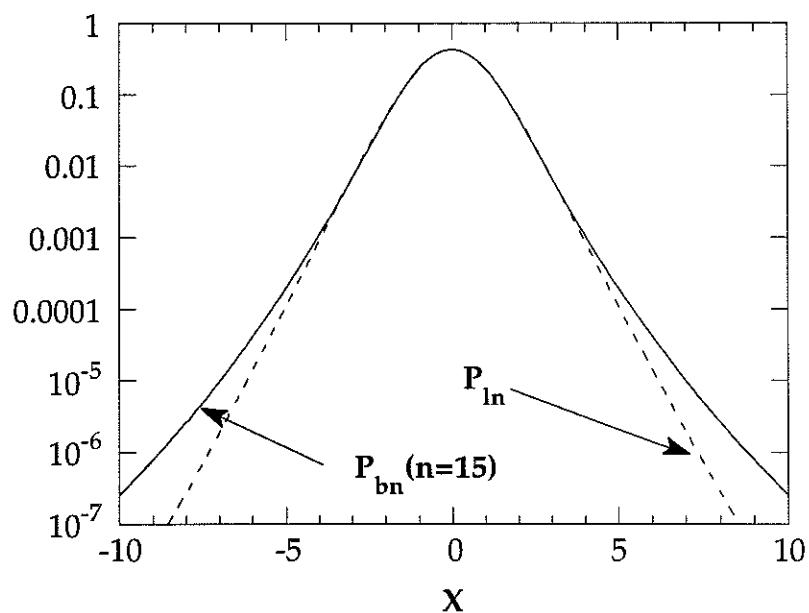


Figure 4.123 : Deux densités de probabilité construites à partir de distributions gaussienne ou binomiale de $\ln \sigma$. Le paramètre λ^2 est celui qui minimise χ^2 . Il vaut ici : $\lambda^2 = 0,06$.

On peut superposer à ces densités de probabilité un histogramme expérimental (voir figure 4.124). Mais on ne pourra en tirer de réponse décisive quant à la nature de la distribution de σ sans prendre en compte sa dissymétrie.

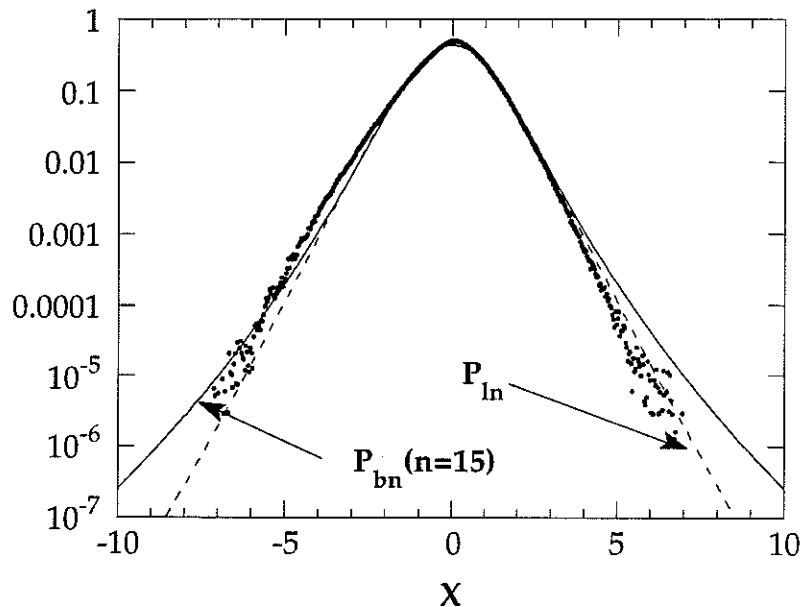


Figure 4.124 : Deux densités de probabilité construites à partir de distributions normales ou binomiale de $\ln\sigma$. $\lambda^2 = 0,06$. L'histogramme expérimental est obtenu à partir d'un échantillon de $2 \cdot 10^5$ points indépendants.

Un tel tracé nous permet toutefois de comparer le bruit statistique de l'histogramme à l'écart entre les deux distributions $P_{\ln}$ et P_{bn} . On voit sur ces figures que la différence de forme n'est sensible qu'à des niveaux très bas de probabilité ($\sim 10^{-5}$). Ce sont donc des événements très rares de la turbulence qui font la différence. On s'attend à ce qu'une étude expérimentale de la forme de G demande de bonnes statistiques pour être probante, c'est-à-dire de très longs échantillons.

L'objet du paragraphe suivant est d'évaluer la taille de l'échantillon nécessaire pour qu'une mesure soit à même de trancher sur la forme de $G(\ln\sigma)$.

4.13 ERREUR STATISTIQUE : COMBIEN FAUT-IL DE POINTS DE MESURE ?

Nous avons vu que la forme de $P_r(\delta v_r)$ dépend très peu de la forme réelle de $G(\ln \sigma)$. Par conséquent, caractériser la forme de G doit être difficile.

Nous allons évaluer dans ce paragraphe la taille minimale N de l'échantillon nécessaire pour déceler un écart à la distribution log-normale.

Appelons Δ la largeur des colonnes de l'histogramme. Nous voulons estimer :

$$\chi^2 = 2 \sum_i \frac{(P_e(x_i) - P_t(x_i))^2}{P_e(x_i) + P_t(x_i)} \Delta = \sum_i (E_i)$$

Maintenant, P_e est un histogramme expérimental réel tel que ceux obtenus au chapitre 3, et P_t est sa limite lorsque N tend vers l'infini. On a ramené les variances de ces deux distributions à 1 afin de bien comparer leurs formes. Le nombre de points dans la colonne d'indice i est :

$$n_i = N \Delta P_e(x_i)$$

et l'espérance est :

$$\bar{n}_i = N \Delta P_t(x_i)$$

Nous devons considérer deux cas limites :

1) $\bar{n}_i \gg 1$

$$P_e(x_i) + P_t(x_i) \approx \frac{2 \bar{n}_i}{N \Delta}$$

$$\overline{(P_e(x_i) - P_t(x_i))^2} = \frac{1}{N^2 \Delta^2} \overline{(n_i - \bar{n}_i)^2} = \frac{\bar{n}_i}{N^2 \Delta^2}$$

et si l'on suppose que n_i a une distribution de poisson,

$$\bar{E}_i = \frac{2 (P_e(x_i) - P_t(x_i))^2}{P_e(x_i) + P_t(x_i)} \Delta = \frac{1}{N}$$

2) $\bar{n}_i \ll 1$

Comme n_i est entier, on doit considérer séparément les cas :

$$\bar{n}_i \geq 1 \quad \Rightarrow \quad E_i = 2 P_e(x_i) \Delta = \frac{2 n_i}{N}$$

$$\bar{n}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad E_i = 2 P_t(x_i) \Delta = \frac{2 \bar{n}_i}{N}$$

si on appelle $\pi(n_i)$ la probabilité de trouver n_i événements dans la colonne i ,

$$\begin{aligned} \bar{E}_i &= 2 \pi(0) \frac{\bar{n}_i}{N} + 2 \sum \pi(n_i) \frac{n_i}{N} \\ &= 2 (1 + \pi(0)) \frac{\bar{n}_i}{N} \\ &\approx \frac{4 \bar{n}_i}{N} \end{aligned}$$

Nous devons interpoler entre les deux cas limites 1) et 2) en prenant :

$$\text{pour } \bar{n}_i \geq \frac{1}{4} : \quad \bar{E}_i = \frac{1}{N}$$

$$\text{pour } \bar{n}_i \leq \frac{1}{4} : \quad \bar{E}_i = \frac{4 \bar{n}_i}{N}$$

Reprenons l'histogramme et appelons x_0 la longueur de l'intervale sur lequel : $\bar{n}_i \geq 1/4$. Pour N grand, comme l'essentiel de la contribution à χ^2 vient de cette partie de l'histogramme,

$$\chi^2 \approx \frac{2 x_0}{N \Delta}$$

Cette longueur x_0 dépend de la forme de l'histogramme. Pour aller plus loin, nous ferons l'approximation d'une loi exponentielle qui a parfois été utilisée pour ajuster des histogrammes d'incréments de vitesse à petite échelle :

$$P_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-|x| \sqrt{2})$$

La variance est 1 et x_0 est donné par :

$$\frac{N \Delta}{\sqrt{2}} \exp(-x_0 \sqrt{2}) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(2\sqrt{2} N \Delta)$$

La contribution des événements tels que $|x| > x_0$ peut maintenant être calculée :

$$2 \int_{x_0}^{+\infty} 4 P_t(x) dx = 4 \exp(-x_0 \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{N \Delta}$$

L'erreur statistique, due à la finitude de l'échantillon, est donc :

$$\chi^2 \approx \frac{\sqrt{2}}{N \Delta} (1 + \ln(2\sqrt{2}N\Delta))$$

Elle dépend de la largeur Δ des colonnes de l'histogramme. Si Δ est trop petit, il y a peu de points dans chaque colonne, et le bruit statistique est important. Si Δ est trop grand, la forme de l'histogramme est trop imprécisément décrite.

Pour le traitement du signal développé au chapitre précédent, nous avons choisi un compromis : chaque colonne des histogrammes est large d'un dixième d'écart-type, $\Delta = 1/10$.

Nous avons vu dans les paragraphes précédents qu'une étude de la forme de la densité de probabilité de $\ln \sigma$ se joue à des niveaux de χ^2 de l'ordre de 10^{-4} . Pour que le bruit statistique ne masque pas de si faibles effets, il faut des échantillons de l'ordre de 10^7 points indépendants.

4.2 PROBABILITES CONDITIONNELLES

4.21 UN TEST DIRECT DE LA FORME DES DENSITES DE PROBABILITE

Dans toute l'étude suivante, nous nous sommes appuyés sur une mesure effectuée à $Re = 20\ 000$ pour laquelle les petites échelles sont bien résolues.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que nous pouvions fort bien décrire les histogrammes de δv_r à toutes les échelles r comme une combinaison linéaire de distributions à grande échelle P_L quasi-gaussiennes :

$$\frac{1}{\sigma_r} P_r \left(\frac{\delta v_r}{\sigma_r} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma} G(\ln \sigma) P_L \left(\frac{\delta v}{\sigma} \right) d \ln \sigma$$

On note que la dissymétrie de la distribution P_r vis à vis de δv_r est dans cette formule uniquement due à la dissymétrie de la distribution P_L (cf 3.12).

Il a récemment été proposé [1] une méthode pour "déconvoluer" les histogrammes expérimentaux, c'est-à-dire les décomposer en une somme de contributions élémentaires. Il s'agit d'étudier les histogrammes conditionnels des incréments de vitesse δv_r . Le choix de la condition est évidemment crucial, mais nous pourrions en contrôler a posteriori la valeur : cette condition est reliée de manière unique à la variable σ . La condition choisie est :

$$e_r(x) = \varepsilon_r(x) - 15v \left(\frac{\delta v_r}{r} \right)^2$$

avec ici :

$$\varepsilon_r(x) = \frac{15v}{r} \int_{x-r/2}^{x+r/2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx'$$

et :

$$\delta v_r(x) = v(x+r/2) - v(x-r/2)$$

Le premier terme de la somme, $\varepsilon_r(x)$, est la moyenne spatiale de la dissipation à toutes les échelles de l'écoulement dans une boule de diamètre r si la turbulence est isotrope. Le second terme rend compte de la puissance dissipée à l'échelle r .

Cette fonction étant la puissance totale dissipée moins la puissance dissipée à l'échelle r , pourrait avoir un comportement proche de celui du taux de transfert d'énergie à l'échelle r .

Si, en suivant Kolmogorov, $\langle \varepsilon_r \rangle$ pouvait être supposée constante à toutes les échelles, on ne peut plus en attendre autant de cette nouvelle variable $e_r(x)$ construite comme la somme de $\langle \varepsilon_r \rangle$ et d'une fonction de r .

On tire du signal de vitesse les incréments δv_r pour lesquels e_r prend une valeur particulière, et ce pour vingt valeurs de la condition e_r réparties logarithmiquement entre ses extrêmes. Il s'agit de construire des histogrammes à deux variables, des matrices dont les lignes et colonnes sont δv_r et e_r , et l'élément de matrice le nombre de fois que ces deux événements se sont trouvés simultanément dans le signal. On les note : $\text{His}_r(\delta v_r | e_r)$. Ce calcul est reproduit pour plusieurs échelles r , des plus grandes aux plus petites.

Si on représente $\text{His}_r(\delta v_r | e_r)$ non normé en fonction de $\delta v_r / \sigma_r$ pour quelques valeurs de la condition e_r , on constate comme [1] que ces histogrammes ont une allure gaussienne à $r = 100\eta$ (fig. 4.211), mais aussi pour des échelles plus petites (fig. 4.212).

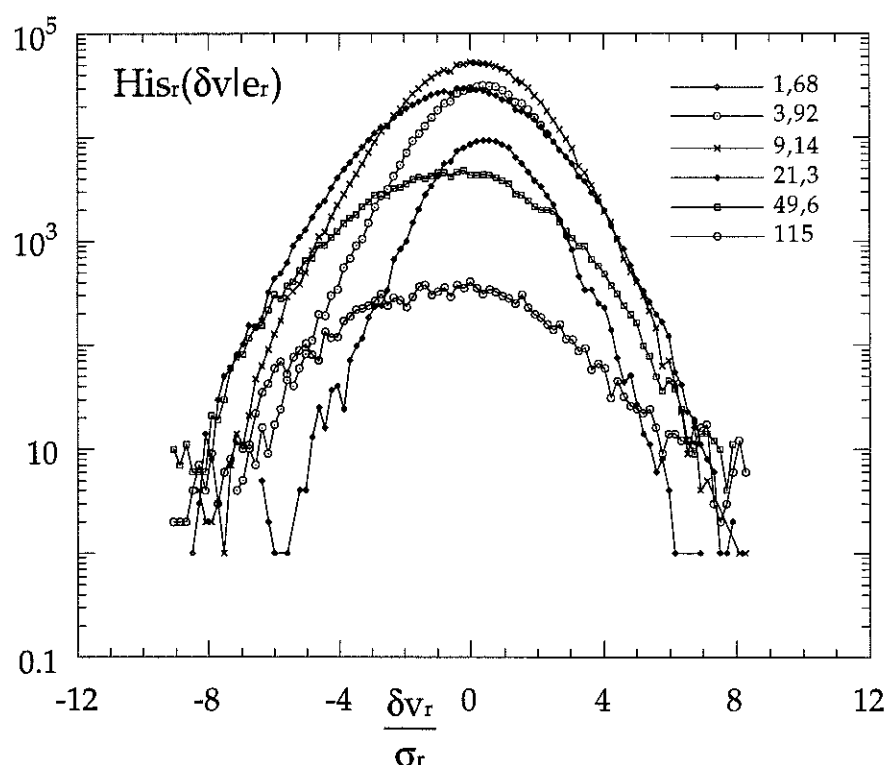


Figure 4.211 : histogrammes des incréments de vitesse à l'échelle $r = 100\eta$ conditionnée à e_r , pour quelques valeurs de e_r exprimées en mW/kg .

L'abscisse de cette figure est l'incrément divisé par l'écart-type de la distribution totale, non conditionnée :

$$\sigma_r = \langle \delta v_r^2 \rangle^{1/2}$$

Une étude des histogrammes de δv_r conditionné non pas à e_r mais à ε_r permet aussi de mettre en évidence des gaussiennes dans la zone d'inertie, mais pas dans la zone de dissipation [3]. La condition e_r est donc plus générale que ε_r puisqu'elle permet une description des histogrammes de δv_r en terme de gaussiennes sur toutes les échelles.

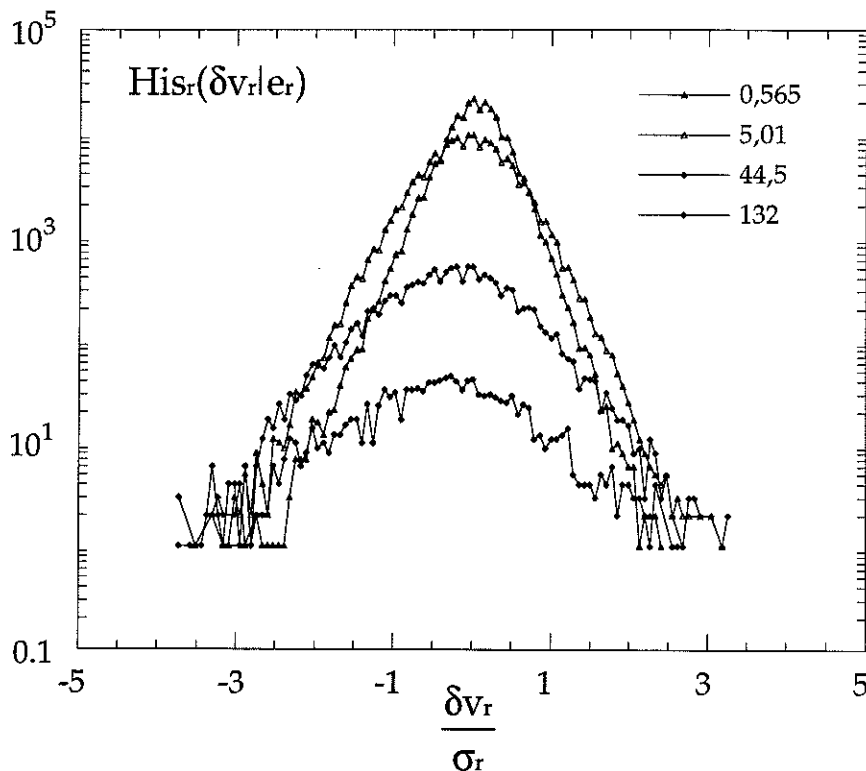


Figure 4.212 : histogramme des incréments de vitesse à l'échelle $r = 10\eta$ conditionnée à e_r , pour quatre valeurs de e_r exprimées en mW/kg.

Sur ces deux figures, nous pouvons constater que les histogrammes conditionnels ne sont pas centrés. Les plus étroits, correspondant aux plus faibles valeurs de e_r ont des moyennes positives alors que les plus larges ont des moyennes négatives. La somme a bien entendu une moyenne nulle.

Les histogrammes conditionnels sont-ils exactement gaussiens ou bien légèrement dissymétriques comme P_L ? Dans le premier cas, le décalage observé est la seule cause de la dissymétrie de l'histogramme des incréments, la brique élémentaire est gaussienne. Dans le second cas, il y a combinaison des deux causes.

Ainsi, ces histogrammes contiennent des informations importantes sur le processus de cascade. Ils nous donnent en plus quelques éléments pour contrôler notre méthode d'analyse des incréments de vitesse.

Dérivées

Dans cette étude, nous avons calculé toutes les dérivées du signal grâce à la vitesse locale, et non la vitesse moyenne :

$$\frac{d}{dx} = \frac{dt}{dx} \frac{d}{dt} = \frac{1}{v(x)} \frac{d}{dt}$$

Il serait indifférent d'utiliser $v(x)$ ou $\langle v \rangle$ si l'hypothèse de Taylor était correctement vérifiée, mais nous verrons au paragraphe suivant que le calcul de dérivée est sensiblement affecté avec un taux de turbulence de 25 %.

Bruit de digitalisation du signal

Nous avons tenté d'estimer la valeur de e_r en deçà de laquelle nous sommes gênés par la discrétisation du signal. Le signal est codé sur douze bits entre 0 et sa valeur maximale v_m . Ainsi, si on suppose une loi d'étalonnage linéaire, la résolution sur la vitesse est de l'ordre de :

$$\Delta v = \frac{v_m}{2^{12}}$$

Lors du calcul de la dérivée, le pas est :

$$\begin{aligned} dx &= \langle v \rangle dt \\ &= \frac{\langle v \rangle}{f} di \end{aligned}$$

où di est le nombre de pas d'échantillonnage utilisé pour ce calcul. Ainsi, la résolution sur e_r est :

$$\Delta e_r \approx 15 v \left(\frac{f v_m}{\langle v \rangle di 2^{12}} \right)^2$$

Ainsi, pour $Re = 20\,000$, cette estimation nous donne :

$$\Delta e_r \approx 0,4 \text{ mW/kg}$$

En effet, les résultats obtenus pour des condition e_r inférieures à cette valeur sont erratiques.

4.22 UNE RELATION ENTRE e_r ET σ

Que peut-on dire a priori sur la relation entre e_r et σ ?

On définit σ comme l'écart-type de l'histogramme conditionnel :

$$\sigma^2 = \langle \delta v^2 | e_r \rangle - \langle \delta v | e_r \rangle^2$$

La plus simple relation entre e_r , σ , et r est, d'après les dimensions de ces grandeurs :

$$e_r \propto \frac{\sigma^3}{r}$$

Par ailleurs, une telle relation n'est pas sans rappeler l'équation de Kolmogorov:

$$\langle \varepsilon \rangle = -\frac{4}{5} \frac{\langle \delta v^3 \rangle}{r}$$

Nous avons tracé sur la figure 4.221 l'écart-type σ en fonction de la condition e_r pour plusieurs échelles r :

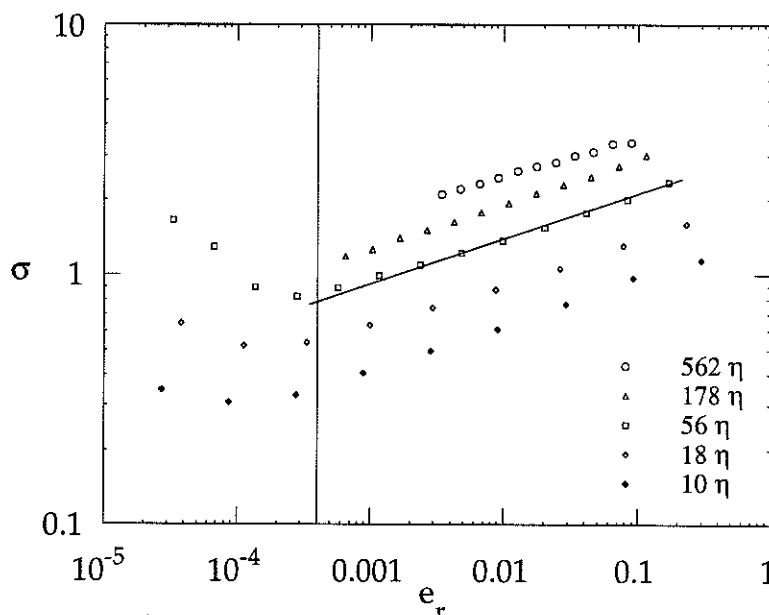


Figure 4.221 : L'écart-type σ de l'histogramme conditionné est ici tracé en fonction de la condition e_r , pour plusieurs échelles. Le trait vertical représente la limite de résolution de e_r . L'échantillon comprend 10^7 points.

On remarque un décrochement pour les faibles valeurs de e_r que nous attribuons à la digitalisation du signal.

La droite représente une loi de puissance d'exposant 6 qui semble bien décrire nos résultats dans une large gamme d'échelles.

Une fois écartés les points à faible e_r , nous calculons σ^6/e_r pour plusieurs échelles afin de mettre en évidence la dépendance en r (figure 4.222) :

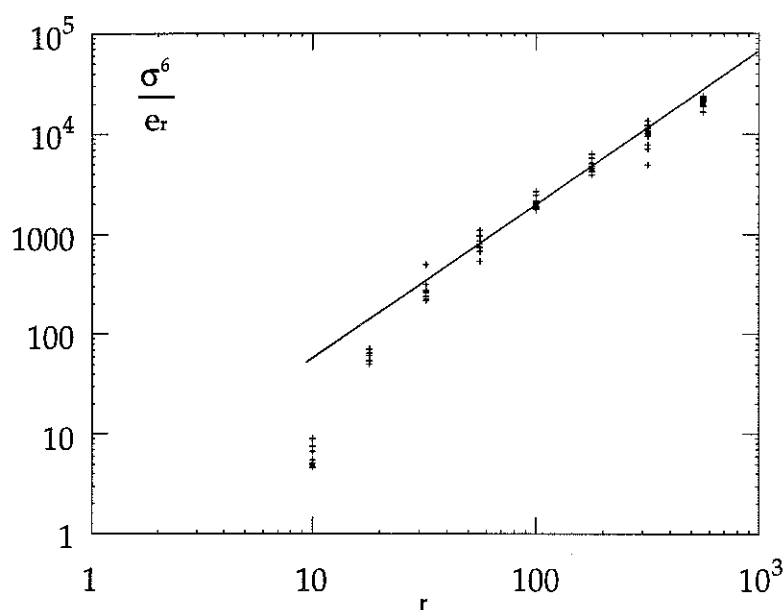


Figure 4.222 : σ^6/e_r pour quelques échelles r .

Sur cette figure, la droite représente une loi de puissance d'exposant $3/2$. On voit que l'évolution avec l'échelle n'est pas définie de manière très précise. Il semble donc que, sauf aux petites échelles, la relation entre e_r et σ soit :

$$e_r = K \frac{\sigma^6}{r^{3/2}}$$

Cette relation est à première vue en désaccord avec celle obtenue dans [1] :

$$e_r \propto \frac{\sigma^3}{r}$$

Mais si on retrace σ en fonction de $(e_r r)^{1/3}$ sur des axes linéaires, on trouve au contraire des courbes comparables (voir figure 4.223, à comparer à la figure 4.224 empruntée à [1]). La dépendance en σ^6 de e_r n'est donc pas contradictoire avec leur résultat.

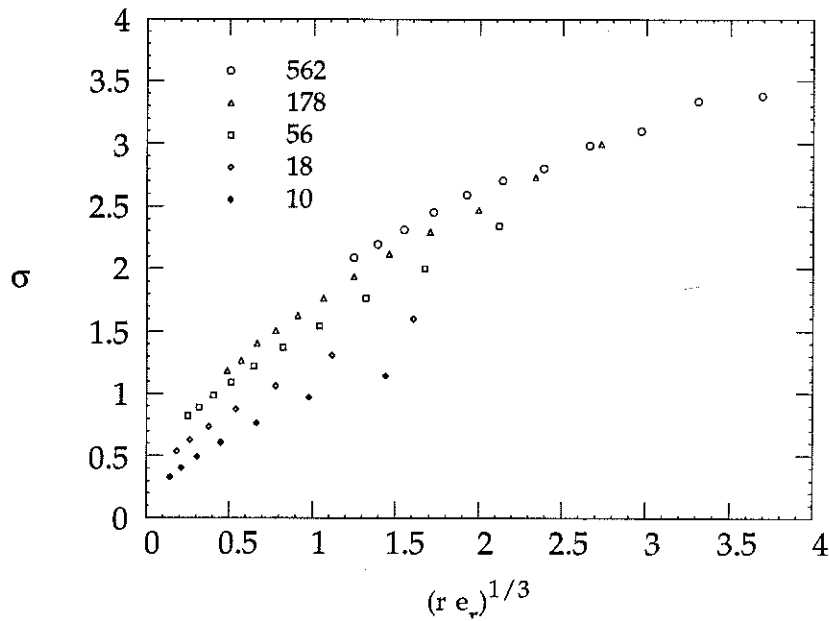


Figure 4.223 : σ est tracé dans des échelles linéaires, en fonction $(r e_r)^{1/3}$. Les unités sont ici des m^2s^{-3} , donc différentes de celles choisies dans [1] et [3]. En revanche, la pente moyenne est comparable.

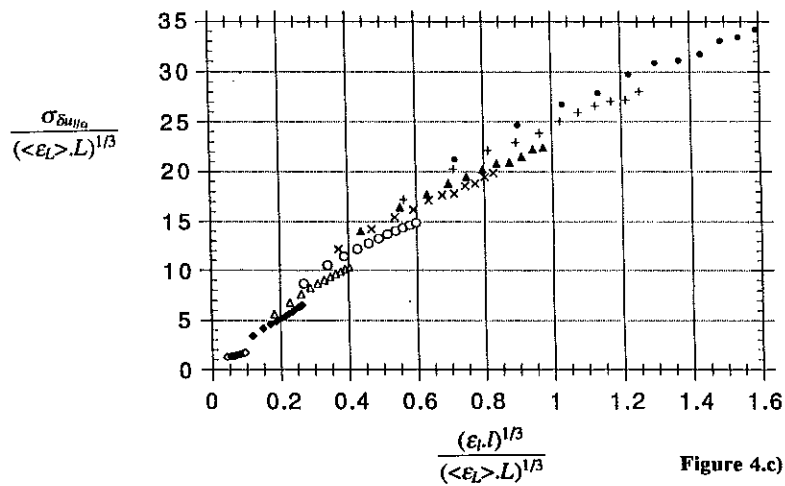


Figure 4.c)

Figure 4.224 : Il s'agit de la figure 4.c) de [1]. σ est tracé dans des échelles linéaires en fonction $(r e_r)^{1/3}$. Abscisse et ordonnée sont sans dimension. La mesure a été faite dans un jet d'air, à $R\theta = 428$. Les échelles représentées vont de $1,5\eta$ à 240η .

Cet exposant 6 n'en est pas moins surprenant : cette relation impose que le préfacteur K soit dimensionné. Il sera nécessaire de reproduire le même calcul pour des mesures effectuées à d'autres Reynolds, à d'autres viscosités, afin de préciser ce préfacteur.

Nous venons d'examiner le comportement de l'écart-type σ , mais beaucoup d'informations sont encore contenues dans les autres moments de ces histogrammes conditionnels.

Moyenne

Nous avons remarqué, en observant la figure 4.211 que les gaussiennes qui constituent la densité de probabilité de δv_r ne sont pas toutes centrées sur zéro. Elles sont pour les grands e_r (donc pour les grands écart-types σ) décalées vers les δv_r négatifs, et pour les petits e_r , vers les δv_r positifs.

La figure 2.225 montre la moyenne $\langle \delta v_r | e_r \rangle$ en fonction de σ pour quelques échelles :

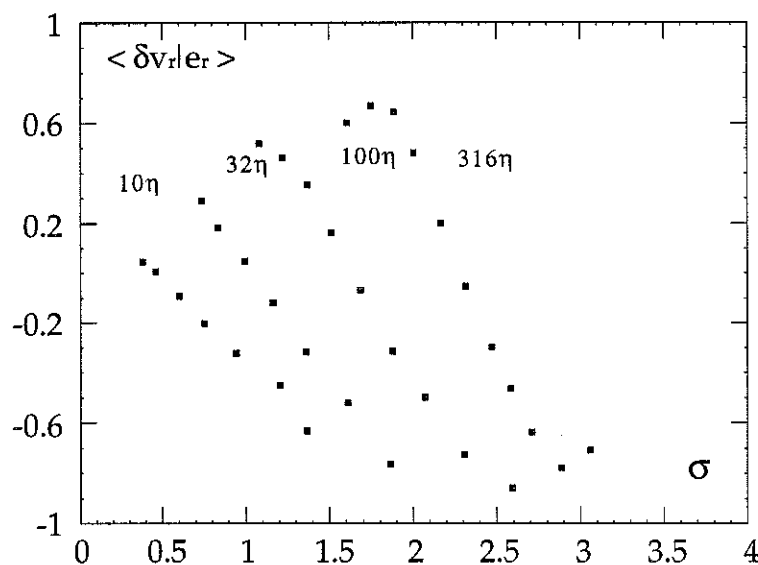


Figure 4.225 : La moyenne de δv_r à e_r fixé en fonction de l'écart-type σ pour $r=316\eta, 100\eta, 32\eta, 10\eta$.

Ici, nous observons que la pente dépend de l'échelle. Elle est d'autant plus forte que l'échelle est grande. Par ailleurs, sauf aux petites échelles, cette pente est beaucoup plus forte que celle observée dans [1].

La question de la valeur de cette pente et de son éventuelle évolution avec l'échelle peut être reliée directement à notre méthode d'analyse en λ^2 des histogrammes. En effet, on avait :

$$\frac{1}{\sigma_r} P_r \left(\frac{\delta v_r}{\sigma_r} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma} G(\ln \sigma) P_L \left(\frac{\delta v}{\sigma} \right) d \ln \sigma$$

avec :

$$P_L \left(\frac{\delta v}{\sigma} \right) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{\delta v^2}{2\sigma^2} \left(1 + a_s \frac{\delta v/\sigma}{(1+(\delta v/\sigma)^2)^{1/2}} \right)}$$

alors :

$$\begin{aligned} \langle \delta v | \sigma \rangle &= \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta v}{\sigma} \frac{1}{\sigma} P_L \left(\frac{\delta v}{\sigma} \right) d \delta v \\ &= \sigma P_1 + \text{constante} \end{aligned}$$

Ainsi, si la forme de P_L n'évolue pas avec l'échelle, son premier moment P_1 doit être une constante. Or les histogrammes conditionnels ne semblent pas évoluer en forme au fil des échelles. Il semble y avoir ici une contradiction que nous n'avons pu lever jusqu'à présent.

Un second problème vient de la valeur trop forte que nous obtenons pour P_1 . La forme de P_L étant caractérisée par le paramètre a_s , une valeur trop forte de P_1 demande des valeurs de a_s qui ne permettent plus un ajustement aussi bon de l'histogramme (voir figure 3.122).

Troisième moment

Plutôt qu'au moment d'ordre trois, on s'intéresse au coefficient de torsion (skewness) des histogrammes conditionnels :

$$S = \frac{\langle (\delta v - \langle \delta v | e \rangle)^3 | e \rangle}{\sigma^{3/2}}$$

La valeur de ce coefficient observée pour P_L est de l'ordre de -0,25. Sur la figure 4.226, on peut constater que mises à part pour les valeurs extrêmes de σ , S est approximativement constante à une valeur proche de -0,1, c'est à dire un peu plus faible. Les histogrammes conditionnels semblent donc être plus gaussiens que la distribution à grande échelle. Cependant, le bruit ne permet pas de décider de manière définitive si les histogrammes conditionnels sont gaussiens ou non.

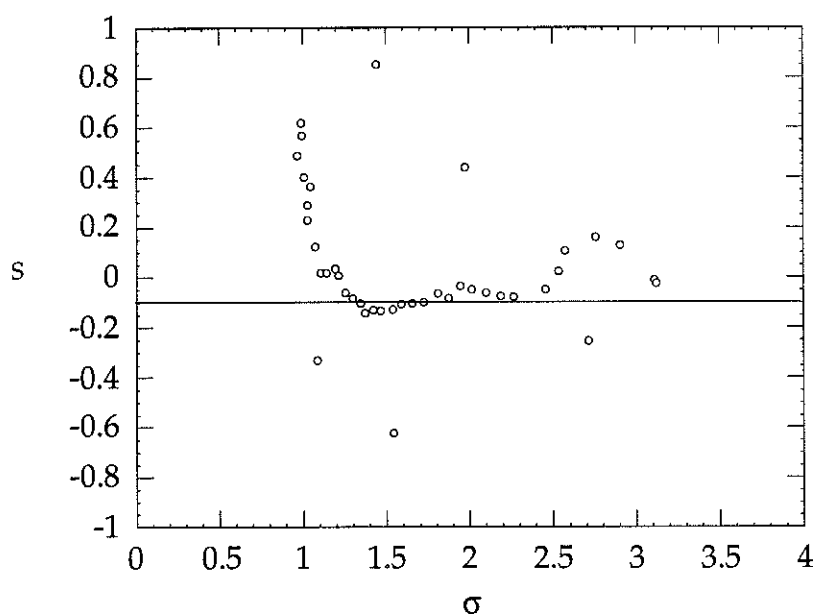


Figure 4.226 : Le coefficient de torsion des histogrammes conditionnels pour $r = 100 \eta$ en fonction de l'écart-type σ ($Re = 20\,000$)

Quatrième moment

Au moment d'ordre quatre, nous préférons encore le coefficient d'aplatissement (flatness) :

$$F = \frac{\langle (\delta v - \langle \delta v | e \rangle)^4 | e \rangle}{\sigma^2}$$

Le calcul montre (figure 4.227) que F est proche de la valeur qu'il aurait pour une gaussienne, $F=3$.

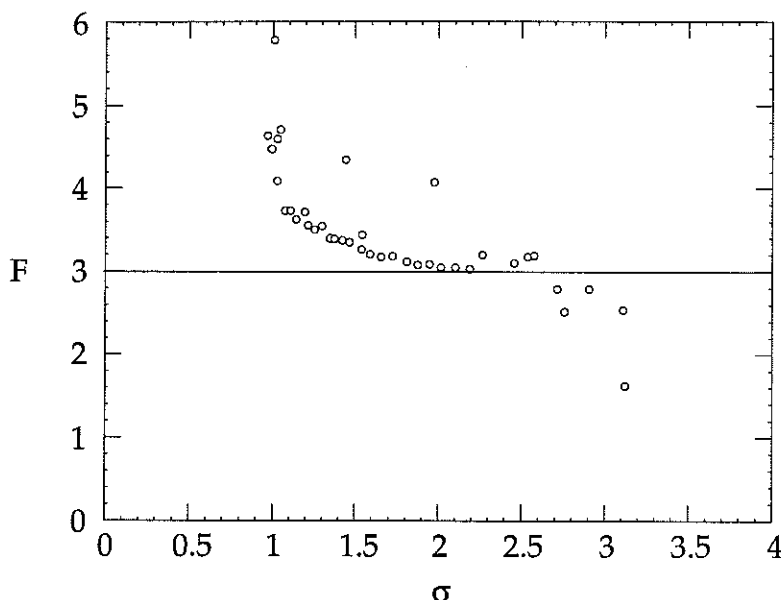


Figure 4.227 : Le coefficient d'aplatissement des histogrammes conditionnels pour $r = 100 \eta$ en fonction de l'écart-type σ ($Re = 20\,000$).

Il semble donc que les distributions $P_r(\delta v_r | e_r)$ isolées par la condition e_r ont toutes la même forme gaussienne, ou quasi-gaussienne s'il s'agit de la distribution à grande échelle $P_L(\delta v_L)$.

La condition e_r qui sélectionne ces distributions élémentaires est de plus reliée de manière simple, par une loi de puissance, à leur écart-type σ . Ainsi il est justifié de représenter comme on l'a fait en 3.2 les histogrammes de δv_r par une combinaison linéaire de P_L distribués suivant leurs écart-types σ . La condition e_r , proposée dans [2] permet d'isoler et de caractériser des briques élémentaires de la turbulence.

4.23 DENSITE DE PROBABILITE DE e_r

Le calcul des histogrammes conditionnels $P_r(\delta v_r | e_r)$ permet aussi d'évaluer facilement le poids statistique de chaque valeur de e_r :

$$G_{er}(e_r) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_r(\delta v_r | e_r) d\delta v_r$$

que l'on préfère exprimer en variable logarithmique :

$$G(\ln e_r) = e_r G_{er}(e_r)$$

L'histogramme expérimental correspondant est tracé sur la figure 4.231 pour une échelle $r=100\eta$. Nous avons noté par un trait vertical la limite de résolution évoquée en 4.21 : 0,4 mW/kg.

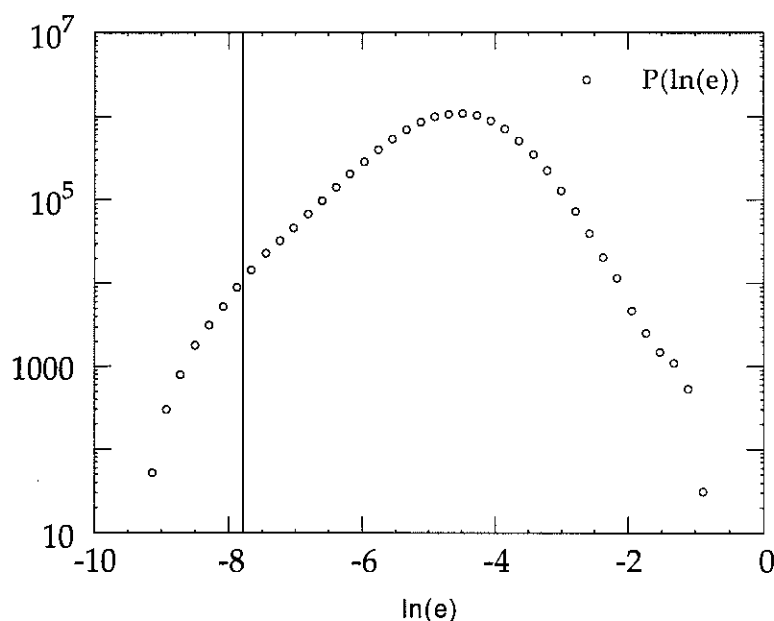


Figure 4.231 : La densité de probabilité de $\ln e_r$ pour $r = 100 \eta$, $Re = 20\,000$.

Pour l'étude de la forme de $G(\ln e_r)$, il a été utile de sélectionner 50 valeurs de la condition e_r (et non seulement 20 comme dans l'étude de la forme de $His_r(\delta v_r | e_r)$). Les conditions sont toujours réparties logarithmiquement entre leurs extrêmes.

σ et e_r étant liés par une loi de puissance, la statistique de e_r est semblable à celle de σ . Si on exclut les points à gauche de la ligne verticale, hors de la limite de résolution, l'histogramme tracé sur la figure 4.231 présente encore une légère dissymétrie, une zone plate pour les faibles valeurs de $\ln e_r$. Cette dissymétrie est incompatible avec une distribution gaussienne. Il serait cependant nécessaire de mieux contrôler ce résultat, et en particulier de préciser les barres d'erreur pour exclure une distribution log-normale de e_r et donc de σ .

Comment ces histogrammes évoluent-ils avec l'échelle r ?

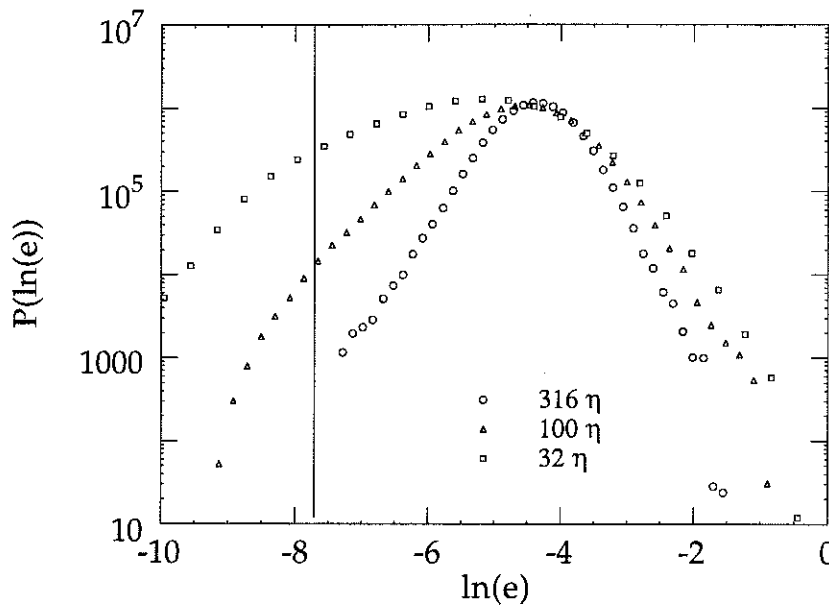


Figure 4.232 : La densité de probabilité de $\ln e_r$ pour $r = 316, 100, 32\eta$

Sur la figure 4.233, nous avons tracé le second moment de $\ln e_r$ en fonction de l'échelle r . La droite tracée représente la loi de puissance qui décrit le mieux ces points.

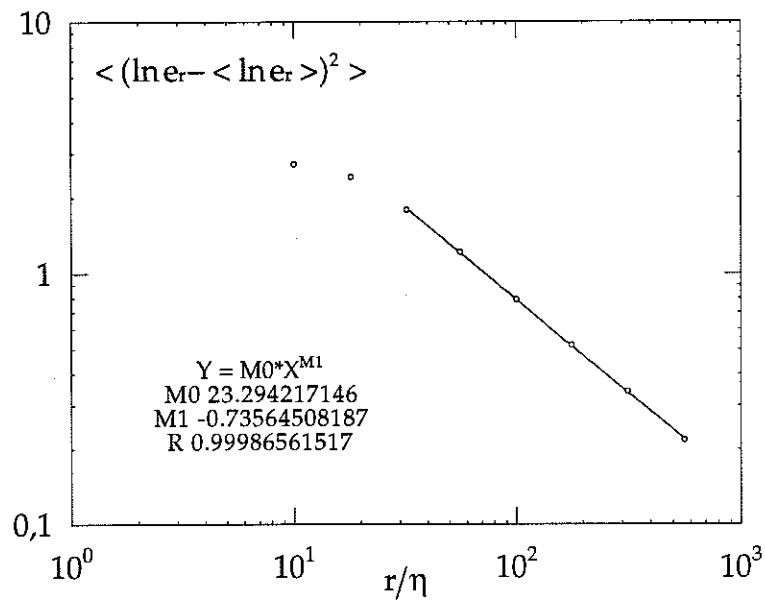


Figure 4.233: Le second moment de $\ln e_r$ en fonction de l'échelle r/η

Sur la figure 4.234, nous avons porté la variance de $\ln e_r$ que nous venons d'obtenir et la profondeur de la cascade λ^2 en fonction de l'échelle. Celle-ci a été définie en 3.1 comme la variance de $\ln \sigma$.

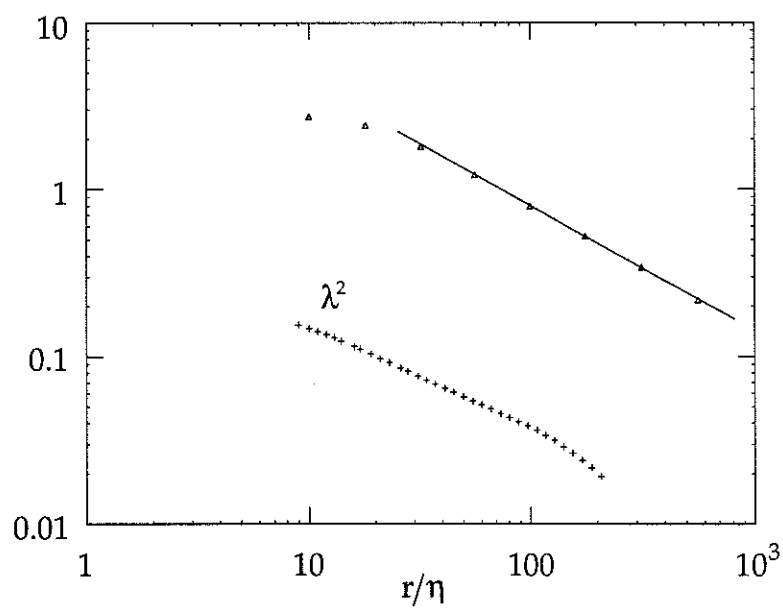


Figure 4.234: Le second moment de $\ln e_r$ en fonction de l'échelle r/η , et la profondeur de la cascade λ^2 pour $Re = 20\,000$.

La loi de puissance entre les deux variables e_r et σ voudrait que nous trouvions pour les deux grandeurs le même exposant. Ce n'est pas tout à fait le cas : l'exposant de la variance de $\ln e_r$ est 0,74 alors que celui de λ^2 était $\beta = 0,61$.

Il sera nécessaire pour affiner une telle étude de mieux contrôler les erreurs numériques et expérimentales. En particulier, le bruit de digitalisation sensible aux faibles valeurs de e_r peut, on l'a vu (fig. 4.231), élargir les histogrammes et ainsi en augmentant artificiellement la variance aux petites échelles expliquer ce désaccord.

Cette étude a permis de montrer qu'il existe une relation entre la condition e_r et l'écart-type σ des probabilités conditionnelles. Cette relation n'est pas encore entièrement comprise. Il faudra maintenant pour aller plus loin augmenter la résolution du signal, peut-être par une acquisition des données sur 16 bits.

On peut espérer obtenir de manière fiable l'histogramme de $\ln(e_r)$, et donner ainsi une contribution expérimentale directe au débat sur la forme de la densité de probabilité $G(\ln \sigma)$.

4.24 UNE AUTRE MANIERE DE VOIR LA RELATION ENTRE e_r ET σ ?

Nous avons vu plus haut que la dissymétrie de l'histogramme de δv était liée au transfert d'énergie dans la cascade. Il serait important de comprendre de quelle manière cette dissymétrie apparaît. Nous avons constaté que les histogrammes conditionnels sont quasi-gaussiens et sont décalés les uns par rapport aux autres. Imaginons qu'ils soient gaussiens.

La dissymétrie est alors seulement due à ce décalage. Que peut-on dire dans ce cas de la relation entre le troisième moment de cette gaussienne non-centrée (qui peut changer de signe) et la condition e_r ?

Ce troisième moment serait égal à :

$$\begin{aligned} \langle \delta v^3 | e \rangle &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta v + \delta v_0)^3 \exp\left(-\frac{\delta v^2}{2\sigma^2}\right) d\delta v \\ &= + \frac{3 \delta v_0}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta v^2 \exp\left(-\frac{\delta v^2}{2\sigma^2}\right) d\delta v + \delta v_0^3 \\ &= 3 \delta v_0 \sigma^2 + \delta v_0^3 \end{aligned}$$

Nous avons observé sur la figure 4.225 une relation entre δv_0 et σ que nous assimilerons à :

$$\delta v_0 = a - b\sigma$$

Le troisième moment s'écrit alors comme un polynôme d'ordre 3 en σ :

$$-\langle \delta v^3 | e \rangle = b(3 + b^2)\sigma^3 - 3a(1 - b^2)\sigma^2 + 3a^2b\sigma - a^3 \quad (1)$$

Les coefficients a et b donnés par la figure 4.225 permettent-ils de retrouver entre ce troisième moment et la condition e_r une "relation de Kolmogorov conditionnelle" ?

$$e_r r = -\alpha \langle \delta v^3 | e_r \rangle \quad (2)$$

Nous avons tracé sur la figure 4.24 $e_r r$ en fonction de σ pour $Re = 20\,000$ et $r = 100 \eta$. La courbe continue représente à un facteur α près le troisième moment conditionné obtenu d'après la formule (1) pour les coefficients :

$$a = 1,55 \quad \text{et} \quad b = 1$$

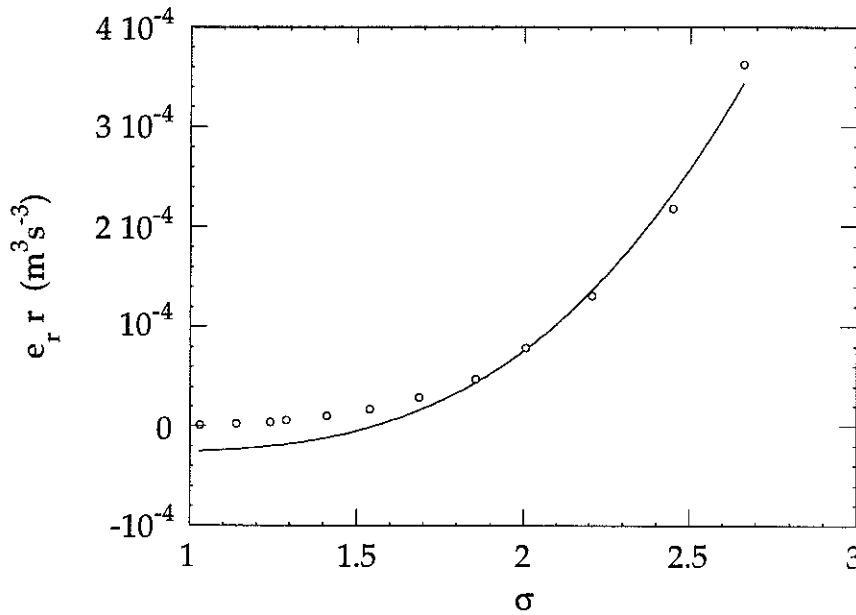


figure 4.24 : Les points représentent re_r (en m^3s^{-3}) exprimé en fonction de σ pour $Re = 20\,000$ et $r = 100\,\eta$. Le trait continu montre à un facteur α près le polynôme (1) calculé avec $a=1,55$ et $b=1$ (exprimé lui aussi en m^3s^{-3}). Le facteur $\alpha = 0,44$ permet d'ajuster au mieux la courbe aux points expérimentaux.

On constate un bon accord entre cette courbe et les points expérimentaux pour les grandes valeurs de la condition e_r . Nous trouvons donc pour les probabilités conditionnelles une relation à la Kolmogorov entre la condition e_r et $\langle \delta v^3 | e_r \rangle$ au lieu de σ^3 . Toutefois, la valeur $\alpha = 0,44$ ne coïncide pas avec le $5/4$ de la relation de Kolmogorov.

Pour les plus faibles valeurs de σ , on note un désaccord : le troisième moment change de signe alors que e_r , par construction, reste positif.

Ce désaccord suggère que la variable e_r n'est pas la bonne condition pour ces faibles valeurs. On peut rapprocher ceci des grandes valeurs observés à petit e_r pour les coefficients de torsion et d'aplatissement (fig. 4.226 et 4.227) et de la déformation de la moyenne à grande échelle (fig. 4.225).

En particulier, on sait que e_r ne peut être que positif, alors que rien n'empêche, localement, le taux de transfert d'être négatif (remontée d'énergie vers les grandes échelles).

On note que dans un tel cas, aucune des distributions log-normale, log-binomiale ou log-poisson ne peut correctement représenter la statistique du taux de transfert.

4.3 LE TRAITEMENT DE POPE ET CHING

Comme dans le paragraphe 4.2, tous les calculs présentés ici portent sur une mesure à $Re = 20\,000$.

4.31 GENERALITES

Un théorème dû à Pope et Ching [4] concernant les processus aléatoires stationnaires pourrait permettre, en introduisant de nouvelles grandeurs à mesurer ou à calculer, de porter un regard un peu différent sur la turbulence.

Considérons un processus aléatoire $v(x)$ (ici, par exemple le champ spatial de vitesse) tel que :

$$\begin{cases} \langle v \rangle = 0 \\ \langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle = 1 \end{cases}$$

Il est toujours possible de se ramener par une normalisation adéquate à ces propriétés, à condition toutefois que :

- la variance du processus soit finie
- la densité de probabilité de v soit indépendante de la variable x , au moins en forme.

Si on calcule à l'aide des histogrammes conditionnels les fonctions suivantes ($\dot{v}$ note la dérivée de v par rapport à x)

$$\begin{cases} q(v) = \frac{\langle \dot{v}^2 | v \rangle}{\langle \dot{v}^2 \rangle} \\ r(v) = \frac{\langle \ddot{v} | v \rangle}{\langle \dot{v}^2 \rangle} \end{cases}$$

on peut montrer qu'elles sont reliées à la densité de probabilité $P(v)$ par la relation :

$$P(v) = \frac{1}{q(v)} \exp \int_{v_0}^v \frac{r(v')}{q(v')} dv'$$

où v_0 est tel que $P(v)$ soit normée.

Si v représente la vitesse, quel sens physique donner à ces deux fonctions q et r ?

On peut reconnaître dans la première, q , la dissipation locale moyenne à vitesse fixée, divisée par la dissipation moyenne. Un cas particulièrement simple est celui pour lequel $q(v) = 1$. La dissipation est alors complètement découplée de la vitesse.

La signification de r est moins directe. On peut comprendre cette fonction comme une "force de rappel" : lors d'une forte excursion, par exemple positive de la vitesse, une valeur négative de $r(v)$ tend à favoriser le retour à des vitesses plus modérées. La situation $r(v) = -v$ est simplement celle pour laquelle la "force de rappel" est proportionnelle à l'écart à la moyenne.

On note que les comportements les plus simples que nous venons d'évoquer pour les fonctions q et r :

$$\begin{cases} q(v) = 1 \\ r(v) = -v \end{cases}$$

permettent de reconstruire par la formule de Pope et Ching une statistique gaussienne de la variable v .

Mais si la donnée des deux fonctions q et r permet de calculer la densité de probabilité du processus, l'inverse est impossible. En effet, elles contiennent à elles deux plus d'informations sur le signal original que $P(v)$. Les fonctions q et r décrivent la dynamique du processus, alors que P n'en décrit que la statistique.

En faisant intervenir les deux premières dérivées de v , les fonctions q et r décrivent quelle sera plus volontier la vitesse au voisinage d'un point d'abscisse x lorsque la vitesse est connue en ce point. Le voisinage, dans le cas présent s'étend approximativement jusqu'à la distance η , l'échelle visqueuse de Kolmogorov.

Les fonctions de Pope et Ching calculées à partir de la vitesse permettent de caractériser la statistique des mouvements relatifs des particules fluides à la plus petite échelle. Or nous avons vu au chapitre 1 que les incréments δv_r du champ de vitesse permettaient de rendre compte des mouvements relatifs entre particules fluides à chaque échelle r .

Les fonctions q et r de Pope et Ching calculées à partir de la vitesse semblent donc contenir en substance des informations sur la forme limite de la densité de probabilité de l'incrément à petite échelle : la statistique du gradient de vitesse.

Si une telle relation est montrée, il peut être intéressant de connaître la forme de ces fonctions de la vitesse.

4.32 SIGNAL DE VITESSE

Nous avons évalué les deux fonctions de Pope et Ching pour le signal de vitesse. Pour ce faire, nous avons centré la vitesse en calculant sa valeur moyenne puis avons normé sa variance à un :

$$v \longrightarrow \frac{v - \langle v \rangle}{\langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle^{1/2}}$$

Nous avons tout d'abord calculé les dérivées nécessaires en supposant l'hypothèse de Taylor vérifiée. Il s'agit alors simplement de la dérivée du signal par rapport au temps d'enregistrement.

Dans toute cette étude, les résultats présentés ont été tirés d'un échantillon de signal de 10^7 points enregistré à $Re = 20\,000$. La dérivée discrète est calculée sur un pas de 2η .

On voit sur les figures 4.321 et 4.322 le résultat de ce calcul. On ne remarque pas de formes simples pour r et q . Nous avons tout d'abord été surpris de tirer d'un signal supposé gaussien des fonctions aussi dissymétriques.

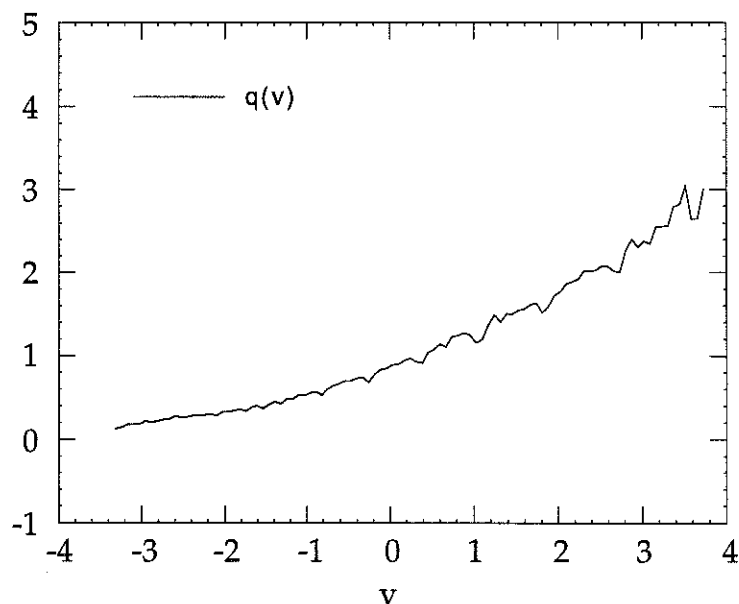


figure 4.321 : La fonction q de Pope et Ching calculée après normalisation, pour le signal temporel de vitesse enregistré dans le jet cryogénique à un Reynolds de 20 000. L'échantillon comprend 10^7 points.

Nous avons bien par contre :

$$\frac{r(v)}{q(v)} \sim -v$$

On note un fort bruit sur $r(v)$, probablement d'origine numérique (ce calcul met en jeu une dérivée seconde du signal). Nous n'avons pas pu, jusqu'à présent comprendre ce défaut et améliorer la qualité de cette fonction

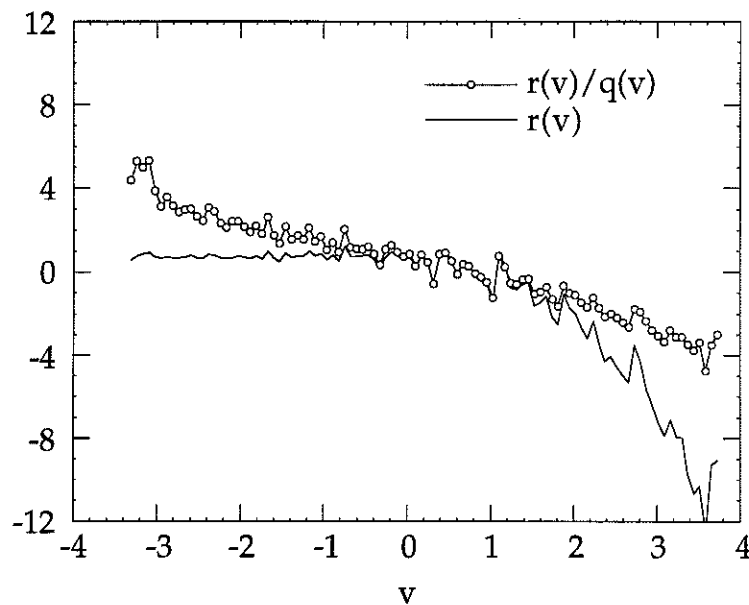


figure 4.322 : La fonction r de Pope et Ching ainsi que le rapport r/q calculés après normalisation, pour le signal temporel de vitesse enregistré dans le jet cryogénique à un Reynolds de 20 000. L'échantillon comprend 10^7 points.

La relation de Pope et Ching est exacte pour un processus stationnaire comme l'est le signal de vitesse. La qualité de la reconstruction de l'histogramme par cette relation (voir figure 4.323) permet donc de contrôler la fiabilité du programme.

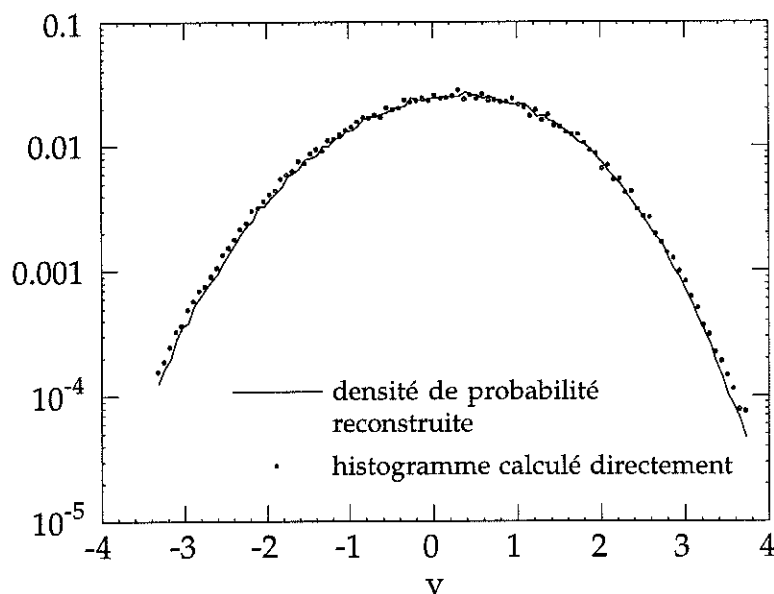


figure 4.323 : L'histogramme reconstitué par la formule de Pope et Ching comparé à l'histogramme calculé directement pour la même mesure.

Nous avons repris le même calcul en évaluant cette fois-ci comme au paragraphe 4.2 la dérivée spatiale de la vitesse :

$$\frac{d}{dx} = \frac{dt}{dx} \frac{d}{dt} = \frac{1}{v(x)} \frac{d}{dt}$$

En effet, lorsque le taux de turbulence n'est pas très petit (ici il peut atteindre 25 %), l'hypothèse de Taylor de la "turbulence gelée" est-elle encore acceptable, le signal temporel enregistré décrit-il encore correctement le champ spatial de vitesse ?

Ce procédé permet d'une part de corriger le signal, et d'autre part, par l'importance de la correction d'apprécier la validité de l'hypothèse de Taylor.

On constate sur la figure 4.324 que les fonctions q et r ainsi déterminées sont proches des simples fonctions :

$$\begin{cases} q(v) = 1 \\ r(v) = -v \end{cases}$$

dont nous avons remarqué qu'elles donnaient par la relation de Pope et Ching une statistique gaussienne.

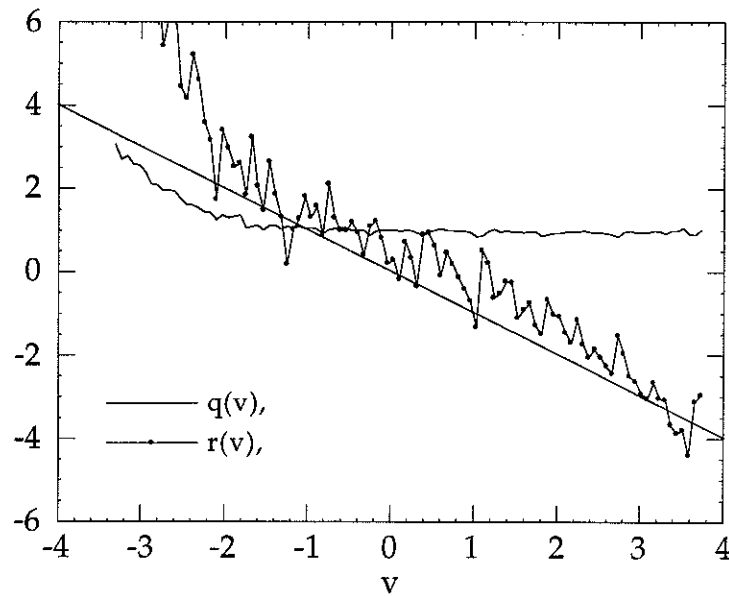


figure 4.324 : Les fonctions r et q de Pope et Ching calculés cette fois avec la dérivée "spatiale" du signal, toujours pour la même mesure.

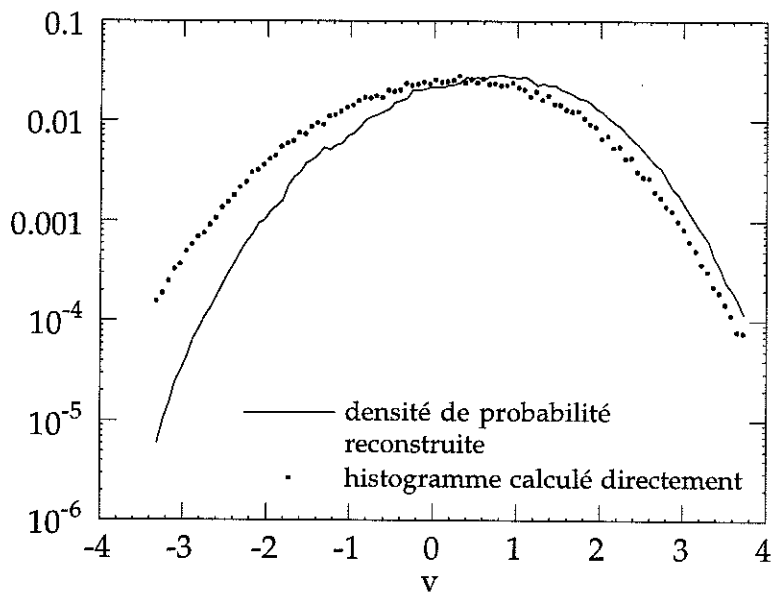


figure 4.325 : L'histogramme reconstitué par la formule de Pope et Ching comparé à l'histogramme calculé directement.

L'histogramme que nous pouvons reconstituer n'a plus une moyenne nulle (voir figure 4.325). Le point remarquable est qu'il est beaucoup plus gaussien qu'avec la dérivée temporelle.

On peut ainsi attribuer la déformation de l'histogramme direct à un défaut de l'hypothèse de Taylor, et non seulement à un manque de sensibilité du fil chaud comme nous l'avons fait pendant longtemps.

De ceci on déduit que c'est le champ spatial de vitesse qui doit être gaussien. Les faibles vitesses sont aussi probables que les fortes vitesses, mais comme les premières défilent plus lentement devant un observateur qui échantillonne toujours à la même fréquence, il en enregistre plus. Un défaut de l'hypothèse de Taylor se traduit donc par un biais sur la vitesse, le signal temporel enregistré ne présente une statistique gaussienne que si l'hypothèse de Taylor est bien vérifiée.

Le changement d'allure des fonctions q et r lorsqu'on corrige la dérivée montre de manière très sensible si l'hypothèse de Taylor est vérifiée ou non (le taux de turbulence est ici de 25 %). Les fonctions de Pope et Ching calculées sur la vitesse sont donc un outil très efficace pour tester la qualité du signal.

4.33 INCREMENTS DE VITESSE

La suite des incréments de vitesse δv_r à une échelle r étant elle aussi stationnaire et de variance finie, nous pouvons lui appliquer le même traitement qu'à la vitesse. Comme au paragraphe précédent, nous avons effectué parallèlement le calcul avec la dérivée directe, "temporelle", et avec la dérivée "spatiale", après avoir normé la variance de δv à 1.

Examinons dans un premier temps une seule échelle $r = 100\eta$ appartenant à la gamme d'inertie. Le calcul des fonctions q et r (fig. 4.331) permet de reconstruire l'histogramme des incréments de vitesse et de vérifier que la précision du calcul est satisfaisante (fig. 4.332).

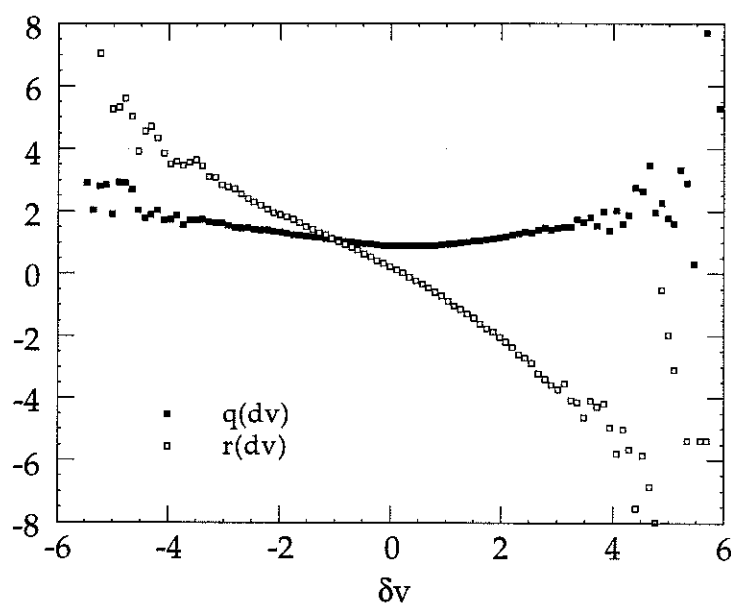


figure 4.331 : Les fonctions q et r de Pope et Ching calculés sur les incréments de vitesse à l'échelle $r = 100\eta$. Les dérivées sont calculées directement, et l'échantillon est de 10^7 points. $Re = 20\,000$.

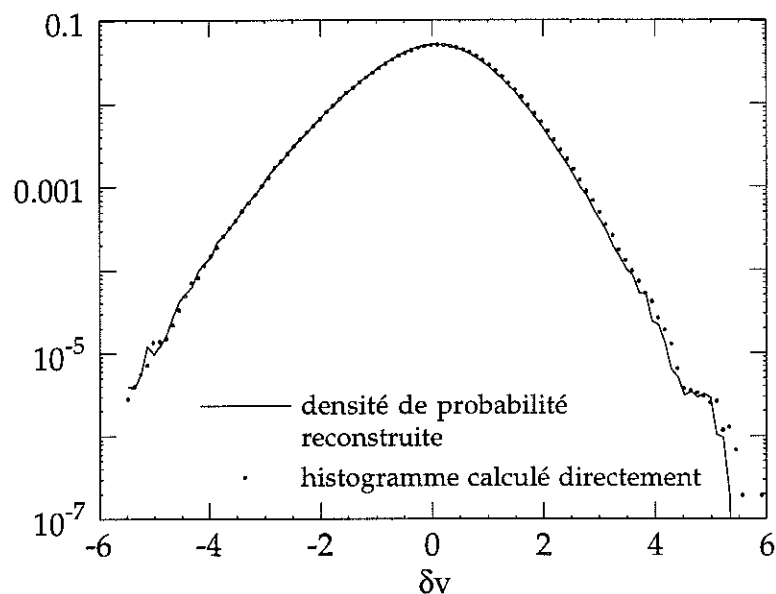


figure 4.332 : histogramme reconstitué par la formule de Pope et Ching (dérivée temporelle) comparé à l'histogramme calculé directement à $r = 100\eta$

Ce calcul a été reproduit sur le même échantillon, à la même échelle avec un programme très proche, mais calculant cette fois-ci la dérivée "spatiale". Nous pouvons en voir les résultats sur les figures 4.333 et 4.334 :

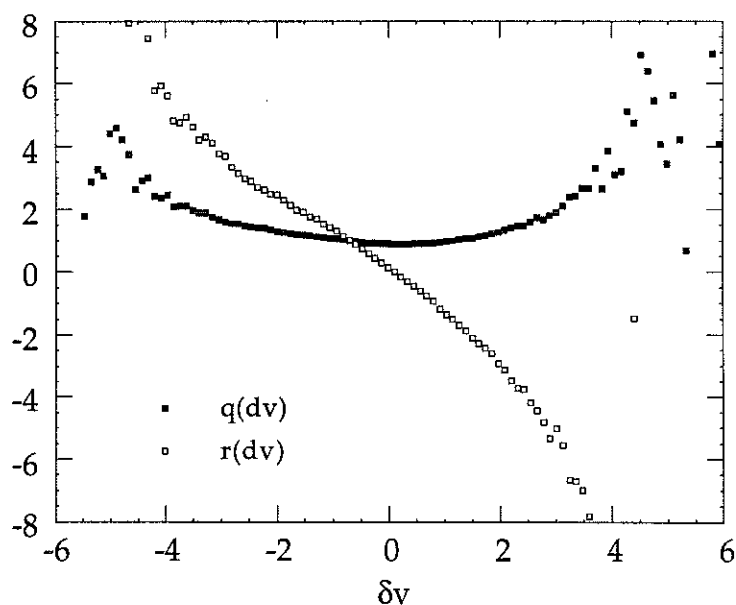


figure 4.333 : Les fonctions r et q calculés sur les incréments de vitesse à l'échelle $r = 100\eta$. (dérivées "spatiales")

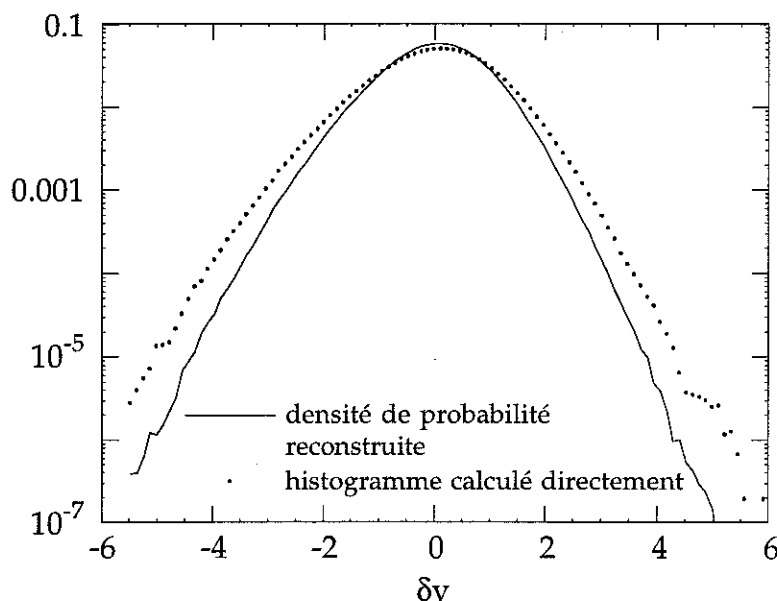


figure 4.334 : histogramme reconstitué par la formule de Pope et Ching (dérivée "spatiale") comparé à l'histogramme calculé directement à $r = 100\eta$

Ces deux histogrammes ont même norme, même moyenne et même variance, mais ils n'ont pas la même forme. Il n'est donc pas indifférent pour les incréments de vitesse de calculer la dérivée du signal avec la vitesse moyenne ou avec la vitesse locale.

Les fonctions q et r n'ont pas dans le cas des incréments de vitesse des formes aussi simples que pour un processus gaussien. On peut toutefois examiner l'évolution de leur forme avec l'échelle (figure 4.335 et 4.336), représentative de l'évolution des histogrammes.

q semble évoluer vers les petites échelles en devenant de plus en plus creuse. A grande échelle, alors que l'histogramme tend à devenir gaussien, q peut tendre vers : $q(\delta v) = 1$.

On remarque un décalage des courbes vers les δv positifs aux petites échelles alors qu'à grande échelle, la fonction q semble être plus centrée.

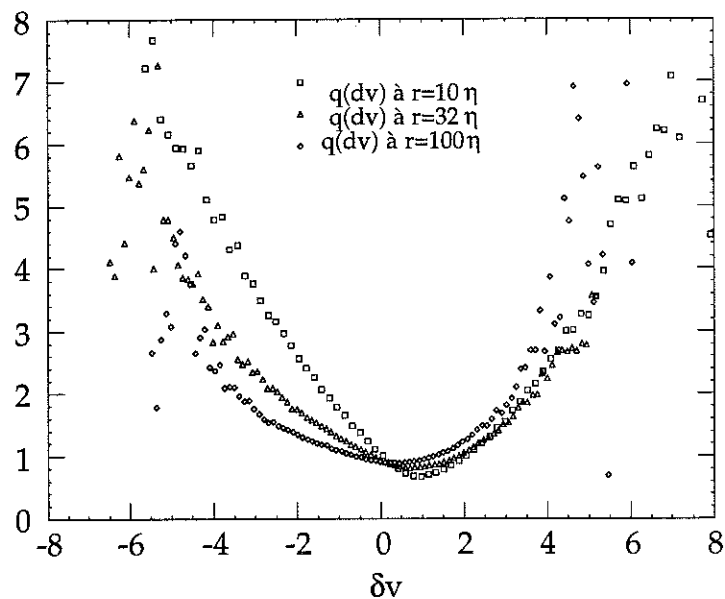


figure 4.335: La fonction q de Pope et Ching calculée sur les incréments de vitesse à plusieurs échelles $r = 100 \eta$, 30η , 10η . Nous avons ici utilisé la dérivée "spatiale".

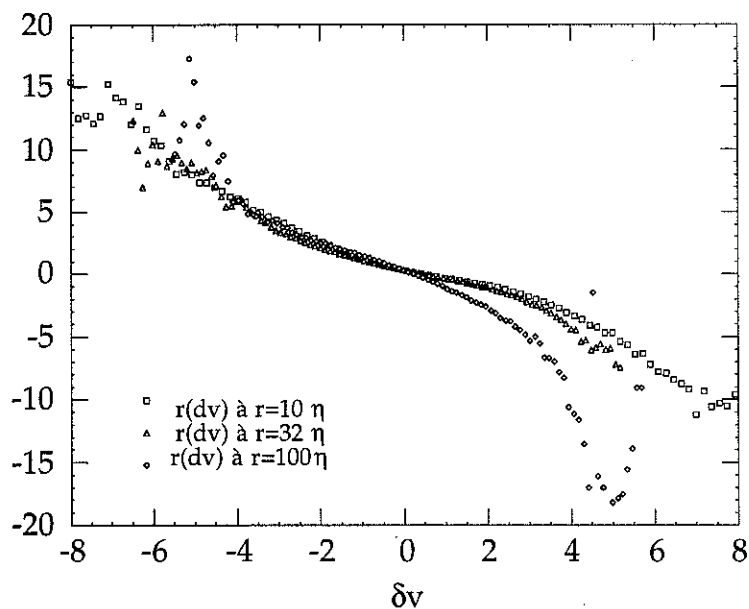


figure 4.336 : La fonction r de Pope et Ching calculée sur les incréments de vitesse à plusieurs échelles $r = 100 \eta$, 30η , 10η . Nous avons ici utilisé la dérivée "spatiale".

Une étude systématique de la forme de q et r en fonction de l'échelle et du nombre de Reynolds comme celle que nous avons présentée au chapitre 3 pour les histogrammes des incréments pourrait être intéressante. Elle le serait d'autant plus si nous pouvions attribuer à chacune de ces deux fonctions un rôle particulier dans la cascade.

Dans ce sens, D. Lohse a proposé une relation entre la fonction $q(\delta v)$ et l'intensité turbulente e_r que nous avons utilisée pour conditionner les histogrammes au paragraphe 4.2. Nous pouvons en effet écrire :

$$\delta \dot{v}_r(x) = \left(\dot{v}(x) - \frac{\delta v_r}{r} \right) - \left(\dot{v}(x+r) - \frac{\delta v_r}{r} \right)$$

si δv_r est le même dans les deux membres. Alors :

$$(\delta \dot{v}_r)^2 = \left(\dot{v}(x) - \frac{\delta v_r}{r} \right)^2 + \left(\dot{v}(x+r) - \frac{\delta v_r}{r} \right)^2 - 2 \left(\dot{v}(x) - \frac{\delta v_r}{r} \right) \left(\dot{v}(x+r) - \frac{\delta v_r}{r} \right)$$

Si on peut supposer les dérivées des vitesses décorréllées pour des distances r assez grandes, et que l'écart quadratique de $\dot{v}$ ne change pas sur une distance r , on a à δv_r fixé :

$$\langle \delta \dot{v}_r^2 | \delta v_r \rangle = \frac{2}{15v} \langle e_r | \delta v_r \rangle$$

car on peut aussi exprimer e_r comme :

$$e_r = 15 v \left\langle \left(\frac{dv}{dx} - \frac{\delta v_r}{r} \right)^2 \right\rangle$$

On voit sur la figure 4.137 que ces deux fonctions de δv_r pour une échelle de la gamme d'inertie : $r = 100 \eta$ sont bien reliées.

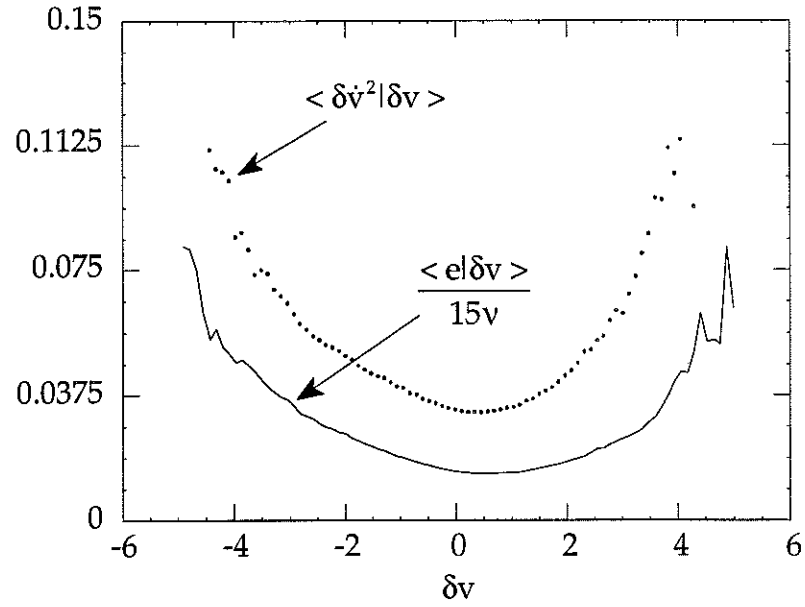


figure 4.337: $\langle \delta \dot{v}_r^2 | \delta v_r \rangle$ et $\langle e_r | \delta v_r \rangle$ en fonction de δv_r . Le calcul est fait à l'échelle $r = 100 \eta$. Les dérivées sont "spatiales".

Afin de bien voir la relation entre ces grandeurs, nous avons tracé $\langle e_r | \delta v_r \rangle / 15v$ en fonction de $\langle \delta \dot{v}_r^2 | \delta v_r \rangle$ sur la figure 4.338.

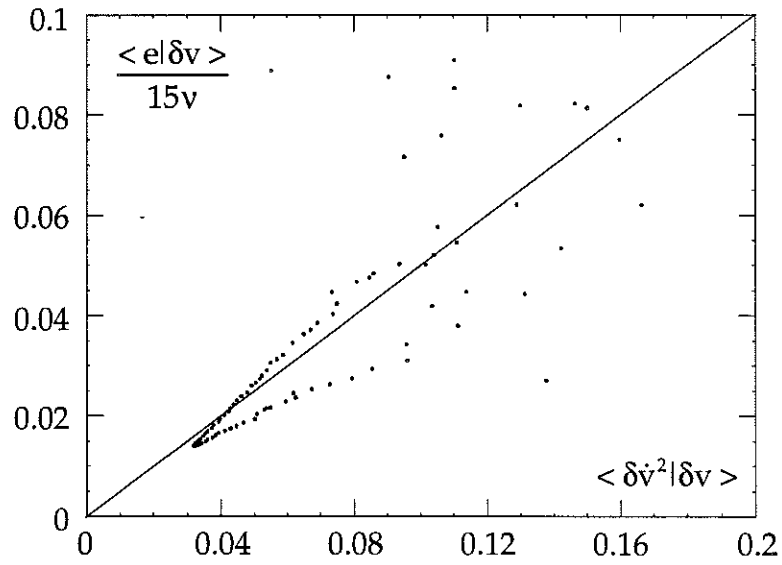


Figure 4.338: $\langle e_r | \delta v_r \rangle / 15v$ en fonction de $\langle \delta \dot{v}_r^2 | \delta v_r \rangle$ et δv_r . Le calcul est fait à l'échelle $r = 100 \eta$. Les dérivées sont "spatiales".

On remarque un dédoublement de la courbe ; la relation semble ne pas être la même pour les δv positifs ou négatifs. La pente sur la figure 4.338 est inférieure à $1/2$ pour les incréments positifs et supérieure à $1/2$ pour les incréments négatifs. Toutefois, les fonctions $\langle e_r | dv_r \rangle$ et $\langle dv_r^2 | dv_r \rangle$ sont bien reliées, et la pente moyenne est approximativement deux.

Nous avons cherché à montrer par ce travail que les fonctions de Pope et Ching pouvaient apporter dans le contexte de la turbulence de nouvelles grandeurs à mesurer, à interpréter.

Pour la vitesse, elles permettent de discuter de manière quantitative la signification d'une mesure faite dans le cadre de l'hypothèse de Taylor, mais surtout hors de ce cadre.

Le calcul de ces fonctions pour les incréments de vitesse est un autre outil pour l'étude de la forme des histogrammes et son évolution en fonction de l'échelle. Peut-on reconnaître des formes universelles dans les $q(\delta v)$ et $r(\delta v)$ des figures 4.335 et 4.336 ? La relation avec une grandeur énergétique est de ce point de vue encourageante.

REFERENCES DU CHAPITRE 4

- [1]: Conditional velocity pdf in 3-D turbulence.
Y. Gagne, M. Marchand, B. Castaing
J. Phys. II France 4 (1994) 1-8

- [2]: R. Benzi, L. Biferale, G. Paladin , A. Vulpiani, M. Vergassola,
Phys. Rev. Lett. 67 (1991) 2299.

- [3]: G. Stolovitsky, P. Kailasnath, K.R. Sreenivasan
Phys. Rev. Lett. 69 (1992) 1178-1181

- [4]: Stationnary probability density functions : an exact result
S. B. Pope and E. S. C. Ching
Phys. Fluids A 5 (7), July 1993

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

La première partie de ce travail a été à dominante expérimentale. Elle s'est orientée dans différentes directions, étroitement liées entre elles et à la mesure du signal :

- caractérisation de l'écoulement par des études dans l'air ou dans l'eau sur une maquette,
- étalonnage de l'anémomètre et mesures.
- mise au point des programmes de traitement des données (analyse des histogrammes et calcul des $R\theta$, ...).

Nous avons accumulé au fil des mois une grande quantité d'informations sur l'expérience comme les bruits acoustiques et électroniques, les pertes du cryostat, les paramètres de la régulation en température, la précision des débitmètres à basse pression, etc... Nous avons surtout acquis le "coup de main" qui permet d'atteindre un régime d'écoulement stationnaire en des temps raisonnables. Nous avons ainsi mis au point une procédure expérimentale qui est une garantie précieuse de la qualité des mesures effectuées.

Nous avons montré que l'"hydrodynamique cryogénique" était actuellement viable et pouvait apporter des éléments nouveaux à la connaissance de la turbulence.

Les histogrammes des incréments de vitesse sont analysés grâce à la grandeur λ^2 que nous avons appelée "profondeur de la cascade". Il s'agit de décrire ces histogrammes parfois fortement non-gaussiens comme une somme de fonctions quasi-gaussiennes distribuées suivant leurs écarts-type. La distribution de ces écarts-type est choisie log-normale en suivant Kolmogorov. λ^2 est la variance de cette distribution log-normale.

Une étude des histogrammes conditionnels montre que la statistique des incréments se décompose effectivement en distributions élémentaires gaussiennes de largeurs différentes. Nous vérifions ainsi l'idée d'Obukhov selon laquelle la turbulence observée est une superposition de régimes "purs". Nous avons montré par ailleurs que la forme de la distribution des écarts-types est presque indifférente, seule compte sa variance. La profondeur de la cascade est donc bien une grandeur physique, indépendante d'un modèle : λ^2 est une mesure de l'intermittence.

Une étude systématique de cette grandeur en fonction de l'échelle, puis du nombre de Reynolds a permis de vérifier une prédiction du modèle variationnel, son évolution en loi de puissance :

$$\lambda^2 \propto (r/\eta)^{-\beta}$$

et l'évolution de l'exposant avec le Reynolds :

$$\beta \propto 1/\ln(\text{Re})$$

La possibilité de faire proprement varier le paramètre de contrôle Re nous a permis de mettre en évidence une transition entre deux régimes hydrodynamiques distincts : turbulence douce et turbulence dure.

Cette dernière se caractérise par l'ouverture entre les grandes et les petites échelles de l'écoulement d'une gamme dans laquelle la profondeur se comporte en loi de puissance. La transition intervient à $\text{Re} \approx 5000$, soit à $\text{R}\theta \approx 160$.

Aux grandes échelles, nos mesures permettent de montrer que λ^2 a un comportement logarithmique en r :

$$\lambda^2 = -\mu \ln(r/L)$$

Cette dépendance était prédite par le modèle de Kolmogorov et Obukhov 62, mais aux petites et non aux grandes échelles.

Cette méthode d'analyse est, on le voit, un outil puissant pour l'étude de l'intermittence, phénomène important du processus de transfert d'énergie entre les échelles.

Un aspect moins voyant, mais certainement important, est la dissymétrie de la statistique des incréments longitudinaux de vitesse. Nous n'avons pas étudié spécifiquement cet aspect de la cascade, qui semble distinct de l'intermittence. L'étude des moments proposée en 3.2 et le décalage des histogrammes conditionnels constaté en 4.2 sont une ouverture dans ce sens qu'il pourrait être intéressant de poursuivre.

La seconde partie de ce travail a donc été consacrée au développement de techniques d'analyse plus originales comme les histogrammes conditionnels, et en particulier l'examen du théorème de Pope et Ching. Il permet dans le contexte de la turbulence un test de la validité de l'hypothèse de Taylor, c'est à dire un contrôle très sensible de la qualité du signal en tant que composante spatiale du champ de vitesse. Il s'agit ici de vérifier à quel point les grandeurs des théories coïncident avec celles que l'on mesure.

Les développements futurs du jet cryogénique sont de plusieurs types :

- Le traitement des mesures présenté ici a montré la limite de résolution de notre système d'acquisition et du détecteur actuel. Il sera nécessaire dans un avenir proche de pouvoir développer un anémomètre plus petit, supportant des courants plus forts, et de passer à une acquisition du signal sur 16 bits.
- Chauffer légèrement une partie du jet, dans la buse, doit permettre grâce à un thermomètre de très petite taille, d'étudier le mélange par la turbulence d'un traceur passif, le gaz chaud.
- Il est également envisagé de déplacer le détecteur dans le jet à l'aide de petits moteurs électriques. Un déplacement vertical faciliterait les opérations d'éta-lonnage et donnerait la possibilité de changer les échelles de l'écoulement à Reynolds fixé, une manière d'adapter l'échelle visqueuse à la taille du détec-teur... Un déplacement radial de l'anémomètre permettrait de sortir du coeur du jet et d'explorer les régimes inhomogènes des bords.

NOTATIONS ADOPTÉES

V : vitesse caractéristique d'un écoulement (dans un jet : vitesse à la buse)

L : taille caractéristique (dans un jet, L = diamètre de la buse)

Re : nombre de Reynolds

Rf : nombre de Reynolds basé sur le diamètre du fil

$R\theta$: nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor

Gr : nombre de Grashof

Pr : nombre de Prandtl

ω_0 : fréquence à laquelle le spectre est minimal

η : échelle de Kolmogorov

L : échelle intégrale

θ : échelle de Taylor

$v(x)$: vitesse au point $x = \langle v \rangle t$

$\delta v_r(x)$: incrément de vitesse

g : accélération de la pesanteur

ρ : densité

ν : viscosité cinématique

$\rho\nu$: viscosité propre

κ : diffusivité thermique

K : conductivité thermique

α : coefficient de dilatation

ΔT : différence de température

$\dot{Q}$: puissance totale injectée dans le fil

$\dot{Q}_{HF}$: puissance haute fréquence injectée dans l'anémomètre

R_{det} : résistance du fil (en fonctionnement)

I : courant d'asservissement

P : pression de l'hélium gazeux à 4,2 K

T : température

D : débit massique

v_j : vitesse moyenne dans la buse

v : vitesse sur le détecteur

d : diamètre de la buse

x : distance de la buse au détecteur

d_f : diamètre du fil

$\epsilon(x)$: dissipation par unité de masse au point x

$\langle \epsilon \rangle$: dissipation moyenne par unité de masse

$\langle \epsilon^* \rangle$: taux moyen de transfert d'énergie dans la cascade par unité de masse

RESUME

Il est apparu récemment que la turbulence accessible à l'expérience pouvait ne pas avoir atteint, même aux plus grand nombres de Reynolds (Re), un régime ultime (Reynolds infini) qui avait jusque-là fait l'objet de prédictions théoriques.

L'expérience présentée ici est un jet d'hélium gazeux à 4,2 K. A cette température proche de la température critique, jouer sur la pression du fluide permet de faire varier la viscosité, et donc le Reynolds sur une large gamme ($Re=10^3$ à 10^5) sans que la géométrie de l'écoulement ne soit modifiée. Nous mesurons avec une haute résolution statistique les fluctuations de vitesse dans cet écoulement grâce à un anémomètre basé sur le principe du fil chaud.

La statistique non-gaussienne, intermittente, des incréments de vitesse est analysée comme une superposition de statistiques élémentaires, quasi-gaussiennes. L'unique paramètre caractérisant ce mélange de régimes "purs" de la turbulence est appelé profondeur de la cascade et est étudié en détail en fonction de l'échelle et du nombre de Reynolds. Une étude des histogrammes conditionnels permet de justifier a posteriori cette méthode d'analyse.

La large gamme de Reynolds accessibles à la mesure nous a permis de mettre en évidence une transition (à $Re \approx 5000$) entre deux régimes distincts de la turbulence : turbulence douce et turbulence dure.

Even for the highest Reynolds numbers (Re) experimentally accessible, turbulent flows might never reach the regime of infinite Re which is assumed in theoretical treatments.

Our experiment is a jet of gaseous Helium at 4.2K. As this temperature is close to the critical temperature of He, variation of the pressure allows a large variation of the Reynolds number ($Re=10^3$ to 10^5) with the same jet geometry. We measure the velocity fluctuations with high statistical resolution, using a cryogenic hot wire anemometer.

We analyze the intermittent non-gaussian distributions of the velocity fluctuations as a superposition of elementary quasi-gaussian distributions. The parameter characterizing this mix of "pure" regimes of turbulence is the "cascade depth". We study it as a function of scale and Re . Our analysis of conditional histograms justifies, a posteriori, our superposition method.

The large range of Reynolds number accessible in our measurements allows us to observe a transition (at $Re \approx 5000$) between two distinct hydrodynamical regimes : soft and hard turbulence.

