

THÈSE

présentée par

Jean-Louis GILSON

POUR OBTENIR LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

JOSEPH FOURIER - GRENOBLE 1

Arrêtés Ministériels du 5 juillet 1994 et du 30 mars 1992

SPÉCIALITÉ : PHYSIQUE

# Structures Singulières et Intermittence dans les Modèles en Couches de la Turbulence

Date de soutenance : 26 octobre 1996

COMPOSITION DU JURY:	Président	:	B. CASTAING
	Rapporteurs	:	L. BIFERALE U. FRISCH
	Examineurs	:	S. FAUVE M. PEYRARD
	Directeur de thèse	:	T. DOMBRE

THÈSE PRÉPARÉE AU SEIN DU CENTRE DE RECHERCHE SUR LES TRÈS  
BASSES TEMPÉRATURES, CNRS, GRENOBLE



## Table des matières

<b>Introduction.</b>	<b>7</b>
<b>1 Des équations de Navier-Stokes aux modèles en couches.</b>	<b>11</b>
1.1 Généralités. . . . .	12
1.2 Phénoménologie à la Kolmogorov et Intermittence. . . . .	15
1.2.1 K41 et autosimilarité. . . . .	15
1.2.2 Les manifestations expérimentales de l'intermittence. . . . .	17
1.2.3 Processus multiplicatifs aléatoires : un paradigme pour l'intermittence. . . . .	18
1.3 Modélisation d'une cascade d'énergie par des systèmes hydro- dynamiques à nombre réduit de degrés de liberté. . . . .	22
1.3.1 Dans quelle mesure est-il possible de réduire le nombre de degrés de liberté d'un écoulement turbulent ? . . . . .	22
1.3.2 Les modèles scalaires de cascade. . . . .	28
1.4 Appendice . . . . .	32
<b>2 La phénoménologie des modèles en couches. Application à   l'étude de l'intermittence.</b>	<b>37</b>
2.1 Définition des équations et leur limite du continu. . . . .	38
2.2 Propriétés statiques et transition vers le chaos du modèle ON. . . . .	45
2.3 Intermittence : comparaison des modèles ON et GOY. . . . .	50
<b>3 Étude des solutions singulières.</b>	<b>55</b>
3.1 Motivation. . . . .	56
3.2 Situation analytique. . . . .	58
3.3 Détermination des solutions accessibles dynamiquement. . . . .	60
3.3.1 Dynamique fictive. . . . .	60
3.3.2 Réponse du numérique et comparaison avec la statistique. . . . .	63

<b>4 Le rôle du milieu ambiant dans la détermination des fluctuations les plus singulières.</b>	<b>71</b>
4.1 Motivation et présentation du chapitre. . . . .	71
4.2 Collisions Soliton-Défaut. . . . .	73
4.3 Le modèle GOY avec un forçage aléatoire. . . . .	83
4.3.1 Introduction. . . . .	83
4.3.2 Approche par des coordonnées collectives. . . . .	87
4.3.3 Instantons : Résolution numérique du problème non-linéaire. . . . .	95
4.3.4 Intermède. . . . .	102
4.4 Formation des structures singulières dans la vraie dynamique. . . . .	105
4.5 Appendice I. . . . .	115
4.5.1 Représentation fonctionnelle et instantons. . . . .	115
4.5.2 Ito et Stratanovitch. . . . .	120
4.6 Appendice II. . . . .	121
<b>Conclusion et questions ouvertes.</b>	<b>125</b>
<b>A Preprint</b>	<b>127</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>129</b>

## Remerciements

C'est une grande joie pour moi, de témoigner par ces quelques lignes, de la profonde reconnaissance que je dois à mon directeur de thèse, Thierry Dombre. Sans ses grandes qualités scientifiques et humaines, je n'aurais jamais présenté ce travail. Je lui sais gré de m'avoir toujours partagé ses idées, en me les expliquant avec une grande patience. Cette thèse est le fruit de notre constante interaction, aussi j'avertis le lecteur qu'il ne trouvera dans l'ensemble du travail que la première personne du pluriel. Cependant les erreurs et/ou les lourdeurs me reviennent ! Que Thierry trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour tout ce qu'il m'a appris durant ces deux années.

Cette thèse a également largement bénéficié des discussions que nous avons eues avec B.Castaing. Je le remercie très sincèrement de l'intérêt qu'il a toujours manifesté pour notre travail et de la patience dont il a fait preuve pour m'expliquer les siens. Enfin je suis très heureux qu'il ait accepté la présidence du jury ; qu'il en soit remercié.

Je remercie L.Biferale et U.Frisch d'avoir accepté, malgré leurs multiples obligations, la charge d'écrire un rapport sur ce travail.

Je tiens également à remercier S.Fauve et M.Peyrard pour leur participation au jury.

Je n'oublie pas de remercier le directeur du CRTBT, P.Monceau, de m'avoir accueilli dans l'établissement qu'il dirige.

Je dois beaucoup à P.Butaud, qui a été mon premier maître et demeure un ami fidèle.

Je remercie tous les membres du groupe "Hydrodynamique" du CRTBT, pour les échanges que nous avons eus, et tout particulièrement A.Naert.

Je tiens à remercier tous les étudiants du groupe et en particulier : H.Meyer, pour son aide précieuse avec LATEX, et plus généralement ses compétences en informatique mises au service de tous, E.Trizac pour nos discussions sur la physique de ces modèles, F.Thalman avec qui il est toujours instructif de

parler de sciences. Sans oublier N.Abarenkova, R.Mélin, J.-M.Robin, tous les visiteurs et les autres chercheurs du groupe, pour leur sympathie.

Je ne voudrais pas oublier tous mes amis, mes frères, ceux qui me sont les plus proches, comme ceux qui le sont moins, à tous je redis merci pour tout ce que nous avons partagé.

Enfin comment achever ces remerciements, sans laisser monter mon action de grâce vers Celui de qui nous recevons la Création si belle, et qui nous appelle Ses amis ?

*Très haut, tout puissant et bon Seigneur,  
à toi louange, gloire, honneur,  
et toute bénédiction ;  
à toi seul ils conviennent, Ô Très-Haut,  
et nul homme n'est digne de te nommer.*

*Loué sois-tu, mon Seigneur, avec toutes tes créatures,  
spécialement messire le frère Soleil,  
qui fait le jour et par qui tu nous illumines :  
de toi, Très-Haut, il est le symbole.*

*Loué sois-tu, mon Seigneur, pour sœur Lune et les Étoiles ;  
dans le ciel tu les as formées,  
claires, précieuses et belles.*

*Loué sois-tu, mon Seigneur, pour sœur Eau,  
qui est très utile et humble  
et précieuse et chaste.*

*Loué sois-tu, mon Seigneur, pour frère Feu  
par qui tu éclaires la nuit :  
il est beau et joyeux,  
indomptable et fort.*

*Loué sois-tu, mon Seigneur, pour sœur notre mère la Terre*

*qui nous porte et nous nourrit,  
qui produit la diversité des fruits,  
et les fleurs diaprées et les herbes.*

*Loué sois-tu, mon Seigneur, pour ceux  
qui pardonnent par amour pour toi ;  
qui supportent épreuves et maladies ;  
heureux s'ils conservent la paix,  
car par toi, Très-Haut, ils seront couronnés.*

*Loué sois-tu, mon Seigneur, pour notre sœur la Mort corporelle,  
à qui nul homme vivant ne peut échapper.  
Malheur à ceux qui meurent en péché mortel ;  
heureux ceux qu'elle surprendra en ta très sainte volonté  
car la seconde mort ne pourra leur nuire.*

\*\*\*\*\*

*Louez et bénissez mon Seigneur,  
rendez-lui grâce et servez-le  
avec grande humilité !*

Le Cantique des Créatures.

Frère François d'Assise.



# Introduction.

L'intérêt pour les systèmes de type hydrodynamique, à petit nombre de degrés de liberté, pour étudier les processus de cascade apparaissant en turbulence développée et en particulier l'intermittence en dimension 3, remonte aux années 70. A.M. Obukhov (1971) et ses collaborateurs, puis indépendamment E.D. Siggia (1977) ont proposé divers systèmes dynamiques, visant une modélisation extrêmement simplifiée des équations de Navier-Stokes aux très grands nombres de Reynolds. Parmi ces modèles, aussi dits "en couches", l'un d'eux, initialement considéré par E.B. Gledzer (1973) dans le contexte de la turbulence en dimension deux, a suscité un regain d'activité dans les années 90, après la découverte par les physiciens japonais M. Yamada & K. Okhitani (1988) d'une phase de dynamique chaotique exhibant de l'intermittence. Son étude ultérieure par M.H. Jensen *et al* (1991) a révélé des lois d'échelle anormales, très proches de celles obtenues expérimentalement, par F. Anselmet *et al* (1984) pour la turbulence en dimension 3.

Un grand nombre de publications est dès lors paru sur ce modèle baptisé par la suite GOY, d'après les noms de ses trois inventeurs. D'importants progrès ont été faits, tant sur le plan de la dynamique (L. Biferale *et al* (1995a)), que de la statistique (R. Benzi *et al* (1993a), L.P. Kadanoff *et al* (1995), E. Lévêque *et al* (1995b)). Ces études ont confirmé les qualités de ce modèle pour décrire, au niveau statistique, les propriétés d'intermittence des vrais écoulements. Cependant il n'existe toujours pas de théorie quantitative satisfaisante, permettant de comprendre son succès.

Un autre système peut être construit à partir de deux chaînes introduites séparément par A.M. Obukhov (1971) et V.I. Desniansky *et al* (1974). Ce modèle, que nous appellerons ON, présente quelques simplifications par rapport aux équations GOY. Curieusement, à notre connaissance (limitée), aucune étude des propriétés dynamiques et statistiques de ce modèle n'est disponible dans la vaste littérature sur le sujet.

Le projet initial de cette thèse était de mieux comprendre quels sont les ingrédients de base nécessaires pour qu'un modèle en couches ait de bonnes propriétés vis à vis de l'intermittence. Exprimé différemment : tenter de dégager les objets élémentaires qui interviennent dans la dynamique et construisent l'intermittence. Par mesure de simplicité nous avons donc commencé notre étude sur le modèle ON. De fait, ce système exhibe également un comportement chaotique avec de l'intermittence, qui est même très prononcée. Ceci nous a conduit à la recherche de solutions singulières autosimilaires. Le lien entre l'intermittence et ces objets, n'est pas nouveau. Déjà E.D. Siggia (1978) avait clairement identifié la formation de telles structures dans son modèle. Plus tard, T. Nakano (1988a) avait repris cette problématique, précisément sur les équations ON. Dans le modèle GOY, la présence de structures intermittentes est déjà mentionnée par K. Okhitani *et al* (1989), où ces auteurs parlent d'une image à la Siggia revisitée ; G. Parisi (1990) montre comment l'existence d'une grande variété de telles solutions conduirait naturellement à la multifractalité.

Sur le modèle ON nous avons montré, par une méthode numérique, que ces solutions particulières existent, et attirent toutes les conditions initiales en l'absence de viscosité. En revanche, le système choisit une solution unique, une fois les non-linéarités fixées. Ces conclusions avaient été en partie atteintes par T. Nakano (1988a). Ces solutions décrivent correctement la formation des plus grosses fluctuations, qui dominent la statistique aux grands ordres. En l'absence de dissipation, de tels objets conduisent au développement en un temps fini d'une singularité, associée à l'explosion de l'énstrophie. La prise en

compte d'une viscosité finie va repousser ces singularités dans le plan complexe des temps et nous nous sommes donc également penchés sur les singularités en temps imaginaire, que peuvent engendrer les non-linéarités. Ce sujet ne sera pas du tout décrit dans le corps du manuscrit mais le lecteur intéressé par cet aspect pourra consulter le preprint qui l'accompagne.

Il était facile alors d'étendre notre étude au cas du modèle GOY, afin de voir comment la physique est modifiée. Un certain nombre des conclusions restent inchangées, en particulier l'existence de solutions autosimilaires génériques, entièrement définies par les non-linéarités. Toutefois, une physique nouvelle et plus riche apparaît lorsque ces solutions deviennent trop molles. Comme elles n'échappent plus aux fluctuations moyennes qui constituent un fond turbulent, il devient nécessaire de prendre en compte les effets résultant de l'interaction entre les composantes cohérente et désordonnée de la dynamique. Cette image "à deux fluides" n'est pas sans rapeler le modèle proposé par Z.S. She *et al* (1994), dans le contexte de la vraie turbulence, et dont le succès reste magique. Afin de mieux comprendre la formation des structures les plus singulières, nous avons étudié différents mécanismes pouvant renormaliser les objets autosimilaires nus. Ceci nous a finalement amenés à proposer l'existence d'effets de taille, liés au nombre de Reynolds fini. Dans la limite où la cascade devient infiniment longue ( $Re \rightarrow +\infty$ ), on devrait assister à une disparition de la multifractalité et des lois d'échelle. B.Castaing a proposé dès 1989 que la valeur finie du nombre de Reynolds était importante pour décrire l'intermittence (voir aussi B.Castaing (1996)).

Ce "tapuscrit" se compose de quatre chapitres d'importances inégales. Chacun d'eux est précédé d'un rapide résumé, ou d'une section de motivation faisant le même office. Dans le premier chapitre nous redonnons quelques éléments de la phénoménologie des écoulements turbulents en dimension 3, puis essayons de faire sentir, comment on peut arriver à la modélisation d'une cascade d'énergie par une chaîne unidimensionnelle. Le second, passe en revue

des propriétés générales communes à tous les modèles en couches, en exposant essentiellement nos résultats sur le modèle ON, puis compare les propriétés statistiques du modèle ON obtenues numériquement, à celles du modèle GOY. Dans le troisième chapitre nous décrivons les solutions autosimilaires des deux modèles. La confrontation des prédictions qui peuvent être faites sur la base de ces objets nus, avec les résultats de la statistique, nous force à poursuivre notre effort dans un quatrième chapitre. Cette partie (la plus longue) comprend successivement : une étude des interactions élémentaires entre un objet idéal et un défaut ponctuel, piégé dans la cascade ; une modélisation des effets du milieu ambiant par un forçage aléatoire agissant sur le "soliton" ; enfin l'examen, à partir du vrai signal, de la formation des objets les plus singuliers dans la vraie dynamique. Nous terminons par quelques conclusions et aussi des questions ouvertes.

# Chapitre 1

## Des équations de Navier-Stokes aux modèles en couches.

Ce chapitre rappelle les éléments essentiels de la phénoménologie de la turbulence, présente succinctement la problématique de l'intermittence, puis tente de montrer comment on peut arriver aux modèles en couches à partir des équations de Navier-Stokes.

Cette dernière partie qui s'appuie sur l'article fondateur d'E.D.Siggia (1977), pourra paraître difficile. Nous espérons qu'elle sera utile au lecteur désireux de mieux apprécier l'origine et la pertinence physique de ces modèles, en lui présentant une dérivation possible, qui souffre néanmoins d'approximations incontrôlables. En tout état de cause, elle n'est pas indispensable pour la compréhension de la suite.

Dans un appendice est reporté un résultat de la théorie des larges déviations pour les sommes de variables aléatoires, particulièrement utile dans le contexte des processus multiplicatifs aléatoires. S'y trouve également jointe une description du modèle hiérarchique introduit par Z.S.She *et al* (1994), pour la vraie turbulence.

## 1.1 Généralités.

Il s'agit de décrire la turbulence dans les écoulements incompressibles, de fluides réels en dimension trois, en nous limitant aux situations les plus simples.

L'écoulement est défini par les champs de vitesse et de pression, qui obéissent aux célèbres équations de Navier-Stokes (NS)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (1.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1.1b)$$

Dans le membre de droite de (1.1a) les forces de pression  $-\frac{1}{\rho} \nabla p$  assurent la condition d'incompressibilité (1.1b) et  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide.

Aux équations (1.1) il faut ajouter des conditions de bord spécifiant la géométrie du flot. Après quoi, pour toute condition initiale suffisamment régulière, les équations de NS, du premier ordre en temps, assurent l'existence de solutions  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  et  $p(\mathbf{r}, t)$  au moins pour des temps finis.

Il est usuel d'adimensionner ces équations. On choisit pour cela une échelle de longueur  $L$  typique de la géométrie, et on forme une échelle de temps  $L/U$  à l'aide d'une vitesse caractéristique de l'écoulement  $U$ . Quitte à redéfinir la pression, (1.1a) devient dans le nouveau système

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{R} \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (1.2)$$

où  $R = UL/\nu$  est le nombre de Reynolds.

La condition d'incompressibilité permet d'éliminer le terme de pression. Il suffit pour cela de prendre la divergence de (1.2), et de résoudre l'équation de Poisson qui en résulte pour  $p$ . On arrive ainsi à l'équation,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathcal{P}_{orth} [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = \frac{1}{R} \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (1.3)$$

où  $\mathcal{P}_{orth}$  désigne un opérateur nonlocal qui projette sur l'espace des champs de vecteur à divergence nulle. À géométrie fixée l'écoulement est en principe

complètement défini par le nombre de Reynolds (en plus des conditions initiales (CI)), devenu le seul paramètre de contrôle.

Les solutions de ce système dynamique subissent une série de bifurcations lorsque l'on augmente  $R$ . Le comportement temporel puis les degrés de liberté spatiaux se désordonnent jusqu'à l'établissement d'un régime de chaos spatio-temporel. On trouvera une discussion de quelques instabilités hydrodynamiques dans les ouvrages de P.Manneville (1991) et D.J.Tritton (1988). Les différentes bifurcations ainsi que la nature des instabilités dépendent grandement de la géométrie des parois et/ou des obstacles placés dans le flot. Ces conditions de bord imposent à l'écoulement des contraintes géométriques et en réduisent la symétrie. Sinon, en effet, les équations de NS sont invariantes sous les translations et les rotations d'espace.

Lorsque l'on augmente encore le nombre de Reynolds, l'écoulement acquiert un comportement désordonné sur une gamme d'échelles de longueur de plus en plus étendue. On distingue alors les grandes échelles (on les caractérisera par les longueurs  $l \geq l_0$ ) où sont produits les plus gros tourbillons, les plus énergétiques. C'est également à ces échelles qu'est injectée l'énergie de la turbulence, par la présence de cisaillement dans l'écoulement moyen. Les mouvements à ces échelles sont très anisotropes, et ne dissipent pas d'énergie. À l'opposé, aux plus petites échelles, la viscosité est efficace pour dissiper l'essentiel de l'énergie, grâce à la présence de forts gradients de vitesse. Les longueurs  $l \ll \eta$ , où  $\eta$  est une échelle à préciser dans la suite, constitueront ainsi l'intervalle dissipatif. On parlera de turbulence pleinement développée lorsque le nombre de Reynolds est tel qu'il existe, entre les deux domaines qui viennent d'être décrits un large intervalle d'échelles de longueur, dit inertiel, pour lequel la dynamique est dominée par les forces d'inertie et de pression.

On accepte généralement, à la suite de Kolmogorov (1941), l'hypothèse d'une turbulence localement homogène et isotrope. Cette hypothèse simplificatrice se comprend comme suit : les mouvements aux petites échelles résultent

d'une succession d'instabilités des structures plus grandes. On admet que ce processus, local dans les échelles, a des corrélations finies. Dans ce cas, loin des parois, la géométrie extérieure n'affecte plus les mouvements aux échelles  $l \ll l_0$ , et les symétries brisées par les mécanismes produisant la turbulence y sont restaurées dans la statistique des fluctuations de vitesse.

La présence d'une viscosité finie fait des équations de NS un système dynamique dissipatif, dont les non-linéarités conservent les deux grandeurs globales que sont :

l'énergie cinétique moyenne par unité de volume (masse volumique unité)

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2V} \int_{\Omega} d^3\mathbf{r} v^2(\mathbf{r}, t), \quad (1.4)$$

et l'hélicité

$$\mathcal{H} = \langle \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle, \quad (1.5)$$

qui mesure le degré d'enlacement des tubes de vorticité dans l'écoulement. Dans les formules (1.4) et (1.5),  $V$  désigne le volume de l'espace  $\Omega$  délimitant l'écoulement et  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge \mathbf{v}$ , la vorticité.

Ainsi l'énergie qui est injectée dans les mouvements turbulents de grande échelle va devoir cascader conservativement jusqu'aux plus petites échelles de l'écoulement où elle sera finalement dissipée.

L'idée d'une cascade d'énergie locale à travers les échelles remonte à Richardson (1926). L'image qu'il dégage est celle d'une hiérarchie de "tourbillons" de taille caractéristique  $l$ , décroissant dans une progression géométrique  $l_n \sim l_0 Q^{-n}$  où  $Q$  est le pas de la cascade, que l'on peut prendre, pour fixer les idées, égal à deux. La notion de tourbillon ne doit pas être comprise comme directement associée à une structure géométrique bien définie, mais plutôt comme une région de l'espace sur laquelle le champ de vitesse subit une variation significative. Soit  $\delta v_l$  une fluctuation de vitesse typique de l'échelle  $l$ . La présence à toutes les échelles de cisaillement, associé au gradient  $\delta v_l/l$ , va entraîner une distorsion des tourbillons et provoquer le transfert de l'activité des grandes vers

les petites échelles. Comme nous l'avons déjà dit, on admet généralement que ce processus est local, c'est-à-dire que l'énergie contenue dans les structures d'échelle  $l$  provient essentiellement des effets de cisaillement des mouvements aux échelles  $l/2$  et  $2l$ . La dynamique est, dans cette image, régie par trois types de temps caractéristiques :

- le temps  $\tau_l^{\text{adv}} \approx l/\delta v_0$  d'advection d'une structure de taille  $l$  par un tourbillon de grande taille  $l_0 \gg l$  et de vitesse  $\delta v_0$ . Un tel effet ne déformant pratiquement pas la structure ne transfère pas d'énergie.
- le temps typique de distorsion des tourbillons de l'échelle  $l$  :  $\tau_l^{\text{nl}} \approx l/\delta v_l$ .
- le temps caractéristique de dissipation de l'énergie portée par l'échelle  $l$ , donné par  $\tau_l^{\text{visq}} \approx l^2 R$ . On voit que la dissipation deviendra dynamiquement pertinente pour des échelles  $l$  telles que  $l\delta v_l < R^{-1}$ .

La première description statistique de la cascade d'énergie dans la limite des très grands nombres de Reynolds a été proposée par Kolmogorov et Obukhov en 1941. Cette théorie est étiquetée "théorie K41".

## 1.2 Phénoménologie à la Kolmogorov et Intermittence.

### 1.2.1 K41 et autosimilarité.

L'hypothèse centrale faite par la théorie K41 est l'invariance d'échelle, ou autosimilarité, de la statistique des fluctuations de vitesse sur l'intervalle inertiel, qui devient infiniment vaste lorsque le nombre de Reynolds tend vers l'infini.

Au niveau statistique, on caractérise généralement la structure spatiale de la turbulence homogène et isotrope à l'aide des incréments de vitesse longitudinale. Ils sont définis comme :

$$\delta v_l(\mathbf{r}, t) \equiv (\mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{l}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)) \cdot \frac{\mathbf{l}}{l}, \quad (1.6)$$

c'est-à-dire que l'on ne retient que la projection longitudinale de la différence des vitesses entre deux points séparés d'un vecteur  $l$ . On se restreint souvent à une situation de turbulence stationnaire, où le taux d'injection à grande échelle compense exactement le taux moyen de dissipation d'énergie, qu'il est traditionnel de noter  $\varepsilon$ . Dans ce cas, la densité de probabilité  $P_l(\delta v_l)$  ne dépend plus *a priori* que de la longueur  $l$ .

L'hypothèse d'autosimilarité se traduit ainsi : pour toutes les échelles  $l$  telles que  $l_0 \gg l \gg \eta$ , il existe une unique fonction  $P(x)$  telle que

$$P_l(\delta v_l) = \frac{1}{\alpha_l} P(\delta v_l / \alpha_l). \quad (1.7)$$

Dans cette expression,  $\alpha_l$  est l'écart type des fluctuations de  $\delta v_l$  et définit une intensité caractéristique de la turbulence à l'échelle  $l$ .

Pour connaître la dépendance spatiale de toutes les fonctions de structure :  $S_p(l) = \langle \delta v_l^p \rangle$ , il suffit dans ce schéma de préciser la loi d'évolution de l'une d'elles. Or il existe une expression exacte, également due à Kolmogorov (1941), de  $S_3(l)$  :

$$S_3(l) = -\frac{4}{5}\varepsilon l, \text{ pour } l_0 \gg l \gg \eta, \quad (1.8)$$

où le taux moyen de dissipation d'énergie  $\varepsilon$  est supposé rester fini même dans la limite  $Re \rightarrow \infty$ . De l'hypothèse d'autosimilarité et de l'équation (1.8), on tire

$$\alpha_l = (\varepsilon l)^{1/3}, \text{ et} \quad (1.9)$$

$$S_p(l) = C_p(l_0)(\varepsilon l)^{p/3}. \quad (1.10)$$

On en déduit, dans le langage des "tourbillons", les propriétés suivantes :

- l'énergie contenue dans les structures de l'échelle  $l$  vaut  $E_l \sim \alpha_l^2 = (\varepsilon l)^{2/3}$ , elle décroît très rapidement avec  $l$  ;
- le temps caractéristique de transfert non-linéaire  $\tau_l^{nl} \approx \varepsilon^{-1/3} l^{2/3}$ , décroît avec l'échelle. Cette accélération de la dynamique est nécessaire pour comprendre le sens de la cascade ;

- inversement, le cisaillement responsable de la distorsion des structures et du transfert d'énergie, croît comme  $\alpha_l/l \sim l^{-2/3}$ . Ceci permet de comprendre qualitativement la localité de la cascade. En effet, on peut estimer que la contribution au transfert d'énergie des échelles  $l_m$  vers les structures de l'échelle  $l_n$ , décroît exponentiellement vite avec  $|m - n|$  quand  $m \ll n$  ( $l_m \gg l_n$ ), car le cisaillement est de plus en plus faible vers les grandes échelles. Par ailleurs quand  $m \gg n$  les fluctuations du niveau  $l_m$  ( $l_m \ll l_n$ ) vont devenir si vite isotropes qu'elles ne pourront pas agir de façon cohérentes sur la dynamique de l'échelle  $l_n$  ; la contribution au transfert d'énergie qui en résulte devient alors sous-dominante par rapport aux couplages locaux ;
- enfin, le comportement moyen des fluctuations de vitesse, décrit par  $\alpha_l = (\varepsilon l)^{1/3}$ , permet d'estimer l'échelle de longueur  $\eta$  à partir de laquelle la dissipation visqueuse va devenir efficace :  $\eta \sim l_0/R^{3/4}$ .

Physiquement, la relation (1.8) exprime la constance du flux moyen d'énergie à travers les différentes échelles de l'écoulement (le taux de transfert d'énergie à l'échelle  $l$  étant dimensionnellement d'ordre  $\delta v_l^3/l$ ).

### 1.2.2 Les manifestations expérimentales de l'intermittence.

Les expériences de laboratoire effectuées sur des écoulements turbulents de fluides réels, ne permettent pas d'obtenir des nombres de Reynolds aussi grands qu'on pourrait le souhaiter. Cependant les plus grandes valeurs atteintes  $Re \approx 10^5 - 10^7$ , établissent un intervalle inertiel de plusieurs décades, et doivent permettre de tester les prédictions de la théorie K41. Les expériences (et aussi les simulations numériques) ont révélé l'existence d'un phénomène qui n'est pas pris en compte dans la théorie initiale de Kolmogorov : l'*intermittence* de la cascade. Le transfert de l'activité aux petites échelles d'un écoulement de

turbulence pleinement développée ne se fait pas de façon autosimilaire. Au fur et à mesure que l'on s'enfonce vers les petites échelles de l'écoulement, on trouve de plus en plus de régions de l'espace où l'activité turbulente est pratiquement nulle tandis qu'elle se concentre et s'intensifie dans des structures plus rares. La signature statistique, sur les histogrammes des incréments de vitesse longitudinale, est une évolution de la forme des  $P_l(\delta v)$  bien différente de ce que prédit la loi d'autosimilarité (1.7). Pour illustrer notre propos nous donnons sur la figure 1.1 de tels histogrammes, obtenus dans l'expérience de jet turbulent du groupe "Hydrodynamique" de notre laboratoire. Cette figure est tirée de la thèse d'A.Naert (1995). On constate une forme quasi gaussienne au sommet de l'intervalle inertiel, tandis qu'à plus petite échelle les événements très intenses et également les zones de calme sont clairement renforcés. Il n'en reste pas moins que la théorie K41 donne une bonne description du comportement moyen. En particulier, les lois de puissance qu'elle prédit pour les fonctions de structure  $S_p(l)$  pour  $p \leq 3$  sont bien vérifiées sur une large gamme d'échelles compatible avec les arguments phénoménologiques. Les déviations se manifestent dans les ordres supérieurs. Même si l'existence de strictes lois de puissance indépendantes de  $Re$  n'est pas garantie, on a l'habitude de définir des exposants anormaux, associés à l'intervalle inertiel, par la relation :

$$S_p(l) \sim l^{\zeta_p}, \quad \text{pour } l_0 \gg l \gg \eta.$$

Les exposants  $\zeta_p$  croissent de manière monotone avec  $p$  mais ils se placent sur une courbe convexe, bien différente de la droite  $\zeta_p = p/3$  prévue par la théorie de champ moyen.

### 1.2.3 Processus multiplicatifs aléatoires : un paradigme pour l'intermittence.

L'évolution de la forme des distributions  $P_l(\delta v)$  peut être, en fait, décrite par la décomposition suivante (cf A.N.Kolmogorov (1962), A.M.Obukhov (1962)),

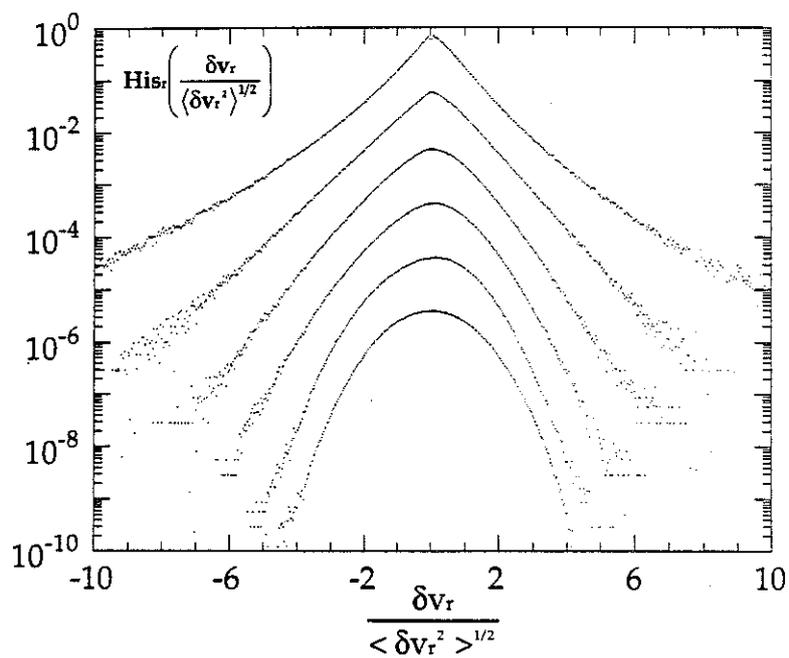


Figure 1.1 : Histogrammes de  $\delta v_l$  à des échelles variant de la plus grande  $l_0 \approx 1.6\text{cm}$  à la plus petite de l'écoulement, l'échelle de Kolmogorov  $\eta \approx 13.5\mu\text{m}$ , pour  $Re = 45100$ . Les histogrammes sont décalés d'un facteur dix pour plus de lisibilité. L'échantillon sur lequel est fait la statistique comporte  $10^7$  points.

B.Castaing (1989), B.Castaing *et al* (1990), R.Benzi *et al* (1991)) :

$$P_l(\delta v) = \int G_{ll_0}(\log \alpha) P_{l_0}(\delta v/\alpha) \frac{d \log \alpha}{\alpha}, \quad (1.11)$$

où  $P_{l_0}(\delta v)$  est la distribution à grande échelle, proche d'une gaussienne, et  $G_{ll_0}(\log \alpha)$  est une fonction dépendant *a priori* de  $l$  et  $l_0$  qui code la déformation des histogrammes lorsque  $l$  décroît.

Dans des travaux récents (Y.Gagne *et al* (1994)), il a été montré expérimentalement que la décomposition ci-dessus a un sens physique : les fluctuations de vitesse se décomposent en sous-ensembles gaussiens dont les intensités caractéristiques sont de plus en plus largement distribuées à mesure que l'on descend vers les petites échelles de l'écoulement. Au contraire, pour la théorie K41, il n'existe à chaque échelle qu'une seule intensité caractéristique, fixée par le comportement moyen, via le taux de transfert d'énergie.

L'échelle  $l_0$  dans la formule (1.11) est *a priori* arbitraire. On peut donc également écrire :

$$P_l(\delta v) = \int G_{ll_1}(\log \alpha_1) P_{l_1}(\delta v/\alpha_1) \frac{d \log \alpha_1}{\alpha_1}, \quad (1.12)$$

où  $l_1$  est une échelle intermédiaire  $l < l_1 < l_0$ . En rapprochant les expressions (1.11) et (1.12) il vient :

$$G_{ll_0}(\log \alpha) = \int G_{ll_1}(\log \alpha_1) G_{l_1 l_0}(\log \alpha - \log \alpha_1) d \log \alpha_1.$$

Cela suggère l'existence d'un processus multiplicatif aléatoire propre à décrire la hiérarchie des intensités caractéristiques des fluctuations aux différentes étapes de la cascade. Pour être plus précis, considérons deux échelles  $l_1$  et  $l_2$  avec  $l_2 < l_1$ , et désignons par  $\{\alpha_1\}$  et  $\{\alpha_2\}$  les ensembles d'écart types de  $\delta v(l_1)$  et  $\delta v(l_2)$  pris dans le sens défini par (1.11). Ces deux ensembles sont essentiellement reliés par la variable aléatoire  $W_{l_2 l_1}$  définie par  $\alpha_2 = W_{l_2 l_1} \alpha_1$  dont le logarithme est distribué selon  $G_{l_2 l_1}$ . Puisque chaque réalisation de  $\alpha$  définit un sous ensemble gaussien, tout le comportement "anormal" est contenu dans les fonctions  $G_{l_2 l_1}$ .

En s'appuyant sur la localité de la cascade, on peut écrire  $W_{l_n l_0}$  comme un produit de  $n$  facteurs reliant les étapes successives de la subdivision  $l_0 > l_1 > \dots > l_n$  :

$$W_{l_n l_0} = \prod_{i=1}^{i=n} W_{l_i l_{i-1}}.$$

Dans le cadre de la vraie turbulence on admet que cette subdivision peut être raffinée à l'infini, eu égard au caractère continu de la cascade. On parle alors de processus infiniment divisible (pour une discussion appliquée à la turbulence on consultera Z.S.She *et al* (1995), E.A.Novikov (1994), B.Castaing (1996)).

En se cantonnant à des cascades à pas discrets, et telles que chaque étape soit équivalente aux précédentes, on arrive à la forme suivante pour  $G_{l_n l_0}$  :

$$G_{l_n l_0} = H^{*n},$$

où  $H(\log W_{l_i l_{i-1}})$  est la distribution de probabilité, commune, des  $W_{l_i l_{i-1}}$ , c'est-à-dire la brique élémentaire du processus multiplicatif aléatoire, et  $*$  désigne le produit de convolution. De plus, le nombre de pas de cascade est, dans une image invariante d'échelle, proportionnel au logarithme du rapport  $l_0/l_n$  :

$$n = \log_Q(l_0/l_n), \quad (1.13)$$

où  $Q$  est le pas de la cascade. Il n'est alors pas difficile de se convaincre que les différentes fonctions de structure obéissent, dans ce schéma, à des lois de puissance :

$$S_p(l) = \langle \delta v_{l_0}^p \rangle (l_0/l_n)^{-\zeta_p},$$

avec  $\zeta_p = \log_Q \langle W^p \rangle$ . La moyenne se fait sur les différentes réalisations, avec la probabilité donnée par  $H(\log W)$ . Le processus multiplicatif devra en outre satisfaire la contrainte  $\zeta_3 = 1 = -\log_Q \langle W^3 \rangle$ , qui est imposée par "la loi des 4/5" (équation (1.8)).

Faisons à ce stade quelques commentaires.

- Le bien-fondé d'une description des manifestations statistiques de l'intermittence à l'aide de processus multiplicatifs est très largement admis ;

en revanche, l'hypothèse d'invariance d'échelle et la relation (1.13) qui en résulte, ne sont pas forcément licites, comme le suggère la persistance d'un nombre de Reynolds fini. À ce propos on pourra se reporter à l'article de B.Castaing (1996) et aux références qu'il contient.

- Le problème de définir la nature du processus multiplicatif permettant de comprendre les données expérimentales reste entier. Récemment Z.S.She *et al* (1994) ont proposé un modèle qui décrit de façon remarquable les données issues des expériences ; malheureusement il est encore bien difficile de comprendre les raisons profondes de son succès. Comme nous aurons à y revenir dans la suite, nous le décrivons succinctement dans un appendice de ce chapitre, où nous avons également reporté quelques résultats utiles de la théorie des larges déviations pour les sommes de variables aléatoires.

### **1.3 Modélisation d'une cascade d'énergie par des systèmes hydrodynamiques à nombre réduit de degrés de liberté.**

#### **1.3.1 Dans quelle mesure est-il possible de réduire le nombre de degrés de liberté d'un écoulement turbulent ?**

Le nombre de degrés de liberté d'un fluide en mouvement est en principe infini puisqu'il s'agit de connaître le champ de vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  en tous les points de l'espace. Cependant nous savons qu'à très petite échelle la dissipation visqueuse va faire systématiquement relaxer toutes les fluctuations (la formation de singularité sur l'axe réel des temps, n'a pour les équations de NS, jamais été observée). Il est donc légitime d'estimer la dimension de l'espace

des phases à partir du nombre de degrés de liberté instables vis-à-vis des non-linéarités. Dans l'approximation de champ moyen, ce nombre évolue comme  $(l_0/\eta)^3 \sim R^{9/4}$ . Toute intégration numérique des équations de NS devra donc traiter un nombre rapidement gigantesque de données, ce qui limite les nombres de Reynolds accessibles à quelques centaines. Puisque c'est la physique statistique des mouvements aux différentes échelles de l'écoulement qui nous intéresse plutôt que les détails du flot, on peut se demander s'il est possible de réduire le nombre de degrés de liberté participant effectivement à la cascade d'énergie.

Nous allons décrire rapidement la procédure proposée dans ce sens par E.D.Siggia (1977) dont l'algèbre fut ensuite simplifiée par T.Nakano (1988b). Disons d'entrée de jeu que la construction présentée dans la suite souffre d'approximations incontrôlables. Le point de départ en est une décomposition du champ de vitesse en paquets d'ondes devant représenter les tourbillons effectifs aux différentes échelles de l'écoulement. On considère une turbulence homogène et isotrope enfermée dans un cube de côté  $l_0 = 2\pi$ . Il est commode de garder une trace de la dimensionnalité d'espace, nous la noterons  $d$  bien que seul le cas  $d = 3$  soit en question.

Les différentes échelles vont être repérées par un indice entier  $l$  de la manière suivante : partant du cube initial, on effectue une division en  $Q^d$  boîtes de côté  $l_0/Q$ . Ces nouveaux cubes constituent le niveau 1 de la hiérarchie de structures, et on repère leur centre par  $Q^d$  vecteurs  $\mathbf{R}_m$ , où  $m = 1 \dots Q^d$ . Le pas de la cascade prendra typiquement la valeur  $Q = 2$ . En itérant cette procédure  $l$  fois, on se retrouve face à une assemblée de  $\sum_{i=0}^l Q^{di}$  cubes repérés par l'indice du niveau,  $l$ , et  $Q^{dl}$  vecteurs de position,  $\mathbf{R}_m$ . Chaque boîte du niveau  $l$  possède une mère unique sur le niveau  $l - 1$ , tandis qu'elle porte  $Q^d$  descendants du niveau  $l + 1$ . Il faut en principe répéter cette procédure jusqu'aux échelles infiniment petites. On introduit alors la représentation suivante du champ de

vitesse :

$$v^\alpha(\mathbf{r}, t) = \sum_{l,m,\mathbf{G}} \Psi_{l,m,\mathbf{G}}(\mathbf{r}) u_{l,m,\mathbf{G}}^\alpha(t), \quad (1.14)$$

avec

$$\Psi_{l,m,\mathbf{G}} = \Phi(Q^l(\mathbf{r} - \mathbf{R}_m)) \exp(iQ^l \mathbf{G} \cdot \mathbf{r}). \quad (1.15)$$

La fonction  $\Phi$  assure la localisation du paquet d'onde sur la boîte de centre  $\mathbf{R}_m$  :  $\Phi(\mathbf{r})$  doit être pratiquement constante sur le cube de côté  $2\pi$  et décroître rapidement en dehors, tout en restant partout différentiable. Dans la suite, on fera comme s'il s'agissait d'une fonction valant 1 sur le cube et 0 ailleurs.

Les modes de Fourier représentent les degrés de liberté internes à la boîte. Les vecteurs d'onde  $\mathbf{G}$  sont choisis dans la première couche de l'espace de Fourier :  $1 \leq |\mathbf{G}| < Q$ . Afin d'assurer la complétude de la nouvelle base, le nombre de degrés de liberté devant décrire le champ de vitesse aux échelles de longueur comprises entre  $(2\pi)/Q^l$  et  $(2\pi)/Q^{l+1}$  doit être égal à  $Q^{3l}(Q^3 - 1)4\pi/3$  ; c'est le nombre de modes de Fourier usuels dans la couche de vecteurs d'onde  $Q^l \leq |\mathbf{k}| < Q^{l+1}$ . Dans la représentation des paquets d'ondes, il suffit donc de prendre un nombre, proche de  $(Q^3 - 1)4\pi/3$ , de vecteurs  $\mathbf{G}$

La double localité, dans les espaces réel et réciproque, des fonctions  $\Psi_{l,m,\mathbf{G}}$ , exclut la possibilité d'avoir de strictes relations d'orthogonalité entre les différents éléments de cette nouvelle base. Nonobstant cette difficulté on arrive aux équations du mouvement approchées pour les modes  $u_{l,m,\mathbf{G}}^\alpha$  :

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} + \frac{(Q^l \mathbf{G})^2}{R} \right) u_{l,m,\mathbf{G}}^\alpha &= \sum_{l_1, m_1, \mathbf{G}_1} \sum_{l_2, m_2, \mathbf{G}_2} Q^l M_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{G}) \\ &\times D(lm\mathbf{G}, l_1 m_1 \mathbf{G}_1, l_2 m_2 \mathbf{G}_2) u_{l_1, m_1, \mathbf{G}_1}^\beta u_{l_2, m_2, \mathbf{G}_2}^\gamma. \end{aligned} \quad (1.16)$$

L'opérateur  $M_{\alpha\beta\gamma}$  s'explique de la façon suivante :

$$M_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{G}) = -i[G_\beta P_{\alpha\gamma}(\mathbf{G}) + G_\gamma P_{\alpha\beta}(\mathbf{G})]/2, \text{ et} \quad (1.17)$$

$$P_{\alpha\beta}(\mathbf{G}) = \delta_{\alpha\beta} - G_\alpha G_\beta / \mathbf{G}^2. \quad (1.18)$$

Dans les équations ci-dessus,  $P_{\alpha\beta}(\mathbf{G})$  est le traditionnel projecteur sur l'espace orthogonal au vecteur  $\mathbf{G}$  (provenant de la condition d'incompressibilité). Quant aux constantes de couplage  $D(\dots)$ , elles ont pour expression :

$$\begin{aligned} D(lm\mathbf{G}, l_1m_1\mathbf{G}_1, l_2m_2\mathbf{G}_2) &= \exp\{-i(Q^l\mathbf{G} - Q^{l_1}\mathbf{G}_1 - Q^{l_2}\mathbf{G}_2) \cdot \mathbf{R}_{max}\} \\ &\times Q^{d(l-l_{max})} \Delta_{l_{max}} [Q^l\mathbf{G} - Q^{l_1}\mathbf{G}_1 - Q^{l_2}\mathbf{G}_2] . \end{aligned} \quad (1.19)$$

Leur amplitude est essentiellement fixée par le domaine de recouvrement des trois paquets d'ondes en interaction. Plus précisément, les cubes doivent être emboîtés les uns dans les autres pour donner une contribution non-nulle. C'est donc le plus petit, sur le niveau  $l_{max} = \max(l, l_1, l_2)$ , qui impose le volume de recouvrement, d'où le facteur géométrique  $Q^{-l_{max}}$ , qui rend compte de la prolifération des canaux d'interaction entre une boîte mère et ses nombreux descendants.  $\mathbf{R}_{max}$  qui est présent dans le facteur de phase, désigne, en dépit d'une notation malheureuse, l'origine de ce plus petit cube.

L'opérateur  $\Delta_{l_{max}}[\dots]$  assure quant à lui, dans (1.19), la conservation de l'impulsion à l'ordre  $Q^{l_{max}}$ . Plus précisément on a :

$$\Delta_l[\mathbf{G}] = \prod_{i=1}^d \left[ \frac{\sin \pi Q^{-l} G_i}{\pi Q^{-l} G_i} \right] . \quad (1.20)$$

Pour un vecteur d'onde  $\mathbf{G}$ , admettant généralement un développement de la forme :

$$\mathbf{G} = Q^0 \left( \sum_{i=1}^d n_i^0 \mathbf{e}_i \right) + Q^1 \left( \sum_{i=1}^d n_i^1 \mathbf{e}_i \right) + \dots + Q^l \left( \sum_{i=1}^d n_i^l \mathbf{e}_i \right) + \dots$$

(où les  $\{n_i^l\}$  sont des entiers tels que  $\sum_{i=1}^d n_i^{l^2}$  soit compris entre 1 et  $Q^2$ ,  $\{\mathbf{e}_i\}$  désigne la base du réseau réciproque),  $\Delta_l[\mathbf{G}]$  impose donc la nullité des coefficients  $n_i^{l'}$ , tels que  $l' \geq l$ , mais laisse du flou sur tous ceux pour lesquels  $l' < l$ .

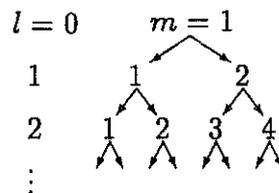
Pour l'instant la dynamique paraît aussi compliquée que dans le problème de départ. Pour la simplifier, une première étape consiste à limiter les interac-

tions entre couches plus proches voisines. Supposons que l'intensité des modes  $u_{l,m,\mathbf{G}}^\alpha$  soit donnée par le comportement d'échelle  $|u_{l,m,\mathbf{G}}| \sim Q^{-\alpha l} (\equiv k^{-\alpha})$ .

- Commençons par considérer la contribution dans l'équation (1.16) des modes situés disons dans une même couche, d'indice  $l_1$  grand devant  $l$ . La sommation sur toutes les positions des boîtes, compense à un niveau naïf, le facteur géométrique  $Q^{d(l-l_1)}$  présent dans le vertex  $D$ . Cette contribution sera donc d'ordre  $Q^l Q^{-2\alpha l_1}$ , et deviendra inférieure aux termes venant des échelles plus proches de  $l$  d'un facteur  $Q^{-2(l-l_1)\alpha}$  si  $\alpha > 0$ .
- Supposons maintenant que l'un des vecteurs d'onde  $Q^{l_1}\mathbf{G}_1$ , ou  $Q^{l_2}\mathbf{G}_2$ , soit très petit devant  $Q^l\mathbf{G}$ . Prenons le cas par exemple où  $l_1 \ll l$  et  $l_2 \sim l$ . Il n'est pas difficile de vérifier que la contribution venant du premier terme du tenseur  $M_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{G})$ , qui traduit le cisaillement des échelles d'ordre  $l$  par les mouvements de la grande échelle  $l_1$ , est d'ordre  $Q^{l_1} Q^{-l_1\alpha} Q^{-l\alpha}$ . Il sera donc très inférieur à la contribution  $Q^{l(1-2\alpha)}$ , venant des échelles proches de  $l$ , pourvu que  $\alpha < 1$ .
- Le second, qui traduit l'effet d'advection des structures du niveau  $l_1$  sur celles de l'échelle  $l$ , se comporte comme  $Q^l Q^{-l_1\alpha} Q^{-l\alpha}$ . Il est donc en principe plus grand que les termes que l'on veut retenir. Cependant, comme nous avons déjà eu l'occasion de le dire, de tels termes ne transfèrent pas d'énergie. E.D.Siggia propose de les éliminer en laissant, à chaque étape de la cascade, évoluer les boîtes du niveau  $l$ , dans un champ de vitesse local (ou filtré), auquel participent les modes des couches inférieures, disons d'indice  $l' \leq l - 2$ , pour fixer les idées. Dans ce cas l'advection agit sur les vecteurs  $\mathbf{R}_m(t)$  et non plus sur les modes  $u_{l,m,\mathbf{G}}$ . En admettant cette procédure, et une décroissance des modes  $|u_{l,m,\mathbf{G}}| \sim Q^{-\alpha l} (\equiv k^{-\alpha})$  avec  $0 < \alpha < 1$ , ( $\alpha = 1/3$  dans la théorie K41), on voit qu'il est légitime de se restreindre à des couplages locaux entre

les différentes couches.

En limitant les couplages d'une échelle  $l$ , aux niveaux  $l-1$  et  $l+1$ , on obtient une dynamique se développant sur un arbre. Chaque noeud représente une boîte, repérée par son indice de couche  $l$  et sa position spatiale au moyen des vecteurs  $\mathbf{R}_m$  ; elle interagit avec  $Q^d$  plus petits cubes (seuls deux sont représentés sur la figure ci-dessous), et une seule structure du niveau  $l-1$ . Suivant E.D.Siggia, on suppose qu'il n'y a aucune interaction entre les boîtes adjacentes d'un même niveau.



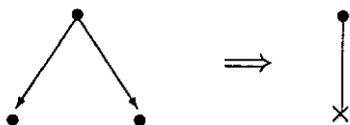
Plaçons nous au niveau  $l$  de l'arbre, sur un noeud particulier  $\mathbf{R}_m$ . La grande échelle (niveau  $l$ ) n'est sensible qu'à une moyenne sur l'ensemble de ce qui se passe dans les plus petites (niveau  $l+1$ ). La contribution correspondante dans les équations du mouvements peut se mettre sous la forme :

$$Q^{-d} \sum_{Q^d \text{ branches}} \exp(iQ^l \mathbf{G} \cdot \mathbf{R}_{m'}) u_{l+1 m' \mathbf{G}_1}^\beta(t) u_{l+1 m' - \mathbf{G}_1}^\gamma(t). \quad (1.21)$$

L'accélération des temps caractéristiques, ainsi que l'hypothèse d'indépendance des différentes branches, suggère de remplacer cette somme par une seule réalisation de la petite échelle, dont l'évolution rapide devant la dynamique du niveau  $l$ , doit redonner le bon effet collectif. On substitue à la moyenne (1.21) le terme effectif :

$$u_{l+1 \mathbf{G}_1}^\beta(t) u_{l+1 - \mathbf{G}_1}^\gamma(t), \quad (1.22)$$

correspondant à une boîte placée au centre du cube  $\mathbf{R}_m$ . L'opération peut se symboliser de la façon suivante :



Partant des plus petites échelles on procède de façon hiérarchique (en remontant l'arbre), à une réduction des variables effectives, pour aboutir finalement à une dynamique sur une chaîne. À ce stade on peut faire les commentaires suivants :

- laissons de côté les premières difficultés concernant la conservation de la quantité de mouvement, la condition d'incompressibilité et la localité, que nous avons déjà signalées plus haut. La dernière étape de simplification est sans aucun doute la plus sérieuse, cependant il est difficile d'en apprécier les conséquences pour l'intermittence ;
- la dynamique effective possède les mêmes lois de conservation que le problème initial ;
- le nombre de degrés de liberté croît à présent comme le logarithme du rapport d'échelle que l'on veut décrire, et donc comme  $\log R$ , si l'on s'intéresse à l'ensemble de l'intervalle inertiel ;
- il reste encore un grand nombre de degrés de liberté : variables vectorielles et vecteurs d'ondes multiples dans chaque couche. Compte tenu du degré d'arbitraire déjà présent, il est tentant de franchir une étape simplificatrice supplémentaire, c'est l'objet de la sous-section suivante.

### 1.3.2 Les modèles scalaires de cascade.

On ne retient à présent, dans chaque couche, plus qu'une seule variable dynamique  $u_n(t)$ , scalaire, réelle ou complexe. Chaque échelle n'est donc plus représentée que par un nombre d'onde  $k_n = k_0 Q^n$ . La valeur absolue (ou le

module) de la variable  $u_n$  peut être comprise comme une intensité caractéristique des fluctuations de vitesse à l'échelle  $l_n = k_n^{-1}$ , à l'intérieur d'un des sous ensembles définis par la décomposition statistique (1.11) ou bien encore, à un instant donné, comme l'activité moyenne à l'échelle  $l$  du modèle vectoriel de E.D.Siggia, c'est-à-dire  $|u_l(t)| \approx (\sum_{\mathbf{G}} |\mathbf{u}_{l,\mathbf{G}}|^2)^{1/2}$ .

Dans l'esprit des considérations qui précèdent, une dynamique possible pour les  $\{u_n\}$  sera de la forme :

$$\left(\frac{d}{dt} + k_n^2/R\right) u_n = \Gamma_{n,i,j} u_i u_j, \quad (1.23)$$

où les constantes de couplages  $\Gamma_{n,i,j}$ , vérifieront les conditions suivantes.

- i)  $\Gamma_{n,i,j}$  est symétrique dans les indices  $i, j$ .
- ii) L'énergie totale du système définie par  $E = \sum_n u_n^2/2$ , doit être conservée en l'absence de forçage et de dissipation, d'où la contrainte :  
 $\Gamma_{n,i,j} + \text{perm circ} = 0$ , pour tout  $n, i, j$ .
- iii) Plus généralement, si la quantité  $H = \sum_n g_n u_n^2/2$  doit être conservée, on a  $\Gamma_{n,i,j} g_n + \text{perm circ} = 0$ .
- iv) Les couplages sont non-nuls seulement pour  $i, j$  proches de  $n$ . Dans la pratique, on se restreindra à des couplages entre premiers ou seconds voisins.
- v)  $\Gamma_{n,i,j}$  croît comme  $k_n$  avec  $n$ , afin de respecter la hiérarchie des temps caractéristiques des équations de NS.
- vi) On peut encore demander que les hypothèses du théorème de Liouville,  $\partial \dot{u}_k / \partial u_k = 0$ , soient vérifiées par le noyau non-linéaire, ce qui s'exprime par les contraintes :  $\Gamma_{n,i,n} = 0$ , pour tout  $i$ .

Ce type de modèles a été originellement introduit par l'École Russe autour de Obukhov (sous l'étiquette "système de type hydrodynamique"), et appliqué à

un grand nombre de situations physiques différentes. Pour une revue de ces travaux on se reportera à l'article de E.B.Gledzer *et al* (1988).

Tout en restant dans la même classe de modélisation on peut choisir une variable dynamique complexe. Les équations du mouvement sont inchangées à une conjugaison complexe près du second membre de (1.23). On généralise aisément les conditions ci-dessus à cette nouvelle situation. Remarquons que dans ce cas le théorème de Liouville est toujours satisfait.

### Que peut-on apprendre de tels modèles ?

Avant de passer à l'analyse détaillée de certaines propriétés génériques de ce type de modélisation, arrêtons-nous un instant pour discuter ce qu'il est permis d'attendre d'une meilleure compréhension de tels systèmes, vis-à-vis de la turbulence, et de l'intermittence plus particulièrement.

Repérons tout d'abord les points faibles : le plus évident tient à la simplification drastique de la complexité géométrique du problème de départ qu'ils proposent, en n'autorisant plus qu'un seul chemin pour la cascade. De plus ces systèmes hydrodynamiques possèdent un grand degré d'arbitraire : choix d'une variable réelle ou complexe, portée des couplages, conservation d'une ou plusieurs quantités par les non-linéarités. Finalement on peut craindre *a priori* des artefacts liés à la discrétisation et à la dimension un de la chaîne.

Venons en maintenant aux atouts : ces modèles gardent certains ingrédients essentiels de la dynamique. Interprétés comme une description statistique de l'intensité caractéristique de la turbulence à un instant donné, ils illustrent le mécanisme local de transfert d'énergie, et donnent des exemples déterministes, de processus multiplicatifs pouvant conduire à de larges fluctuations, sources d'intermittence. Enfin, d'un point de vue théorique, ces chaînes scalaires apparaissent comme des modèles minimaux de systèmes turbulents, dont on peut espérer obtenir une théorie statistique effective, fondée sur des objets dynamiques clairement identifiés, ce qui, malgré les progrès récents, fait en-

### 1.3 LES MODÈLES EN COUCHES.

31

core défaut pour la vraie turbulence.

## 1.4 Appendice

Nous donnons ci-après un résultat utile de la théorie des larges déviations, tel qu'il apparaît lorsque l'on envisage un processus multiplicatif aléatoire. Nous nous sommes largement inspirés de la description qu'en donne U. Frisch (1995b). Pour illustrer notre propos, nous nous intéressons à la statistique du taux de transfert d'énergie que l'on écrit dimensionnellement :  $\varepsilon_n = \alpha_{l_n}^3 / l_n$ , avec les notations de la sous-section 1.2.3. Chaque étape de la cascade est décrite par la transformation :

$$l_{n+1} = l_n / Q \text{ et} \quad (1.24)$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n W_n. \quad (1.25)$$

Partant du niveau zéro (grande échelle), on a après  $n$  pas de cascade

$$l_n = l_0 Q^{-n} \text{ et} \quad (1.26)$$

$$\varepsilon_n = \varepsilon_0 W_1 \cdots W_n, \quad (1.27)$$

où les  $W_i$  sont des multiplicateurs aléatoires indépendants, strictement positifs, et dont le logarithme en base  $Q$  est distribué selon une loi unique :  $H(\log W)$ , dont on suppose l'existence de moments à tous les ordres. La constance du flux moyen d'énergie impose :

$$\langle \varepsilon_n \rangle = \varepsilon_0, \quad \text{pour tout } n > 0,$$

c'est-à-dire  $\langle W \rangle = 1$ .

Soit à décrire la statistique de  $\varepsilon_n$  pour  $n$  grand. Pour cela posons  $S_n \equiv \log(\varepsilon_n / \varepsilon_0) = \sum_{i=1}^n \log W_i$ . Il s'agit d'une somme de variables aléatoires indépendantes, de moyenne nulle. La densité de probabilité d'avoir  $S_n$  entre  $X$  et  $X + dX$ , est donnée de façon générale, par le produit de convolution :

$$P(S_n = X) = H^{*n}(X).$$

Lorsque  $n$  tend vers l'infini, il est bien connu que les fluctuations d'ordre 1 de la variable normalisée  $S_n / \sqrt{n}$  ont une distribution gaussienne. Cependant

quel que soit  $n$  fini, il existe des réalisations du processus conduisant à des déviations beaucoup plus larges, typiquement  $S_n/n \sim \mathcal{O}(1)$ , qui ne peuvent pas être décrites par une loi normale. Dans d'autres contextes, ces événements très rares ne sont pas importants ; en revanche, eu égard au caractère multiplicatif du processus, si petite que soit leur probabilité, ils deviennent essentiels pour décrire les moments élevés de la variable  $\varepsilon_n/\varepsilon_0 \equiv e^{S_n}$ . Le théorème des larges déviations assure que la probabilité d'avoir  $S_n/n = x$  (d'ordre 1), lorsque  $n$  tend vers l'infini, se comporte comme :

$$P(S_n = nx) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \exp(ns(x)), \quad s(x) \leq 0 \text{ pour tout } x, \quad (1.28)$$

où  $s(x)$ , est la fonction dite de Cramér du processus aléatoire, suivant la notation utilisée par U.Frisch (1995b). On l'obtient à partir de la fonction caractéristique :

$$Z(\beta) = \langle \exp(-\beta \log_Q W) \rangle, \text{ prise au point } i\beta,$$

de la même façon que s'obtient l'entropie en mécanique statistique à partir de la fonction de partition :

$$s(x) = \inf_{\beta} \{ \log Z(\beta) + \beta x \}.$$

La fonction  $s(x)$  se déduisant de  $\ln Z(\beta)$ , par une transformation de Legendre, on a la relation inverse usuelle :

$$\log Z(\beta) = \sup_x \{ s(x) - \beta x \}.$$

Montrons maintenant comment, dans ce contexte, émerge le comportement multifractal usuel, tel que l'ont proposé pour la première fois G.Parisi *et al* (1985). Après  $n$  pas de cascade on a,  $\varepsilon_n/\varepsilon_0 = e^{nx}$  avec la probabilité :

$$P(S_n = nx) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} e^{ns(x)},$$

si bien que le comportement dominant des moments, obtenu par un argument de point-col, vérifie :

$$\langle (\varepsilon_n/\varepsilon_0)^{p/3} \rangle \sim Q^{n\sigma_p} = (l_n/l_0)^{-\sigma_p},$$

avec  $\sigma_p = \sup_x \{xp/3 + s(x)\} / \log Q$ . Les exposants anormaux,  $\zeta_p$ , définis dans la section 1.2.3, sont donnés ici par :  $\zeta_p = p/3 - \sigma_p$ .

### Le modèle de Z.S.She et E.Lévêque

Z.S.She (1991) a proposé que la turbulence aux petites échelles puisse être séparée en deux composantes de natures différentes : d'une part un ensemble de structures filamenteuses très intenses et "cohérentes", et d'autre part l'ensemble des fluctuations plus moyennes et beaucoup plus désordonnées. Pour cette raison, ce modèle a été qualifié de "modèle à deux fluides". Les simulations numériques présentées par Z.S.She *et al* (1991), donnent un certain poids à cette image. Le modèle de Z.S.She et E.Lévêque, proprement dit, consiste à décrire au niveau statistique l'interaction entre ces deux composantes de la turbulence, en proposant un modèle hiérarchique des intensités de fluctuation pour l'intervalle inertiel, basé sur une hypothétique symétrie cachée des équations de NS. Il est apparu par la suite (cf Z.S.She *et al* (1995)), que cette description était en fait équivalente à supposer l'existence d'un processus multiplicatif aléatoire particulier. Plus précisément, un processus log-poissonien qui, pris au pied de la lettre, suppose un mécanisme dynamique de quantification de la cascade d'énergie !

Soit un mécanisme conduisant à la formation d'une structure singulière. Supposons que sa signature sur le taux de transfert d'énergie puisse se mettre sous la forme

$$\varepsilon_{l_2} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{3\gamma} \varepsilon_{l_1}, \text{ pour tout } l_2 < l_1. \quad (1.29)$$

L'exposant  $\gamma > 0$  code donc le comportement d'échelle résultant de la formation d'une structure cohérente, que ces auteurs supposent être la plus singulière, et qu'ils associent à des filaments de vorticité. La présence d'un milieu ambiant désordonné va contrarier cette amplification par l'ajout de défauts de croissance, dont l'amplitude ne peut prendre que des valeurs discrètes, puissances ent res d'un même quantum  $\beta < 1$ . Le processus multiplicatif aléatoire

prend alors la forme :

$$\varepsilon_{l_2} = W_{l_2 l_1} \varepsilon_{l_1}, \quad \text{avec } W_{l_2 l_1} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{3\gamma} \beta^m, \quad (1.30)$$

où  $m$  est un nombre entier, obéissant à une loi de Poisson :

$$P(X = m) = \exp(-\lambda_{l_2 l_1}) \frac{\lambda_{l_2 l_1}^m}{m!}.$$

Le logarithme de  $W$  a ainsi une statistique poissonnienne, d'où le nom donné à ce type de processus. Le rapport d'échelle  $l_1/l_2$  étant fixé, le nombre moyen de défauts :  $\langle X \rangle = \lambda_{l_2 l_1}$  doit être tel que  $\langle W_{l_2 l_1} \rangle = 1$ , pour satisfaire la conservation du flux moyen d'énergie. Il en résulte la relation :

$$\lambda_{l_2 l_1} = \frac{3\gamma}{1-\beta} \log\left(\frac{l_1}{l_2}\right). \quad (1.31)$$

On arrive alors sans peine à la forme suivante pour les exposants  $\sigma_p$  :

$$\sigma_p = \gamma p - 3\gamma \frac{1 - \beta^{p/3}}{1 - \beta}. \quad (1.32)$$

Les valeurs des paramètres avancées dans l'article original, deviennent ici :  $\gamma = 2/9$  et  $\beta = 2/3$ .

*NB* : nos notations diffèrent sensiblement de celles employées dans les articles originaux, mais elles seront adoptées de façon cohérente tout au long de ce manuscrit.



## Chapitre 2

# La phénoménologie des modèles en couches. Application à l'étude de l'intermittence.

Dans ce chapitre il est principalement question du modèle ON pour lequel il n'existait pas dans la littérature d'analyse détaillée de la dynamique. Toutefois, nous avons jugé bon de redonner ici, sous un regard un peu différent, quelques résultats connus sur le modèle GOY en renvoyant également le lecteur à la littérature existante. La première section nous permet de définir les équations des deux modèles et d'en préciser les différents paramètres. Nous présentons aussi leur limite du continu qui, à l'ordre le plus bas, se réduit dans les deux cas à une équation de Burgers conduisant à la formation de chocs. Dans la deuxième section nous décrivons les propriétés du point fixe  $K41$  et montrons, à l'aide d'une approximation quasi statique, comment un scénario à la Ruelle Takens conduit au chaos. Enfin dans la troisième section nous exposons rapidement les manifestations statistiques de l'intermittence, obtenues numériquement sur le modèle ON, en insistant sur la comparaison avec le modèle GOY. Nous renvoyons le lecteur désireux de plus de détails, au preprint accompagnant cette thèse.

## 2.1 Définition des équations et leur limite du continu.

D'une manière générale les équations pour tout modèle scalaire peuvent se mettre sous la forme :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{N}[\mathbf{u}] + \mathbf{F} - \mathbf{D}. \quad (2.1)$$

Le vecteur  $\mathbf{u}$  a pour composantes les variables  $u_n$ , définies dans la sous-section 1.3.2, qui peuvent être réelles ou complexes. En principe l'indice  $n$  court jusqu'à l'infini, cependant la présence d'une dissipation non nulle permet de ne considérer qu'un ensemble fini de variables :  $0 \leq n \leq N$ . Les termes  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{D}$  contiennent respectivement les non-linéarités, un forçage extérieur et la dissipation. Dans toute la suite du travail (sauf mention explicite du contraire) on se restreint à un forçage déterministe agissant sur la couche d'indice  $n = 0$  et à une dissipation visqueuse ordinaire.

### Le modèle Obukhov-Novikov (ON).

Dans un souci de simplicité nous avons commencé notre étude par un modèle dont les variables réelles ne sont couplées qu'entre plus proches voisines. L'énergie du système étant définie par  $E = \frac{1}{2} \sum_n u_n^2$ , le noyau non-linéaire le plus général qu'il est possible de former admet les composantes :

$$N_n[\mathbf{u}] = \alpha Q^{2/3} \{k_n u_{n-1} u_n - k_{n+1} u_{n+1}^2\} + \beta \{k_n u_{n-1}^2 - k_{n+1} u_{n+1} u_n\}. \quad (2.2)$$

Expression également valable pour  $n = 0$  et  $n = N$ , pourvu que  $u_{-1}$  et  $u_{N+1}$  soient supposés nuls.

Ce modèle apparaît comme la superposition linéaire de deux chaînes initialement introduites par A.M. Obukhov (1971) et V.I. Desniansky *et al* (1974), avec les poids respectifs  $\alpha Q^{2/3}$  et  $\beta$ . On suppose en outre  $\alpha \geq 0$ ;  $\beta \geq 0$ , (T. Bell *et al* (1978) examinent le cas  $\alpha\beta \leq 0$  avec  $\beta \geq 0$ ) et sans perte de généralité on impose  $\alpha + \beta = 1$ . Ces non-linéarités sont également celles

obtenues par E.D.Siggia (1978) comme une simplification de son modèle vectoriel (E.D.Siggia (1977)). Cependant il contraignait les variables  $u_n$  à rester positives.

Les termes  $k_n u_{n-1} u_n$  et  $k_n u_{n-1}^2$  modélisent l'effet de cisaillement des structures devant nourrir l'activité de la couche  $S_n$  ; on remarque que le dernier est plus favorable au transfert que le premier car il ne dépend pas de l'état de  $u_n$ . Les autres termes agissent pour transférer conservativement l'énergie vers les plus grands vecteurs d'onde. On distingue naturellement trois groupes d'échelles de longueur : les échelles forcées, ici réduites à la seule couche  $S_0$ , les échelles inertielles d'indice  $1 \ll n \ll n_d$ , où  $n_d = 4 \log R / 3 \log Q$  est l'indice de la couche dissipative évaluée sur la base du comportement K41 (cf section 1.2), et enfin les échelles dissipatives pour  $n \gg n_d$ .

Dans la limite où  $\nu = f = 0$ , la conservation de l'énergie totale apparaît le plus clairement en écrivant un bilan pour l'énergie cinétique  $E_n$  portée par une couche d'indice  $n \geq 1$  :

$$\frac{dE_n}{dt} = \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}, \quad (2.3)$$

$$\text{où } E_n = \frac{1}{2} u_n^2,$$

$$\text{et } \varepsilon_n = k_n \left( \alpha Q^{2/3} u_{n-1} u_n^2 + \beta u_{n-1}^2 u_n \right), \quad (2.4)$$

est le flux d'énergie entrant dans la couche  $n$ .

En présence de forçage et pour une viscosité non nulle, il va s'établir un régime statistiquement stationnaire, où l'énergie injectée aux grandes échelles se dissipe aux petites. Le flux moyen d'énergie dans les couches inertielles (où la viscosité joue un rôle négligeable) est alors constant puisqu'on peut écrire :

$$\left\langle \frac{dE_n}{dt} \right\rangle = 0 = \langle \varepsilon_n \rangle - \langle \varepsilon_{n+1} \rangle, \quad (2.5)$$

où  $\langle \dots \rangle$  désigne une moyenne temporelle. Puisque  $\varepsilon_n$  est une fonction cubique des  $u_n$ , une approximation de champ moyen conduite dans la logique de la théorie de Kolmogorov suggère  $u_n \stackrel{stat}{\sim} k_n^{-1/3}$ . Pour étudier les déviations par

rapport à ce champ moyen, et en particulier les éventuelles lois d'échelle anormales, il est commode d'introduire les nouvelles variables  $\phi_n$ , définies par la relation :

$$u_n = k_n^{-1/3} \phi_n. \quad (2.6)$$

Les équations pour  $\phi$  s'écrivent :

$$\frac{d\phi}{dt} = k_0 Q^{2/3} \mathbf{N}[\phi] + \mathbf{F} - \mathbf{D}, \quad (2.7)$$

et la  $n^{\text{ème}}$  composante de  $\mathbf{N}$  est maintenant :

$$N_n[\phi] = Q^{2n/3} \left[ (\alpha \phi_{n-1} \phi_n + \beta \phi_{n-1}^2) - (\alpha \phi_{n+1}^2 + \beta \phi_n \phi_{n+1}) \right]. \quad (2.8)$$

Afin de bien préciser les paramètres de contrôle de la dynamique, il est utile d'adimensionner les équations. En particulier, il est possible de rendre le forçage ainsi que le coefficient devant la non-linéarité, égaux à un par une redéfinition des échelles de temps et de vitesse. Donnons enfin la forme des équations que nous avons effectivement intégrées numériquement :

$$\frac{d\phi_n}{dt} = N_n[\phi] + \delta_{n,0} - \frac{Q^{2n}}{R} \phi_n. \quad (2.9)$$

Le nombre de Reynolds est défini par  $R = 1/\nu \sqrt{f Q^{2/3}/k_0^3}$ .

La physique du modèle est donc fixée par trois paramètres : le pas de discrétisation  $Q$  (ou pas de la cascade), la proportion d'interaction de type Novikov  $\beta$ , et le nombre de Reynolds  $R$ . Le nombre  $N$  de couches est indifférent, pourvu qu'il soit assez grand pour assurer un intervalle dissipatif propre à faire relaxer toutes les fluctuations.

### Le modèle de Gledzer-Ohkitani-Yamada.

Dans la suite de notre travail nous avons aussi considéré un autre modèle, beaucoup plus étudié ces dernières années. Il s'agit d'une chaîne originellement introduite par E.B.Gledzer (1973) pour l'étude de la turbulence en dimension deux, qui a été adaptée et popularisée par les physiciens Japonais

M.Yamada *et al* (1988) (voir aussi K.Okhitani *et al* (1989)), pour le cas de la turbulence en dimension trois. Ils ont en particulier mis en évidence une phase de dynamique chaotique exhibant de l'intermittence, dont les propriétés "multifractales" ont été largement étudiées par la suite. Il est apparu que pour certains jeux de paramètres, les exposants d'échelle décrivant ce régime étaient singulièrement proches de ceux mesurés jusqu'à ce jour dans les expériences de vraie turbulence. Une compréhension satisfaisante de ce système manque encore.

Ce modèle considère des variables dynamiques complexes, les couplages s'étendent aux seconds plus proches voisins. En plus de l'énergie, les non-linéarités conservent une seconde quantité, en l'occurrence non signée, qui moyennant un ajustement adéquat des paramètres, s'apparente dimensionnellement à l'hélicité également conservée par les équations d'Euler.

La dynamique du modèle admet la représentation suivante :

$$\frac{d}{dt}\phi_0 = (2 - \epsilon)[1 - \phi_1^*\phi_2^*] - \frac{\phi_0}{R}, \quad (2.10a)$$

$$\frac{d}{dt}\phi_1 = Q^{\frac{2}{3}}[\phi_0^*\phi_2^* - \phi_2^*\phi_3^*] - \frac{Q^2}{R}\phi_1, \quad (2.10b)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\phi_n &= Q^{\frac{2n}{3}}[(1 - \epsilon)\phi_{n-1}^*\phi_{n-2}^* + \epsilon\phi_{n-1}^*\phi_{n+1}^* - \phi_{n+1}^*\phi_{n+2}^*] \\ &\quad - \frac{Q^{2n}}{R}\phi_n, \quad \text{pour tout } 2 \leq n \leq N, \end{aligned} \quad (2.10c)$$

avec les conditions de bord  $\phi_{N+1} = \phi_{N+2} = 0$ .

Le noyau non-linéaire dépend, outre de  $Q$  d'un paramètre ajustable  $\epsilon$  pouvant varier entre zéro et un. Le couplage en  $(1 - \epsilon)$  favorise de nouveau le transfert vers les petites échelles. Nous avons fait usage des nouvelles variable  $\phi_n$ , conformément à la définition (2.6). Les couplages possèdent une symétrie interne qui autorise sans perte de généralité la prise d'un forçage réel, ici placé sur la couche d'indice  $n = 0$ . On vérifie en effet sans peine que la transformation de

jauge :

$$\phi_{3n} \rightarrow e^{i\theta_0} \phi_{3n}, \quad (2.11a)$$

$$\phi_{3n+1} \rightarrow e^{i\theta_1} \phi_{3n+1}, \quad (2.11b)$$

$$\phi_{3n+2} \rightarrow e^{-i(\theta_0+\theta_1)} \phi_{3n+2}, \quad (2.11c)$$

laisse inchangée les équations pour toutes les valeurs de  $\theta_0$  et  $\theta_1$ , hormis l'apparition d'un déphasage du forçage  $F_0 \rightarrow \exp(-i\theta_0)F_0$ . Nous introduisons également à ce niveau, l'expression du taux de transfert d'énergie entrant dans la couche d'indice  $n$  pour  $n \geq 2$ .

$$\varepsilon_n = \Re [(1 - \varepsilon)\phi_{n-2}\phi_{n-1}\phi_n + \phi_{n-1}\phi_n\phi_{n+1}], \quad (2.12)$$

où  $\Re$  désigne la partie réelle.

### La limite du continu.

Avant de se lancer dans l'analyse de ces chaînes discrètes, il est opportun de tenter une limite du continu pour voir ce qu'il reste de la physique à cet ordre d'approximation. Concentrons-nous sur le cas du modèle ON en oubliant le forçage et la dissipation. Introduisons les variables  $\xi = \log k$  et  $\delta = \log Q$  ;  $\phi_n(t)$  devient la fonction  $\phi(\xi, t)$ . En développant à l'ordre deux en  $\delta$  dans la non-linéarité (2.8), il vient:

$$\partial_t \phi = -3\delta e^{2\xi/3} \left[ (\alpha + \beta)\phi \partial_\xi \phi + \frac{(\alpha - \beta)}{3} \delta \left( (\partial_\xi \phi)^2 + \frac{\phi}{2} \partial_{\xi\xi} \phi \right) \right] + o(\delta^2), \quad (2.13)$$

avec en outre la relation  $\alpha + \beta = 1$ .

Effectuons dans cette équation le changement de variable défini par  $x = 1 - \exp(-2\xi/3)$  et  $t' = 2\delta t$ . Nous obtenons ainsi la limite du continu et sa première correction.

$$\partial_{t'} \phi + \phi \partial_x \phi = \delta A \left( \phi \partial_x \phi - (1 - x) \left[ (\partial_x \phi)^2 + \frac{\phi}{2} \partial_{xx} \phi \right] \right) + o(\delta), \quad (2.14)$$

où  $A = 2(\alpha - \beta)/9$  et  $x \in [0, 1]$

A l'ordre le plus bas, nous reconnaissons une équation de Burgers sur un intervalle de longueur finie ; elle décrit l'advection de "particules" distribuées aux différentes échelles  $\log k = -3 \log(1 - x)/2$ , avec les vitesses  $\phi(x, t')$ . La longueur finie de l'intervalle assure qu'une telle particule, "cascade" en un temps fini vers des échelles infiniment petites. La prise en compte du forçage revient à placer un réservoir injectant des particules au système tandis que la dissipation les freine au delà de l'échelle de Kolmogorov.

Notons qu'à cet ordre d'approximation le modèle GOY devient également une équation de Burgers, mais cette fois complexe :

$$\partial_t \phi + \phi^* \partial_x \phi^* = 0. \quad (2.15)$$

Il est bien connu (J.M.Burgers (1974)) que les solutions de l'équation de Burgers réelle ont tendance à développer des chocs (voir ci-dessous pour une discussion rapide du cas complexe). De telles singularités n'ont pas de sens pour le problème discret, et le système doit trouver un moyen pour stabiliser ce front. La nature discrète du problème resurgit donc nécessairement. Plus loin dans ce travail, nous verrons que ces chaînes discrètes conduisent génériquement à la formation de solutions singulières, associées à la propagation d'un front autosimilaire atteignant en un temps fini des échelles de longueur infiniment petites. La structure précise de la singularité va dépendre du détail des interactions, mais les comportements asymptotiques seront les mêmes pour tous les modèles. On peut être tenté de voir dans ces solutions les traces des chocs.

Enfin mentionnons que l'équation de Burgers ne développe pas d'intermittence sur la variable  $\phi$ . En effet, on peut écrire, en régime stationnaire (et en l'absence de chocs) :

$$\langle \phi^n \partial_t \phi \rangle = 0 = -\langle \phi_{n+1} \partial_x \phi \rangle = -\frac{1}{n+2} \partial_x \langle \phi^{n+2} \rangle,$$

ce qui montre que les moments à tous les ordres n'ont aucune dépendance avec

l'échelle.

Envisageons à présent le cas complexe. Après multiplication de l'équation (2.15) par  $\frac{3}{2}\phi^{1/2}$ , on arrive à :

$$\partial_t \phi^{3/2} + |\phi| \partial_x \phi^{3/2} = 0. \quad (2.16)$$

Si l'on pose  $X = \Re \phi^{3/2}$  et  $Y = \Im \phi^{3/2}$ , où  $\Re$  et  $\Im$  désignent respectivement les parties réelle et imaginaire, il vient finalement le système d'équations suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_t X + |\phi| \partial_x X &= 0 \\ \partial_t Y - |\phi| \partial_x Y &= 0. \end{aligned}$$

On a affaire à un système hyperbolique dont les deux invariants de Riemann  $X$  et  $Y$  sont advectionnés avec 2 vitesses caractéristiques opposées  $\pm |\phi|$  (où  $|\phi| = (X^2 + Y^2)^{1/3}$ ). Cette représentation permet de faire le lien avec la physique plus familière de l'équation de Burgers réelle :

- si  $\phi$  est réel positif, où de phase congrue à 0 modulo  $2\pi/3$ , alors  $X \neq 0$  et  $Y = 0$ . On retrouve la tendance des excursions positives à descendre les échelles.
- si  $\phi$  est réel négatif, ou de phase congrue à  $\pi/3$  modulo  $2\pi/3$ , alors  $X = 0$  et  $Y \neq 0$ . On retrouve la tendance des excursions négatives à remonter les échelles.
- enfin, si  $\phi$  est complexe et arbitraire, alors  $X$  et  $Y$  sont tous deux non nuls. Mais comme ces composantes ont tendance à se séparer l'une de l'autre (vitesses de propagation opposées), on pressent d'une part que les chocs continueront de se produire et d'autre part qu'ils feront intervenir en première approximation des configurations réelles de  $\phi$ .

## 2.2. PROPRIÉTÉS STATIQUES ET TRANSITION VERS LE CHAOS DU MODÈLE ON.

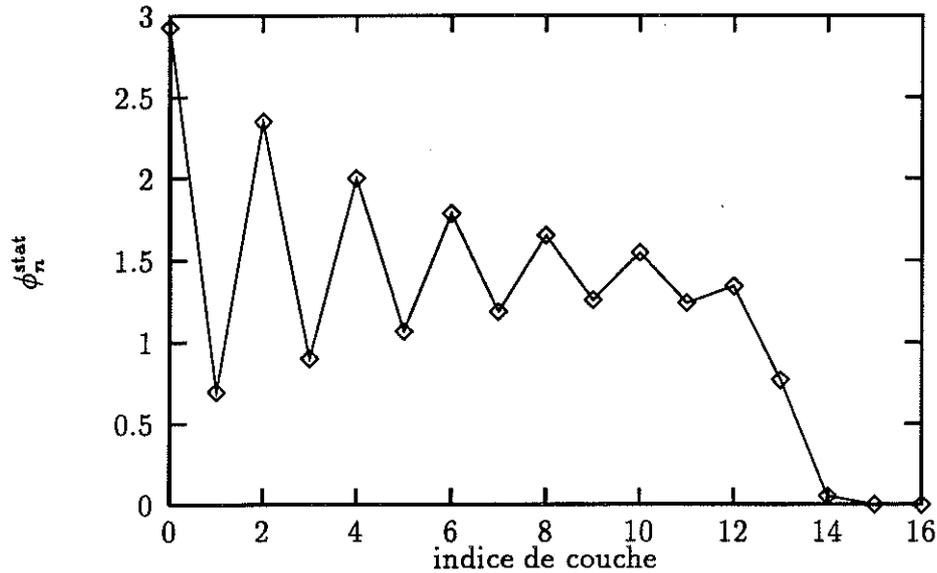


Figure 2.1 : Configuration statique pour les valeurs des paramètres définies dans le texte.

## 2.2 Propriétés statiques et transition vers le chaos du modèle ON.

Nous avons vu qu'en présence de forçage et de dissipation, un régime statistiquement stationnaire redonne, dans une approximation de champ moyen, un comportement conforme à la théorie K41. Il existe en fait une solution statique exacte exhibant dans l'intervalle inertiel ce comportement d'échelle. Représenté dans les variables  $\phi_n$ , un tel point fixe est donné sur la figure 2.1. Cette configuration des couches est solution de :

$$\frac{d\phi_n}{dt} = 0 = N_n[\phi] + \delta_{n,0} - D_n, \quad (2.17)$$

pour  $n = 0, 1, \dots, N$ , et donne dans l'intervalle inertiel un flux d'énergie (2.4)  $\varepsilon_n = cte$ . La solution représentée sur la figure 2.1 est obtenue avec les paramètres :  $Q = 2$  ;  $R = 10^5$  et  $N = 17$  ;  $\beta = 0.348$ . Dans tous les calculs numériques qui vont suivre seul le dernier paramètre de contrôle change. L'échelle de Kolmogorov porte l'indice  $n_d = 12$ .

Les oscillations qui se superposent à la solution  $\phi_n = 1$ , dans l'intervalle inertiel, sont la signature du caractère discret du système, elles ne peuvent être évitées que pour des valeurs exceptionnelles des paramètres. Leur amplitude résulte de la manière précise dont la solution opère le passage de l'intervalle dissipatif vers l'intervalle inertiel. Néanmoins elles n'affectent pas des grandeurs physiques comme le flux d'énergie.

L'équilibre des termes dominants dans (2.17) pour  $n \gg n_d$  est satisfait par la forme suivante du spectre :

$$\phi_n = \frac{Q^{\frac{4(n-n_d+2)}{3}}}{\beta} \exp(-a 2^{(n-n_d)}), \quad (2.18)$$

où  $a > 0$  est un paramètre libre. Une façon de calculer une configuration statique consiste à adopter la paramétrisation ci-dessus, résoudre itérativement (2.17), à partir de la couche  $N$  jusqu'à la couche 1, en ne gardant du trinôme en  $\phi_{n-1}$  que la racine positive à chaque étape. On obtient alors un ensemble de nombres  $\phi_0(a), \phi_1(a), \dots, \phi_N(a)$ . L'équation statique sur la première couche donne enfin une condition de solubilité qui fixe  $a$  et achève ainsi la détermination du point fixe.

Oublions à présent cette condition et autorisons  $a$  à varier. Pour bien comprendre comment ce paramètre influence la forme du spectre nous donnons sur la figure 2.2 l'évolution en fonction de  $a$  de quelques couches, solutions statiques, dans l'intervalle inertiel. Les ventres et les nœuds où toutes les courbes se croisent, montrent que  $a$  pilote l'apparition des oscillations pair-impair vues dans le point-fixe, en positionnant par rapport au réseau la région de cross-over entre les intervalles dissipatif et inertiel. La périodicité ainsi que la décroissance exponentielle de l'amplitude sont attendues à partir de la forme (2.18).

On peut également se servir de ce degré de liberté, comme d'une coordonnée collective pour décrire dans une approximation quasi-statique, l'évolution lente du spectre faisant suite à la déstabilisation des premiers modes autour du point fixe. En effet il est tentant de penser que ce sont les modes les plus lents, portés

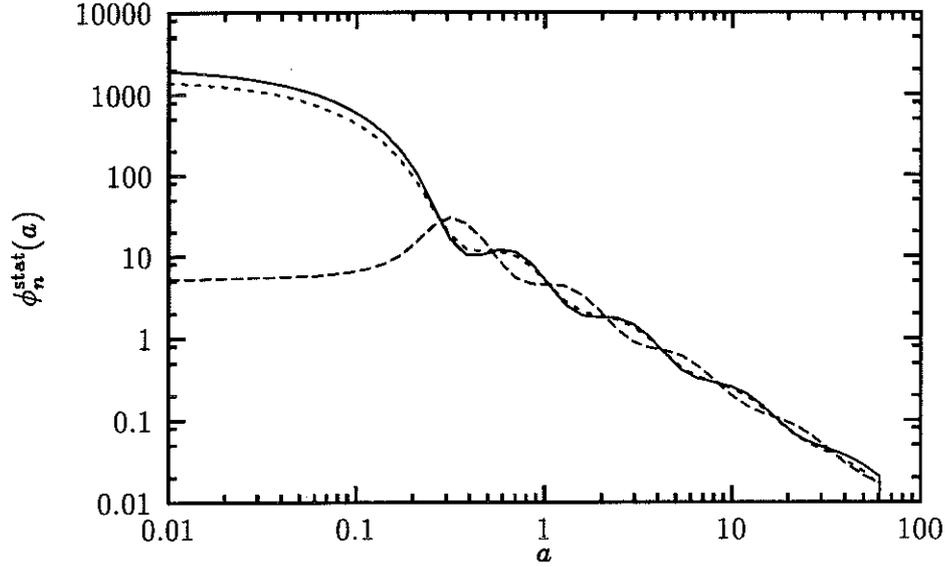


Figure 2.2 : Évolution en fonction de  $a$  des solutions statiques pour  $n = 7, 8, 9$  et  $\beta = 0.34825$ .

par les grandes échelles, qui se déstabilisent les premiers. Dans ce cas de figure les petites échelles, beaucoup plus rapides, vont répondre adiabatiquement en gardant une configuration quasi-statique.

La manière de mettre en œuvre une telle dynamique effective est la suivante : on ne garde que quelques degrés de liberté  $\phi_0 \cdots \phi_{n_c}$  auxquels on ajoute  $a$  et tous les autres sont décrits par les solutions de l'itération statique. Les équations vérifiées par  $\phi_n$  pour  $0 \leq n \leq n_c$  sont inchangées par rapport au problème complet, si ce n'est que l'on doit remplacer  $\phi_j$  par  $\phi_j^{stat}$  partout où  $j > n_c$ . La dynamique pour  $a$  est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{da}{dt} \left( \frac{d\phi_{n_c+1}^{stat}}{da} \right) = N_{n_c+1}[\phi_{n_c}; \phi_{n_c+1}^{stat}; \phi_{n_c+2}^{stat}] - \frac{Q^{2(n_c+1)}}{R} \phi_{n_c+1}^{stat}. \quad (2.19)$$

La présence du terme  $(d\phi_{n_c+1}^{stat}/da)$  va provoquer des difficultés si  $a$  est entraîné vers des valeurs où ce facteur s'annule. Nous avons pu vérifier qu'une telle dynamique permet de suivre l'évolution du système près du point fixe, et cesse

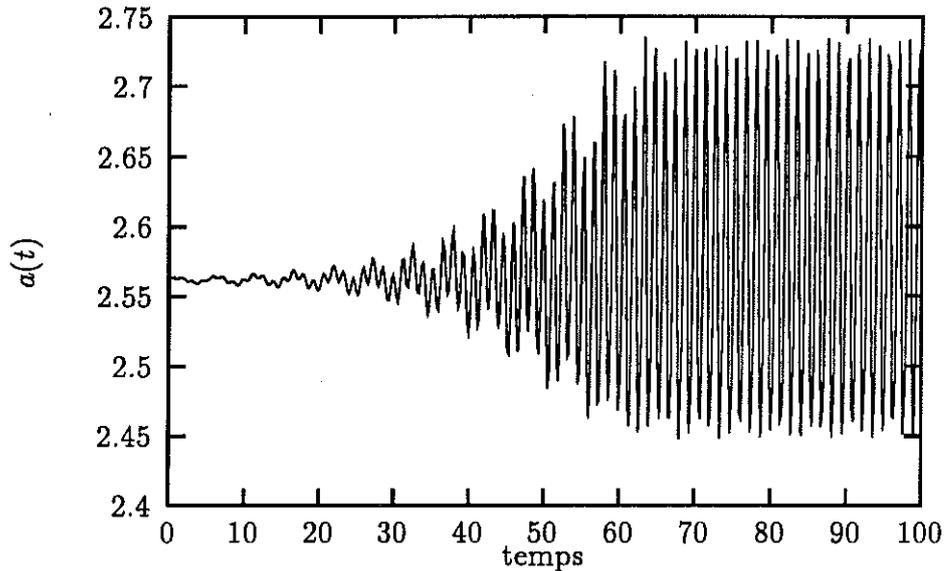


Figure 2.3 : Évolution de la coordonnée collective pour  $\beta = 0.353$ .

d'être valable lorsque l'on rentre dans le régime chaotique. Plus précisément, avec six degrés de liberté, la dynamique effective va d'abord reproduire la bifurcation de Hopf conduisant à la déstabilisation du point fixe pour  $\beta \leq 0.355$ . Par exemple pour  $\beta = 0.353$ , la coordonnée collective  $a$  présente des oscillations à un mode autour de la valeur  $a_{pt\,fix}$  définissant le point fixe à cette valeur de  $\beta$ , comme le montre la figure 2.3.

Quand  $\beta$  diminue encore, un régime bipériodique s'installe tel que celui représenté sur la figure 2.4 pour  $\beta = 0.35$ . Jusqu'à  $\beta = 0.34875$ , le spectre évolue de façon cohérente autour du point fixe. En revanche pour  $\beta = 0.34825$ , la dynamique effective ne peut plus être utilisée au delà d'un temps fini. L'adjonction de modes supplémentaires n'arrange rien. Le système évolue toujours vers un état où  $a$  devient suffisamment grand pour que l'on rencontre le premier point tel que  $d\phi_{n_c+1}^{stat}/da = 0$ . Les différents seuils sont en parfait accord avec ceux que l'on peut déduire de la dynamique complète. Nous n'avons pas cherché à pousser plus loin cette approche. Elle nous montre en tout cas que la dynamique pleinement non-linéaire, même très proche de la transition

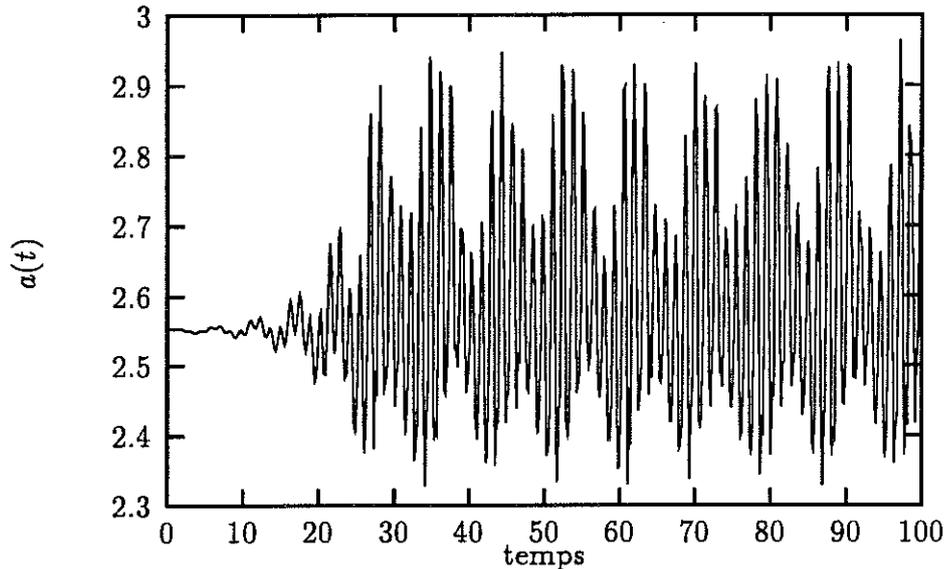


Figure 2.4 : Évolution de la coordonnée collective pour  $\beta = 0.35$ .

détruit complètement la configuration statique, qui existe pourtant pour toutes les valeurs de  $\beta > 0$ .

Le cas du modèle GOY est bien documenté dans la littérature, citons L.Biferale *et al* (1995a), N.Schörghofer *et al* (1995), L.P.Kadanoff *et al* (1996). Tous les points fixes de type K41 du modèle GOY complexe sont essentiellement réels positifs. C'est à dire que toute phase éventuelle dans la configuration statique peut être éliminée modulo une transformation de symétrie de jauge décrite en (2.11). Lorsque le nombre de couches est suffisant pour décrire correctement les petites échelles, le point fixe ne dépend plus que de  $Q$ ,  $\varepsilon$ ,  $R$ . La transition vers le chaos a été étudiée pour la première fois par L.Biferale *et al* (1995a). Dans un travail récent, L.Biferale *et al* (1995b) sont revenus sur ce sujet en proposant un scénario de destabilisation du point fixe, qui fait jouer un rôle important à la seconde quantité conservée. La prédiction qui en résulte pour le seuil de transition est en très bon accord avec les investigations numériques du groupe de Chicago : N.Schörghofer *et al* (1995), L.P.Kadanoff *et al* (1996).

### 2.3 Intermittence : comparaison des modèles ON et GOY.

Dans la phase de dynamique non-linéaire le transfert moyen d'énergie  $\langle \varepsilon_n \rangle$  est positif sur toutes les couches. Mais maintenant  $\varepsilon_n$  présente de grosses fluctuations temporelles et chaotiques. Devenant négatif, il entraîne une remontée d'énergie vers les grandes échelles ; au contraire ses grandes excursions positives traduisent une forte intensification de l'activité. Ces fluctuations sont d'autant plus larges et brèves que l'échelle est petite. La dynamique de ce système présente donc une certaine forme d'intermittence. Pour la caractériser au niveau statistique, il est commode de calculer les quantités :

$$\Sigma_{n,p} = \langle |\varepsilon_n|^{p/3} \rangle, \quad \text{pour } p \text{ entier}, \quad (2.20)$$

qui présentent l'avantage par rapport à des grandeurs comme  $\langle \phi_n^p \rangle$ , d'être exemptes des artefacts liés à la discrétisation des échelles dans les modèles en couches.

Résumons les résultats présentés, avec tous les détails utiles, dans la section III du preprint : les différents  $\Sigma_{n,p}$  exhibent de belles lois d'échelle sur tous l'intervalle inertiel. On définit alors les exposants  $\sigma_p$  associés :

$$\Sigma_{n,p} \sim k_n^{\sigma_p}, \quad \text{pour } 5 \leq n \leq 10. \quad (2.21)$$

Les  $\sigma_p$  donnent directement les corrections d'exposant par rapport à K41, ils se relient aux traditionnels exposants  $\zeta_p$  pour la vitesse, via  $\zeta_p = p/3 - \sigma_p$ . Nous avons ensuite étudié la dépendance en  $p$  de ces exposants, pour différentes valeurs du paramètre de contrôle  $\beta$ . Dans toute la phase chaotique, un comportement asymptotique linéaire dont la pente varie peu avec  $\beta$ , apparaît pour les grandes valeurs de  $p$  :  $\sigma_p \sim \gamma p + C$ . La pente est très différente du comportement de champ moyen, et garde une valeur finie même très près de la frontière avec la région de dynamique régulière. En revanche les ordres intermédiaires dépendent fortement de la distance à la transition. Pour  $\beta$  loin

de la valeur critique, le comportement est essentiellement monofractal sitôt  $p > 3$ . La dynamique consiste dans l'émission de pulses par la couche forcée qui déferlent dans un état pratiquement vide d'activité, jusqu'aux échelles où ils sont stoppés puis en partie réfléchis par la dissipation sous forme de retours négatifs. A mesure que l'on augmente  $\beta$ , l'activité devient plus nourrie entre le passage de deux pulses successifs, qui n'ont plus une individualité aussi marquée. La coexistence de ces deux phases est responsable de la multifractalité observée, qui se traduit par de la courbure dans l'évolution des  $\sigma_p$ . Cependant les fluctuations les plus intenses dominant sans peine le niveau moyen.

### Comparaison avec le modèle GOY.

Nous étions intéressés de savoir si la même physique prévalait dans la dynamique du modèle GOY, nonobstant les différences qui le distinguent *a priori* du modèle ON. Nous avons donc procédé à des calculs en tous points semblables, pour deux valeurs du paramètre de contrôle  $\varepsilon$ , toujours pour  $Q = 2$ ,  $R = 10^5$  et  $N = 17$ . La première  $\varepsilon = 0.75$ , se trouve loin de la valeur critique  $\varepsilon_* = 0.395..$  où a été identifiée par L.Biferale *et al* (1995a) la bifurcation vers le chaos, l'autre  $\varepsilon = 0.5$ , est la valeur standard pour laquelle les exposants  $\zeta_p$  sont très proches de ceux définis pour la vraie turbulence. Une étude beaucoup plus systématique des lois d'échelle dans ce modèle a été menée par L.P.Kadanoff *et al* (1995).

Sur la figure 2.5, nous montrons sur un même graphe l'évolution des  $\sigma_p$  pour les deux modèles "loin" de leur transition. La ressemblance est frappante même si les pentes asymptotiques sont un peu différentes. En revanche sur la figure 2.6, où sont portés les exposants pour  $\varepsilon = 0.5$  et  $\beta = 0.33$ , les différences sont plus nettes. Tandis que la convergence des moments d'ordres intermédiaires ( $p \leq 6$ ) est comparable dans les deux cas, celle des plus grands ordres est beaucoup plus facile à atteindre pour le modèle ON, où la pente asymptotique

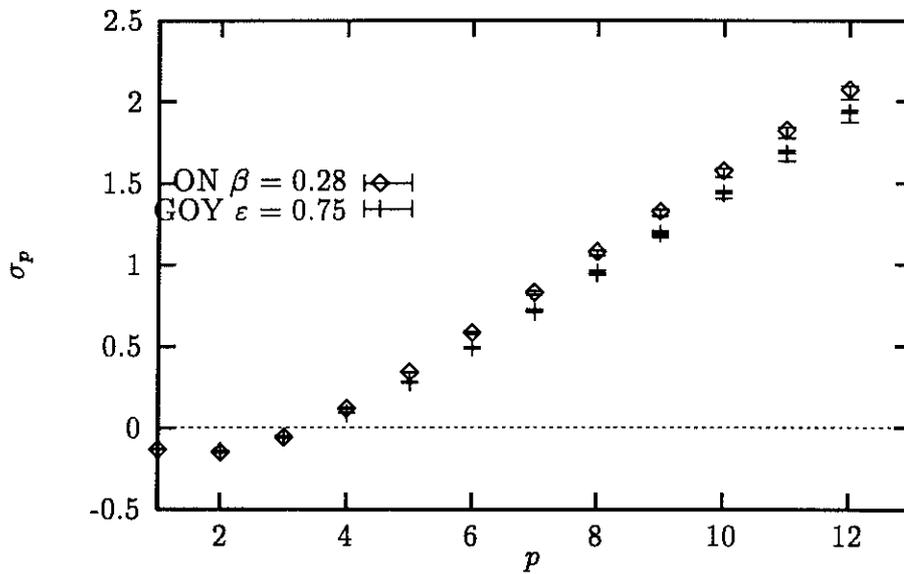


Figure 2.5 : Comparaison des exposants d'échelle des modèles ON et GOY loin de leur transition vers le chaos.

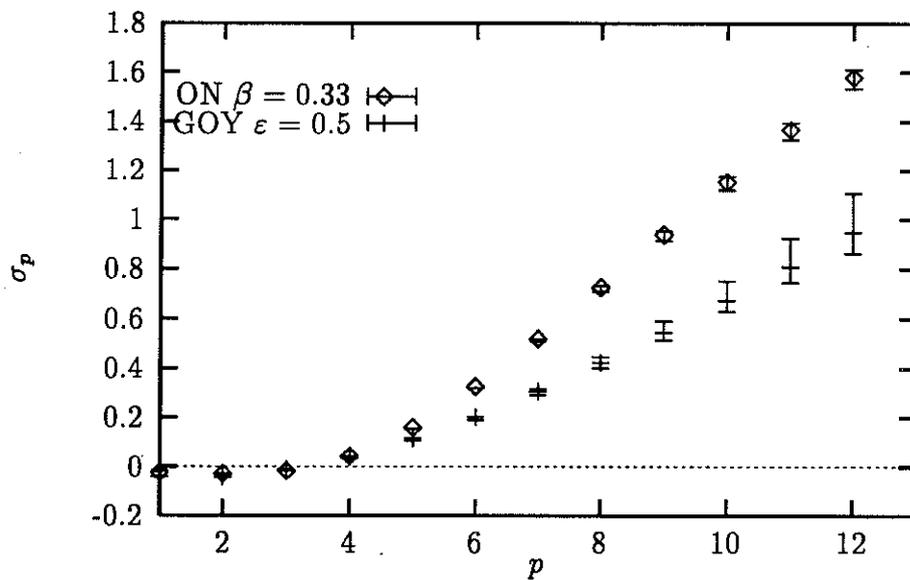


Figure 2.6 : Évolution différente des exposants  $\sigma_p$  lorsque la multifractalité est présente.

est également plus forte. Parallèlement il semble subsister davantage de courbure dans le graphe des  $\sigma_p$  du côté du modèle GOY, même aux plus grands ordres. Il n'était pas dans l'esprit de ce travail de chercher à raffiner davantage la détermination des exposants en réduisant les barres d'erreur. Mentionnons que récemment E.Lévêque *et al* (1995b) ont effectué une comparaison attentive des possibilités de fitter les données de la statistique du modèle GOY, à l'aide de nombreux modèles phénoménologiques, parmi lesquels une version ajustable du modèle hiérarchique, proposé par les mêmes auteurs dans le contexte de la vraie turbulence (Z.S.She *et al* (1994), Z.S.She *et al* (1995)). Leur formule pour les  $\zeta_p$  devient dans nos notations (cf section 1.4 de ce manuscrit) :

$$\sigma_p = \gamma p - 3\gamma \frac{1 - \beta^{p/3}}{1 - \beta}.$$

Il apparaît que leur formule pour les valeurs  $\gamma = 0.208$  et  $\beta = 0.58$ , est en excellent accord avec leur statistique. On note que les valeurs  $\gamma = 2/9$  et  $\beta = 2/3$  fittent très bien le sommet des barres d'erreur dans la figure 2.6, que nous avons obtenues à partir de l'un de nos calculs. Ce sont précisément les valeurs qu'ils proposent pour la vraie turbulence. La raison de ce succès nous manque. Certains auteurs tendent à penser que le paramètre  $\beta$  pourrait avoir un caractère très universel, voir par exemple E.Lévêque *et al* (1995a), R.Benzi *et al* (1996b). Mentionnons aussi que de nombreux auteurs font jouer un rôle très important dans la dynamique du modèle GOY, à la seconde quantité conservée : L.P.Kadanoff *et al* (1995), O.Gat *et al* (1995), L.Biferale *et al* (1995b), R.Benzi *et al* (1996a)



## Chapitre 3

# Étude des solutions singulières.

Ce chapitre aborde le problème de l'existence et de la généricité, de solutions singulières autosimilaires, pour les modèles ON et GOY. De tels objets sont les candidats naturels pour comprendre l'intermittence de ces systèmes. Disons d'entrée de jeu que ce thème a déjà été abordé par d'autres auteurs. Dans une première section nous donnons nos motivations pour cette étude, en discutant, à la lumière des résultats du chapitre précédent, l'enjeu que constitue l'identification claire de telles solutions. Dans une deuxième section, nous faisons un rapide tour d'horizon d'une situation analytique peu engageante. Dans la troisième section, nous décrivons une méthode numérique d'intégration adaptative qui nous a permis de montrer la formation de telles singularités, pour les équations des deux chaînes. Un résultat important est la formation générique d'une unique solution, pour chaque valeur du paramètre contrôlant le transfert vers les petites échelles. Nous confrontons alors ces résultats à la statistique des deux modèles. Dans le contexte du modèle ON, ces solutions autosimilaires rendent bien compte du développement des fluctuations les plus dures de la dynamique, dans toute la phase chaotique. En revanche pour le modèle GOY, la situation est différente à l'approche de la transition, où ces objets deviennent trop mous pour expliquer tels quels la formation des plus grosses fluctuations. Dans la même veine, le lecteur trouvera dans le preprint,

une classification des divers types de singularités pouvant se former dans le plan complexe des temps. Ce sujet ne sera absolument pas abordé dans le corps du manuscrit.

### 3.1 Motivation.

Les calculs de statistique présentés au chapitre précédent, ont clairement mis en évidence la présence d'intermittence dans la dynamique des modèles considérés (ce qui n'était pas une nouveauté !). Un fait particulièrement saillant est la présence de lois d'échelle, dans l'intervalle inertiel, caractérisées par des exposants  $\sigma_p$ , qui pour les  $p$  grands tendent vers un comportement linéaire :  $\sigma_p \sim \gamma p + C$ . En particulier, pour le modèle ON, ce trait de caractère semble persister dans toute la phase chaotique jusqu'à la frontière avec la phase régulière. Ces faits suggèrent l'existence d'un mécanisme dynamique, déterministe et robuste, engendrant les fluctuations les plus singulières qui ne peuvent croître plus vite que  $Q^{\gamma n}$ , à mesure qu'elles cascaded vers les petites échelles.

Pour aborder la dynamique inertielle, nous nous concentrons sur le noyau non-linéaire en oubliant forçage et dissipation. Il est commode d'introduire de nouvelles variables  $b_n = Q^n u_n = Q^{2n/3} \phi_n$ , qui dimensionnellement sont associées aux gradients de la vitesse. En reportant cette dernière expression dans la non-linéarité du modèle ON (2.8), nous obtenons la représentation suivante des équations du mouvement pour une chaîne infinie :

$$\frac{d}{dt} b_n = N_n[\vec{b}] = (b_{n-1} b_n + \frac{\beta}{\alpha} Q^{\frac{2}{3}} b_{n-1}^2) - \frac{1}{Q^2} (b_{n+1}^2 + \frac{\beta}{\alpha} Q^{\frac{2}{3}} b_n b_{n+1}). \quad (3.1)$$

Faisant usage de la même redéfinition des variables dans le cas complexe nous obtenons pour les non-linéarités du modèle GOY :

$$\frac{d}{dt} b_n = Q^2 (1 - \varepsilon) b_{n-1}^* b_{n-2}^* + \varepsilon b_{n-1}^* b_{n+1}^* - b_{n+1}^* b_{n+2}^* / Q^2. \quad (3.2)$$

Les non-linéarités quadratiques ainsi que l'invariance par translation  $n \rightarrow n+m$  autorisent, au moins formellement, des solutions autosimilaires de la forme :

$$b_n(t) = \frac{1}{t^* - t} f(Q^{nz}(t^* - t)) \equiv Q^{nz} g(Q^{nz}(t^* - t)). \quad (3.3)$$

De telles solutions vont décrire le développement d'une singularité en un temps fini  $t^*$ , arbitraire.

Pour fixer les idées, considérons le cas où  $g(s)$  est une fonction réelle régulière, définie pour  $s > 0$  avec les propriétés suivantes :

$\lim_{s \rightarrow 0^+} g(s) = 1$ , et  $g(s)$  décroît plus rapidement qu'exponentiellement pour  $s \gg A$ , avec  $A > 0$  le point où  $g$  est maximum. Soit  $t_0 = t^* - AQ^{-zn_0}$ . À cet instant initial, l'état décrit par l'Ansatz (3.3) vérifie :

$$\begin{aligned} b_{n_0}(t_0) &= Q^{n_0 z} g(A), \\ b_n(t_0) &\rightarrow Q^{nz} \quad \text{si } n \ll n_0, \\ b_n(t_0) &\rightarrow 0 \quad \text{si } n \gg n_0. \end{aligned}$$

La situation physique est donc celle d'un front positionné sur la couche  $n_0$ , qui atteindra la couche d'indice  $n > n_0$  au temps  $t_n = t^* - AQ^{-zn}$ . Au temps  $t^*$  (que la dissipation empêchera d'atteindre dans la pratique), un spectre en  $Q^{nz}$  se sera établi à travers toutes les couches.

L'exposant  $z$  peut s'interpréter comme une vitesse de propagation en échelle logarithmique. En effet

$$\frac{(t^* - t_{m+n})}{(t^* - t_m)} = Q^{-zn},$$

où  $t_{m+n}$  et  $t_m$  sont les dates d'arrivée du front sur les couches  $m+n$  et  $m$  respectivement. Plus  $z$  est petit, plus la vitesse de propagation est grande. Remarquons que pour  $z = 2/3$  on retrouve l'état de Kolmogorov, tandis que  $z = 1$  décrit une fluctuation qui transporte une quantité constante d'énergie ; une telle situation correspond à une intermittence extrême. Ces deux valeurs fournissent des bornes physiques pour les variations de  $z$ .

E.D.Siggia (1978) a mis en évidence l'existence d'une telle solution avec un exposant  $z = 1$ , dans son modèle s'apparentant aux équations de la chaîne ON. T.Nakano (1988a) a repris cette problématique précisément sur les équations ON. Par une méthode numérique itérative, il a construit pour chaque valeur du paramètre  $\beta$ , une solution du problème autosimilaire (équation (3.4)), suggérant qu'il pourrait n'y en avoir qu'une. Plus près de nous, dans un preprint de 1990, où il considère le modèle GOY, G.Parisi admet l'existence de tout un continuum d'exposants dynamiquement accessibles.

La question se pose donc de savoir quelles sont les valeurs de  $z$  effectivement empruntées par le système. Si effectivement il existe une solution unique, nous attendons sur la base des arguments ordinaires,  $\gamma = z - 2/3$ . Nous sommes revenus sur cette question, en proposant une autre méthode numérique. Le lecteur n'aura pas de mal à se convaincre du caractère naturel de notre approche et de la facilité de sa mise en œuvre.

### 3.2 Situation analytique.

Restreignons nous au cas du modèle ON par mesure de simplicité, les mêmes conclusions s'appliquant dans le cas du modèle GOY.

En reportant l'Ansatz autosimilaire (3.3) dans (3.1), nous obtenons l'équation suivante pour  $f$ , qui est décrite dans la variable logarithmique  $\xi = n + \log(t^* - t)/(z \log Q)$  :

$$f'(\xi) - z \log Q f(\xi) = - \left( f(\xi - 1)f(\xi) + \frac{\beta}{\alpha} Q^{\frac{2}{3}} f(\xi - 1)^2 \right) + \frac{1}{Q^2} \left( f(\xi + 1)^2 + \frac{\beta}{\alpha} Q^{\frac{2}{3}} f(\xi)f(\xi + 1) \right). \quad (3.4)$$

Cette équation appelle les commentaires suivants :

- (i) Si l'on demande à  $f$  d'être sommable, l'équation ci-dessus constitue un problème aux valeurs propres pour  $(z, f)$ .

- (ii) Le caractère discret du problème de départ rejaillit dans la non-localité du problème autosimilaire.
- (iii) Cette équation n'est pas ordinaire au sens des équations différentielles. Une condition initiale devra comprendre la définition de  $f(s)$  sur un intervalle de longueur finie, c'est-à-dire que ce problème garde une infinité discrète de dimensions, tout comme le problème de départ. Nous savons par ailleurs qu'il est inutile de revenir sur un terrain plus familier en prenant la limite du continu de (3.4). En effet, d'après les remarques faites dans la section 2.1, la physique sous-jacente sera celle de l'équation de Burgers qui n'autorise que la valeur  $2/3$  pour  $z$ .

Envisageons à présent un développement asymptotique au voisinage de  $+\infty$  et  $-\infty$ .

• Pour  $\xi \rightarrow +\infty$  deux comportements sont *a priori* possibles, suivant que  $f$  reste bornée ou non :

(i) Il n'est pas difficile de voir que le premier cas impose  $f(\xi) \rightarrow 0$ . L'équilibre des termes dominants dans (3.4), qui s'écrit :

$$f'(\xi) \sim -\frac{\beta}{\alpha} Q^{\frac{2}{3}} f^2(\xi - 1),$$

autorise une singularité essentielle, dont la forme la plus générale est :

$$f(\xi) \stackrel{\xi \rightarrow \infty}{\sim} K \frac{\partial}{\partial \xi} (p(\xi) 2^\xi) \exp(-p(\xi) 2^\xi), \quad \text{avec } K \text{ constante,} \quad (3.5)$$

où  $p(\xi)$  est une fonction périodique de période 1.

(ii) Si on permet à  $f$  de diverger, il faut à l'ordre dominant satisfaire l'équilibre des termes non-linéaires. Le comportement le plus général est alors :

$$f(\xi) \stackrel{\xi \rightarrow \infty}{\sim} p(\xi) Q^{2\xi/3}, \quad (3.6)$$

où  $p(\xi)$  est de nouveau une fonction périodique de période 1 quelconque. Cette liberté est permise par le fait que les couplages ne s'effectuent qu'entre points séparés d'une unité. La construction de développements asymptotiques à partir

de ces comportements dominants est donc compliquée par la présence d'une infinité dénombrable de constantes arbitraires dès l'ordre le plus bas.

• Pour  $\xi \rightarrow -\infty$ , il faut que  $f(\xi)$  converge vers zéro pour assurer une limite finie ou nulle à  $g(s)$  en  $s = 0$ . La possibilité existe toujours pour une singularité essentielle : il suffit de poser  $\xi \rightarrow -\xi$  dans le comportement (3.5).

On peut également envisager une décroissance exponentielle

$$f(\xi) \stackrel{\xi \rightarrow -\infty}{\sim} Q^{z\xi}, \quad (3.7)$$

qui équilibre les deux termes du membre de gauche de (3.4). Le développement  $\sum_{n \geq 1} a_n Q^{nz\xi}$  ne présente pas d'arbitraire *a priori*, mais le terme général de la série croît au moins comme

$$a_n \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{Q^{zn(n+1)/2}}{n!},$$

et nécessite une procédure de resommation à la Borel (cf C.Bender *et al* (1978)). De telles procédures autorisent en général l'émergence d'une infinité dénombrable de termes sous-dominants, qu'il conviendrait d'ajouter au développement précédent avant de tenter de le prolonger du côté opposé  $\xi \rightarrow \infty$ .

À la lumière de ces quelques remarques, la voie analytique paraît bien encombrée. C'est pourquoi nous nous tournons à présent vers une méthode numérique, qui s'est montrée très efficace pour traquer de tels objets.

### 3.3 Détermination des solutions accessibles dynamiquement.

#### 3.3.1 Dynamique fictive.

Soit à chercher des solutions du système différentiel :

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \mathbf{N}[\mathbf{b}]. \quad (3.8)$$

Le vecteur  $\mathbf{b}$  de dimension  $N + 1$ , peut être complexe et le noyau non-linéaire  $\mathbf{N}[\mathbf{b}]$  aura les composantes définies par (3.1) ou (3.2), suivant que l'on considérera les modèles ON ou GOY ; pour le premier on continuera de se restreindre à des vecteurs réels.

Afin d'éviter l'accélération exponentielle des temps caractéristiques associée à ces solutions singulières, il s'est avéré utile de considérer la dynamique fictive suivante qui conserve la norme du vecteur  $\mathbf{b}$ .

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{b} = \mathbf{N}[\mathbf{b}] - \Re \left( \frac{\langle \mathbf{N}[\mathbf{b}], \mathbf{b} \rangle}{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle} \right) \mathbf{b}, \quad (3.9)$$

où  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \sum_{n=0}^N A_n^* B_n$  est le produit scalaire usuel, et  $\Re$  désigne la partie réelle. De façon générale notons :

$$A(\tau) = \Re \frac{\langle \mathbf{N}[\mathbf{b}](\tau), \mathbf{b}(\tau) \rangle}{\langle \mathbf{b}(\tau), \mathbf{b}(\tau) \rangle}, \quad (3.10)$$

le facteur de projection maintenant le vecteur  $\mathbf{b}$  sur une sphère. La conservation de la norme donne une minoration des temps caractéristiques non-linéaires :  $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle^{-1/2}$  qui sera fixée par la condition initiale. Rien n'empêche à présent de traiter une chaîne très longue.

Vérifions que toute solution de la dynamique projetée redonne une solution du problème initial (3.8). Considérons à cette fin la décomposition suivante :

$$\mathbf{b}(\tau) = \exp\left(-\int_0^\tau A(\tau') d\tau'\right) \mathbf{c}(\tau) = B(\tau) \mathbf{c}(\tau), \quad (3.11)$$

où  $\mathbf{b}(\tau)$  est une solution de (3.9). On vérifie alors sans peine, en reportant cette écriture dans (3.9) et tirant profit de la non-linéarité quadratique, que  $\mathbf{c}(\tau)$  vérifie l'équation :

$$\frac{d\mathbf{C}}{d\tau} = B(\tau) \mathbf{N}[\mathbf{C}].$$

Si on définit le temps physique  $t$  par

$$t(\tau) = \int_0^\tau B(\tau') d\tau', \quad (3.12)$$

nous aurons bien obtenu une solution du problème (3.8) avec :

$$\mathbf{C}(t) = \exp\left(\int_0^{\tau(t)} A(\tau') d\tau'\right) \mathbf{b}(\tau(t)), \quad (3.13)$$

où  $\tau(t)$  s'obtient en inversant (3.12).

La méthode qui vient d'être décrite est de fait une méthode d'intégration "adaptative", dilatant le temps et redimensionnant au fur et à mesure le champ de vitesse de manière à suivre la formation d'une singularité en temps fini. De telles techniques ont été utilisées dans le contexte d'équations aux dérivées partielles (Euler en dimensions trois, Schrödinger non-linéaire. Voir par exemple la collection de travaux éditée par R.E.Caffisch *et al* (1993)). Elles deviennent particulièrement simples pour des modèles en couches en raison de leur petit nombre de degrés de liberté.

Notons finalement, pour établir un lien avec la physique de la turbulence, que la quantité  $\frac{1}{2}\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle$  (où  $\mathbf{b}$  est solution de (3.8)) est l'équivalent de l'entrophie  $\Omega$  pour un véritable écoulement incompressible. On a coutume de mettre l'équation d'évolution de l'entrophie pour un fluide parfait en dimension trois, en supposant l'isotropie, sous la forme (cf par exemple M.Lesieur (1990)) :

$$\frac{\dot{\Omega}}{\Omega^{3/2}} = \left(\frac{98}{135}\right)^{1/2} s,$$

où  $s$  est la "skewness" du champ de vitesse, qui se définit par :

$$s = -\left\langle \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^3 \right\rangle / \left\langle \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 \right\rangle^{3/2}.$$

Cette équation devient dans un modèle en couche :

$$\frac{\langle \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{b} \rangle}{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle^{3/2}} = 2A.$$

On voit que l'explosion en un temps fini de l'"entrophie" (question débattue et difficile pour l'équation d'Euler) passe par la persistance d'un facteur de projection  $A$  (défini en (3.10)) non nul. Comme la suite va le montrer, cette propriété est inévitable dans une chaîne unidimensionnelle.

### 3.3.2 Réponse du numérique et comparaison avec la statistique.

Modèle ON.

Par une intégration numérique de (3.9), nous avons pu observer que toute condition initiale réelle de norme finie, conduit après un transitoire à la formation d'une onde solitaire se déplaçant sans déformation à vitesse constante vers les grands  $n$ . Il existe donc une période  $T$ , telle que, asymptotiquement, on ait la relation suivante :

$$b_{n+1}(\tau + T) = b_n(\tau) \equiv b_n(\tau) = b(n - \frac{\tau}{T}). \quad (3.14)$$

Quel que soit la condition initiale choisie (pourvu que  $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle^{1/2} < +\infty$ ) la forme asymptotique du pulse est unique modulo la transformation d'échelle :

$$b(n - \frac{\tau}{T}) \rightarrow \lambda b(n - \lambda \frac{\tau}{T}). \quad (3.15)$$

Nous portons sur la figure 3.1 le passage sur trois couches de l'onde obtenue avec la condition initiale  $\delta_{n,0}$ , à partir de la dynamique projetée pour  $\beta = 0.335$ . La figure 3.2 quant à elle, décrit l'évolution du facteur de projection  $A(\tau)$  pour la même solution. Les oscillations autour de la valeur moyenne sont la marque du caractère discret du réseau.

Il n'est pas difficile de vérifier qu'une telle onde décrit une solution autosimilaire du problème physique, dont l'exposant est :

$$z = \frac{\langle A \rangle T}{\log Q}, \quad (3.16)$$

où  $\langle A \rangle$  est la valeur moyenne de  $A$  sur une période. La définition de  $z$  ci-dessus est invariante, comme il se doit, sous les transformations d'échelle (3.15) et en autorise une détermination précise.

De telles solutions existent pour toutes les valeurs de  $\beta > 0$ . Nous résumons dans le tableau (3.1) différentes valeurs des exposants  $z$  obtenues en faisant

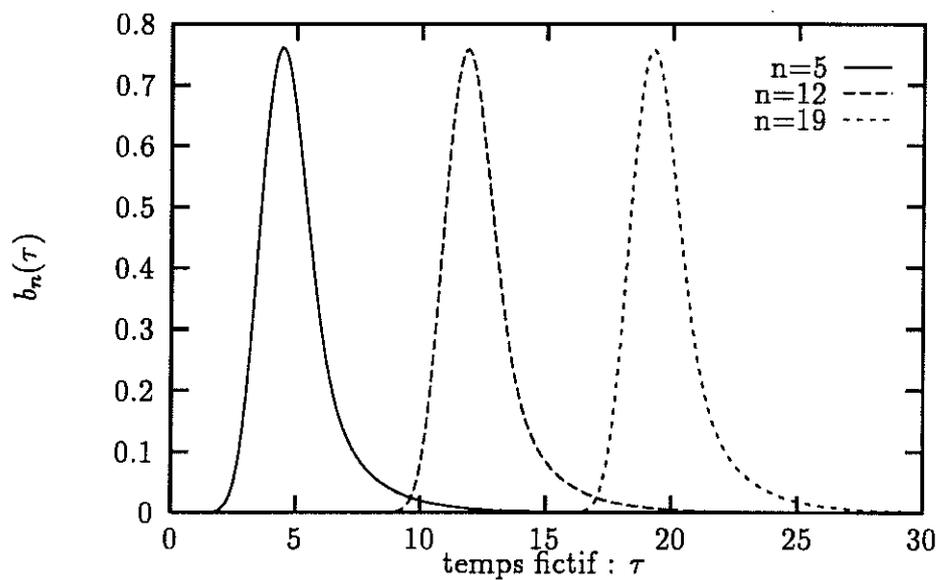


Figure 3.1 : Solution de la dynamique (3.9) pour la condition initiale  $\delta_{n,0}$ , et  $\beta = 0.335$ . Noter les comportements asymptotiques :  $\tau \rightarrow -\infty$  ( $\xi \rightarrow +\infty$ ) équation (3.5) et  $\tau \rightarrow +\infty$  ( $\xi \rightarrow -\infty$ ) équation (3.7).

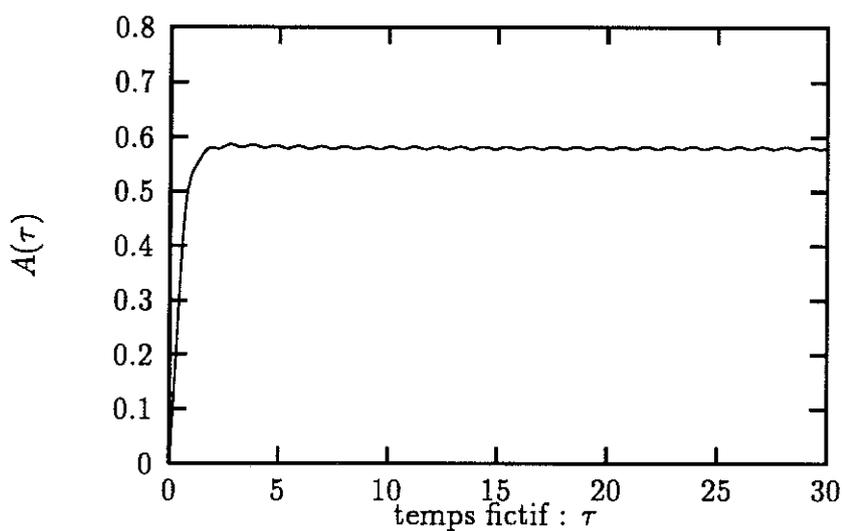


Figure 3.2 : Évolution du facteur de projection  $A(\tau)$  correspondant à la solution décrite sur la Figure.3.1 .

$\beta$	$z$	$z - \frac{2}{3}$	$\gamma$	erreur
0.15	0.996	0.329	...	...
0.28	0.921	0.245	0.24	$\pm 10^{-2}$
0.33	0.889	0.223	0.213	$\pm 10^{-2}$
0.343	0.881	0.214	0.20	$\pm 2 \cdot 10^{-2}$
0.347	0.879	0.213	0.195	$\pm 2.5 \cdot 10^{-2}$
0.348	0.878	0.212	...	...
0.7	0.721	0.054	dynamique régulière	
0.8	0.692	0.025		

Tableau 3.1 : Tableau d'exposants des solutions autosimilaires déterminées par la dynamique (3.9), pour différentes valeurs de  $\beta$ . La précision sur  $z$  est donnée par une erreur de  $\pm 1$  sur la dernière décimale. Sont aussi portées les estimations statistiques de  $\gamma$  ainsi que l'erreur les affectant dans la dernière colonne.

varier  $\beta$ . On constate que  $z$  décroît de 1 à  $2/3$  lorsque l'on augmente la proportion des interactions de type Novikov favorisant le transfert vers les petites échelles. Dans ce même tableau sont portées les pentes asymptotiques  $\gamma$  des  $\sigma_p$ , obtenues par les statistiques aux différentes valeurs de  $\beta$  appartenant à la phase de dynamique chaotique. L'accord satisfaisant entre les deux estimations permet de conclure que les solutions autosimilaires trouvées décrivent bien le développement des fluctuations les plus intenses dans toute la phase chaotique du modèle ON. On retrouve, même très près de la transition, des objets singuliers engendrant des corrections d'exposant finies par rapport au champ moyen.

### Modèle GOY.

Tournons-nous à présent vers le modèle GOY. Nous devons maintenant autoriser des conditions initiales complexes et prendre le noyau non-linéaire (3.2).

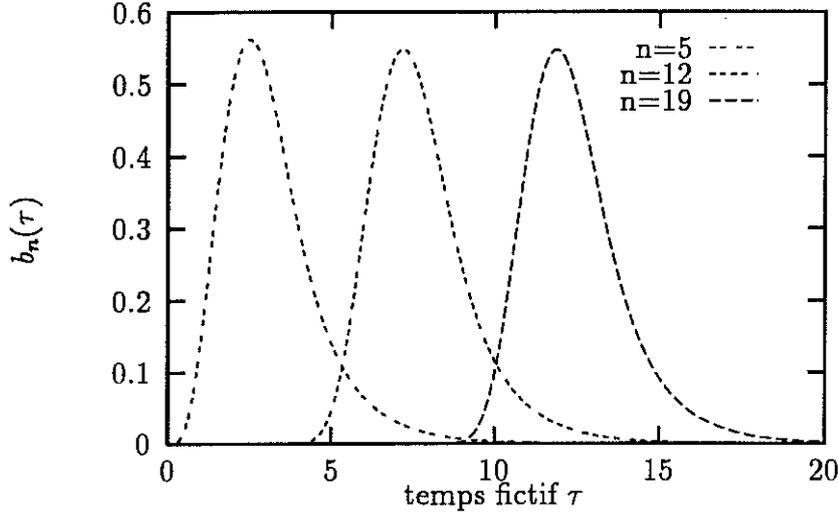


Figure 3.3 : Solution de la dynamique (3.9) pour la condition initiale  $(\delta_{0,n} + \delta_{1,n})/\sqrt{2}$  avec  $\varepsilon = 0.5$ . Les comportements asymptotiques sont les mêmes que pour les solutions du modèle ON.

Une intégration numérique de (3.9) conduit encore à la formation, après un transitoire, d'une onde solitaire se propageant à vitesse constante. Nous avons constaté de plus que toutes les solutions sont réelles positives et de même forme, modulo la transformation d'échelle et de jauge :

$$b\left(n - \frac{\tau}{T}\right) \rightarrow \lambda e^{i\theta(n)} b\left(n - \lambda \frac{\tau}{T}\right), \quad (3.17)$$

dans laquelle  $\theta(n)$  est une fonction périodique de période trois vérifiant la contrainte  $\theta(n) + \theta(n+1) + \theta(n+2) = 0$ , et  $\lambda = \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle^{+1/2}$ . Ce sont les seuls vestiges de la condition initiale. La structure cohérente a donc tendance à ordonner les phases dans une configuration qui optimise le transfert d'énergie. La formation d'un objet réel n'est pas sans rappeler l'observation faite dans la section 2.1 sur le comportement attendu de l'équation de Burgers complexe.

Les Figures (3.3) et (3.4) décrivent la solution obtenue pour  $\varepsilon = 0.5$ . Remarquons que la quasi disparition des oscillations dans le facteur  $A$  est un signe d'une restauration presque parfaite de l'invariance par translation. Ici encore, les solutions autosimilaires existent pour toutes les valeurs du paramètre de

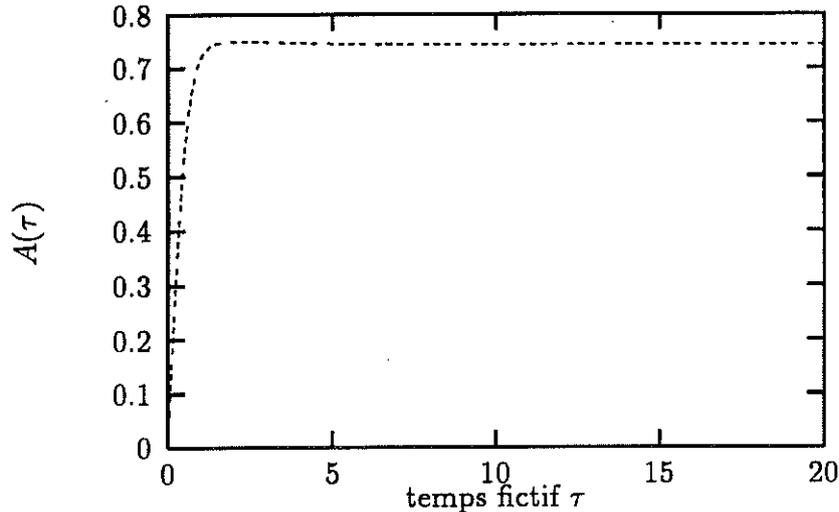


Figure 3.4 : Évolution du facteur de projection  $A(\tau)$  correspondant à la solution décrite sur la Figure.3.3. On note que les oscillations ont pratiquement disparu.

contrôle  $\varepsilon$  et leurs exposants décroissent à mesure que l'on favorise le transfert par la diminution de  $\varepsilon$ .

Le tableau (3.2) confronte les estimations de  $\gamma$  fondées sur ces objets et les valeurs obtenues par la statistique. Notons que l'accord est satisfaisant assez loin de la transition où les valeurs de  $z$  sont nettement distinctes de la valeur K41:  $2/3$ . En revanche pour  $\varepsilon = 0.5$ , on constate que les solutions autosimilaires sont trop molles pour rendre compte de la croissance des fluctuations les plus intenses que le système parvient à développer. Incidemment, la figure 3.5 montre la forme du front (dans les variables  $\phi_n$ ) laissée par la solution autosimilaire trouvée pour  $\varepsilon = 0.5$ . On comprend que de telles fluctuations ne pourront échapper au milieu turbulent moyen, et les interactions avec cette composante de la dynamique vont devenir cruciales dans la détermination des événements les plus intenses. Pour finir, remarquons que :

- (i) La méthode employée est dynamique par nature, aussi est-il raisonnable de penser que si d'autres exposants sont permis mathématiquement, c'est le plus petit (vitesse la plus rapide) qui sera systématiquement sélectionné.

$\epsilon$	$z$	$z - \frac{2}{3}$	$\gamma$	erreur
0.398	0.684	0.018	dynamique régulière	
0.5	0.719	0.052	0.12	$\pm 310^{-2}$
0.75	0.888	0.222	0.23	$\pm 10^{-2}$
0.8	0.946	0.279	...	...

Tableau 3.2 : Tableau équivalent du précédent, concernant à présent le modèle GOY. On remarque que  $z$  admet globalement pour ( $\epsilon > 0.398$ ) des valeurs moindres que pour les solutions du modèle ON accessibles dans la phase chaotique. Le désaccord entre les colonnes 3 et 4 pour  $\epsilon = 0.5$  est trop grand pour être imputable à un défaut de statistique.

- (ii) Parmi les comportements asymptotiques pour  $f(\xi)$  quand  $\xi \rightarrow \infty$ , nous avons mentionné la possibilité d'un état type Kolmogorov (3.6) qu'il faudrait raccorder à une traînée exponentielle (3.7). Physiquement, une telle solution décrirait la propagation d'un front dans une rampe K41 dont l'amplitude initialement faible, serait nourrie par l'arrivée du nouveau front. De telles solutions (si elles existent réellement), ayant une "enstrophie" initiale infinie (en l'absence de dissipation), ne peuvent pas être attrapées par notre méthode qui ne convient que pour des états de norme finie. On ne peut pas à ce niveau les exclure définitivement.

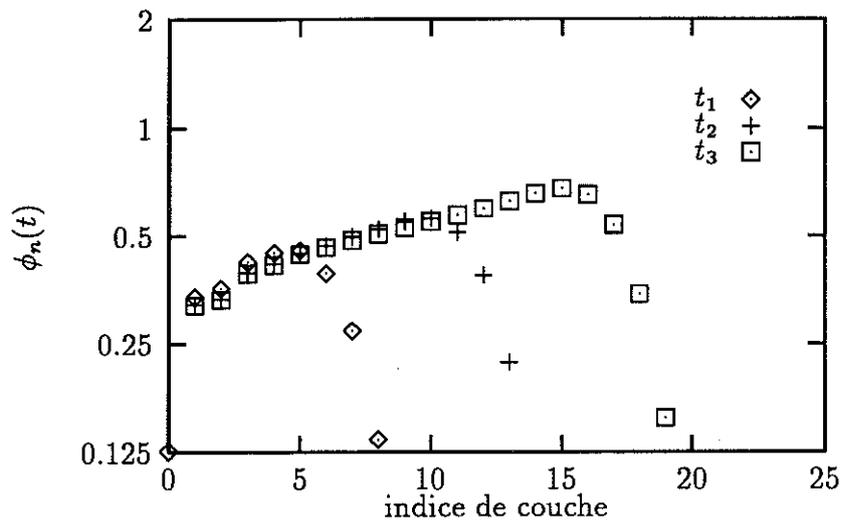


Figure 3.5 : Forme du front autosimilaire à trois instants différents, pour  $\varepsilon = 0.5$ . L'échelle sur l'axe des ordonnées est logarithmique. La croissance est trop faible pour éviter les interactions avec le milieu turbulent moyen.



## Chapitre 4

# Le rôle du milieu ambiant dans la détermination des fluctuations les plus singulières.

### 4.1 Motivation et présentation du chapitre.

À partir de maintenant nous nous concentrons sur le modèle GOY. L'existence générique de solutions autosimilaires est acquise. Nous retrouvons bien leur signature dans la statistique aux grands ordres loin de la transition où elles sont très singulières. En revanche, pour  $\varepsilon = 0.5$ , nous constatons un hiatus et l'émergence d'une physique à la fois nouvelle et plus riche : la multifractalité est plus prononcée, le comportement linéaire asymptotique des  $\sigma_p$  est moins robuste, et les fluctuations les plus singulières sont plus intenses que les objets idéaux trouvés au chapitre 3.

En filtrant le signal, on se convainc que les événements les plus singuliers sont toujours associés à la propagation de pulses émis par les grandes échelles. Toutefois l'état dans lequel ils se développent n'est pas vide d'activité, mais au contraire forme un fond turbulent qui va interagir avec l'objet plus cohérent. Cette image physique s'apparente au modèle à deux fluides de She et Lévêque,

dont les prédictions statistiques sont en excellent accord avec les données numériques. Cependant au niveau de la dynamique, nous devons nous séparer de ces auteurs, comme il apparaîtra plus clairement dans la suite. Nous avons essayé de comprendre comment les interactions peuvent former des objets "renormalisés", en considérant les situations suivantes.

Dans un premier temps nous étudions les collisions d'un objet idéal sur de l'activité piégée en aval dans la cascade. On quantifie ainsi la robustesse de ces solutions localisées, et d'autre part on constate l'efficacité de telles interactions pour doper les pulses même avec de faibles perturbations. Enfin on met en évidence la possibilité d'éventuels mécanismes de saturation dans la détermination des objets les plus singuliers.

Plutôt que de considérer la statistique des objets résultant d'une propagation sur des conditions initiales tirées au hasard, nous modélisons dans une deuxième section, le milieu turbulent moyen par un terme de forçage aléatoire. Forts du constat de robustesse des objets de base, et de la possibilité de se restreindre à des faibles perturbations, on adopte pour commencer une méthode de coordonnées collectives ; ceci permet de ramener la dynamique stochastique à un problème de diffusion tractable analytiquement. Nous envisageons deux cas physiquement différents. Le premier suppose que la composante désordonnée peut rester en permanence à la hauteur de l'objet en train de se former. La distribution de probabilité des exposants de croissance, résultant de ce type d'interactions, présente une aile droite exponentielle. Dans le deuxième cas envisagé, l'état intermédiaire servant à nourrir la structure cohérente présente des lois d'échelle fixées une fois pour toutes. Dans ce cas la distribution de probabilité présente une forte dépendance dans la longueur de la cascade.

Récemment, de nombreux problèmes concernant l'intermittence ont été abordés par des méthodes d'instantons (voir par exemple G.Falkovich *et al* (1995)). Nous étions curieux de voir ce que donnait cette approche, appliquée

aux modèles en couches. En nous limitant au cas d'un bruit additif possédant une variance dont le scaling est fixé à l'avance, nous donnerons quelques propriétés des solutions de type instanton obtenues en traitant numériquement le problème pleinement non-linéaire incluant tous les degrés de liberté. Redisons que la motivation pour cette étude n'est pas tant à chercher du côté de la statistique (que nous n'avons pas poussée plus avant, tant la tâche paraît ardue), que pour son intérêt dynamique, comme moyen de chahuter les équations déterministes à peu de frais.

Enfin, après un petit intermède où nous essayons de faire le bilan de ce qui précède, nous revenons au vrai signal pour montrer sur quelques exemples comment se forment dans la vraie dynamique avec dissipation, des fluctuations très singulières. Nous donnons ainsi de fortes indications en faveur de la physique envisagée plus haut. En particulier cela permet d'exclure une contribution venant d'autres solutions idéales des non-linéarités, que nous aurions pu manquer au chapitre 3. Et finalement confirme l'image selon laquelle le milieu "nourrissier" relaxe systématiquement vers un état K41, ce qui ouvre la porte à des effets de taille finie dans les lois d'échelle anormales.

## 4.2 Collisions Soliton-Défaut.

Nous allons étudier ce qui se passe lorsque la solution autosimilaire de référence trouvée dans le chapitre précédent subit une "collision" avec un défaut localisé dans la chaîne. Pour ce faire, il suffit de préparer une condition initiale superposant un objet idéal  $\mathbf{b}_0$ , réel positif de norme unité, et quelque part en aval un "défaut" de la forme  $\mathbf{b}_{def} = a \exp(i\theta)\delta_{n,n_0}$ . La perturbation étant localisée sur une seule couche, elle n'a par elle-même aucune dynamique (en effet  $\mathbf{N}[\mathbf{b}_{def}] = 0$ ).

Nous donnons sur la figure 4.1 un exemple d'une telle condition initiale avec  $a = 0.5$  et  $\theta = \pi$ . La dynamique purement non-linéaire est donnée par les

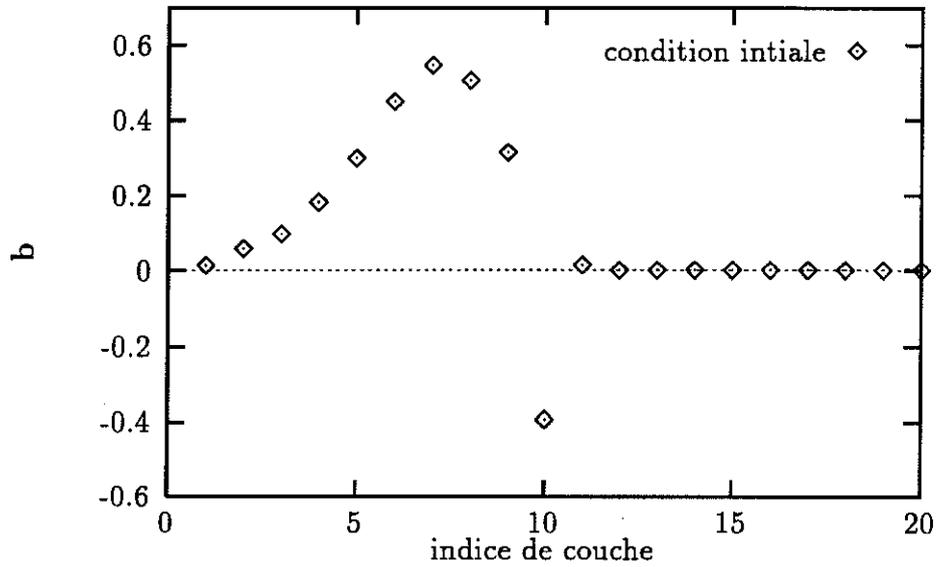


Figure 4.1 : Condition initiale : soliton réel positif centré sur la couche  $n = 7$  avec un défaut situé sur la couche  $n = 10$ .  $a = 0.5$  et  $\theta = \pi$ .

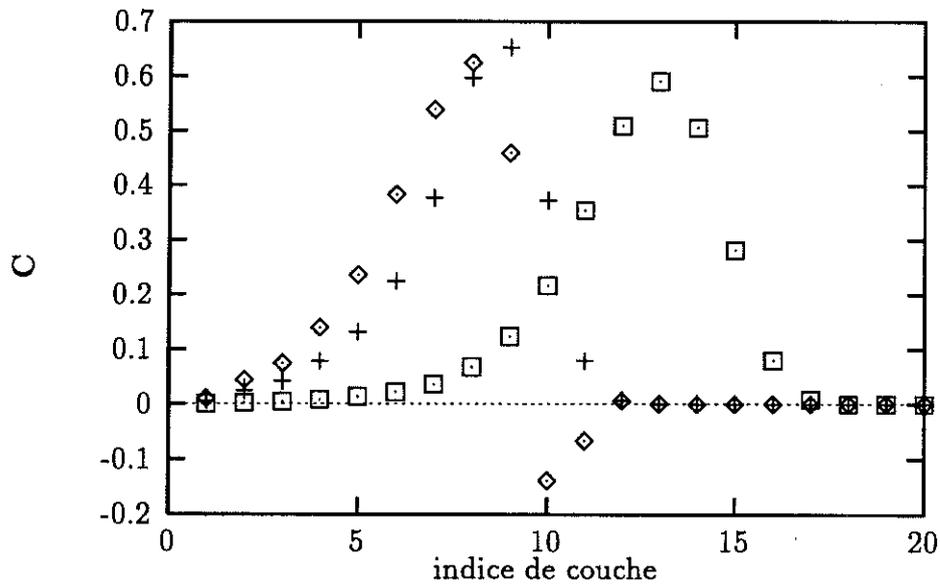


Figure 4.2 : Absorption de la perturbation puis propagation du soliton sans déformation. L'état initial est celui de la figure 4.1. On travaille toujours dans les variables singulières  $C, \tau$ .

équations projetées (3.9) avec les non-linéarités (3.2), pour  $Q = 2$  et  $\varepsilon = 0.5$ . La figure 4.2 montre comment le défaut est absorbé, si bien que l'état final ne comporte plus qu'un seul objet. Le développement ultime du pulse redonne l'exposant  $z_0$  idéal (c'est le caractère "attractif" de cette solution pour toute condition initiale, déjà observé au chapitre 3). Toutefois on peut comparer l'amplitude de l'objet perturbé,  $b_{pert}$ , lors de son passage sur une couche située en aval de la collision, avec celle de l'objet idéal,  $b^0$ , en l'absence de collision. Nous formons donc la quantité :

$$G(a, \theta) = \log \frac{|b_n^{pert}|}{|b_n^0|}, \quad (4.1)$$

qui pour  $n$  loin en aval de la zone d'interaction, ne dépend plus de  $n$ .

Commençons par nous intéresser à la dépendance du gain vis-à-vis de l'amplitude du défaut, en portant sur la figure 4.3 l'évolution de  $G(a, \theta)$  en fonction de  $a$ , pour un déphasage  $\theta$  fixé, égal à  $\pi$  (les conditions initiales sont donc réelles).

On remarque que la stabilité de ces objets va bien au-delà du régime linéaire limité aux perturbations d'amplitude :  $a < 0.2$ . En effet, la colonne de gauche de la figure (4.4) montre comment le pulse parvient à se rattraper après une collision "très dangereuse" avec un défaut d'amplitude  $a = 1.5$ . Au delà du seuil de stabilité, l'objet dans l'état intermédiaire (pendant l'interaction) ne parvient plus à se stabiliser et les couches situées en avant finissent par se désolidariser pour donner naissance à un second pulse se développant indépendamment du premier. C'est la situation décrite sur la colonne de droite de la même figure 4.4. L'amplitude de la perturbation vaut 1.7. Dans notre schéma adaptatif, la dynamique se concentre sur la structure la plus intense, et rapidement ne suit plus que l'évolution du nouveau pulse au détriment du premier qui reste sur place et décroît en amplitude relative. Noter également les oscillations affectant la nouvelle structure, qui est équivalente, malgré les apparences, à celle présente au départ; il s'exprime ici le degré de liberté de jauge mentionné aux chapitres deux et trois (et défini en (2.11)). Enfin on constate que dans cette

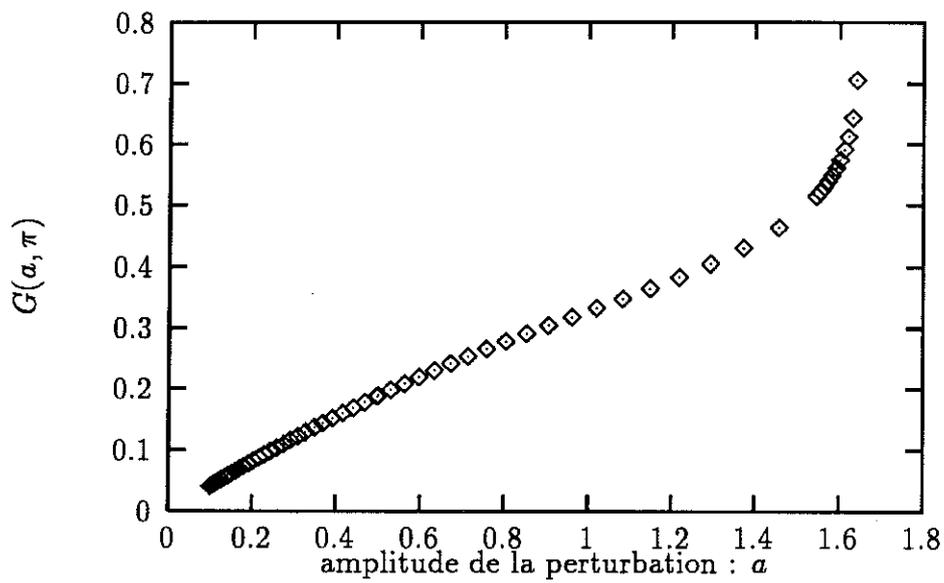


Figure 4.3 : Evolution du gain d'amplitude  $G$  en fonction de l'amplitude de la perturbation. Le régime linéaire est limité aux amplitudes  $a < 0.2$ . La configuration de la condition initiale correspond toujours à la situation décrite sur la figure 4.1. Le gain maximum donne un facteur deux dans le rapport des amplitudes.

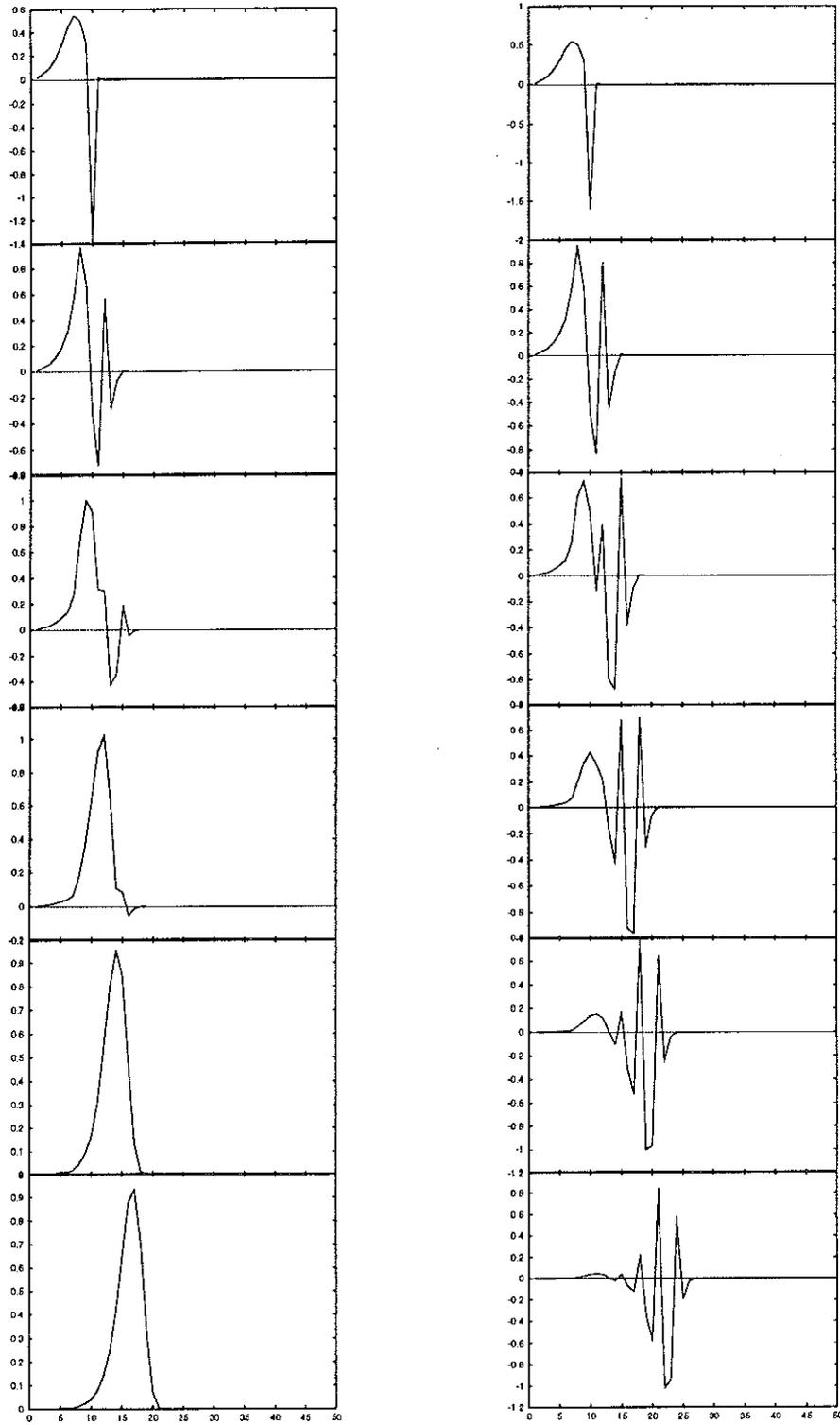


Figure 4.4 : voir texte

configuration le gain est positif et permet d'atteindre jusqu'à un facteur deux dans les rapports d'amplitude (figure 4.3). A supposer que de telles collisions soient possibles à chaque pas de cascade, elles conduiraient à une correction d'exposant,  $\Delta z$ , égale à 1 !

Toutefois, il faut bien voir que de pareilles collisions ne sont pas anodines et entraînent une forte déformation de la solution, comme l'illustre la figure 4.4 colonne de gauche. Aussi, on pressent qu'il ne sera pas favorable de venir perturber à nouveau la structure avant qu'elle n'ait, grosso modo, retrouvé sa forme d'équilibre, sinon on risque de provoquer sa rupture comme dans le cas d'une seule grosse collision. On conçoit donc que sous la courbe de la figure 4.3 se cache une physique plus compliquée, qui pourrait conduire à un mécanisme de saturation des corrections d'exposant avant la valeur extrême envisagée plus haut. Pour essayer d'aller dans ce sens, on peut définir une longueur de récupération, sur laquelle on s'interdit après chaque collision, toute action sur le pulse. Cette longueur va évidemment croître avec l'amplitude du défaut. On peut tenter de la définir comme le nombre de pas de cascade dont se déplace le maximum du pulse pendant la durée où le facteur de projection  $A(\tau)$ , constant dans l'état de base, subit des oscillations qui signent la déformation de la solution. On porte sur la figure 4.5 l'évolution du facteur  $A(\tau)$  pour deux collisions avec  $\theta = \pi$ , et  $a = 0.5$  et  $1.6$ .

Sur la figure 4.6, nous portons les corrections d'exposant autorisées par des collisions qui respecteraient la trêve qu'impose la longueur  $\Delta_n(a)$ , et obtenues via l'expression :

$$\Delta z = \frac{G(a, \theta)}{\Delta n(a) \log 2}. \quad (4.2)$$

Pour rapprocher ces valeurs des données obtenues par la statistique, nous rappelons que la pente asymptotique  $\gamma$  des  $\sigma_p$  est liée aux exposants  $z$  par  $\gamma = z - 2/3$ . Le désaccord constaté dans le Tableau 3.2, se chiffre par des corrections d'exposant  $\Delta z \approx 0.1 \pm 2.10^{-2}$ . Nous obtenons donc les bons ordres de grandeur si l'on admet la possibilité que de telles collisions soient suffisamment

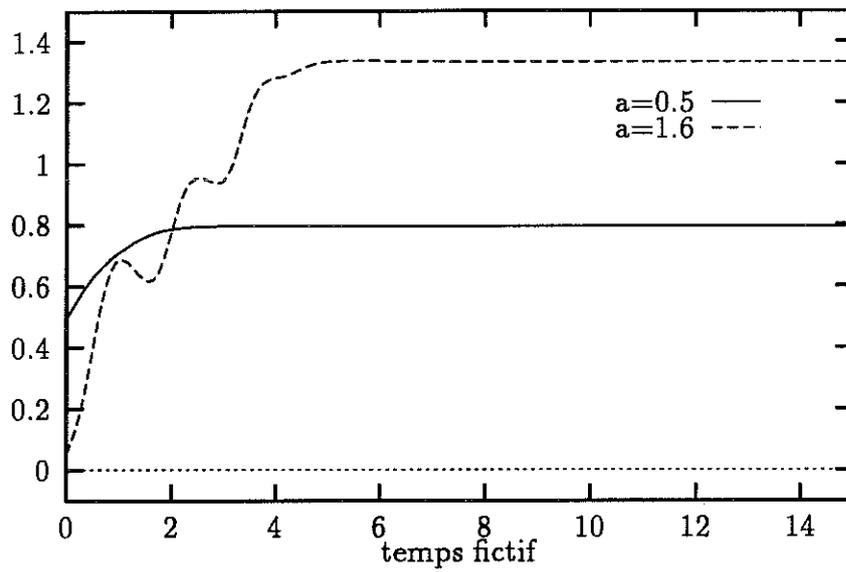


Figure 4.5 : Évolution des facteurs  $A(\tau)$  pour deux collisions avec  $\theta = \pi$ , et  $a = 0.5$  et  $1.6$ . La perturbation étant totalement absorbée par le soliton, la valeur asymptotique de  $A(\tau)$  dépend de son amplitude. La déformation de la solution est clairement manifestée par l'apparition d'oscillations dans le transitoire pour  $a = 1.6$ .

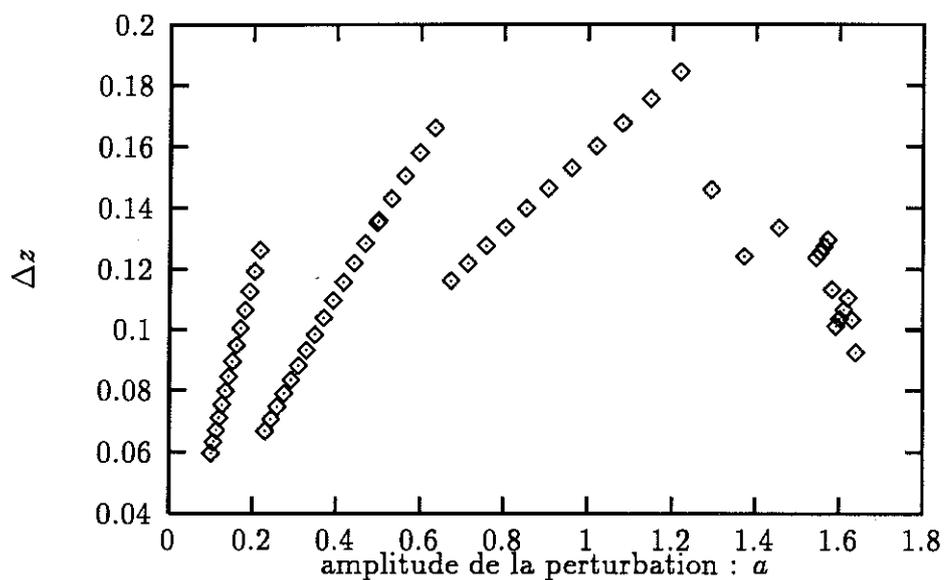


Figure 4.6 : Corrections d'exposant résultant de collisions, sur un objet déphasé de  $\pi$  d'amplitude  $a$ , répétées aussi souvent que le permet la prise en compte de la longueur de fragilité. Chaque nouvelle branche correspond à l'accroissement d'une unité de  $\Delta n$ . Dans le régime linéaire  $\Delta n \leq 1$

fréquentes.

Un autre élément important dont il faut tenir compte est le rôle du déphasage  $\theta$ . Nous portons sur la figure 4.7, la dépendance de  $G(a, \theta)$  comme fonction de  $\theta$  sur l'intervalle  $[\pi, 3\pi]$ , pour différentes valeurs de  $a$ . Le comportement en  $\cos \theta$  est attendu dans la limite linéaire, en revanche le signe  $-$  (minimum de  $G$  atteint pour  $\theta = 2\pi$ ) n'est pas aussi évident. Physiquement on peut le pressentir. En effet dans tous ces modèles, c'est en bloquant la cascade que l'on obtient des objets plus singuliers, il faut donc mettre un défaut "négatif" pour obtenir un gain positif. On remarque que les non-linéarités ont pour effet de diminuer la zone de gain positif à mesure qu'augmente l'amplitude de la perturbation. Ce dernier point va dans le même sens que le constat de fragilité pour les fortes collisions, et suggère que le système doit trouver un compromis. Notons encore qu'aucune quantification des modulations d'amplitude n'est perceptible à ce niveau élémentaire. A ce stade, la dynamique laisse un grand choix dans les caractéristiques des fluctuations singulières et cette indétermination est sans doute la cause de la lente convergence observée dans les statistiques ainsi que de la forte multifractalité.

Un résultat important de cette étude des collisions est que l'obtention d'exposants  $z$  renormalisés est subordonnée à la possibilité de répéter fréquemment ces processus élémentaires, à défaut de quoi nous retrouvons la solution idéale. Une description possible du problème complet consisterait à étudier la statistique des objets formés en présentant à chaque étape de la cascade une nouvelle perturbation tirée au hasard dans un ensemble statistique. Une telle approche sera esquissée dans la sous-section 4.3.4, après qu'une modélisation par un forçage aléatoire aura été tentée. Mentionnons enfin que l'image physique que nous avançons diffère de celle proposée par G.Parisi (1990) en ce sens que différentes solutions singulières n'entrent jamais en collision ; on peut se contenter d'une situation où un seul pulse est présent dans la cascade et les interactions ne se font alors qu'avec une composante

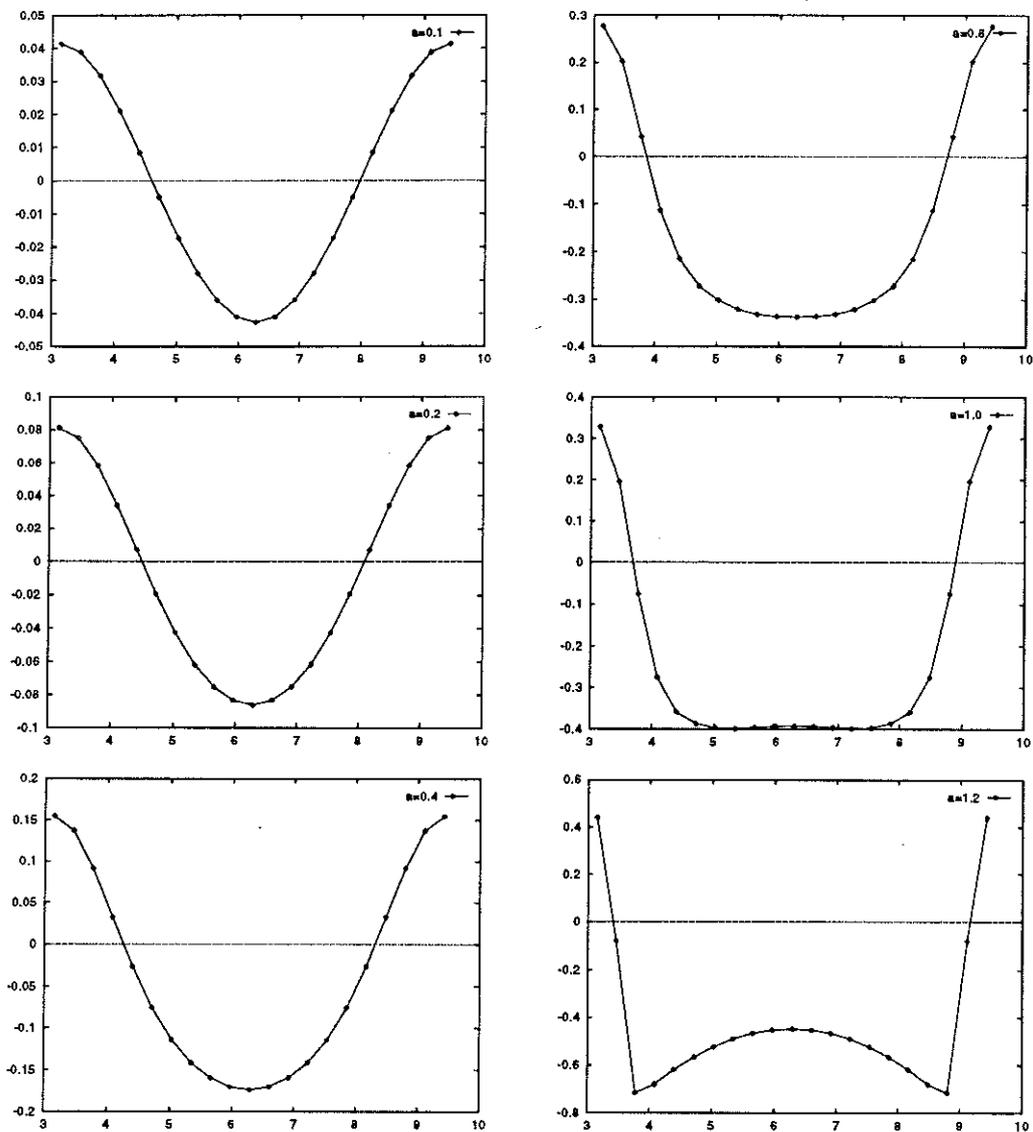


Figure 4.7 : Évolution de  $G(a, \theta)$  en fonction de  $\theta$  pour différentes valeurs de  $a$ . Pour les faibles valeurs de  $a$  on observe une dépendance en  $-\cos \theta$ , signature du comportement perturbatif dans l'approximation linéaire. Au fur et à mesure que l'on augmente l'amplitude de la perturbation, la région de gain positif se réduit au profit de celle de gain négatif. Le seuil d'instabilité donnant naissance au second pulse est diminué lorsque la phase du défaut se rapproche de celle du pulse de base.

désordonnée à l'encontre de laquelle avance le pulse. En effet l'émission des grosses fluctuations est rythmée par la couche forcée, et deux pulses majeurs ne peuvent jamais se rattrapper. La composante désordonnée joue le rôle du second fluide dans l'image de She et Lévêque, sur la nature duquelle on fera diverses hypothèses dans la section suivante, avant que l'attention portée sur la vraie dynamique ne nous fournisse quelques éléments de réponse dans la section 4.4.

### 4.3 Le modèle GOY avec un forçage aléatoire.

#### 4.3.1 Introduction.

Nous gardons la représentation en termes des variables  $b_n$  et continuons d'omettre la dissipation. On s'intéresse aux propriétés du système dynamique :

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \mathbf{N}[\mathbf{b}] + \mathbf{F}, \quad (4.3)$$

où les composantes du noyau non-linéaire sont données par (3.2), et  $\mathbf{F}$  est une force aléatoire modélisant l'action de fluctuations incohérentes sur une structure singulière. Cette force, étant en réalité issue de la vraie dynamique, peut faire intervenir soit le carré de deux fluctuations, soit le produit d'une composante cohérente avec une fluctuation de vitesse. On est donc conduit à envisager les deux possibilités :

$$a) \mathbf{F} = \boldsymbol{\eta}(t), \text{ et} \quad (4.4a)$$

$$b) \mathbf{F} = M[\mathbf{b}] \boldsymbol{\eta}^*, \quad (4.4b)$$

où dans la seconde ligne,  $M = \partial_{\mathbf{b}^*} \mathbf{N}$  est la matrice jacobienne du noyau non-linéaire qui dépend donc linéairement du champ  $\mathbf{b}^*$ . Dans les deux cas,  $\boldsymbol{\eta}(t)$  est un processus aléatoire qu'on supposera gaussien de moyenne nulle, et dont on choisira les corrélations de la forme :

$$\langle \eta_n^*(t) \eta_{n'}(t') \rangle = \Gamma \rho_n^2 \Delta t_n \delta_{nn'} \delta(t - t'), \quad \text{avec } \Gamma > 0 \text{ arbitraire.} \quad (4.5)$$

Discutons les différents éléments entrant dans cette paramétrisation. La décorrélation entre les différents sites est une hypothèse raisonnable, eu égard au fort mélange provoqué par les degrés de liberté de phase du modèle GOY (cf R. Benzi *et al* (1993a)). Pour ce qui est des aspects temporels, l'hypothèse d'une décorrélation instantanée faite dans (4.5) est destinée à simplifier les calculs analytiques ou numériques qui suivront. L'existence d'une nette séparation des échelles de temps entre les phases désordonnée et cohérente est plutôt douteuse. A tout le moins, le temps de corrélation  $\Delta t_n$  des fluctuations sur la couche d'indice  $n$  apparaissant dans (4.5), ne peut être supérieur au temps passé par l'objet qui nous intéresse, sur la couche en question. Ce dernier étant de l'ordre de  $1/b_n \approx 1/(\mathbf{b}, \mathbf{b})^{1/2}$  au moment où l'essentiel de l'activité réside sur la couche  $n$ , on prendra dans la formule (4.5) :

$$\Delta t_n = (\mathbf{b}, \mathbf{b})^{-1/2}. \quad (4.6)$$

Dans toute cette section, nous noterons  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  le produit scalaire entre deux vecteurs, afin de distinguer cette quantité des moyennes d'ensemble notées  $\langle \dots \rangle$ .

Venons en maintenant aux coefficients  $\rho_n$  fixant l'amplitude des fluctuations. Selon qu'on travaille sur les cas  $a$ ) ou  $b$ ) définis en (4.4), on a  $\rho_n \sim \delta b_n^2$  ou  $\rho_n \sim \delta b_n$ . On peut envisager deux situations, aux conséquences physiques très différentes :

Situation 1 : la structure cohérente trouve tout au long de son développement des fluctuations à sa hauteur. On posera alors :

$$\rho_n = (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \quad \text{ou} \quad \rho_n = (\mathbf{b}, \mathbf{b})^{1/2}, \quad (4.7)$$

respectivement dans les cas  $a$ ) et  $b$ ). La physique se reproduit égale à elle-même à chaque pas de la cascade.

Situation 2 : les amplitudes caractéristiques des fluctuations du milieu ambiant obéissent à des lois d'échelle intrinsèques, peu sensibles à l'arrivée d'un

événement intense, soit  $\delta b_n \sim Q^{n\alpha}$ . Dans la suite, on aura en tête la valeur  $2/3$  de Kolmogorov pour l'exposant  $\alpha$  qui s'introduit ici. On pose alors :

$$\rho_n = Q^{2n\alpha} \quad \text{ou} \quad \rho_n = Q^{n\alpha}, \quad (4.8)$$

respectivement dans les cas *a*) et *b*). L'amplitude relative du bruit par rapport à celle de l'objet singulier, initialement de l'ordre de 1 (puisque le dit-objet se forme à partir du milieu ambiant), diminue quand on progresse dans la cascade, pour autant que celui-ci tende à développer un spectre, de pente  $z$  en échelle logarithmique, supérieure à la pente naturelle  $\alpha$ . Notons qu'il n'est pas facile de réconcilier l'hypothèse  $\delta b_n \sim Q^{n\alpha}$ , avec celle faite précédemment sur le temps de décorrélation  $\Delta t_n \sim (b, b)^{-1/2}$ . En effet, *a priori* on attend que le temps caractéristique d'évolution des fluctuations de la phase désordonnée soit de l'ordre de  $1/\delta b_n \sim Q^{-n\alpha}$ , et donc devienne plus grand que  $\Delta t_n$  ! On peut imaginer cependant que les degrés de liberté de phase, plus instables, répondent rapidement à l'arrivée d'un pulse, tandis que les amplitudes qui fixent  $\rho_n$  évoluent beaucoup plus lentement.

Finalement, le dernier paramètre  $\Gamma$  dans l'expression (4.5) des corrélations du bruit, est un nombre qu'on ne se hasarderait pas à estimer. Il n'est pas nécessairement petit, mais sera commodément supposé tel.

Quelques mots maintenant sur l'organisation du reste de la section. Dans la sous-section 4.3.2, nous présentons les résultats obtenus à travers une approche réduisant drastiquement la dimensionalité du problème, en se concentrant sur 2 variables collectives qui sont respectivement la position et l'amplitude du front. Pour une revue des méthodes de perturbation, dans le contexte des vrais solitons, on pourra consulter Yu.S.Kivshar *et al* (1989).

L'intérêt de la méthode est qu'elle permet de pousser les calculs analytiques assez loin, et de dégager sans doute les éléments essentiels de la statistique de l'exposant  $z$  en fonction de la longueur de la cascade (dans le cadre de la modélisation proposée). On traitera successivement les deux problèmes (dits

A et B dans la suite), définis selon la nomenclature énoncée plus haut comme :

$$\text{cas } a - \text{situation 1} \quad : \quad \boldsymbol{\eta} = (\mathbf{b}, \mathbf{b})^{3/4} \boldsymbol{\xi}(t), \quad (4.9a)$$

$$\text{cas } b - \text{situation 2} \quad : \quad \boldsymbol{\eta} = (\mathbf{b}, \mathbf{b})^{-1/4} D^{1/2} \boldsymbol{\xi}(t). \quad (4.9b)$$

Dans la seconde ligne (4.9b),  $D^{1/2}$  est l'opérateur linéaire diagonal de multiplication par  $Q^{n\alpha}$ , et  $\boldsymbol{\xi}$  est dans tous les cas un bruit blanc ordinaire :

$$\langle \xi_n^*(t) \xi_{n'}(t') \rangle = \Gamma \delta_{nn'} \delta(t - t'). \quad (4.10)$$

Il deviendra clair dans la suite qu'une fois les règles du jeu mises au point, toute autre combinaison des différents cas se prête à la même algèbre, modulo de simples modifications de coefficients de diffusion effectifs, qui se calculent aisément à partir de la structure de la solution autosimilaire de référence.

Dans la sous-section 4.3.3, le problème multidimensionnel est abordé partiellement, à travers l'étude numérique de trajectoires particulières dans l'espace des phases, ou instantons, qui sélectionnent des configurations du bruit de probabilité extrémale pour aller d'un point à un autre. La situation considérée se résume dans la définition suivante :

$$\text{cas } a - \text{situation 2} \quad : \quad \boldsymbol{\eta} = Q^{3n\alpha/2} \boldsymbol{\xi}(t). \quad (4.11)$$

Noter que cet Ansatz revient à supposer  $\Delta t_n \sim Q^{-n\alpha}$ , soit un temps de corrélation de l'ordre du temps de Komogorov si  $\alpha = 2/3$ , ce qui n'est pas nécessairement très correct physiquement, pour les raisons exposées plus haut. C'est la première idée néanmoins qui nous est venue à l'esprit quand nous avons entrepris ce travail et nous n'avons pas eu ensuite le loisir d'étendre notre investigation à d'autres cas.

Finalement, dans la sous-section 4.3.4, seront esquissés, à la lumière des résultats obtenus et de leurs éventuelles limitations, d'autres schémas possibles pour la modélisation de l'effet du milieu turbulent sur une structure singulière.

### 4.3.2 Approche par des coordonnées collectives.

On se restreint dans toute cette section à des variables réelles.

#### Problème A :

C'est le cas le plus facile à traiter. Le point de départ en est le système d'équations différentielles stochastiques :

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \mathbf{N}[\mathbf{b}] + (\mathbf{b}, \mathbf{b})^{3/4} \boldsymbol{\xi}. \quad (4.12)$$

Pour décrire ce système, il est commode de séparer la dynamique de  $\mathbf{b}$  en deux équations pour, d'un côté, le vecteur  $\mathbf{C} = \mathbf{b} / (\mathbf{b}, \mathbf{b})^{1/2}$  de norme unité et de l'autre, la variable  $B(t) = \frac{1}{2} \log (\mathbf{b}, \mathbf{b})$ , en fonction desquelles :

$$\mathbf{b}(t) = \exp(B(t)) \mathbf{C}(t). \quad (4.13)$$

Une certaine prudence est de mise en principe, lorsqu'on procède à des changements de variable dans des équations différentielles stochastiques. Il convient de préciser, si l'on travaille avec la convention de Stratanovich ou de Ito pour prendre la limite de bruit blanc (cf l'Appendice I de ce chapitre pour une discussion de ce point). Nous négligerons ces subtilités, sans grande incidence physique ici, pour déduire de (4.12) la paire d'équations :

$$\frac{d\mathbf{C}}{d\tau} = \mathbf{N}[\mathbf{C}] + \boldsymbol{\eta} - A(\tau)\mathbf{C} \quad (4.14a)$$

$$\frac{dB}{d\tau} = (\mathbf{N}[\mathbf{C}], \mathbf{C}) + (\boldsymbol{\eta}, \mathbf{C}) - A(\tau), \quad (4.14b)$$

où comme dans le chapitre précédent, le temps physique  $t$  se relie au temps "singulier"  $\tau$  par :

$$t(\tau) = \int_0^\tau du \exp(-B(u)). \quad (4.15)$$

Les nouvelles fonctions de bruit  $\boldsymbol{\eta}_n$  sont définies par la substitution :

$$\boldsymbol{\eta} = \exp(-B/2) \boldsymbol{\xi}. \quad (4.16)$$

On déduit, en utilisant la relation  $dt/d\tau\delta(t-t') = \delta(\tau-\tau')$  :

$$\langle \eta_n(\tau)\eta_{n'}(\tau') \rangle = \Gamma\delta_{nn'}\delta(\tau-\tau'). \quad (4.17)$$

Notons  $\Phi_0(\tau)$  la solution déterministe en l'absence de bruit normée à 1,  $A_0(\tau) = (\mathbf{N}, \Phi_0)$  le facteur de projection, et  $v_0$  la vitesse de propagation du front dans cette situation de référence. La variable continue  $n(\tau) = v_0\tau$  constitue une définition valable de la position instantanée du soliton. Nous allons admettre que le bruit ne fait qu'accélérer ou ralentir ce dernier, sans le déformer. En d'autres termes, nous faisons l'Ansatz :

$$C(\tau) = \Phi_0 \left( \tau + \int_0^\tau \frac{\delta v(u)}{v_0} du \right), \quad (4.18)$$

où  $\delta v$  représente la fluctuation de vitesse due au bruit extérieur. Quand on reporte cet Ansatz dans (4.14a) et projette l'équation obtenue sur le mode zéro  $\psi_0 = \partial_\tau \Phi_0$  (sachant que  $\psi_0$  et  $\Phi_0$  sont à tout instant orthogonaux, puisque  $(\Phi_0, \psi_0) = \partial_\tau(\Phi_0, \Phi_0) = 0$ ), il vient :

$$\frac{\delta v(\tau)}{v_0} = \frac{(\psi_0, \eta)}{(\psi_0, \psi_0)}, \quad (4.19)$$

tandis que :

$$\frac{dB}{d\tau} = A_0 \left( \tau + \int_0^\tau \frac{\delta v(u)}{v_0} du \right) + (\Phi_0, \eta). \quad (4.20)$$

Or, il se trouve que dans le modèle GOY toutes les quantités du type  $A_0(\tau) = (\mathbf{N}, \Phi_0)$  ou  $(\psi_0, \psi_0)$  dépendent extrêmement faiblement du temps (elles seraient strictement constantes dans un modèle continu), et il est légitime de les traiter comme des constantes. La position du soliton,  $n(\tau) = v_0(\tau + \int_0^\tau \frac{\delta v(u)}{v_0} du)$ , et la fonction  $B(\tau)$  sont, dans le cadre de cette approximation adiabatique, deux coordonnées collectives subissant l'influence des composantes du bruit transverse (selon  $\psi_0$ ) et longitudinale (selon  $\Phi_0$ ) respectivement. Un calcul élémentaire mène alors au système d'équations :

$$\frac{dn}{d\tau} = v_0 + \eta_1, \quad (4.21a)$$

$$\frac{dB}{d\tau} = A_0 + \eta_2, \quad (4.21b)$$

avec :

$$\langle \eta_1(\tau) \eta_2(\tau') \rangle = 0, \quad (4.22a)$$

$$\langle \eta_1(\tau) \eta_1(\tau') \rangle = D_{\perp} \delta(\tau - \tau'), \quad (4.22b)$$

$$\langle \eta_2(\tau) \eta_2(\tau') \rangle = D_{\parallel} \delta(\tau - \tau'). \quad (4.22c)$$

Les coefficients de diffusion ont pour expression :  $D_{\perp} = \Gamma v_0^2 / (\psi_0, \psi_0)$  et  $D_{\parallel} = \Gamma$ . On voit qu'on a réduit le problème à celui de deux marches aléatoires indépendantes avec dérive.

Après avoir mis au point notre formalisme, revenons aux questions qui nous intéressent. Considérons le développement, pour différentes réalisations du bruit, d'une condition initiale constituée d'un objet idéal placé au début de la chaîne au temps  $\tau = 0$ , et de norme initiale unité. Nous voulons connaître la statistique des amplitudes lorsque la structure cohérente a parcouru une longueur de cascade égale à  $n$ . Pour cela, on définit un exposant de croissance effectif par :

$$z \equiv \frac{B(\tau)}{n \log Q} = \frac{1}{\log Q} \left[ A_0 \tau + \int_0^{\tau} du \eta_2(u) \right],$$

de telle sorte que le rapport d'amplitude soit  $Q^{nz}$ . La probabilité d'avoir cet exposant entre  $z$  et  $z + dz$  est simplement donnée par la relation :

$$P_n(z) dz = \left[ \int_0^{\infty} d\tau P_n(\tau) P_{\tau}(B(\tau) = nz \log Q) n \log Q \right] dz, \quad (4.23)$$

où la somme porte sur tous les temps  $\tau$  permettant d'effectuer la longueur de cascade souhaitée. Par ailleurs :

•  $P_{\tau}(B(\tau) = X) dX$  est la probabilité pour qu'à l'instant  $\tau$  la fonction  $B(\tau)$  atteigne une valeur entre  $X$  et  $X + dX$ . En l'occurrence :

$$P_{\tau}(X) dX = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{\parallel} \tau}} \exp - \frac{(X - A_0 \tau)^2}{2 D_{\parallel} \tau} dX. \quad (4.24)$$

•  $P_n(\tau) d\tau$  est la probabilité de premier passage par  $n$  entre les instants  $\tau$  et  $\tau + d\tau$ . Son expression pour une marche aléatoire en dimension un est donnée

par (voir par exemple W.Feller (1968a) Tome I) :

$$P_n(\tau) = \frac{n/\tau}{\sqrt{2\pi D_\perp \tau}} \exp - \frac{(n - v_0 \tau)^2}{2D_\perp \tau}, \quad (4.25)$$

qui ne diffère de la distribution normale que par le préfacteur algébrique  $n/\tau$ .

Moyennant la redéfinition de la variable de temps  $\bar{\tau} = v_0 \tau / n$  ( $n/v_0$  étant le temps mis par la solution déterministe pour parcourir  $n$  pas dans la cascade), et en réintroduisant l'exposant de référence  $z_0 = A_0 / (v_0 \log Q)$ , on peut mettre l'expression obtenue pour  $P_n(z)$  sous la forme :

$$P_n(z) = \frac{n \log Q}{2\pi} \sqrt{\frac{(\psi_0, \psi_0)}{\Gamma}} \int_0^\infty \frac{d\bar{\tau}}{\bar{\tau}^2} \exp \left[ - \frac{n \log Q A_0 z_0}{2\Gamma} S(z/z_0, \bar{\tau}) \right], \quad (4.26)$$

avec :

$$S(u, \bar{\tau}) = \frac{1}{\bar{\tau}} \left[ (u - \bar{\tau})^2 + (1 - \bar{\tau})^2 a^2 \right] \quad \text{et} \quad a^2 = \frac{(\psi_0, \psi_0)}{A_0^2}. \quad (4.27)$$

Dans la limite où le nombre  $n$  de pas de cascade devient grand, l'intégrale (4.26) peut être évaluée par la méthode du col. Nous passons rapidement sur les calculs. On trouve que le temps optimal vaut en coordonnées réduites :

$$\bar{\tau}^* = \sqrt{\frac{(z/z_0)^2 + a^2}{1 + a^2}}, \quad (4.28)$$

et on déduit pour la probabilité, à des corrections algébriques près sans grande importance, un comportement en  $\exp[ns(z)]$  où la fonction de Cramér  $s(z)$  (pour une définition se reporter à l'appendice du chapitre 1 : section 1.4), prend l'expression :

$$s(z) = - \frac{A_0 z_0}{\Gamma} \log Q \left[ \sqrt{((z/z_0)^2 + a^2)(1 + a^2)} - ((z/z_0) + a^2) \right]. \quad (4.29)$$

La fonction  $s(z)$  atteint son maximum en  $z = z_0$  et décroît linéairement du côté des grandes valeurs de  $z$ . Cela est dû (comme dans tous les processus de diffusion) à la possibilité d'allonger sans limite le temps d'attente pour le premier passage par la couche  $n$ . Cet aspect du résultat n'est évidemment pas très physique, mais il ne semble pas être un artefact du traitement proposé ici.

On trouvera d'autres indices dans la section 4.3.3 d'une absence de seuil sur l'exposant  $z$  pour le modèle GOY soumis à un forçage aléatoire. Notons que si on se restreint à un domaine d'exposants physiquement raisonnables,  $z < 1$ , la fonction  $s(z)$  présente encore une forte courbure. En effet, pour  $a^2 = 0.587$ , valeur estimée à partir des diverses quantités entrant dans la définition de  $a$ , le rapport  $\frac{s''(1)}{s''(z_0)}$  est de l'ordre de 0.5. Il n'en reste pas moins que la tendance de  $s''(z)$  à décroître lorsque  $z$  augmente semble en contradiction avec les observations numériques récentes faites par E.Lévêque *et al* (1995b).

### Problème B :

On va retrouver les mêmes idées que pour la résolution du problème A, avec quelques difficultés supplémentaires. Le point de départ est la dynamique stochastique :

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \mathbf{N}[\mathbf{b}] + (\mathbf{b}, \mathbf{b})^{-1/4} M[\mathbf{b}]D^{1/2}\boldsymbol{\xi}, \quad (4.30)$$

où  $M[\mathbf{b}]$  est l'opérateur jacobien du noyau non-linéaire  $\mathbf{N}[\mathbf{b}]$ ,  $D^{1/2}$  l'opérateur linéaire diagonal de multiplication par  $Q^{n\alpha}$  et le bruit  $\boldsymbol{\xi}$  satisfait aux équations (4.10). On déduit de (4.30) la paire d'équations pour le vecteur unitaire  $\mathbf{C}(\tau)$  et la quantité  $B(\tau)$  :

$$\frac{d\mathbf{C}}{d\tau} = \{\mathbf{N}[\mathbf{C}] + e^{-B} M[\mathbf{C}]D^{1/2}\boldsymbol{\eta}\}_{\perp}, \quad (4.31a)$$

$$\frac{dB}{d\tau} = (\mathbf{C}, \mathbf{N}[\mathbf{C}]) + e^{-B} (\mathbf{C}, M[\mathbf{C}]D^{1/2}\boldsymbol{\eta}). \quad (4.31b)$$

Par l'indice  $\perp$  nous indiquons que la composante longitudinale a été soustraite. Les nouvelles fonctions de bruit  $\boldsymbol{\eta}(\tau)$  sont définies par la transformation :

$$\boldsymbol{\xi}(t(\tau)) = e^{+B(\tau)/2}\boldsymbol{\eta}(\tau),$$

et elles vérifient :

$$\langle \eta_n(\tau)\eta_{n'}(\tau') \rangle = \Gamma \delta_{nn'}\delta(\tau - \tau').$$

Nous allons faire de nouveau l'hypothèse d'une structure gelée de l'objet cohérent (Ansatz qui se résume dans l'équation (4.18)) et nous concentrer sur les composantes de la force aléatoire suivant les deux directions cohérentes  $\Phi_0$  et  $\psi_0$ . Il vient :

$$\frac{\delta v}{v_0} = e^{-B(\tau)} + \frac{(\psi_0, M[\Phi_0]D^{1/2}\eta)}{(\psi_0, \psi_0)}, \quad (4.32a)$$

$$\frac{dB}{d\tau} = A_0 + e^{-B(\tau)} (\Phi_0, M[\Phi_0]D^{1/2}\eta), \quad (4.32b)$$

d'où l'on tire les équations du mouvement pour les variables  $n(\tau)$  et  $B(\tau)$  :

$$\frac{dn}{d\tau} = v_0 + v_0 e^{-B(\tau)} \eta_1, \quad (4.33a)$$

$$\frac{dB}{d\tau} = A_0 + e^{-B(\tau)} \eta_2, \quad (4.33b)$$

où  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont deux bruits blancs corrélés, tels que :

$$\langle \eta_1(\tau) \eta_1(\tau') \rangle = \Gamma \frac{(\psi_0, MD {}^t M \psi_0)}{(\psi_0, \psi_0)^2} \delta(\tau - \tau'), \quad (4.34)$$

$$\langle \eta_1(\tau) \eta_2(\tau') \rangle = \Gamma \frac{(\psi_0, MD {}^t M \phi_0)}{(\psi_0, \psi_0)} \delta(\tau - \tau'), \quad (4.35)$$

$$\langle \eta_2(\tau) \eta_2(\tau') \rangle = \Gamma (\phi_0, MD {}^t M \phi_0) \delta(\tau - \tau'). \quad (4.36)$$

En raison de la présence de l'opérateur  $D$  dans chacun des produits scalaires fixant les variances du bruit, on attend que celle-ci croissent comme  $Q^{2n(\tau)\alpha}$ . Nous avons vérifié numériquement que chacune de ces trois quantités se met sous la forme  $a_{ij} Q^{2n(\tau)\alpha}$ , où les trois coefficients  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  et  $a_{22}$  sont remarquablement constants puisqu'ils présentent des oscillations temporelles de période  $v_0^{-1}$  dont l'amplitude relative ne dépasse pas  $10^{-4}$  ! Muni de cette observation, on arrive à la formulation finale du problème :

$$\frac{dx_1}{d\tau} = v_1 + e^{(x_1 - x_2)} \chi_1, \quad (4.37a)$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = v_2 + e^{(x_1 - x_2)} \chi_2, \quad (4.37b)$$

avec les définitions :

$$x_1(\tau) = \alpha \log Q n(\tau), \quad x_2(\tau) = B(\tau), \quad v_1 = A_0 \frac{\alpha}{z_0}, \quad v_2 = A_0, \quad (4.38)$$

et où les bruits  $\chi_1$  et  $\chi_2$  vérifient :

$$\langle \chi_i(\tau) \chi_j(\tau') \rangle = \Gamma \Delta_{ij} \delta(\tau - \tau'). \quad (4.39)$$

Pour fixer les idées, indiquons les valeurs trouvées pour les 3 coefficients  $\Delta_{ij}$  dans le cas  $\alpha = 2/3$  :

$$\Delta_{11} = 6.63, \quad \Delta_{12} = 2.51, \quad \Delta_{22} = 1.45. \quad (4.40)$$

Ainsi se terminent les développements formels de cette sous-section. On voit qu'on est arrivé de nouveau à un problème de marche au hasard dans un espace de dimension 2, mais un problème où la largeur du bruit varie exponentiellement avec la position. Comme dans le cas précédent, nous voulons estimer la densité de probabilité d'avoir l'exposant de croissance effectif  $z = x_2(\tau)/n \log Q$  après avoir parcouru une "longueur de cascade"  $x_1(\tau) = n\alpha \log Q$ , sachant qu'à l'instant initial  $\tau = 0$ ,  $x_1(0)$  et  $x_2(0)$  sont nuls. Cette densité de probabilité se met encore sous la forme (4.23) utilisée pour résoudre le problème A, mais il importe d'imposer des contraintes supplémentaires aux marches au hasard susceptibles de contribuer à  $P_n(z)$ , si on veut obtenir des résultats physiquement raisonnables. En l'absence de toute contrainte,  $P_n(z)$  est en effet dominée par des trajectoires, où le soliton passe une partie de son temps dans la région virtuelle  $n(\tau) < 0$ , y encaisse une très forte amplitude, puis reprend le sens habituel de la cascade en suivant une évolution déterministe. Pour éviter de telles pathologies, on exigera :

$$\frac{dx_1}{d\tau} > 0 \quad \forall \tau, \quad (4.41a)$$

$$x_1(\tau) - x_2(\tau) < 0 \quad \forall \tau. \quad (4.41b)$$

La condition (4.41a) interdit au soliton de rebrousser chemin ; l'autre condition (4.41b) est également naturelle, puisqu'elle revient à demander que le rapport entre l'amplitude absolue du soliton et celle du milieu ambiant reste toujours inférieure à sa valeur initiale 1. Dans l'Appendice II, on montre comment une série de transformations élémentaires ramène les équations (4.37) à

celles d'une marche au hasard ordinaire sur un revêtement du plan privé de l'origine. Cela ne rend pas le problème exactement soluble, mais nous permet de donner l'estimation suivante pour le comportement dominant de  $P_n(z)$  (un peu simplifié ici, dans un souci de clarté) :

$$P_n(z) \sim \exp \left[ -\frac{a}{\Gamma} (z_0 - \alpha) \frac{(Q^{n(z-z_0)} - 1)^2}{1 - Q^{-2n(z_0-\alpha)}} \right], \quad (4.42)$$

pour  $(z_0 - \alpha)Q^{n(z-z_0)} \leq 1$  avec, pour le coefficient numérique  $a$ , l'expression :

$$a = \frac{A_0}{z_0} \frac{1}{\Delta_{11} + \Delta_{22} - 2\Delta_{12}}.$$

Pour  $(z_0 - \alpha)Q^{n(z-z_0)} \gg 1$ , on attend que le comportement ci-dessus cède la place à une chute encore plus rapide de  $P_n(z)$  avec  $z$  :

$$P_n(z) \sim \exp \left[ -\frac{b}{\Gamma} Q^{2n(z-\alpha)} \right], \quad (4.43)$$

sans être toutefois capable d'estimer analytiquement la constante  $b$ .

Comme cela a été expliqué dans l'introduction de cette section, l'hypothèse la plus raisonnable sur l'exposant  $\alpha$  consiste à le choisir égal à  $2/3$ . On a alors  $z_0 - \alpha \sim 0.05$ . La formule (4.42), prise au pied de la lettre, prédit, pour un exposant  $z$  donné, un comportement de la probabilité  $P_n(z)$  en  $e^{ns(z)}$  (ou encore en loi de puissance dans le vecteur d'onde  $k_n^{s(z)/\log Q}$ ), dans un domaine de valeurs de  $n$  limité à :

$$n < \frac{1}{\log Q} \min \left[ \frac{1}{2(z_0 - \alpha)}, \frac{1}{z - z_0} \right]. \quad (4.44)$$

Les déviations par rapport à des lois invariantes d'échelle apparaîtraient donc au-delà d'une longueur de cascade indépendante de l'exposant  $z$  tant que  $z - z_0 < 2(z_0 - \alpha)$ , puis d'autant plus courte que  $z - z_0$  s'écarte de  $2(z_0 - \alpha)$ . Une telle prédiction, pas très orthodoxe, n'est pas en désaccord flagrant avec ce qu'on peut observer dans la vraie dynamique du modèle GOY, comme la section 4.4 le montrera.

### 4.3.3 Instantons : Résolution numérique du problème non-linéaire.

#### Dérivation des équations.

Le point de départ en est le système dynamique :

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \mathbf{N}[\mathbf{b}] + D^{1/2}\boldsymbol{\eta}, \quad (4.45)$$

où  $\mathbf{b}$  et  $\boldsymbol{\eta}$  sont à présent complexes et

$$\langle \eta_n^*(t)\eta_{n'}(t') \rangle = \Gamma\delta_{nn'}\delta(t-t').$$

Le produit scalaire des vecteurs complexes  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  est défini comme  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum A_n^* B_n$  ; on note cette fois-ci  $D^{1/2}$  l'opérateur diagonal de multiplication par  $Q^{3na/2}$ , et  $D$  le carré de  $D^{1/2}$ . On décrit les propriétés statistiques de (4.45) à l'aide de la représentation fonctionnelle introduite dans l'Appendice I. Soit  $\mathcal{M}[\mathbf{b}]$  une fonctionnelle des solutions de (4.45) entre  $t_0$  et  $t_1$ . Sa valeur moyenne sur l'ensemble des trajectoires ayant  $\mathbf{b}_0$  comme condition initiale est donnée par :

$$\mu_{\mathbf{b}_0}[\mathcal{M}] = \int \mathcal{D}\mathbf{p}\mathcal{D}\mathbf{p}^*\mathcal{D}\mathbf{b}\mathcal{D}\mathbf{b}^* \exp -S \mathcal{M}[\mathbf{b}]. \quad (4.46)$$

Dans cette expression  $\mathbf{p}^*$  est le champ conjugué de  $\mathbf{b}$  ;  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{b}^*$  ainsi que  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p}^*$  sont des degrés de liberté indépendants. La fonctionnelle d'action  $S$  s'écrit :

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t d\tau [(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{b}}) + (\mathbf{p}, \dot{\mathbf{b}})^* - \mathcal{H}], \quad (4.47a)$$

$$\text{avec } \mathcal{H} = (\mathbf{p}, \mathbf{N}) + (\mathbf{p}, \mathbf{N})^* + \Gamma(\mathbf{p}, D\mathbf{p}). \quad (4.47b)$$

Dans l'approximation des instantons, on va se concentrer sur les trajectoires extrémisant l'action. Le problème aux limites est déterminé par la quantité que nous voulons estimer. Par exemple pour décrire la probabilité de transition de l'état  $\mathbf{b}_0$  à  $t = t_0$  vers l'état  $\mathbf{b}(t_1) = \mathbf{b}$  à  $t = t_1$  on prendra

$\mathcal{M}[\mathbf{b}] = \delta(\mathbf{b}(t_1) - \mathbf{b})$  et les trajectoires classiques à considérer seront celles interpolant entre ces deux configurations. Nous voyons que nous sommes face à un problème multidimensionnel très compliqué. C'est pourquoi nous avons présenté dans la sous-section précédente une approximation "adiabatique" ramenant ce problème à une situation tractable analytiquement. Trouver une solution satisfaisant les bonnes conditions aux limites est hors de portée. Ce qui va nous intéresser néanmoins est de préciser le comportement générique des trajectoires extrémisant l'action. Elles obéissent aux équations canoniques de Hamilton :

$$\dot{\mathbf{b}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}^*} = \mathbf{N}[\mathbf{b}] + \Gamma D \mathbf{p}, \quad (4.48a)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{b}^*} = -{}^t M \mathbf{p}^*, \quad (4.48b)$$

où  ${}^t M$  est la transposée de la matrice jacobienne du noyau non-linéaire  $M = \partial_{\mathbf{b}^*} N$ . Si on pose  $\boldsymbol{\theta} = \Gamma D \mathbf{p}$  il vient :

$$\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{N}[\mathbf{b}] + \boldsymbol{\theta}, \quad (4.49a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = -D {}^t M D^{-1} \boldsymbol{\theta}^*, \quad (4.49b)$$

et pour la quantité conservée  $\mathcal{H}$  l'expression :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\Gamma} \{(\boldsymbol{\theta}, D^{-1} \mathbf{N}) + (\boldsymbol{\theta}, D^{-1} \mathbf{N}) + (\boldsymbol{\theta}, D^{-1} \boldsymbol{\theta})\}. \quad (4.50)$$

Dans ces variables les équations du mouvement sont devenues invariantes par translation suivant l'axe des couches. On peut gagner un peu d'intuition sur ce système en remarquant qu'il décrit l'advection d'un champ scalaire actif. En effet  $\boldsymbol{\theta}$  est essentiellement advecté par le noyau  $D {}^t M D^{-1}$  et en retour réagit de façon additive sur l'équation pour  $\mathbf{b}$ . Si l'activité sur  $\mathbf{b}$  est localisée,  $M$  agira seulement au voisinage du pulse. L'opération de conjugaison par  $D$  va déformer  ${}^t M$  et ainsi décentrer l'activité sur  $\boldsymbol{\theta}$  par rapport à celle sur  $\mathbf{b}$ . En augmentant la valeur du paramètre  $\alpha$ , présent dans  $D$ , on tend à faire agir le bruit plus à l'avant du pulse.

Notons que le signe  $-$  devant le second membre de (4.49b) inverse la stabilité des équations pour  $\mathbf{b}$  et  $\theta$ . Cette difficulté est inhérente à tous les problèmes de calcul d'instantons. Dans la limite où la largeur du bruit tend vers zéro la solution du problème stochastique converge vers les attracteurs du système déterministe (sans dissipation), et les trajectoires exceptionnelles qui s'en écartent exigent que le bruit prenne des valeurs très grandes par rapport à ses excursions typiques. Dans notre cas le champ physique a lui même tendance, même en l'absence de forçage extérieur, à développer une singularité en un temps fini. On définit à nouveau une dynamique adaptative en posant  $\mathbf{b} = \mathbf{C} \exp B$  et  $\theta = \xi \exp 2B$ . Les équations auxquelles nous arrivons sont :

$$\frac{d\mathbf{C}}{d\tau} = \{\mathbf{N}[\mathbf{c}] + \xi\}_{\perp}, \quad (4.51a)$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -D^t M[\mathbf{C}] D^{-1} \xi^* - 2A(\tau)\xi, \quad (4.51b)$$

$$\frac{dB}{d\tau} = A(\tau), \quad (4.51c)$$

$$A(\tau) = \Re \left[ \frac{(\mathbf{N}, \mathbf{C})}{(\mathbf{C}, \mathbf{C})} + \frac{(\xi, \mathbf{C})}{(\mathbf{C}, \mathbf{C})} \right], \quad (4.51d)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \exp(-B(\tau)). \quad (4.51e)$$

Nous avons intégré ces équations en partant de conditions initiales localisées, non-nulles sur  $\mathbf{C}$  et  $\theta$ , réelles ou complexes. Grâce aux variables singulières que nous utilisons il est possible, pour calculer commodément les différentes grandeurs que nous définissons dans la suite, de refermer le spectre sur lui même, en formant un anneau d'une centaine de sites.

Pour des valeurs de  $\alpha < 2/3$ , le bruit ne parvient pas à se coupler efficacement au champ physique, si bien qu'après un transitoire on retrouve systématiquement la solution autosimilaire déterministe.

Pour  $\alpha$  dans l'intervalle  $[2/3, 1[$  les solutions exhibent un comportement chaotique. Le champ auxiliaire reste toujours couplé au champ physique et

les deux cascaded ainsi de conserve, en propageant l'activité vers les petites échelles. L'état laissé par un tel front ne dessine plus une parfaite rampe en loi de puissance, mais plutôt un paysage au relief accidenté. On peut caractériser celui-ci par les fluctuations de la pente locale. Considérons  $L$  couches consécutives. Sur cette fenêtre la pente du spectre sera donnée par :

$$z_L = \frac{\int_{\Delta\tau} A(\tau) d\tau}{L \log Q} \quad \text{avec } Q = 2, \quad (4.52)$$

où  $\Delta\tau$  est le temps mis par le front pour se propager sur ces  $L$  couches. On étudie alors les fluctuations de cette grandeur en déplaçant la fenêtre le long du spectre.

On vérifie que le comportement chaotique assure une décorrélation en temps, et l'oubli des conditions initiales. On peut donc espérer que la statistique des pentes obtenues en déplaçant la fenêtre sur le spectre, estime une moyenne sur les conditions initiales pour une cascade de longueur  $L$ . Ce dernier point n'est toutefois sans doute pas vraie pour les petites valeurs de  $L$ , car les longueurs de corrélation sont grandes : de l'ordre d'une dizaine de pas de cascade. Nous portons sur les figures 4.8, 4.9, 4.10 les histogrammes des exposants  $z$  effectifs pour des longueurs de cascade  $L = 25, 50$ , et  $100$ . Ces calculs ont été effectués avec la valeur  $\alpha = 2/3$ . Dans tout l'intervalle  $[2/3, 1[$  la forme asymptotique des histogrammes, quand  $L$  devient grand devant la longueur de corrélation, est essentiellement inchangée. Tous ces histogrammes ont pour valeur moyenne  $z_{moy} \approx 0.762 \pm 210^{-3}$ . Conformément au théorème de la limite centrale, les fluctuations d'ordre 1 de la variable normalisée  $(z_L - z_{moy})\sqrt{L}$  ont asymptotiquement une distribution normale, ici d'écart type  $\bar{\sigma} \approx 0.025$ , comme le montre la figure 4.11. En augmentant  $\alpha$  dans l'intervalle  $[2/3, 1[$ , on tend à réduire la longueur de corrélation, ce qui réduit légèrement  $\bar{\sigma}$ .

L'image qui se dégage est donc celle d'un processus à incrément indépendant possédant une dérive, donnée par  $z_{moy}$ . En fait pour  $\alpha \geq 1$  le système adopte curieusement un comportement plus simple avec l'émergence d'une nouvelle solution autosimilaire, faisant intervenir le champ auxiliaire, et dont l'exposant  $z$

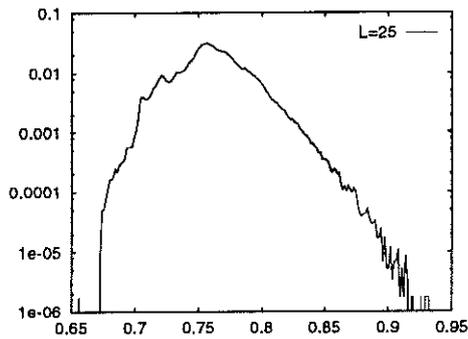


Figure 4.8 :

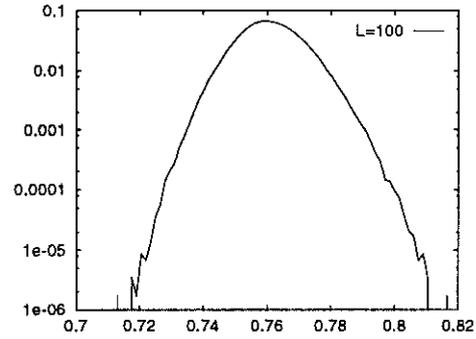


Figure 4.10 :

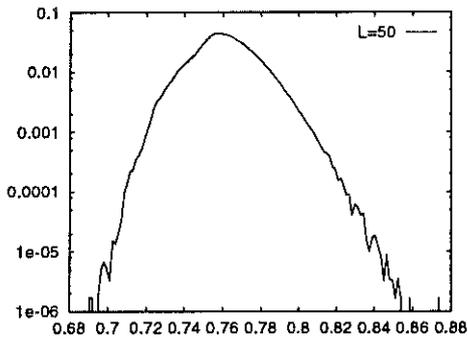


Figure 4.9 :

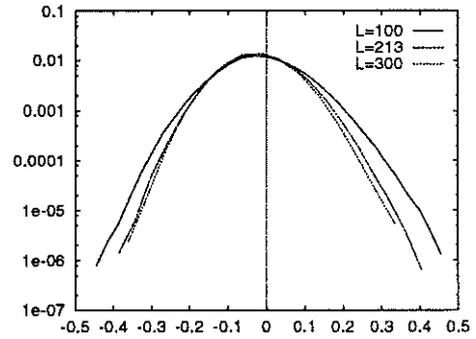


Figure 4.11 :

Sur les trois figures 4.8, 4.9 et 4.10 sont portés les histogrammes des exposants  $z$  effectifs, associés à une cascade de longueur  $L$ , dans la dynamique 4.51, pour la valeur  $\alpha = 2/3$ .  $z_{moy} \approx 0.762 \pm 2 \cdot 10^{-3}$ .

On montre sur la figure 4.11, la distribution des variables normalisées  $X = (z_L - z_{moy})\sqrt{L}$ . Une estimation de l'écart type donne  $\tilde{\sigma} \approx 0.025$ .

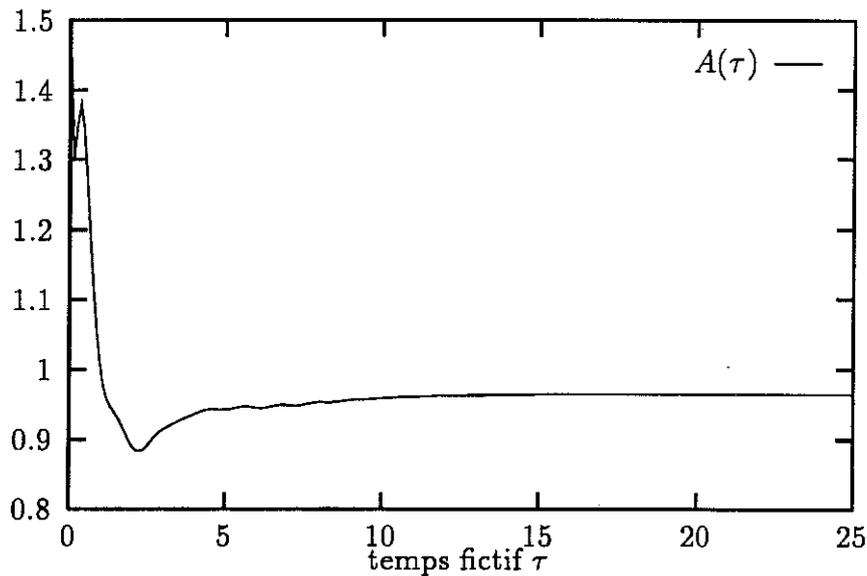


Figure 4.12 : Signature de la formation d'une solution autosimilaire, pour la dynamique (4.49) quand  $\alpha \geq 1$ . Les conditions initiales sur  $\mathbf{C}$  et  $\xi$  sont  $(\delta_{1,n} + \delta_{2,n})/\sqrt{4}$ .

est justement égal à  $0.765 \pm 210^{-3}$ . Nous portons sur les figures 4.12 et 4.13 la signature de cette solution, obtenue à partir d'une condition initiale réelle. La prise de conditions initiales complexes conduit au même comportement. On remarque sur la figure 4.13 que le champ auxiliaire se développe juste à l'avant du front physique, comme on pouvait s'y attendre à partir de la remarque faite plus haut concernant l'opérateur  $D^4 M D^{-1}$ .

On constate les faits suivants :

- La nouvelle solution autosimilaire développe un exposant substantiellement inférieur à la valeur de  $\alpha$  pour laquelle elle se stabilise (0.76 versus 1).
- Des calculs semblables pour  $\varepsilon = 0.75$ , valeur pour laquelle la solution déterministe de base a un exposant  $z = 0.88$ , réservent une autre surprise, puisque dans ce cas la nouvelle solution obtenue lorsque  $\alpha \geq 1$  exhibe un exposant inférieur au cas déterministe :  $z = 0.79 \pm 10^{-2}$ . Comme

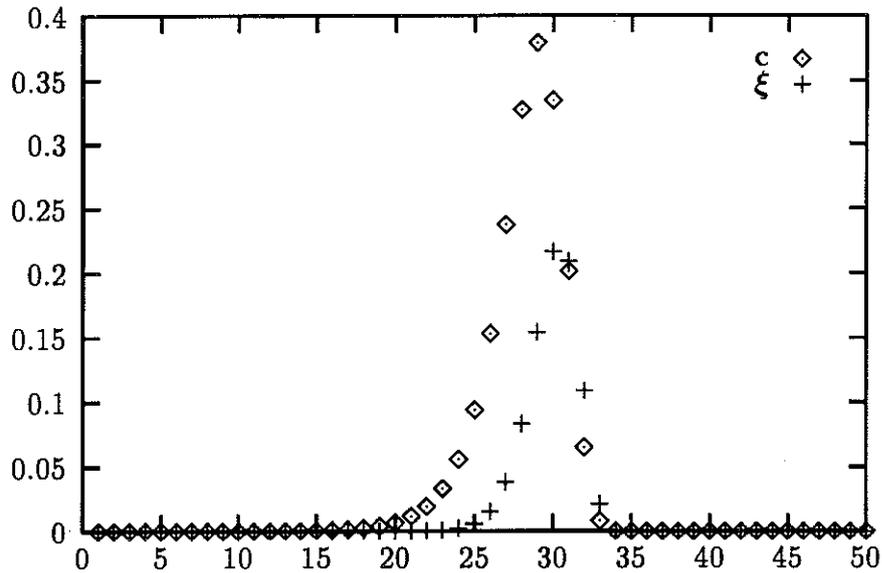


Figure 4.13 : Morphologie de la nouvelle solution autosimilaire. Noter la position du bruit à l'avant du pulse.

dans le cas précédent un régime chaotique engendrant des fluctuations de  $z$  effectifs centrées autour de cette valeur se met en place lorsque l'on diminue  $\alpha$ .

- Le régime chaotique s'apparente à une "diffusion" autour de la nouvelle solution autosimilaire sous-jacente, ne devenant stable qu'au delà d'un seuil.
- L'apparition de la queue exponentielle du côté des grandes valeurs de  $z$ , particulièrement visible sur la figure 4.8, est due à la distribution des temps de propagation. On peut mettre ce point en relation avec la distribution des temps de premier passage pour une diffusion à une dimension.

#### 4.3.4 Intermède.

Marquons une pause à ce niveau et faisons le bilan. Dans le résultat pour le problème A, nous avons constaté la tendance peu physique, qu'à cette modélisation à développer une aile exponentielle du côté des grandes valeurs de  $z$ . Ce travers a été retrouvé dans les résultats numériques des équations non-linéaires de la sous section 4.3.3, et ne semble donc pas être propre au traitement linéaire. Toutefois, pour tous les problèmes de la situation 2, le terme d'action réintroduit une coupure, et donc évite cette difficulté. Pour décrire une situation où la phase désordonnée reste à hauteur de la structure singulière, il paraît opportun de trouver une autre approche. De fait la section 4.2 sur les collisions suggère de revenir à un processus multiplicatif discret.

Considérons une situation où le pulse trouve devant lui à chaque pas de cascade, une perturbation  $\delta_i = -(\mathbf{b}, \mathbf{b})^{1/2} a_i$ , où  $a_i$  est tiré au hasard à chaque étape, avec une même loi de probabilité. On peut supposer pour  $a_i$  une distribution gaussienne :

$$P(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}} \exp -\frac{a^2}{2\Delta}.$$

On se limite de fait à des défauts positifs ou négatifs. Il ne serait pas difficile néanmoins, de tenir compte des degrés de liberté de phase. Nous attirons l'attention sur le fait que les défauts "négatifs" ( $\theta = \pi$  dans les notations de la section 4.2), correspondent ici aux valeurs positives de  $a$  !

Le passage du pulse du site  $i$  au site  $i + 1$  va s'accompagner d'un facteur multiplicatif  $W_i$ , défini par  $b_{i+1} = W_i b_i$  et dont le logarithme en base  $Q$ , sera :

$$\log_Q W_i = z_0 + \tilde{G}(a_i).$$

La fonction  $\tilde{G}(a)$  est une fonction de réponse. Dans cette image toutes les étapes sont équivalentes. D'après les résultats de la section 4.2 on attend que  $\tilde{G}$  soit positive du côté  $a$  positif, avec un maximum en un point, disons  $a_{max}$ . C'est bien en effet, ce que suggère la figure 4.6. Cependant une définition vraiment opérationnelle de  $\tilde{G}(a)$  nous manque, en particulier nous ne savons pas

comment définir proprement une saturation continue. Du côté des  $a$  négatifs, le comportement attendu pour  $\tilde{G}(a)$  est une plongée vers les valeurs négatives. La fonction de réponse devrait donc être convexe.

La densité de probabilité d'avoir sur un pas de cascade, le taux de croissance  $\Delta z = \log_Q W - z_0$  est donnée à chaque étape par :

$$P(\Delta z) = \frac{(\tilde{G}')^{-1}(\Delta z)}{\sqrt{2\pi\Delta}} \exp - \frac{[\tilde{G}^{-1}(\Delta z)]^2}{2\Delta},$$

dans laquelle  $\tilde{G}^{-1}(\Delta z)$  est la fonction réciproque de  $\tilde{G}(a)$ .

La densité de probabilité d'avoir l'exposant  $z$  après  $n$  pas de cascade va se comporter, quand  $n$  devient grand, comme :

$$P(n, z) \sim \exp(ns(z)) \text{ avec } -s(z) = \frac{[\tilde{G}^{-1}(z - z_0)]^2}{2\Delta}.$$

Les propriétés suggérées plus haut pour  $\tilde{G}(a)$  impliquent les comportements suivants de  $P(n, z)$  :

- au voisinage de  $z = z_0$  ( $a = 0$ ) la réponse est linéaire, et la distribution des exposants  $z$  reste donc gaussienne :

$$-s(z) = \frac{(z - z_0)^2}{2K}, \text{ avec } K \text{ constante.}$$

- pour  $z - z_0 \ll 0$  ( $a \ll 0$ ), et en prenant  $\tilde{G}(a) \sim -|a|^\alpha$  avec  $\alpha > 1$ , on obtient une forme en exponentielle étirée :

$$-s(z) = K|z - z_0|^{2/\alpha}.$$

- le maximum de  $\tilde{G}$  en  $a_{max}$  définit une coupure en  $z^* = z_0 + \tilde{G}(a_{max})$ . Au voisinage de cette valeur, la fonction de Cramér devient :

$$-s(z) = a_{max}^2 + K(z - z^*)^{1/2} + \mathcal{O}(z - z^*).$$

Ces différents comportements répondent à toutes les exigences physiques admises généralement.

Nous avons déjà mentionné à plusieurs reprises, le modèle de Z.S.She *et al* (1994). Il est naturel de se demander s'il serait possible de rattacher l'image qu'ils proposent, aux éléments de dynamique élémentaire que nous avons mis en évidence. Supposons donc l'existence d'un processus multiplicatif aléatoire, où maintenant  $\log_Q W_i$  obéirait à une statistique poissonnienne. Plus précisément :

$$\log_Q W_i = (2/3 + \gamma) + \frac{m}{3} \log_Q \beta, \text{ avec } P(m) = \frac{\lambda^m}{m!} \exp -\lambda$$

- Le nombre moyen de défauts, par pas de cascade, vaut dans ce cas  $\lambda = (3\gamma \log Q)/(1 - \beta)$ , (cf l'Appendice 1.4)
- la valeur maximale de l'exposant  $z$  vaut  $z_{max} = 2/3 + \gamma$ .
- À partir de la structure la plus singulière, chaque quantum abaisse l'amplitude d'un facteur dont le logarithme en base  $Q$  vaut  $\delta = (\log_Q \beta)/3$ .

Si l'on fait une application numérique avec les valeurs des paramètres proposées dans E.Lévêque *et al* (1995b) (voir aussi la section 2.3), on obtient :

- $\gamma = 0.208$  et  $\beta = 0.58$ .
- $\lambda \approx 1$ .
- $z_{max} = 0.875$ .
- $\delta = -0.262$ .

Ces nombres appellent quelques commentaires :

- La modulation élémentaire  $\delta$  est relativement importante. Cependant, tout ensemble avec  $\lambda \approx 1$ , la situation n'est pas absurde au regard des résultats de la section 4.2. D'un point de vue statistique, on peut admettre qu'il s'agisse là d'une approximation valable.

- Malgré tout, au niveau de la dynamique, il est clair que la situation est différente. En effet, ce qui est bien défini, c'est la valeur  $z_0 = 0.72$  et les fluctuations autour de cette valeur n'ont, à notre sens, aucune raison d'être quantifiées.

#### 4.4 Formation des structures singulières dans la vraie dynamique.

Il est grand temps d'examiner comment se forment les fluctuations les plus intenses dans la vraie dynamique ! Nous allons vérifier qu'elles sont associées à des pulses émis par les grandes échelles qui propagent dans une rampe dont le scaling est proche de K41. Ces pulses sont cohérents en ce sens qu'ils tendent à optimiser le flux d'énergie en ordonnant les phases sur leur passage. On retrouve le désaccord de phases entre l'objet cohérent et les fluctuations "nourrissières", nécessaire pour obtenir un gain d'amplitude positif. On vérifie que le niveau de la rampe sur laquelle se développe la structure cohérente ne lui est pas rigidement attachée. Ce point permet d'affirmer que ce ne sont pas là les manifestations du deuxième type de solutions autosimilaires autorisées mathématiquement. En effet, de telles solutions imposent que le niveau de l'état K41 à l'avant du front augmente à mesure que ce dernier avance.

Nous revenons au système d'équations (2.10) en présence de forçage et de dissipation. Nous avons fait nos calculs pour deux valeurs du nombre de Reynolds :  $Re = 10^5$  et  $Re = 10^6$  avec  $\varepsilon = 0.5$  et  $Q = 2$ . Pour suivre le développement des pulses, on s'appuie sur le fait que leur passage sur la couche d'indice  $n$  s'accompagne d'un maximum local dans le signal temporel du taux de transfert d'énergie  $\varepsilon_n$ . Il ne reste plus alors qu'à suivre les dates successives d'apparition de ces maxima en commençant sur la troisième couche et en descendant la cascade à mesure que le pulse se propage. Il faut toutefois s'assurer que l'on suit bien un seul événement cohérent. La faisabilité même de

cette procédure montre le caractère cohérent de la propagation. On contrôle en outre la croissance de l'objet en exigeant qu'à chaque étape de la cascade il croisse d'un facteur au moins égal à  $Q^z$ . On choisit différentes valeurs de  $z$  et on sélectionne ainsi des événements plus ou moins singuliers. A chaque étape de la cascade, on stocke l'état de l'ensemble des couches, si bien que pour chaque "événement singulier" on dispose d'une suite de spectre  $\{\phi(t_n)\}$  dont le nombre est fixé par la longueur de cascade sur laquelle le pulse est parvenu à se propager en satisfaisant les contraintes de cohérence et de croissance qu'on lui impose.

Commençons par vérifier l'existence de structures cohérentes beaucoup plus singulières que les solutions idéales. Pour cela nous portons sur la figure (4.14) des "instantanés" des taux de transfert d'énergie :

$$\varepsilon_n = \Re [(1 - \varepsilon)\phi_{n-2}\phi_{n-1}\phi_n + \phi_{n-1}\phi_n\phi_{n+1}] ,$$

calculés à partir d'une suite  $\{\phi(t_n)\}$ , obtenue en suivant un événement particulier dans la dynamique pour un Reynolds  $Re = 10^5$ . La couche forcée porte l'indice  $n = 1$ . L'échelle dissipative de Kolmogorov est située entre les couches d'indice  $n = 12$  et  $n = 13$ . L'histoire commence par l'encadré en haut à gauche et se poursuit en descendant cette colonne, puis celle de droite. L'échelle sur les ordonnées est logarithmique, tandis que les abscisses portent l'indice de la couche sur laquelle on calcule  $\varepsilon_n$ . Afin de guider les yeux nous avons également porté sur chaque figure l'enveloppe correspondant à une croissance d'exposant  $z = 0.85$ . Plus précisément  $\varepsilon_n(z) = 2^{3n(z-2/3)}\varepsilon_0$ . Sur le deuxième et le dernier encadré apparaît l'évolution que donnerait la solution idéale avec l'exposant  $z_0 = 0.72$  telle qu'on l'a obtenue au chapitre trois pour ces valeurs de  $Q$  et  $\varepsilon$  (cf Tableau 3.2).

Afin de mieux apprécier l'état à l'avant du pulse, nous portons, pour le même événement, sur la figure (4.15), le module des variables  $b_n$  : les plus importantes pour la dynamique non-linéaire. L'enchaînement des encadrés est le même que pour la figure précédente. Nous avons également porté sur

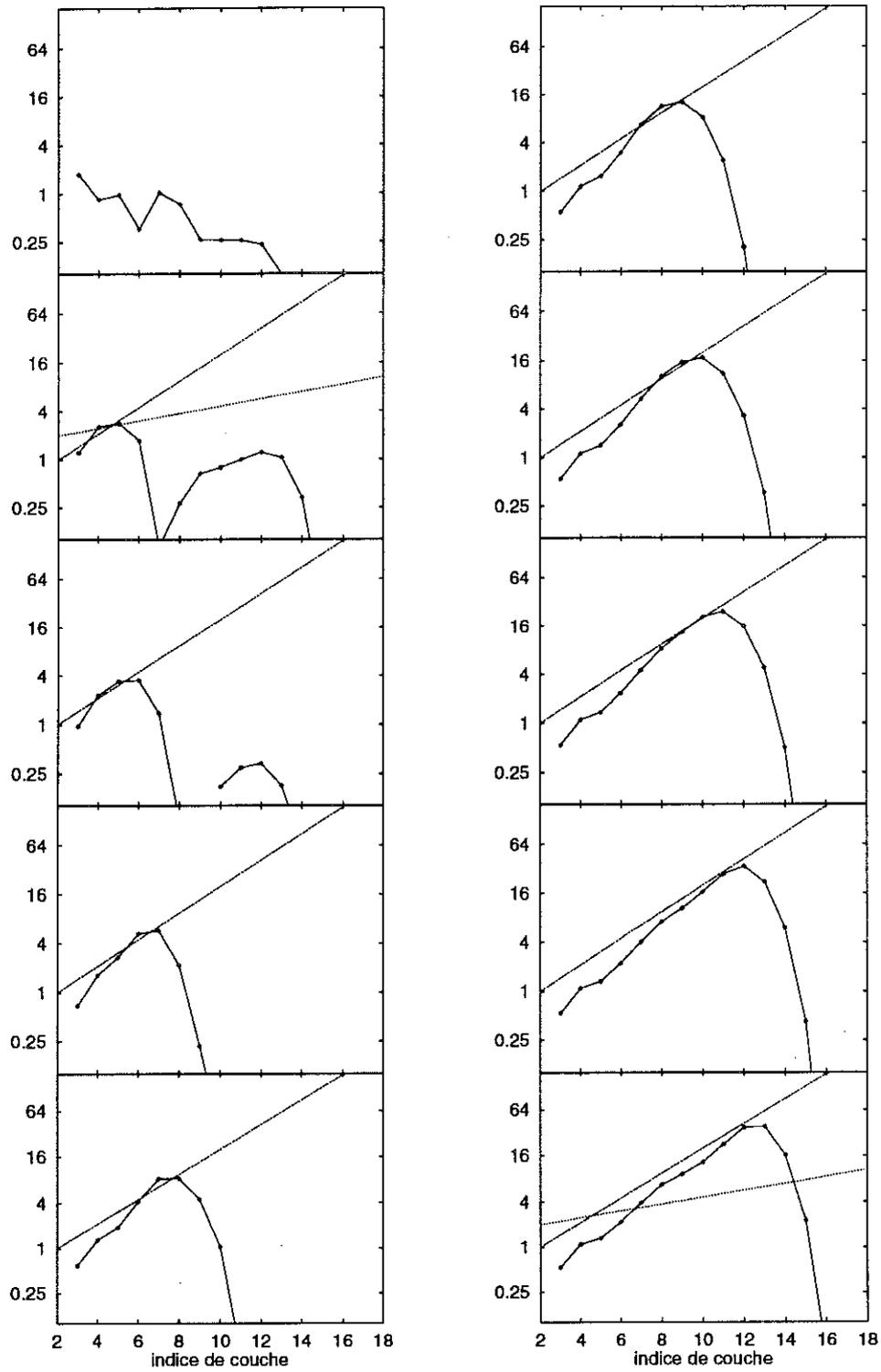


Figure 4.14 : voir texte

chaque icône les lois de puissance pour le scaling K41  $z = 2/3$  et pour la valeur  $z = 0.85$ . Nous rappelons que l'état associé à une structure autosimilaire dans ces variables donne  $b_n = b_0 2^{nz}$ . Attention à l'échelle logarithmique, il y a un facteur 4 entre l'amplitude atteinte par le front en fin de propagation et le comportement K41 (dernière icône) !

Dans l'état initial on observe une rampe dont le scaling est proche de K41. Noter cependant que l'activité va bien au-delà de l'échelle dissipative de Kolmogorov, il s'agit en fait de la traînée, laissée par le pulse précédent, qui relaxe vers le comportement moyen. C'est ce que l'on constate sur les "instantanés" suivants où l'on assiste à une contraction du spectre du côté ultraviolet, tandis que le pulse émis à l'autre bord poursuit son avancée avec une très forte croissance en s'appuyant sur l'activité qu'il trouve devant lui. Ce premier échantillon a été obtenu en exigeant à chaque étape un gain d'amplitude supérieur à  $2^{0.8}$ . Nous constatons que dans les premiers instants la croissance est au moins égale à  $2^{0.85}$ . Le pulse parvient à remplir le spectre avant d'être finalement stoppé par la dissipation. Afin de nous convaincre que la croissance extraordinaire de ce front n'est maintenue que par la présence des perturbations causées par les fluctuations en aval, nous avons pris comme condition initiale pour la dynamique non-linéaire dans le vide l'ensemble des  $b_n$  de la dernière icône. On retrouve alors aussitôt la solution de base. On s'aperçoit déjà sur cette série d'images que l'avancée du front ne s'accompagne pas d'une remontée de l'état "K41" qui le précède.

Pour confirmer cette conclusion et également tenter de voir un effet de taille à ce niveau de dynamique élémentaire, nous avons augmenté la longueur de cascade en prenant un Reynolds  $Re = 10^6$ . La couche dissipative de Kolmogorov porte à présent l'indice  $n = 15$ . On trouve sur la colonne de gauche de la figure 4.16 une série de spectres de  $b_n$  obtenue en imposant une croissance à chaque pas supérieure à  $2^{0.85}$ . Cette série d'images s'arrête lorsque le pulse, alors situé sur la couche  $n = 11 - 12$ , ne parvient plus à croître suffisamment.

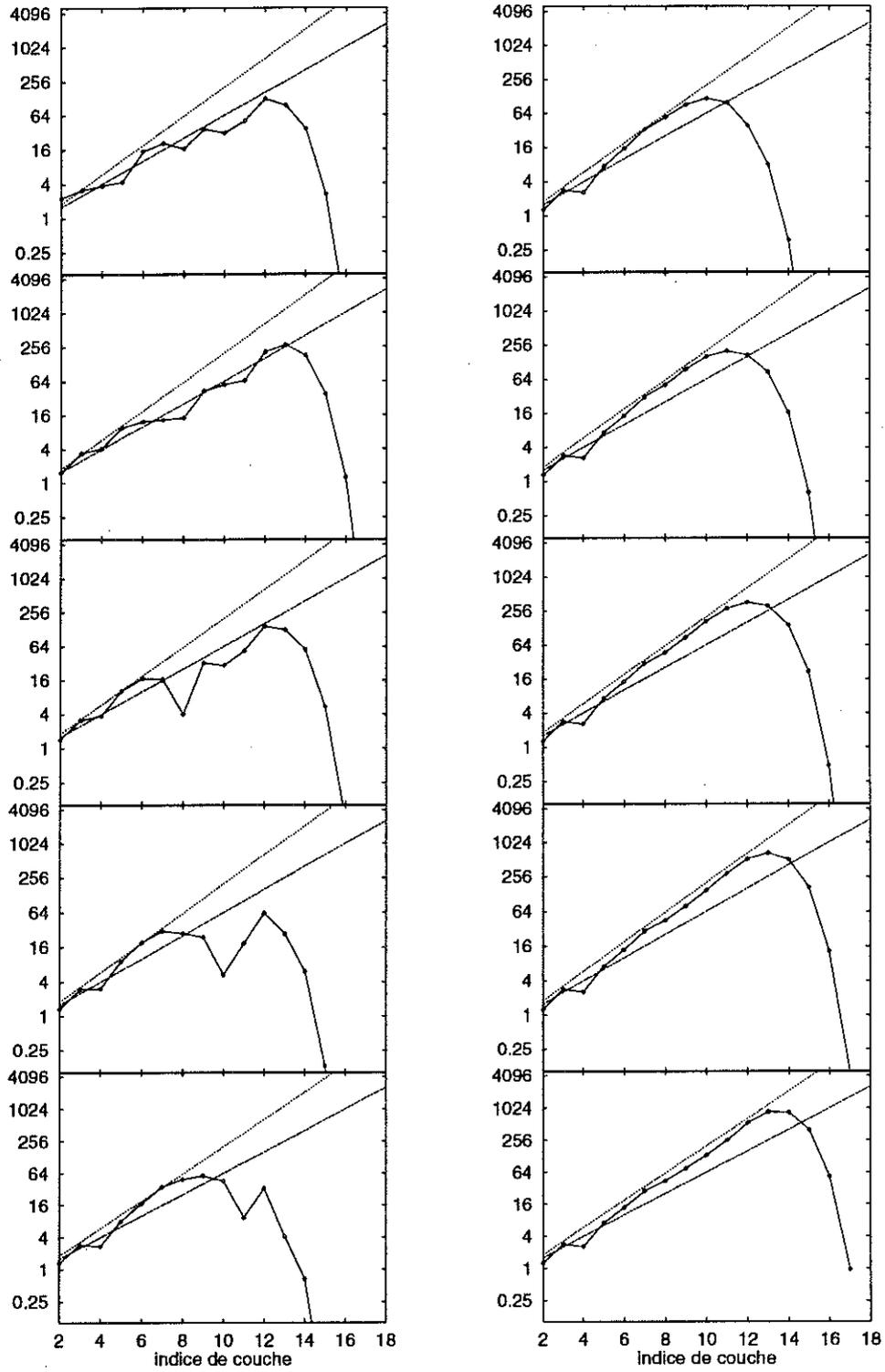


Figure 4.15 : voir texte

Nous avons la rampe K41 à l'avant mais cette fois le pulse n'est pas parvenu jusqu'à la couche dissipative. Nous avons encore porté les deux scaling pour  $z = 2/3$  et  $z = 0.85$ . En regard, sur la colonne de gauche, nous donnons une indication de l'état des phases le long de la cascade, pendant la propagation. Chaque étage correspond aux mêmes instants. La quantité que nous avons calculée est la phase des produits  $\Pi_n = b_{n-2}b_{n-1}b_n$  qui interviennent dans le taux de transfert d'énergie. Ce dernier est maximum lorsque cette phase est proche de zéro. Nous constatons que la propagation du pulse s'accompagne d'une certaine mise en ordre dans les phases visant à optimiser le taux de transfert d'énergie. On note également que l'on peut suivre la progression du pulse par la présence systématique d'un défaut de phase, juste à l'avant, écartant l'une (au moins) des composantes du produit de sa valeur dans l'état cohérent. On retrouve donc les mêmes règles que pour les collisions élémentaires présentées dans la section 4.2. Ici encore on constate que le niveau des couches en aval du pulse n'évolue pas avec ce dernier comme le supposerait la présence sous-jacente d'une solution autosimilaire du deuxième type formellement permise par le noyau non-linéaire. On peut donc exclure leur rôle éventuel. Enfin sur la figure 4.17 nous avons reporté l'évolution du taux de transfert d'énergie, correspondant à l'événement singulier de la figure 4.16, avec cette fois encore les phases des  $\Pi_n$  aux mêmes instants. Nous indiquons aussi la croissance suivie, avec un exposant  $z$  entre 0,85 et 0,9, ainsi que la pente "nue"  $z = 0.72$ .

Sur la figure 4.18 nous donnons quelques chiffres de statistique, en montrant comment varie le nombre des événements, dont nous avons pu suivre la propagation, en fonction de l'indice de couche qu'ils visitent, et ceci pour différentes valeurs d'exposants  $z$ . On peut noter les points suivants :

- Dans une description multifractale, on attend que ce nombre décroisse en  $\exp -nD(z)$ .  $D(z)$  mesure comment se raréfient les singularités d'exposant  $z$  lorsqu'on diminue l'échelle, elle est reliée à la fonction de Cramér du processus multiplicatif (déjà utilisée dans la section 4.3.2 et définie

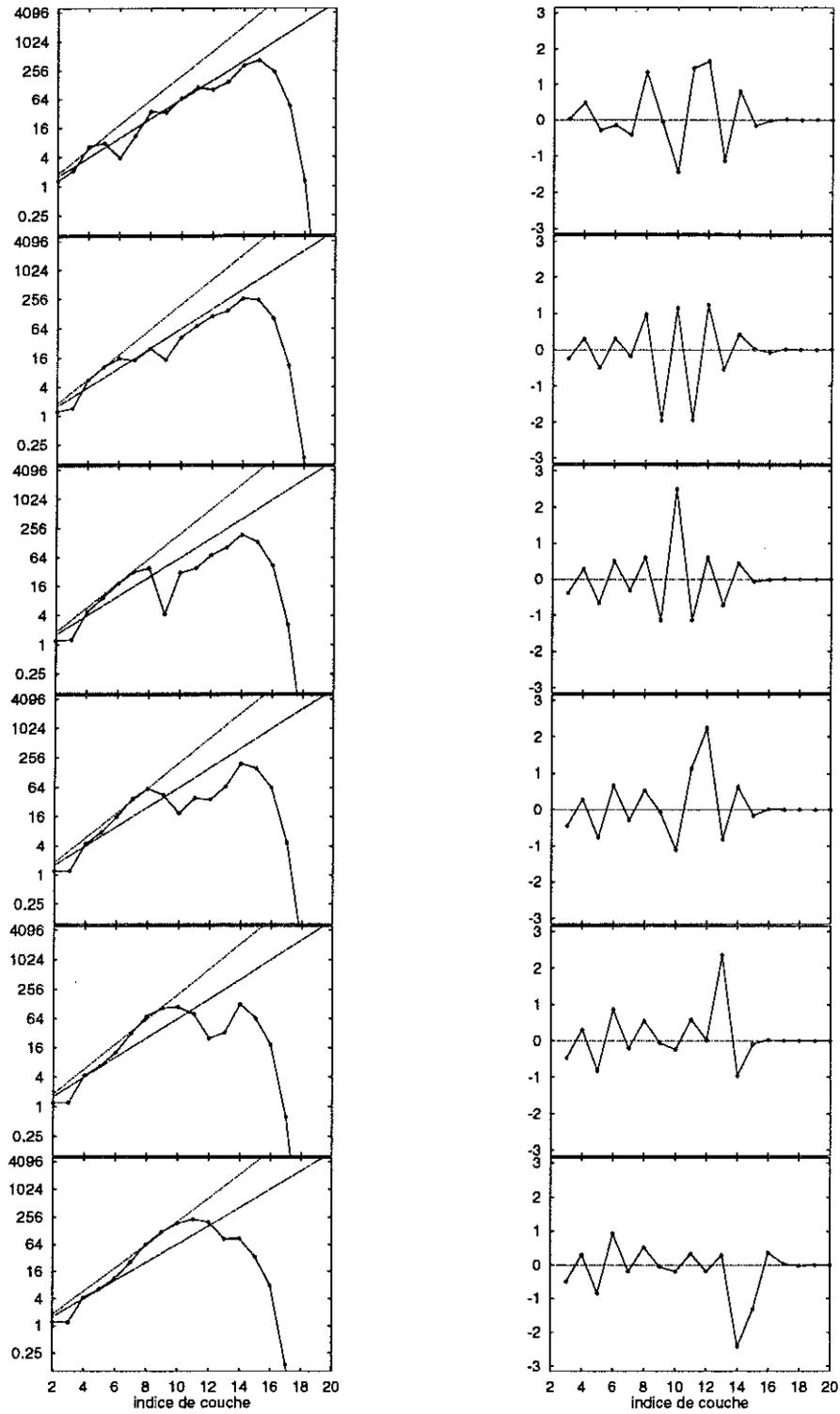


Figure 4.16 : voir texte

dans le chapitre 1) par  $D(z) = -s(z)$ . Sur la figure correspondant à  $Re = 10^6$  on aperçoit assez nettement une coupure se manifestant pour les exposants  $z = 0.88 - 0.85$  dès la couche d'indice  $n = 8 - 9$ , tandis qu'un comportement exponentiel semble persister pour  $z = 0.8$  jusqu'à la couche  $n = 11$ .

- Ce comportement se laisse déjà deviner pour une cascade plus courte. En particulier pour  $z = 0.88$ , il semble que l'on retrouve la chute rapide sur la couche  $n = 8$ .
- La proximité de la couche dissipative modifie la physique quelques trois ou quatre couches avant l'échelle de Kolmogorov. On peut le voir sur les 4 derniers encadrés de la figure 4.15, où le pulse ne trouve plus devant lui la rampe K41. En fait, cet effet se manifeste également dans les calculs de statistique plus standard où l'on observe un accident dans les moments du taux de transfert d'énergie, quelques couches avant l'échelle dissipative.

Il est sûr qu'une augmentation de la statistique serait souhaitable. Nous n'avons pas eu le temps d'optimiser notre procédure de recherche, qui reste assez élémentaire et doit pouvoir être améliorée. En revanche, nous ne pourrions pas éviter le coût en temps de calcul qu'impose d'une part l'augmentation du nombre de Reynolds, et d'autre part la statistique sur ces événements, rares par nature.

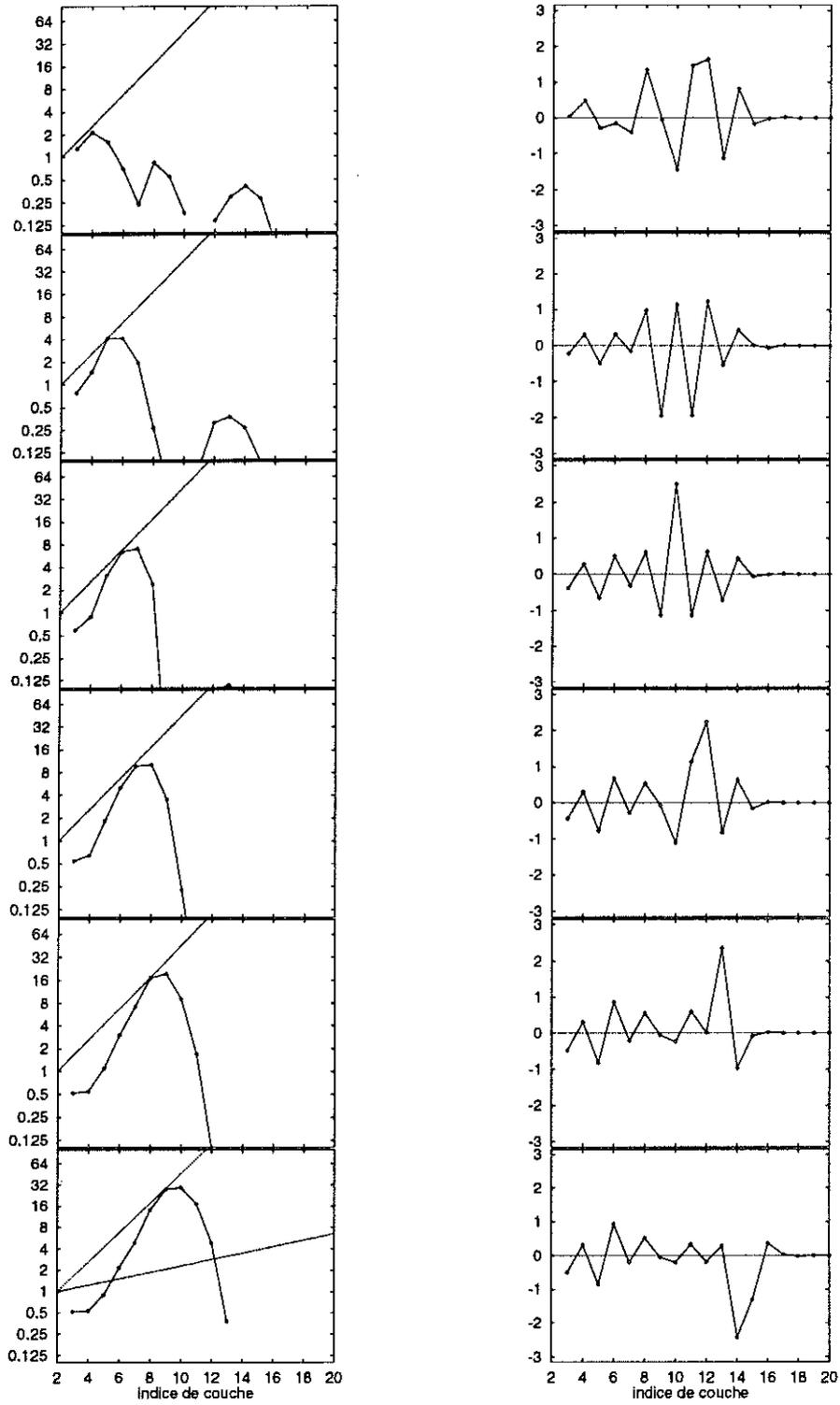


Figure 4.17 : voir texte

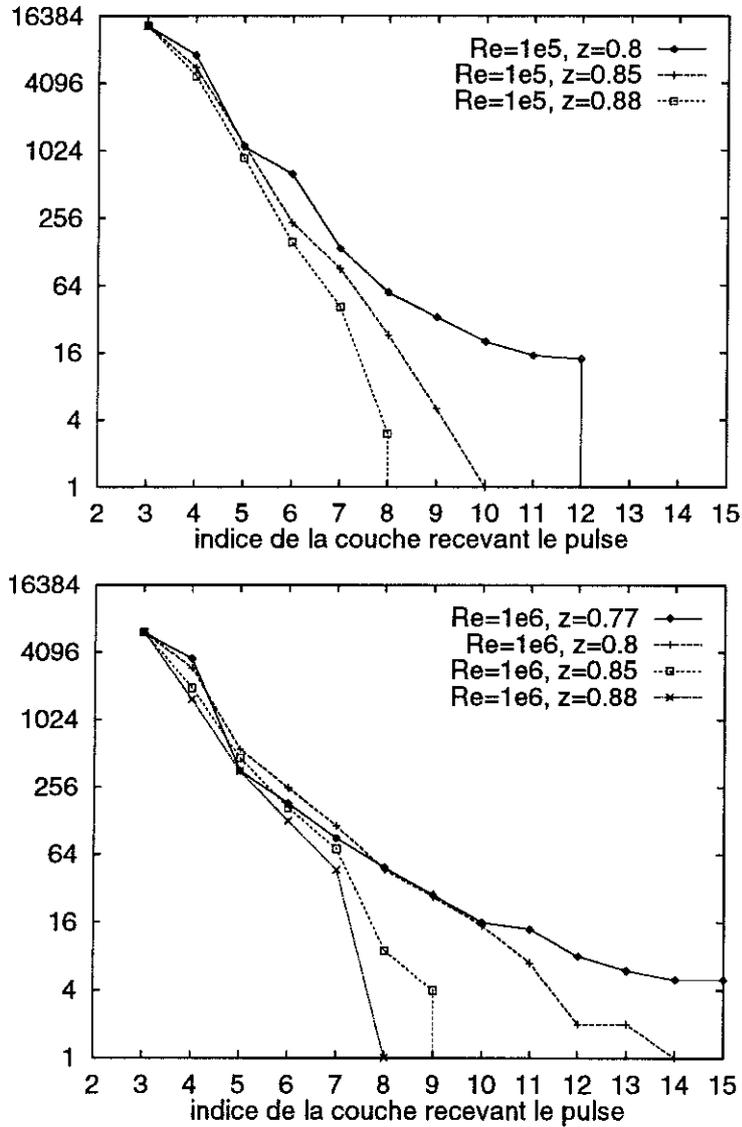


Figure 4.18 : Sur ces figures sont portés en ordonnée les nombres d'objets que nous avons pu repérer et qui se sont propagés jusqu'à la couche d'indice figurant en abscisse, pour différentes valeurs de  $z$ . La statistique pour le nombre de Reynolds  $Re = 10^5$  porte sur  $10^4$  temps de retournement grande échelle, contre  $510^3$  pour  $Re = 10^6$ . On commence à suivre les objets à partir de la couche d'indice  $n = 3$ . Pour  $Re = 10^6$ , on aperçoit assez nettement une coupure "épluchant" les exposants  $z = 0.88 - 0.85$  dès la couche  $n = 8$ . Cet effet est déjà perceptible pour  $Re = 10^5$  mais il est rendu moins net par la proximité de la couche dissipative.

## 4.5 Appendice I.

Dans cet appendice nous introduisons de manière heuristique la représentation fonctionnelle conduisant au formalisme des instantons. Nous nous appuyons sur la définition de Ito de l'intégrale stochastique. Nous donnons également la relation existant entre cette description et celle de Stratanovitch dans le cadre des équations différentielles stochastiques (E.D.S).

### 4.5.1 Représentation fonctionnelle et instantons.

Considérons une équation de Langevin :

$$\frac{d\phi}{dt} = N(\phi) + B(\phi)\eta. \quad (4.53)$$

Par mesure de simplicité nous ne considérons qu'une seule variable réelle.  $N$  et  $B$  sont des fonctions (locales) de  $\phi(t)$ . Le terme  $\eta(t)$  est un bruit blanc gaussien, ses corrélations sont donc de la forme :

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \Gamma \delta(t - t'). \quad (4.54)$$

Les solutions de (4.53) prenant la valeur  $\phi_0$  à  $t = t_0$  sont définies par l'équation intégrale :

$$\phi(t) = \phi_0 + \int_{t_0}^t d\tau N(\phi(\tau)) + \int_{t_0}^t B(\phi(\tau))\eta(\tau)d\tau. \quad (4.55)$$

Le dernier terme est une intégrale stochastique. Elle s'obtient au sens de Ito, comme la limite (en moyenne quadratique) de la somme de Riemann :

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=0}^N B(\phi(\tau_n))\Delta W_n \equiv \int_{t_0}^t B(\phi(\tau))\eta(\tau)d\tau, \quad (4.56)$$

où  $\tau_0 = t_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = t$ , est une subdivision de l'intervalle  $[t_0, t]$  de pas  $\Delta\tau = (t - t_0)/N$  et les quantités  $\Delta W_n \equiv W(\tau_{n+1}) - W(\tau_n)$ , sont les incréments d'un processus de diffusion caractérisé par :

$$\langle \Delta W_n \rangle = 0 \quad \forall n, \quad (4.57a)$$

$$\langle \Delta W_n \Delta W_m \rangle = \Gamma \Delta\tau \delta_{n,m} \quad \forall n, m. \quad (4.57b)$$

Dans la somme (4.56), c'est systématiquement la valeur prise par  $B(\phi(\tau))$  à l'entrée de chaque intervalle  $[\tau_n, \tau_{n+1}]$  qui est sélectionnée. L'équation (4.53) intégrée sur un tel intervalle avec  $\Delta\tau \rightarrow 0$  devient donc :

$$\phi_{n+1} = \phi_n + N(\phi_n)\Delta\tau + B(\phi_n)(W_{n+1} - W_n), \quad (4.58)$$

avec les notations évidentes  $\phi(\tau_n) \equiv \phi_n$  et  $W(\tau_n) \equiv W_n$ . Définissons encore  $\Delta\phi_n \equiv \phi_{n+1} - \phi_n$  de sorte que  $\phi_n - \phi_0 = \sum_0^{n-1} \Delta\phi_i$ . Les incréments  $\Delta\phi_i$  vérifient le système "triangulaire" d'équations :

$$\Delta\phi_i = N(\{\Delta\phi_j\}_{j<i}, \phi_0)\Delta\tau + B(\{\Delta\phi_j\}_{j<i}, \phi_0)\Delta W_i. \quad (4.59)$$

On en déduit, d'une part que  $\Delta\phi_i$  est indépendant de  $\Delta\phi_j$  pour  $j > i$ , donc du futur (c'est une expression de la causalité), et aussi pour  $j < i$ , donc du passé, grâce à l'indépendance des incréments  $\Delta W_i$ , (4.57b) (c'est la propriété de Markov).

Étant donnée une condition initiale  $\phi_0$ , un théorème assure l'existence et l'unicité de solution pour toutes réalisations du bruit. On peut donc définir une application  $\mathcal{F}_{\phi_0}$  de l'ensemble des trajectoires  $\{W_0, W(t)\}$  sur l'ensemble des solutions de (4.53) satisfaisant la condition initiale  $\phi_0$  :

$$\mathcal{F}_{\phi_0} : \{W_0, W(t)\} \longmapsto \{\phi_0, \phi(t)\}.$$

Réciproquement, à toute solution homogène  $\{\phi_0, \phi(t)\}$ , on associe une réalisation unique du bruit.

$$\mathcal{G} : \{\phi_0, \phi(t)\} \longmapsto \{W_0, W(t)\}.$$

On introduit ensuite une mesure de probabilité  $\mathcal{W}$ , sur les trajectoires du mouvement brownien  $\{W_0, W(t)\}$ , appelée mesure de Wiener. Avec les notations introduites plus haut, il s'agit de la limite quand  $N$  tend vers l'infini de :

$$\prod_{i=1}^N \frac{dW_i}{\sqrt{2\pi\Gamma\Delta\tau}} \exp \frac{-1}{2\Gamma} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(W_{i+1} - W_i)^2}{\Delta\tau}. \quad (4.60)$$

Soit  $\Psi$  une fonctionnelle des trajectoires brownienne, on lui associe sa valeur moyenne sur l'ensemble des réalisations grâce à l'intégrale fonctionnelle :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}[\Psi] &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dW_i}{\sqrt{2\pi\Gamma\Delta\tau}} \right] \times \\ &\quad \exp \frac{-1}{2\Gamma} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(W_{i+1} - W_i)^2}{\Delta\tau} \Psi(W_1, \dots, W_N), \quad (4.61) \\ &\equiv \int \mathcal{D}[W(t)] \exp \left( \frac{-1}{2\Gamma} \int_{t_0}^t d\tau \eta^2(\tau) \right) \Psi[W(t) - W_0]. \end{aligned}$$

Dans cette dernière expression on a réintroduit  $\eta = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \Delta W / \Delta\tau$ . Tout est prêt pour définir une probabilité sur l'espace des trajectoires  $\phi(t)$ , solutions de l'équation de Langevin.

Soit  $\mathcal{M}[\phi]$  une fonctionnelle de  $\phi$ , on pose :

$$\mu_{\phi_0}[\mathcal{M}] \equiv \mathcal{W}[\mathcal{M} \circ \mathcal{F}_{\phi_0}]. \quad (4.62)$$

On peut expliciter :

$$\mu_{\phi_0}[\mathcal{M}] = \int d\mu_{\phi_0}[\phi] \mathcal{M}[\phi], \text{ et}$$

$$\begin{aligned} \int d\mu[\phi] \mathcal{M}[\phi] &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\phi_i}{\sqrt{2\pi\Gamma B^2(\phi_i)\Delta\tau}} \right] \times \\ &\quad \times \exp(-S[\phi]) \mathcal{M}[\phi]. \quad (4.63) \end{aligned}$$

La fonctionnelle d'action  $S[\phi]$  s'écrit :

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Gamma} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(\Delta\phi_i - N(\phi_i)\Delta\tau)^2}{B^2(\phi_i)\Delta\tau}, \quad (4.64)$$

$$S \equiv \frac{1}{2\Gamma} \int_{t_0}^t d\tau \frac{(\dot{\phi}(\tau) - N(\phi))^2}{B^2(\phi)}. \quad (4.65)$$

Le changement de variable amenant à l'expression (4.63) fait intervenir le jacobien de la transformation  $\mathcal{F}$  qui se calcule à partir de (4.59). Noter que  $\mu_{\phi_0}[1] = 1$ , de sorte qu'on a formellement une vraie mesure de probabilité.

Il suffit, si nécessaire, de rajouter une distribution associée aux conditions initiales.

Nous allons présenter une autre dérivation possible, faisant intervenir un champ auxiliaire. On part de la définition (4.62) dans laquelle on écrit

$$\mathcal{M}[\mathcal{F}_{\phi_0}[W]] = \int \mathcal{D}[\phi] \delta(\phi - \mathcal{F}_{\phi_0}[W]) \mathcal{M}[\phi]. \quad (4.66)$$

Pour donner du sens à cette expression on revient encore au cas discret :

$$\mathcal{M}[\mathcal{F}_{\phi_0}[W]] = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi_i \delta(\phi_i - \mathcal{F}_{i-1}[W]) \right] \times \mathcal{M}(\phi_1 \cdots \phi_N). \quad (4.67)$$

Cette expression fait apparaître  $\mathcal{F}_{i-1} = \phi_{i-1} + N(\phi_{i-1}) - B(\phi_{i-1})\Delta W_i$ , qui est le second membre de la forme discrète (4.58) de l'équation de Langevin. On a bien pour tout  $i$  :  $\int_{-\infty}^{+\infty} d\phi_i \delta(\phi_i - \mathcal{F}_{i-1}[W]) = 1$ , car  $\mathcal{F}_{i-1}[W]$  ne dépend pas explicitement de  $\phi_i$ . On introduit alors la représentation de Fourier de la fonction  $\delta$  :

$$\mathcal{M}[\mathcal{F}_{\phi_0}[W]] = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi_i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_i}{2\pi} \right] \times \exp i \sum_{i=0}^{N-1} p_i (\phi_i - \mathcal{F}_{i-1}[W]) \times \mathcal{M}(\phi_1 \cdots \phi_N). \quad (4.68)$$

Après avoir pris la limite et reporté cette expression dans la définition (4.62) il vient :

$$\mu_{\phi_0}[\mathcal{M}] = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}p \mathcal{D}\eta \exp \mathcal{I}[p, \phi, \eta] \mathcal{M}[\phi] \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= i \int_{t_0}^t d\tau p(\tau) (\dot{\phi}(\tau) - N(\phi) - B(\phi)\eta) \\ &\quad - \frac{1}{2\Gamma} \int_{t_0}^t d\tau \eta^2(\tau). \end{aligned} \quad (4.70)$$

La fonction  $p(\tau)$  apparaît comme un champ auxiliaire, simplement introduit pour faire respecter l'équation du mouvement. En effectuant la somme gaussienne sur  $\eta$  et en remplaçant  $p$  par  $ip$ , il vient :

$$\mu_{\phi_0}[\mathcal{M}] = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}p \exp -\tilde{S} \mathcal{M}[\phi], \text{ et pour l'action} \quad (4.71)$$

$$\tilde{S}[\phi, p] = \int_{t_0}^t d\tau p(\tau) (\dot{\phi}(\tau) - N(\phi)) - \frac{\Gamma}{2} B^2(\phi) p^2(\tau). \quad (4.72)$$

En toute rigueur l'intégrale (4.71) n'est pas définie pour  $\Re p \neq 0$ , cependant les trajectoires extrémales vont précisément être des solutions hors de l'axe physique, telles que, dans ces nouvelles variables,  $p$  soit réel. Les équations (4.71) et (4.72) sont à rapprocher de (4.63) et (4.65).  $\tilde{S}$  n'est autre que l'action exprimée dans les variables "position-impulsion",  $p(\tau) = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}$  est le moment conjugué de  $\phi$  dans la transformation de Legendre faisant passer du "Lagrangien"  $\mathcal{L}$  au "Hamiltonien"  $\mathcal{H}$  avec :

$$\mathcal{L} = \frac{(\dot{\phi}(\tau) - N(\phi))^2}{B^2(\phi)}, \quad (4.73)$$

$$\mathcal{H} = \frac{\Gamma}{2} B^2(\phi) p^2(\tau) + p(\tau) N(\phi). \quad (4.74)$$

Pour décrire la probabilité de transition de l'état  $\phi_0$  à  $t = t_0$  vers l'état  $\phi(t_1) = \phi$  à  $t = t_1$ , il suffit en principe de prendre  $\mathcal{M}[\phi] = \delta(\phi(t_1) - \phi)$  et d'effectuer la sommation sur toutes les trajectoires se terminant en  $t_1$ . La tâche est évidemment irréalisable dans la plupart des cas. C'est pourquoi on se tourne vers une approximation "semi-classique" dans laquelle on ne considère que les trajectoires extrémisant l'action. Remarquons que la substitution  $p' = \Gamma p$  fait apparaître devant l'action un terme  $1/\Gamma$ , qui dans la limite où  $\Gamma$  tend vers zéro va effectivement (par un argument de point col) sélectionner les trajectoires où l'action est minimale. Ces considérations reçoivent des justifications mathématiques (cf Freidlin et Ventsel (1984)). Par ailleurs, dans les cas simples où  $\mathcal{H}$  est quadratique, une approximation WKB (solution classique plus fluctuations quadratiques autour) donne le résultat exact. C'est ce qui

se passe en particulier pour une équation de Langevin linéaire. En général cette approximation donne le terme dominant dans l'exponentielle lorsque l'on cherche des configurations de  $\phi$  nécessitant des réalisations exceptionnelles du bruit.

Les solutions extrémales sont données par les équations canoniques de Hamilton :

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = N(\phi) + \Gamma B^2(\phi) p, \quad (4.75a)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = -\partial_\phi N p - \Gamma B \partial_\phi B p^2, \quad (4.75b)$$

auxquelles on adjoint les conditions aux limites fixées par les valeurs de  $\phi$  aux deux extrémités de l'intervalle de temps.

#### 4.5.2 Ito et Stratanovitch.

La définition de Ito de l'intégrale stochastique s'est avérée très utile dans les manipulations présentées plus haut. En dernier lieu dans (4.67) où la prise en compte de l'équation du mouvement dans la fonction  $\delta$  est très simple car  $\mathcal{F}_{i-1}$  est indépendant de  $\phi_i$ . Il existe une autre définition de l'intégrale stochastique  $\int d\tau B(\phi)\eta$  (et donc de l'E.D.S (4.53)) due à Stratanovitch, qui fait intervenir dans la somme de Riemann non pas  $\phi(\tau_i)$  mais  $\phi((\tau_{i+1} - \tau_i)/2)$ . Cette différence entraîne des difficultés, en particulier l'apparition d'un jacobien non trivial à cause de la dépendance dans  $\phi_i$  qu'acquiert  $\mathcal{F}_{i-1}$ . Par ailleurs il est possible de montrer qu'en prenant la limite de bruit blanc dans une équation différentielle comportant un terme aléatoire aux corrélations finies, les solutions sont justement celles d'une équation de Stratanovitch. Toutefois il existe une correspondance entre les deux représentations qui est la suivante : si  $\phi(\tau)$  est solution de l'équation de Stratanovitch :

$$\frac{d\phi}{d\tau} = a(\phi) + b(\phi)\eta,$$

alors elle est aussi solution de Ito de l'équation :

$$\frac{d\phi}{d\tau} = (a + 1/2b\partial_\phi b) + b(\phi)\eta.$$

On voit donc qu'en toute rigueur lorsque l'on étudie la limite de bruit blanc dans la convention de Ito (et c'est bien celle que nous voulons garder à cause de sa maniabilité), on est obligé de rajouter un terme de dérive supplémentaire par rapport au noyau déterministe. Nous avons systématiquement omis la contribution de ce terme dans toute les considérations présentées dans le corps de ce manuscrit.

## 4.6 Appendice II.

En introduisant le couple de variables :

$$X_1(\tau) = x_2 - x_1, \quad (4.76a)$$

$$X_2(\tau) = \lambda x_2 + \mu x_1, \quad (4.76b)$$

avec :

$$\lambda = \frac{\Delta_{11} - \Delta_{12}}{\sqrt{\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}^2}}, \quad \mu = \frac{\Delta_{22} - \Delta_{12}}{\sqrt{\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}^2}}, \quad (4.77)$$

on transforme les équations (4.37) et (4.39) en :

$$\frac{dX_1}{d\tau} = v + e^{-X_1}\chi_1(\tau), \quad (4.78a)$$

$$\frac{dX_2}{d\tau} = w + e^{-X_1}\chi_2(\tau), \quad (4.78b)$$

et :

$$\langle \chi_i(\tau)\chi_j(\tau') \rangle = \Delta\delta_{ij}\delta(\tau - \tau'), \quad \text{avec } \Delta = \Gamma(\Delta_{11} + \Delta_{22} - 2\Delta_{12}), \quad (4.79)$$

où se sont introduites les deux nouvelles vitesses :

$$v = v_2 - v_1, \quad w = \lambda v_2 + \mu v_1. \quad (4.80)$$

On aura en tête, dans la suite, le cas d'un exposant  $\alpha$  égal à  $2/3$ . Les trois constantes  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $\Delta$  valent alors :

$$\lambda = 2.26, \quad \mu = -0.58, \quad \Delta = 3.05\Gamma.$$

et les vitesses :

$$v = v_0 \log Q(z_0 - \alpha), \quad (4.81a)$$

$$w = v_0 \log Q(\lambda z_0 + \mu\alpha), \quad (4.81b)$$

sont toutes deux positives.

En posant  $Z_1 = X_1 - v\tau$ ,  $Z_2 = X_2 - w\tau$ , et en introduisant la nouvelle variable indépendante  $u = \frac{1}{2v}(1 - e^{-2v\tau})$ , telle que  $du = e^{-2v\tau} d\tau$ , on passe de (4.78) et (4.79) à :

$$\frac{dZ_1}{du} = e^{-Z_1} \eta_1(u), \quad (4.82a)$$

$$\frac{dZ_2}{du} = e^{-Z_2} \eta_2(u), \quad (4.82b)$$

et :

$$\langle \eta_i(u) \eta_j(u') \rangle = \Delta \delta_{ij} \delta(u - u'). \quad (4.83)$$

Appelons  $\rho$  la variable  $e^{Z_1}$ ; l'équation stochastique obéie par  $\rho$  s'écrit :

$$\frac{d\rho}{du} = \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\rho} + \eta_1(u), \quad (4.84)$$

où on s'est placé dans la convention de Ito et on a pris en compte le terme supplémentaire linéaire en  $\Delta$ , provenant du changement de variable. Dans l'équation (4.84) combinée à celle pour  $\theta = Z_2$  qui se réécrit :

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{1}{\rho} \eta_2(u), \quad (4.85)$$

on reconnaît les équations d'un mouvement brownien bidimensionnel, exprimé en coordonnées polaires (cf C.W.Gardiner). Il faut cependant prendre garde au fait que la variable  $\theta$  n'est pas ici un véritable angle (on n'atteint pas le

même point dans l'espace de départ, suivant le nombre de tours qu'on effectue autour de l'origine).

Dans cette nouvelle représentation, interviennent dans la construction de la densité de probabilité  $P_n(z)$  toutes les trajectoires browniennes reliant en un temps  $\tau$  *a priori* arbitraire le point de coordonnées polaires  $\rho_i = 1$ ,  $\theta_i = 0$ , au point désormais mobile :

$$\rho_f(\tau) = Q^{n(z-\alpha)} e^{-v\tau}, \quad (4.86a)$$

$$\theta_f(\tau) = n \log Q (\lambda z + \mu \alpha) - w\tau. \quad (4.86b)$$

En inversant les relations (4.76a), on trouve :

$$x_1(\tau) = v_1\tau + \frac{1}{\lambda + \mu} [-\lambda Z_1 + Z_2],$$

de sorte que les contraintes formulées en (4.41) deviennent :

$$\frac{dx_1}{d\tau} > 0 \equiv v_1 + \frac{e^{-2v\tau}}{\lambda + \mu} \left[ -\lambda \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{du} + \frac{d\theta}{du} \right] > 0, \quad (4.87a)$$

$$x_1 - x_2 > 0 \equiv \rho(\tau) > e^{-v\tau}. \quad (4.87b)$$

Dans un esprit semi-classique, on se focalise sur les trajectoires extrémisant l'action  $S$  définie dans l'équation (4.65) de l'appendice I. Elle se réduit ici à :

$$S = \frac{1}{2\Delta} \int_0^u (\dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{R}}) du, \quad (4.88)$$

où  $\mathbf{R}$  est le vecteur de coordonnées cartésiennes  $R_x = \rho \cos \theta$ ,  $R_y = \rho \sin \theta$ , et  $\dot{\mathbf{R}} = \frac{d\mathbf{R}}{du}$ . Les extrémales de  $S$  sont des droites parcourues à vitesse constante. Si on se restreint à ce type de trajectoires, alors le point d'arrivée doit être dans le même feuillet de Riemann que le point de départ. La condition  $-\pi < \theta_f(\tau) < \pi$ , conduit à la fourchette de temps :

$$\tau_z - \frac{\pi}{w} < \tau < \tau_z + \frac{\pi}{w}, \quad (4.89)$$

où  $\tau_z$  est le temps pour lequel  $\theta_f = 0$ , soit :

$$\tau_z = \frac{n}{v_0} \frac{\lambda z + \mu \alpha}{\lambda z_0 + \mu \alpha} \equiv \frac{n}{v_0} \delta. \quad (4.90)$$

On vérifie que compte tenu des contraintes (4.87), le système ne réussira pas à abaisser son action en allant explorer d'autres feuilletts de Riemann. Par ailleurs, le gain éventuel obtenu en faisant varier  $\tau$  dans la fourchette définie par (4.89), reste très faible dans le cas où le rapport de vitesse  $\frac{v}{w}$  est petit devant 1. En première approximation, on peut se concentrer sur la trajectoire de durée  $\tau_z$  qui ne quitte pas le demi-axe positif des  $R_x$ . Elle est telle que :

$$\rho_f(\tau_z) = Q^{n(z-z_0)\gamma}, \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{\alpha(\lambda + \mu)}{\lambda z_0 + \mu\alpha}, \quad (4.91)$$

et son action  $S$  vaut, lorsqu'elle est parcourue à vitesse constante :

$$S = \frac{1}{2\Delta} \frac{(\rho_f(\tau_z) - 1)^2}{u(\tau_z)} = \frac{v}{\Delta} \frac{(Q^{n(z-z_0)\gamma} - 1)^2}{1 - Q^{-2n(z_0-\alpha)\delta}}. \quad (4.92)$$

Cette estimation conduit au résultat annoncé dans le corps de la sous-section 4.3.2 (équation (4.42), les coefficients  $\gamma$  et  $\delta$  omis dans cette dernière équation, restant toujours proches de 1, de part leur définition).

Finalement, voyons à quelle condition la trajectoire proposée satisfait la contrainte (4.87a) (la seconde, (4.87b), étant automatiquement remplie). C'est à l'instant initial que le critère est le plus sévère puisque  $\frac{d\rho}{du} = \frac{(\rho_f(\tau_z) - 1)}{u(\tau_z)}$  est constant et  $\frac{d\theta}{du} = 0$ . Il vient donc :

$$\frac{(Q^{n(z-z_0)\gamma} - 1)}{1 - Q^{-2n(z_0-\alpha)\delta}} < \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{z_0 - \alpha} \right) \left( \frac{\lambda + \mu}{\lambda} \right). \quad (4.93)$$

Lorsque l'exposant  $z$  désiré devient trop grand pour que cette inégalité soit satisfaite, le marcheur brownien doit ralentir le long de cette trajectoire. L'action  $S$  ne peut plus atteindre son minimum et on attend sur la base d'arguments dimensionnels simples, qu'elle devienne d'ordre  $Q^{2n(z-\alpha)}$ .

## Conclusion.

Nous avons orienté notre travail autour des structures singulières dans les modèles en couches, en proposant (après les autres auteurs déjà cités) qu'elles constituent les briques élémentaires de l'intermittence. Dans le cas du modèle GOY, pris au point de fonctionnement pour lequel un très bon accord avec la vraie turbulence est observé, nous avons montré que les fluctuations les plus singulières résultent de l'interaction des objets autosimilaires nus avec un fond turbulent plus désordonné. C'est ici sans doute un point important pour expliquer le succès de ce modèle. En effet, les solutions autosimilaires n'ont telles quelles pas forcément d'équivalent dans les équations d'Euler en dimension 3, où le problème de la formation de singularité en un temps fini reste ouvert. Cependant des mécanismes existent, conduisant à la formation de structures filamentaires très intenses aux petites échelles de l'écoulement (voir à ce sujet le livre de U.Frisch (1995b)). La hiérarchie d'intensités résultant des différents degrés d'aboutissement de ces mécanismes, pourrait être justement bien décrite par la nature des structures singulières dans le modèle GOY. Le succès du modèle hiérarchique de Z.S.She *et al* (1994) est trop remarquable pour être seulement le fruit du hasard. Néanmoins le caractère quantifié du processus log-poissonien qu'ils proposent n'apparaît pas clairement au niveau de la dynamique, que nous avons étudiée. En particulier, il nous est difficile de donner un sens dynamique au paramètre  $\beta$ .

D'un point de vue statistique, la situation que nous décrivons dépend très fortement de la nature de la composante désordonnée. Si l'on s'en tient au cas

où ces fluctuations ont un scaling de type K41, on prédit une forte dépendance des effets d'intermittence envers la longueur de la cascade, et donc d'une certaine manière, envers le nombre de Reynolds. En particulier, les lois d'échelle et le comportement multifractal devraient disparaître lorsque l'on augmente suffisamment la longueur de la cascade. Asymptotiquement (pour des échelles de longueur suffisamment petites), le comportement monofractal, proche de K41, associé à la solution de base est restauré. Ces conclusions méritent, clairement de plus amples investigations. Il sera nécessaire en particulier d'améliorer la statistique sur ces événements rares. La prudence s'impose aussi, car nous ne pouvons pas exclure complètement que le système parvienne à restaurer la multifractalité, en procédant par "mini-cascades" successives. Cela signifierait que les objets cohérents qui ont fait la trame de tout ce travail disparaissent tout à fait ou à tout le moins, que ceux qui parviennent à survivre n'aient qu'une faible influence dans la statistique aux grands ordres !!

# Appendix A

## Preprint



# Intermittency, chaos and singular fluctuations in the mixed Obukhov-Novikov shell model of turbulence

Thierry Dombre and Jean-Louis Gilson

*Centre de Recherches sur les Très Basses Températures-CNRS, Laboratoire associé à l'Université*

*Joseph Fourier, BP166, 38042 Grenoble Cedex 9, France*

## Abstract

The multiscaling properties of the mixed Obukhov-Novikov (ON) shell model of turbulence are investigated numerically and compared with those of the complex Gledzer-Okhitani-Yamada (GOY) model, mostly studied in recent years. Two types of generic singular fluctuations are identified : first, self-similar solutions propagating from large to small scales and building up intermittency, second, complex time singularities which are argued to encode “blockings” in the cascade. A robust dynamic rescaling method is developed to characterize these objects. It is shown that the scaling exponent of self-similar solutions selected by the dynamics is compatible with large-order statistics, only when it departs enough from the Kolmogorov value. Complex time singularities on the other hand suffer a “depinning” transition which, in a remarkable way, is found to occur in the phase diagrams of both the ON and GOY models at a place such that the scaling exponent of corresponding self-similar solutions take the same value  $\approx 0.855$ .

PACS numbers 03.40.G, 47.27

Typeset using REVTeX

## I. INTRODUCTION

Shell models of turbulence have recently attracted a lot of interest as a useful tool for mimicking the Navier-Stokes dynamics. In the simplest scalar models, one places velocity variables on a one-dimensional array of wavevectors of the form  $k_n = k_0 Q^n$ , where the integer  $n$  labels the shells from 0 to, ideally,  $+\infty$  and  $Q$  is a scale parameter larger than 1, fixing the step of the cascade. The time evolution of shell-velocities is governed by ordinary differential equations with quadratic non-linearities, whose strength grows like  $k_n$ , deterministic forcing at large scales and viscous dissipation at small ones. The couplings between shells are usually local and chosen in such a way that the total kinetic energy is conserved in the absence of forcing and viscous effects. These hydrodynamic systems display strong departure from the naive scaling expected on the basis of Kolmogorov-like dimensional analysis, which shows up in particular in the higher order moments of velocity. Following the seminal work of Okhitani and Yamada [1,2], Jensen, Paladin and Vulpiani [3] found in a particular shell model, nowadays referred to as the Gledzer-Okhitani-Yamada (GOY) model, multiscaling properties very close to those of real turbulent flow. Most subsequent studies in this field have therefore concentrated on the GOY model and important progress was made towards a deeper understanding of its behaviour in recent publications; see, e.g. Refs. [4–6] (we shall return to some of these results in the bulk of the paper).

The GOY model uses complex velocity variables and interactions among all triads made up of three different neighbouring shells. One may wonder whether these two features are necessary to produce “good” chaotic properties. In order to clarify this question, we report in this paper a mostly numerical investigation of the scaling properties of a simpler class of shell models, which results from the linear superposition of two chains introduced in the early 70’s by Obukhov [7] and Novikov [8] (for historical insight into the field and a comprehensive review of the huge russian literature concerned with cascade-like systems under various disguises, see for instance [9]). In the Obukhov-Novikov (ON) model, the velocity variables are real and interacting triads involve only two neighbouring shells. The

structure of non-linearities depends, as in the GOY model, on a single parameter (together with the scale parameter  $Q$ ), which fixes in that case the relative proportion of the two basic chains. Both models exhibit qualitatively the same phenomenology. When the proportion of Novikov-like interactions (favouring the transfer of energy towards small scales) is high enough, the system relaxes to a time-independent state with Kolmogorov scaling properties. As Obukhov-like interactions (favouring on the contrary the backflow of energy towards large scales) take over, the system transits through a Ruelle-Takens scenario into a chaotic state with stochastic fluctuations. There is clearly multifractality close to the transition, even if it looks less pronounced than the one observed in the GOY model for usual values of parameters.

We switch to more deterministic concerns in the second part of this paper, which aims at characterizing singular fluctuations able to form in the ON model or, more generally, in any one-dimensional shell model. We shall argue that self-similar or soliton-like solutions of the equations of motion in the inertial range are the building blocks of intermittency, while complex time singularities divide into two families : on the one hand, poles with non-algebraic subdominant corrections, leading to a complex-time blow-up which is localized in  $k$ -space and, on the other hand, essential singularities forming at the ultraviolet end of the spectrum, as the result of the propagation in finite time of quasi self-similar solutions of the type found on the real time axis. We are not aware of any previous study of the structure of complex-time singularities in shell models. We also believe that shell models may, in this respect, serve as an instructive playground for future investigations of related topics in the context of the Navier-Stokes equations. The non-local nature of these equations, due to the pressure term, has until now impeded any real progress on these matters (to the best of our knowledge). We just note that, once formulated in  $k$ -space, they acquire an algebraic structure which is indeed quite close to that of shell models, except naturally for a much larger number of degrees of freedom and therefore different strengths of couplings. To come back now to the more intuitive field of self-similar solutions in the physical time domain, we should state that they were already considered within the context of the ON model by

Siggia [10] and later on in more details by Nakano [11]. They are curiously absent of more recent works, appearing only in an unpublished preprint of G. Parisi [12], who envisioned the turbulent medium forming in the continuum limit of the GOY model (obtained by letting  $Q$  come close to 1), as resulting from the interaction between such excitations. We propose here an efficient dynamic rescaling method for identifying such solutions without any *a priori* assumption on their shape. We find that the set of dynamically accessible self-similar solutions is in fact limited to one single object (as Nakano's results suggested it). This proves that multiscaling properties should not be ascribed to the existence of a large manifold of singular behaviours. The exponent  $z$  controlling the multiplicative growth of these particular solutions, accounts in a satisfactory way for the asymptotic scaling properties of high-order velocity or energy transfer moments (this confrontation between statistics and properties of ideal objects was never attempted before, as far as we can see). It is easy to extend this analysis to the GOY model, where basically the same conclusions concerning the uniqueness of solutions can be drawn. However self-similar solutions in that case are very mild and do not seem to play a major role in the statistics at high orders.

The paper is organized as follows : in Section 2 we specify the conventions used in our computations for normalizing variables and parameters and describe some general properties of the ON model. Section 3 presents statistical results obtained from numerics. The emphasis is put on scaling exponents of the moments of energy transfer and their evolution with the relative proportion of Obukhov and Novikov interactions. Our goal here is to provide the reader with data and facts, disentangled from any theoretical interpretation. An attempt of comparison with the GOY model is made. Section 4 is devoted to the hunt for self-similar solutions and a confrontation of their scaling properties with the statistics of the model at large orders. Complex-time singularities are introduced and studied in Section 5, while perspectives and conclusions are briefly outlined in Section 6.

## II. GENERAL PROPERTIES OF THE MODEL

### A. Definitions and basic considerations

As already said in the Introduction, scalar shell models define a velocity variable  $u_n$ , real or complex, on a one-dimensional array of wave-vectors  $k_n = k_0 Q^n$  where the integer  $n$  runs from 0 to  $N$ . In most of the paper we shall restrict ourselves to the case of real variables. It simplifies notations to consider that the  $u_n$ 's form a  $(N + 1)$ -dimensional vector  $\vec{u}$ . The equation of motion then takes the following form

$$\frac{d}{dt}\vec{u} = \vec{N}[\vec{u}] + \vec{F} - \vec{D}, \quad (1)$$

where the three vectors  $\vec{N}$ ,  $\vec{F}$ ,  $\vec{D}$  embody respectively the non-linearities, the external forcing and the dissipation. We only considered a deterministic forcing acting on the zero<sup>th</sup> shell and usual, Laplacian-type, viscous dissipation, which means

$$F_n = f\delta_{n,0} \quad , \quad D_n = \nu k_n^2 u_n, \quad (2)$$

where  $\nu$  is the kinematic viscosity. The nonlinear kernel  $\vec{N}$  is quadratic in the  $u_n$ , with a coupling constant growing like  $k_n$  in order to reproduce the hierarchy of characteristic times of the Navier-Stokes dynamics. It must also conserve the total kinetic energy  $E = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N u_n^2$ . If interactions between shells (which are always supposed to be local) do not extend beyond nearest neighbours, the most general expression for the  $n^{\text{th}}$  component of  $\vec{N}$  is

$$N_n[\vec{u}] = \alpha Q^{\frac{2}{3}} [k_n u_{n-1} u_n - k_{n+1} u_{n+1}^2] + \beta [k_n u_{n-1}^2 - k_{n+1} u_n u_{n+1}] \quad (3)$$

(this formula remains valid on the two boundaries  $n = 0$  and  $n = N$ , provided  $u_{-1} = u_{N+1} = 0$  is assumed).

The model appears like the linear superposition of the Obukhov-Gledzer (OG) and Novikov-Desniansky (ND) chains, with respective weights  $\alpha Q^{2/3}$  and  $\beta$ . We shall assume  $\alpha, \beta > 0$  and, without loss of generality,  $\alpha + \beta = 1$ . Since, on the average, the  $u_n$ 's decrease like  $k_n^{-1/3}$

according to Kolmogorov-scaling, it is convenient to introduce a new set of variables  $\phi_n$  by the relation

$$u_n = Q^{-\frac{n}{3}} \phi_n. \quad (4)$$

The equation for  $\vec{\phi}$  reads

$$\frac{d}{dt} \vec{\phi} = k_0 Q^{\frac{2}{3}} \vec{N}[\vec{\phi}] + \vec{F} - \vec{D}, \quad (5)$$

where the expression of the  $n^{\text{th}}$  component of  $\vec{N}$  is now

$$N_n[\vec{\phi}] = Q^{\frac{2n}{3}} [(\alpha \phi_{n-1} \phi_n + \beta \phi_{n-1}^2) - (\alpha \phi_{n+1}^2 + \beta \phi_n \phi_{n+1})]. \quad (6)$$

We still have the freedom to set to unity the forcing amplitude and the coefficient in front of  $\vec{N}$  by non-dimensionalizing in the proper way time and velocities. The final form of the equations (as they were used in the numerical investigations reported in Section 3) is

$$\frac{d}{dt} \phi_n = N_n[\vec{\phi}] + \delta_{n,0} - \frac{1}{R} Q^{2n} \phi_n. \quad (7)$$

The Reynolds number  $R$  has been defined as  $R = \frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{f Q^{\frac{2}{3}}}{k_0^3}}$ . Equations (6) and (7) make energy conservation quite obvious. Indeed, in the limit  $R = +\infty$  and for  $n \geq 1$ , the energy  $E_n = \frac{u_n^2}{2} = \frac{1}{2} \phi_n^2 Q^{-\frac{2n}{3}}$  carried by the  $n^{\text{th}}$  shell obeys the equation

$$\frac{d}{dt} E_n = \epsilon_n - \epsilon_{n+1}, \quad (8)$$

where

$$\epsilon_n = \phi_{n-1} \phi_n (\alpha \phi_n + \beta \phi_{n-1}) \quad (9)$$

is the energy flux from the  $(n-1)^{\text{th}}$  to the  $n^{\text{th}}$  shell. Kolmogorov scaling corresponds to  $\phi_n = C^{te}$  or more fundamentally to  $\epsilon_n = C^{te}$  throughout the cascade.

The physics of the model, as defined by equation (7), depends on three parameters, namely : the step of the cascade  $Q$ , the proportion of Novikov interactions  $\beta$ , and the

Reynolds number  $R$ . The number of shells will not matter, provided the truncation is done far beyond the Kolmogorov dissipative scale, where viscous effects become of the same order as inertial ones. When Kolmogorov 1941 scaling is assumed,  $\phi_n = O(1)$ ; the index  $N_d$  of the dissipative shell is then given by the condition  $\frac{Q^{2N_d}}{R} \sim Q^{\frac{2N_d}{3}}$ . One should, however, pay attention to the fact that the stronger the fluctuation, the smaller the scale at which it will be effectively dissipated. Since  $\phi_n$  can grow at most like  $Q^{\frac{n}{3}}$  (this corresponds to the extreme case of a fluctuation carrying a constant energy through the cascade), we conclude that  $N$  should be an integer between  $n_d$  and  $\frac{4}{3}n_d$ , where we have defined  $n_d$  as

$$n_d = \frac{3 \text{Log} R}{4 \text{Log} Q}. \quad (10)$$

In our numerical study of the statistical properties of the model, we took  $Q = 2$ ,  $R = 10^5$  and let vary  $\beta$  between 0 and 1. The choice of 18 shells ( $N = 17$ ) turned out to ensure the absence of any spurious boundary effect.

Since we shall allude sometimes to the complex GOY model, we close this section by writing down the version of it we used in our computations. With complex variables  $\phi_n$  rescaled in the way described just before, the equations read :

$$\frac{d}{dt}\phi_0 = (2 - \epsilon)[1 - \phi_1^*\phi_2^*] - \frac{\phi_0}{R} \quad (11a)$$

$$\frac{d}{dt}\phi_1 = Q^{\frac{2}{3}}[\phi_0^*\phi_2^* - \phi_2^*\phi_3^*] - \frac{Q^2}{R}\phi_1 \quad (11b)$$

$$\frac{d}{dt}\phi_n = Q^{\frac{2n}{3}}[(1 - \epsilon)\phi_{n-1}^*\phi_{n-2}^* + \epsilon\phi_{n-1}^*\phi_{n+1}^* - \phi_{n+1}^*\phi_{n+2}^*] - \frac{Q^{2n}}{R}\phi_n \quad 2 \leq n \leq N \quad (11c)$$

$$\phi_{N+1} = \phi_{N+2} = 0 \quad (11d)$$

Here again the structure of non-linearities is fixed by a single parameter  $\epsilon$ , varying as  $\beta$  between 0 and 1. We put for simplicity the forcing on the zero<sup>th</sup> shell, as first tried in Ref. [5]. The factor  $-i$ , which is usually kept in front of the non-linear terms, as a remnant of the Navier-Stokes equation, has been absorbed in an innocuous redefinition of variables ( $u_n \rightarrow iu_n$ ). The forcing also can be assumed to be real (here  $F_n = (2 - \epsilon)\delta_{n,0}$ ), without loss

of generality, thanks to the invariance of equations under the following phase transformation (see for instance Ref. [4])

$$\phi_{3n} \rightarrow e^{i\theta_0} \phi_{3n} \quad (12a)$$

$$\phi_{3n+1} \rightarrow e^{i\theta_1} \phi_{3n+1} \quad (12b)$$

$$\phi_{3n+2} \rightarrow e^{-i(\theta_0+\theta_1)} \phi_{3n+2} \quad (12c)$$

where  $\theta_0$  and  $\theta_1$  are arbitrary angles. There are obvious differences between the real ON model and the complex GOY model, which make their comparison interesting in its own right. The phase space which may be explored by the GOY model is *a priori* larger, at least for initial conditions not purely real. Also the range of non-linear interactions is wider than in the first model. Lastly, the GOY model admits a second quadratic invariant besides kinetic energy, which is thought to play a prominent role in fixing its statistical properties [6,13]. Such an extra invariant is definitely absent in the ON model.

## B. Fixed points and qualitative description of the phase diagram

First of all, let us say a few words about the existence and the nature of the fixed points of the model, which lead to Kolmogorov scaling. In the absence of dissipation and for an infinite number of shells,  $\phi_n = 1$  is an obvious solution for any value of  $\beta$ . However, once viscous dissipation is introduced, it is easy to see that static solutions making physical sense can exist only for  $\beta \neq 0$ . Indeed for  $\alpha = 1$  (OG chain), one has to solve for every  $n > 0$

$$Q^{\frac{2n}{3}}(\phi_{n-1}\phi_n - \phi_{n+1}^2) = \frac{Q^{2n}}{R}\phi_n \quad (13)$$

In order to balance the leading order terms of this equation for  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\phi_n$  must behave like  $-\frac{Q^{\frac{4n}{3}}}{R}$  which is not acceptable. This absence of any fixed point in the presence of dissipation for the pure Obukhov chain is consistent with the dynamical behaviour one observes in this case. A solitary wave of negative amplitude appears invariably at the end of the

cascade, which carries back energy towards large scales. In the final state, energy oscillates back and forth between the first two shells, the other ones being inactive.

Things are different, as soon as a finite amount of Novikov interactions is introduced. This is because the term  $\phi_{n-1}^2$  in equation (6) favours energy transfer to small scales. At a static level, assuming a rapid decay of the spectrum on the ultraviolet side (i.e.  $\phi_{n-1} \gg \phi_n \gg \phi_{n+1}$ ), one has now to achieve the balance

$$\beta \phi_{n-1}^2 \sim \frac{Q^{\frac{4n}{3}}}{R} \phi_n. \quad (14)$$

This yields the following general solution  $\phi_n = \frac{Q^{\frac{4(n+2)}{3}}}{\beta R} \exp(-b2^n)$  with  $b > 0$  otherwise arbitrary. More physically, we may rewrite  $\phi_n$  in the dissipative range as

$$\phi_n = \frac{Q^{\frac{4(n-n_d+2)}{3}}}{\beta} \exp(-a2^{(n-n_d)}) \quad \text{for } n > n_d, \quad (15)$$

with  $n_d$  given by (10). These considerations suggest the following procedure for computing the fixed point  $\phi_n^e$  in the presence of dissipation. The condition of equilibrium for the  $n^{\text{th}}$  shell being quadratic in  $\phi_{n-1}$ , it can be used to express  $\phi_{n-1}$  in terms of  $\phi_n$  and  $\phi_{n+1}$ . Going from the last shell with  $\phi_N$  parameterized as in (15) to the first one, and keeping at each step the positive root, one ends up with  $N + 1$  numbers  $\phi_N(a), \dots, \phi_1(a), \phi_0(a)$ . The last equation on the zero<sup>th</sup> shell yields then a solvability condition for the parameter  $a$

$$F(a) = 1 - (\alpha \phi_1^2(a) + \beta \phi_0(a) \phi_1(a)) = 0. \quad (16)$$

Figures 1 and 2 show how things work for  $Q = 2$ ,  $R = 10^5$  and  $\beta = 0.348$ . At least in the range of Reynolds numbers investigated here, there exists only one solution and the resulting fixed point is drawn on Fig. 3. The emergence of oscillations of period 2 and growing amplitude on the infrared side of the spectrum, is a generic feature of the ON model. Similar phenomena involving period 3 are known to plague the GOY model. Here the explanation is the following : in the inertial range (i.e.  $1 \ll n \ll n_d$ ), the recursive equation to be solved reduces to

$$q_n^{-1}(1 + Cq_n^{-1}) - q_{n+1}(q_{n+1} + C) = 0, \quad (17)$$

where one has introduced the ratio  $q_n = \frac{\phi_n}{\phi_{n-1}}$  and  $C = \frac{\beta}{\alpha}$ . Equation (17) defines a map  $q_n = g(q_{n+1})$ , whose fixed point  $q_n = 1$  is easily seen to be unstable for  $C \leq 1$ . Only for discrete values of the Reynolds number (such that one of the crossing points in Fig. 1 has ordinate 1), can one hope to get rid of these oscillations. We should say that this odd-even disymmetry, though a pathology of the ON model, is less visible in the chaotic state to be described below. Furthermore, it does not affect other physical quantities like the energy transfer  $\epsilon_n$  defined in (9).

We turn now to a qualitative discussion of the phase diagram of the model, which is observed as  $\beta$  varies (for the particular values  $Q = 2$  and  $R = 10^5$ ). Although the static solution exists for every strictly positive  $\beta$ , it becomes unstable for  $\beta \leq 0.355 \pm 10^{-3}$  and evolves towards a periodic limit cycle through a first Hopf bifurcation. A scenario à la Ruelle Takens, similar to the one already discovered in the GOY model [5], leads then to chaos for  $\beta \leq \beta^* = 0.349 \pm 10^{-3}$ . We did not try to get very precise estimates of these two thresholds, whose position is expected to vary slowly with  $R$  (with  $\beta^*(R)$  reaching most presumably the asymptotic value 0.5 in the limit of infinite Reynolds number). In the quasiperiodic regime, the shells oscillate in a coherent way around the static fixed point discussed above. Their oscillations remain of moderate amplitude even close to the transition, and one has with a very good accuracy, for all integers  $n$  and  $p$ ,  $\langle \phi_n^p(t) \rangle \sim (\phi_n^e)^p$  (where  $\langle \dots \rangle$  denotes a temporal average).

The behaviour in the chaotic phase is rather simple to understand, far from the transition. For values of  $\beta$  not greater than say 0.28, the dynamics consists in well isolated pulses emitted from the forced shell, after it has reached a significant level. The pulse propagates down the scales, through almost inactive shells, leaving behind a finite amount of energy. After being stopped by dissipation, it gives rise to a rather well characterized pulse of negative amplitude, which carries back to the large scales most of the energy that dissipation failed

to absorb. This is quite close to what is observed in the Obukhov limit, although here things repeat themselves in a slightly disordered manner. The picture gets more complicated as  $\beta$  gets closer to  $\beta^*$  (typically for  $0.30 \leq \beta \leq 0.349$ ). Shells in the inertial range remain almost always active and they form a noisy background out of which only the biggest fluctuations develop like singular pulses. Negative excursions of variables, triggering backflow of energy, occur very rarely. Splitting of pulses as well as partial reflection of some of them may be observed all the way along the cascade. The next Section will help to quantify a bit these statements.

### III. MULTISCALING PROPERTIES OF THE CHAOTIC PHASE

Moments of the variables  $\phi_n$ , defined as  $S_{n,p} = \langle \phi_n^p \rangle$ , are good tools for characterizing the intermittency of shell models. According to (4), exponential growth of any of the  $S_{n,p}$ 's with  $n$  in the inertial range is the sign of deviations from K41-scaling. However we shall rather concentrate on moments of the energy flux  $\epsilon_n$  defined in (9), namely on quantities  $\Sigma_{n,p} = \langle |\epsilon_n|^{\frac{p}{3}} \rangle$ . The reason for this choice has already been discussed in Ref. [6] within the context of the GOY model. The point is that for moderate  $p$ , the oscillations we found in the static solution still contaminate  $S_{n,p}$ . Although they are much smaller, they prevent us from an accurate determination of the scaling exponents. As far as scaling properties are concerned, the  $\Sigma_{n,p}$ 's provide a valuable alternative, because they are free from any spurious oscillations. On the other hand, the presence of an absolute value introduces a bias in the lowest moments, especially far away from the transition where the mean energy transfer is very small.

We have calculated  $\Sigma_{n,p}$  for  $p$  up to 12. For each run we integrated the equations over 1000 turn-over or unit times and sampled the signal with a step much smaller than the characteristic time-scales of the more intense structures (in practice we took  $\Delta t = 10^{-4}$ ). The length of each run was enough to ensure the stationarity of the statistics, at least for moments of

order  $p$  smaller than  $7 - 8$ . As shown on Fig. 4 for  $\beta = 0.33$ , these quantities obey nice power laws on a rather wide range of shell numbers. We may thus define exponents  $\sigma_p$  such that in the inertial range  $\Sigma_{n,p} \sim k_n^{\sigma_p}$  (the relation between  $\sigma_p$  and the usual exponent  $\zeta_p$  associated to the velocity field is :  $\zeta_p = \frac{p}{3} - \sigma_p$ ).

To extract values of the scaling exponents  $\sigma_p$  from our data, we again followed the procedure outlined in Ref. [6] (though not with the same refinement!). The inertial range was determined as the interval of values of  $n$ , for which a least square fit of the data to a straight line, give  $\sigma_3$  closest to zero. A fitting range  $5 \leq n \leq 10$  proved to be best for all values of  $\beta$  we looked at, with  $\sigma_3$  as small as 0.01 for  $\beta \sim 0.33$ . In order to get a rough estimate of statistical errors due to the finite length of our temporal signal, we repeated the same operations several times (typically 5), taking as new initial conditions the state obtained at the end of the preceding run. Error bars drawn in the next figures take into account only this source of uncertainty. Our results for the scaling exponents  $\sigma_p$  are summarized in Fig. 5 for three typical values of  $\beta$  : 0.28, 0.33, and 0.343.

As concerns the scatter of data, we see that it remains small for  $p \leq 8$ , except when we get very close to the transition, a not too surprising fact. The overall shape of the  $\sigma_p$ -curve illustrates the distinction made at the end of Section 2 between two chaotic regimes. For  $\beta = 0.28$ , i.e. rather far from the transition, one crosses over rapidly ( $p \geq 5$ ) towards a linear growth of exponents with  $p$ . The exponents take rather large negative values for  $p \leq 3$ , presumably because of the important role played by energy backflows in this case. For the two other values of  $\beta$  we investigated, the cross-over region is significantly wider. There is clearly curvature and hence multifractality, although for  $p \geq 7 - 8$  an asymptotic linear regime ultimately sets in. Figure 6 offers a magnified view on the cross-over region. The fact that exponents still vary strongly between  $\beta = 0.33$  and  $\beta = 0.343$  proves the influence of the proximity of the transition on the physics probed by the moments of corresponding order. On the other hand, it can be noted that the asymptotic slope remains almost the same. This feature will be explained in the next Section in terms of self-similar solutions

parameterizing the biggest fluctuations of our hydrodynamic system.

As a way of checking our numerics, and also in order to get some insight into the differences between the two models, we have performed strictly analogous computations on the complex GOY model for two different values of  $\epsilon$  (with  $Q = 2$ ,  $R = 10^5$  and  $N = 17$ ). The first one,  $\epsilon = 0.75$ , lies far from the transition, which was found in Ref. [5] to occur at  $\epsilon^* = 0.395$ .. for a Reynolds number roughly half of ours. The second one is the standard  $\epsilon = 0.5$ , known to lead to scaling properties in good agreement with experiment [3]. Figure 7 shows on the same graph the scaling exponents for the ON model with  $\beta = 0.28$  and the GOY one for  $\epsilon = 0.75$ . The resemblance is striking, apart from from slightly different asymptotic slopes of the two curves and a cross-over region a bit wider for the GOY model. In Fig. 8, the same comparison is made between the two models, this time for  $\beta = 0.33$  and  $\epsilon = 0.5$ . Now differences show up, especially at large orders. While a linear monofractal behaviour has definitely set in for  $p \geq 7$  in the case of the ON model, the local slope of the  $\sigma_p$ 's does not stop increasing in the GOY model, even though this is hardly perceptible to the eye. Also significant is the lack of convergence for  $p \geq 8$ . We note that the points marking the upper error bars, which were obtained from one particular run among six of equal temporal length, are surprisingly well fitted by the formula proposed by She and Lévéque [14] for real Navier-Stokes turbulence

$$\sigma_p = \frac{2p}{9} - 2\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{p}{3}}\right], \quad (18)$$

up to the highest values of  $p$  investigated here. A physical reason for this good agreement observed by many others is missing. We did not try to tighten our error bars by increasing the length of numerical integration since this was beyond the scope of this work. The results of the next Section will somehow confirm the peculiar nature of intermittency in the GOY model for such values of parameters as  $\epsilon = 0.5$  and  $Q = 2$ .

#### IV. STUDY OF SELF-SIMILAR SOLUTIONS

Let us take for granted from the results of the preceding Section that the scaling exponents  $\sigma_p$  grow asymptotically like  $\gamma p$  at large  $p$ , with  $\gamma$  a positive number depending on the parameter  $\beta$  only. This means that the amplitude of fluctuations carrying the system away from the K41 fixed point cannot grow from shell to shell more rapidly than  $Q^n$ . On the other hand, the fact that  $\gamma$  takes a finite value even close to the transition suggest that such fluctuations are efficient as soon as the instability threshold is crossed. It is the purpose of this Section to identify the set of singular fluctuations that the ON model can admit.

Since we are now interested in nonlinear instabilities occurring in the inertial range, we may forget about forcing and dissipation, and think of the shell number  $n$  as running from  $-\infty$  to  $+\infty$ . Let us rewrite the equation of motion in terms of new variables  $b_n = Q^n u_n = Q^{\frac{2n}{3}} \phi_n$  ( $b_n$  is nothing dimensionally but the gradient of the velocity field). We get from (6) and (7), after absorbing the factor  $\alpha Q^{\frac{2}{3}}$  into a rescaling of time :

$$\frac{d}{dt} b_n = N_n[\vec{b}] = (b_{n-1} b_n + \frac{\beta}{\alpha} Q^{\frac{2}{3}} b_{n-1}^2) - \frac{1}{Q^2} (b_{n+1}^2 + \frac{\beta}{\alpha} Q^{\frac{2}{3}} b_n b_{n+1}). \quad (19)$$

Since  $\vec{N}[\vec{b}]$  does not depend explicitly on  $n$  and is quadratic in  $\vec{b}$ , the set of equations (19), for  $-\infty < n < +\infty$ , support formally self-similar solutions of the type :

$$b_n(t) = \frac{1}{t^* - t} f(Q^{nz}(t^* - t)) \equiv Q^{nz} g(Q^{nz}(t^* - t)). \quad (20)$$

In the equation above,  $t^*$  is the critical time at which, in the absence of dissipation, the fluctuation reaches the end of the cascade. The scaling exponent  $z$  is *a priori* arbitrary. However  $z = \frac{2}{3}$  gives back Kolmogorov scaling, while  $z = 1$  corresponds to the extreme situation of a fluctuation carrying a constant energy. One expects therefore  $\frac{2}{3} \leq z \leq 1$  on physical grounds.

Self-similar solutions, if they exist, are obviously good candidates for describing the growth of singular fluctuations. The question then arises whether many values of  $z$  are dynamically accessible, which would be a natural source of multifractality, or whether on the contrary

a single  $z$  is selected. In that case, one should check that  $\gamma = (z - \frac{2}{3})$ , since moments  $\Sigma_{n,p}$  are dominated by extreme fluctuations for high values of  $p$ . Self-similar solutions together with their exponent  $z$  have already been determined by Nakano for the ON model [11]. He used a rather cumbersome iterative method to find them and we were not convinced he had exhausted the whole set of possibilities in his work. This is why we reexamined this problem and were led to developing a procedure to be described below, which is quite efficient and easily extended to any shell model. It should however be said from the beginning that our results about the ON model are in complete agreement with the conclusions reached in Ref. [11].

By plugging the Ansatz (20) into (19) and introducing the logarithmic variable  $\xi = n + \frac{1}{z \log Q} \log(t^* - t)$ , one arrives at the following equation for  $f$  ( $f$  is actually divided by  $z \log Q$  to make the result a bit simpler) :

$$-f'(\xi) + z \log Q f(\xi) = (f(\xi - 1)f(\xi) + \frac{\beta}{\alpha} Q^{\frac{2}{3}} f(\xi - 1)^2) - \frac{1}{Q^2} (f(\xi + 1)^2 + \frac{\beta}{\alpha} Q^{\frac{2}{3}} f(\xi)f(\xi + 1)). \quad (21)$$

If square integrability of  $f$  is required, Eq. (21) is nothing but a non-linear eigenvalue problem for the unknown  $z$ , which is very difficult to solve directly, either analytically or numerically. To make progress, we can try to approach  $f$  dynamically. Rather than returning to the original equations of the model, let us introduce a fictitious dynamics leaving the norm of the  $(N + 1)$ -dimensional vector  $\vec{b}$  invariant :

$$\frac{d}{d\tau} \vec{b} = \vec{N}[\vec{b}] - \frac{\langle \vec{N}[\vec{b}], \vec{b} \rangle}{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle} \vec{b}. \quad (22)$$

In the equation above,  $\vec{N}[\vec{b}]$  is the vector of components  $N_n[\vec{b}]$ , whose expression was given in (19) and  $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \sum_{n=0}^N A_n B_n$  is the usual euclidean scalar product. The projection factor involved in the r.h.s. of (22),

$$A(\tau) = \frac{\langle \vec{N}[\vec{b}](\tau), \vec{b}(\tau) \rangle}{\langle \vec{b}(\tau), \vec{b}(\tau) \rangle}, \quad (23)$$

is intended to keep  $\vec{b}$  on a sphere and will be of central importance in the following.

Characteristic time scales on shell  $n$  are in first approximation proportional to  $b_n$ , but now  $b_n$  cannot exceed the initial value of  $\sqrt{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle}$ . It follows that within the “projected dynamics” defined by (22), the cascade towards small scales is not accompanied by an acceleration of the dynamics, as in the original equations. It thus becomes feasible to take a very large number of shells since the required time resolution does not anymore grow exponentially with  $N$ . By integrating numerically (22), we observed that any initial condition of finite support (i.e.  $b_n(0) \neq 0$  for  $0 \leq n \leq n_0$ , with  $n_0 \ll N$ ) gives birth at large times  $\tau$  to a solitary wave moving with a constant velocity towards small scales. In other words, a period  $T$  may be defined such that asymptotically, for  $\tau \rightarrow +\infty$ , (a more precise condition reads  $1 \ll \tau \ll NT$ , because some reflection will ultimately occur on the ultraviolet boundary),

$$b_{n+1}(\tau + T) = b_n(\tau) \equiv b_n(\tau) = b(n - \frac{\tau}{T}). \quad (24)$$

A more precise condition reads  $1 \ll \tau \ll NT$ , because some reflection will ultimately occur at the ultraviolet boundary. Note that (24) implies  $A(\tau + T) = A(\tau)$ . The shape of the final solitary wave is found to be always the same, up to the scaling symmetry

$$b(n - \frac{\tau}{T}) \rightarrow \lambda b(n - \lambda \frac{\tau}{T}), \quad (25)$$

and it is remarkably stable, as demonstrated by Figs. 9 and 10.

Let us now make the connection between this finding for the fictitious projected dynamics and self-similar solutions in shell models. This is easily done by writing any solution  $\vec{b}(\tau)$  of (22) in the form

$$\vec{b}(\tau) = \exp(-\int_0^\tau A(\tau') d\tau') \vec{c}(\tau) = B(\tau) \vec{c}(\tau). \quad (26)$$

Since the non-linear kernel is quadratic, one gets for  $\vec{c}(\tau)$

$$\frac{d}{d\tau} \vec{c} = B(\tau) \vec{N}[\vec{c}].$$

The original dynamics :  $\frac{d}{dt} \vec{c} = \vec{N}[\vec{c}]$  is recovered, after defining the physical time  $t$  as

$$t(\tau) = \int_0^\tau B(\tau') d\tau'. \quad (27)$$

These straightforward manipulations prove that every solution  $\vec{b}(\tau)$  of (22) can be mapped onto a solution  $\vec{c}(t)$  of the real physical problem in the inertial range, according to the transformation law :

$$\vec{c}(t) = \exp \left[ \int_0^{\tau(t)} A(\tau') d\tau' \right] \vec{b}(\tau(t)), \quad (28)$$

where  $\tau(t)$  is obtained from the inversion of (27). It can now be seen that a travelling wave in the projected dynamics, of period  $T$  and average value in time  $\langle A(\tau) \rangle > 0$ , is the signature of a self-similar solution in the true dynamics. Indeed, according to (28), each time the component of  $\vec{b}$  of maximal amplitude moves from one shell to the next,  $\vec{c}$  is multiplied by  $\exp(\langle A \rangle T)$ . From a comparison with the initial Ansatz (20), one gets :

$$Q^z = \exp(\langle A \rangle T),$$

or

$$z = \frac{\langle A \rangle T}{\log Q}. \quad (29)$$

This formula allows one to obtain accurate estimates for  $z$ , since both quantities  $\langle A \rangle$  and  $T$  are easily measurable (and their product is left invariant as it should by the scaling symmetry (25)).

The method was first used to compute  $z$  for various values of  $\beta$  in the ON model. Results are summarized in table I, where a comparison between  $z - \frac{2}{3}$  and the asymptotic slope  $\gamma$  of the  $\sigma_p$ -curve is also made. We find a reasonable agreement between these last two quantities, in view of the comparatively large errors in the estimate for  $\gamma$ . It is important to realize that the mere existence of self-similar solutions has nothing to do with the presence of chaos. In the ON model, the exponent  $z$  decreases regularly from 1 to  $\frac{2}{3}$ , as  $\beta$  varies between 0.145.. and 1 (as already noticed in Refs. [10,11], one has  $z = 1$  for  $\beta \leq 0.145..$ ). The analytic

structure of the solitary wave remains the same. The scaling function  $f$  of (21) presents an essential singularity  $f(\xi) \sim 2^\xi \exp(-a2^\xi)$  for  $\xi \rightarrow +\infty$  (up to subdominant multiplicative corrections), and an exponential tail  $f(\xi) \sim Q^{z\xi}$  for  $\xi \rightarrow -\infty$ . In the case where  $z = 1$ , the exponential tail is replaced by a second essential singularity  $f(\xi) \sim 2^{-\xi} \exp(-b2^{-\xi})$ . Table I shows that  $z \sim 0.88$  at the transition between the regular and chaotic regimes, located near  $\beta = 0.349$ . This high value explains why the ON model (at least for  $Q = 2$ ) is bound to exhibit rather strong intermittency in the chaotic part of its phase diagram.

We were curious to find if this analysis extends to the complex GOY model. It is a simple matter to generalize (22) to the case of a complex vector. Details will not be given here. The conclusion of our (partial) investigations is that the GOY model also possesses only one ideal self-similar solution for a given value of  $\epsilon$ . Furthermore, this self-similar solution is purely real and positive, up to the phase symmetry (12) of the model. This means that the complex amplitudes  $b_n(\tau)$  take the asymptotic form  $b_n(\tau) = e^{i\theta(n)} b(n - \frac{\tau}{T})$ , where the phase  $\theta(n)$ , subject to the constraint  $\theta(n) + \theta(n+1) + \theta(n+2) = 0$ , is the only footprint of the initial condition and the amplitude  $b$  presents a shape quite similar to the one obtained for the ON model. Quantitative results are presented in the table II. The comparison between large-order statistics and scaling properties of self-similar solutions was done only for two values of  $\epsilon$  :  $\epsilon = 0.75$  and  $\epsilon = 0.5$ . While in the former case the same agreement is obtained as for the ON model, we find in the latter a discrepancy by a factor 2 between  $\gamma$  and  $z - \frac{2}{3}$ . The discrepancy is even bigger if one extrapolates from the She-Lévêque formula (18)  $\gamma = 2/9 = 0.222$ . We think that the failure of self-similar solutions to explain intermittency at high orders in this case, lies in the closeness to the Kolmogorov value  $\frac{2}{3}$  of their scaling exponent  $z$ . After all, with  $z - \frac{2}{3}$  as small as 0.052 and a Reynolds number  $R = 10^5$  as in our computations, the amplitude of singular fluctuations grows, upon propagating from the integral scale to the dissipative one, by a factor  $Q^{(z-\frac{2}{3})n_d} = R^{\frac{3}{4}(z-\frac{2}{3})}$ , which does not exceed 1.5 ! This gives very little chance for such a fluctuation to survive collisions with the turbulent background and to govern statistics at large orders. We find it plausible that the mildness of singular fluctuations and the finite length of the cascade combine to pro-

duce a new kind of intermittency with a more pronounced multifractal character. It is an interesting issue, left for further investigation, to understand how the system is then able to develop an asymptotic growth of the  $\sigma_p$ 's with  $p$  steeper than the one expected on the basis of self-similar solutions.

## V. STUDY OF COMPLEX TIME-SINGULARITIES

From a formal point of view, self-similar solutions studied in the previous Section describe the approach of the system towards blow-up, which, in the absence of dissipation, happens in finite real time. It is also of interest in the context of nonlinear ODE's to consider movable singularities taking place at complex times. The local structure of such objects is intimately linked to the non-linearity, while their distribution in the complex  $t$ -plane may help to understand such physical properties as high-frequency intermittency [15]. Besides, according to Painlevé's criterion, nonalgebraic singularities indicate usually lack of integrability. This yields a very economical way to analytically get a hint that chaos may be present in any given dynamical system (see for instance Ref. [16] and the references therein related to this topic). We shall show below, that a close variant of the dynamic rescaling method introduced in the previous Section allows one to fully elucidate the structure of complex time singularities in scalar shell models. A large part of this Section is devoted to the exposition of technical details. The uninterested reader may jump directly to the last three paragraphs, where conclusions of the study and possible physical inferences of the results obtained so far, are stated.

We shall work with the vector  $\vec{b}$  defined in Section 4. Assume  $t^*$  to be a complex critical time, where  $\vec{b}$  gets singular. Due to the quadratic degree of non-linearities, the local behaviour of  $\vec{b}(t)$  in the vicinity of  $t^*$  may quite generally be cast in the form :

$$\vec{b}(t) \sim (t - t^*)^{-1} \vec{a}(-\log(t - t^*)) \quad \text{for } t \rightarrow t^* \quad \text{and } 0 \leq n \leq N, \quad (30)$$

where exponential growth of any component of the vector  $\vec{a}(\tau)$  with  $\tau = -\log(t - t^*)$  is forbidden. To begin, let us consider the possibility that  $\vec{a}(\tau)$  possesses a well-defined limit for infinite  $\tau$ , to be denoted in the following simply  $\vec{a}$ . The component  $a_n$  is then the residue of  $b_n$  at  $t^*$ . After substituting (30) into (22),  $\vec{a}$  is seen to obey the condition :

$$-\vec{a} = \vec{N}[\vec{a}]. \quad (31)$$

The problem now is to solve (31). This is a much more difficult task than computing fixed points as in Section 2. First,  $\vec{a}$  is necessarily complex (it is easy to check that (31) implies  $\sum_{n=0}^N a_n^2 Q^{-2n} = 0$ ). Second, we expect on physical grounds the vector  $\vec{a}$  to be localized in shell space. This means that we are looking for solutions of (31) which would be square-summable ( $\sum_{-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty$ ), were the range of shell numbers extended to the whole set of relative integers. Any “shooting” method of the type outlined in Section 2, which would start from one endpoint and try to join the other one with the appropriate asymptotic behaviour, is in fact doomed to failure because of strong numerical instabilities.

As in the preceding Section, the idea will be to approach dynamically the desired solutions to (31). Before doing so, we must say a few words about the notion of “genericity” of movable singularities. Consider a singularity at time  $t^*$  and assume  $\vec{a}$  is known. Equation (30) gives only the leading order term in the expansion of  $\vec{b}$  near  $t^*$ , which may be continued to higher orders using just local analysis. Writing  $\vec{b}$  as  $\frac{\vec{a}}{t - t^*} + \delta\vec{b}$ , where the correction  $\delta\vec{b}$  is small compared to the zero<sup>th</sup> order term, one gets to linear order in  $\delta\vec{b}$

$$\frac{d}{dt} \delta\vec{b} = \frac{1}{t - t^*} M \delta\vec{b} + \vec{F} - \frac{\vec{D}[\vec{a}]}{t - t^*}. \quad (32)$$

In the equation above,  $M = \left[ \frac{\partial N_i}{\partial b_j} \right]$  is the Jacobian matrix of the nonlinear kernel  $\vec{N}[\vec{b}]$  evaluated at point  $\vec{a}$ . Forcing and dissipation were kept for completeness in the right hand side of (32) but only the homogeneous part of the equation really matters in what follows. It has  $(N+1)$  independent solutions of the form  $(t - t^*)^{\mu_i} \vec{b}_i$ , where  $\mu_i$  is the  $i^{\text{th}}$  eigenvalue of  $M$  and  $\vec{b}_i$  the corresponding eigenvector. Provided  $\text{Re } \mu_i > -1$ , a correction of the type  $\lambda_i (t - t^*)^{\mu_i} \vec{b}_i$  with  $\lambda_i$  an arbitrary complex number, is free to appear in the expansion of

$\vec{b}$  around  $t^*$ , since it is indeed smaller than the zero<sup>th</sup> term. Actually,  $\vec{N}$  being quadratic,  $\vec{N}[\vec{a}] = -\vec{a}$  implies  $M\vec{a} = -2\vec{a}$ . Therefore, one of the  $\mu_i$  (say  $\mu_0$ ) equals by construction -2. The eigenvalue -2 and the corresponding eigendirection  $\vec{a}$  are associated to the arbitrary position of  $t^*$  and as such must be excluded from the expansion of  $\vec{b}$ . It follows that the most general expression of  $\vec{b}$  around a singularity reads :

$$\vec{b}(t) = \frac{\vec{a}}{t - t^*} + \sum_{i=1}^{N_s} \lambda_i (t - t^*)^{\mu_i} \vec{b}_i + \text{h.o.t.}, \quad (33)$$

where  $N_s$  is the number of eigenvalues of  $M$ , whose real part is larger than -1. It is not difficult to check that, once the  $N_s$  complex numbers  $\lambda_i$  are given, there is no arbitrariness left in the rest of the expansion (denoted as h.o.t. in (33)). What we have in our hands is a local expression of our solution which depends on  $(N_s + 1)$  parameters  $(t^*, \lambda_1, \dots, \lambda_{N_s})$ , whereas  $(N + 1)$  initial conditions are necessary to specify entirely the evolution of the dynamical system. Therefore a singularity will be generic (i.e. it will not result from a set of initial conditions of zero measure), if and only if  $N_s = N$ . In other words, we are interested only in solutions to (31) with  $N$  eigenvalues  $\mu_i$  of real part bigger than -1, besides the trivial one  $\mu_0 = -2$ .

The previous considerations suggest the introduction of the following dynamics :

$$\frac{d}{d\tau} \vec{a} = -\vec{N}[\vec{a}] + \left( \text{Re} \frac{\langle \vec{a}, \vec{N}[\vec{a}] \rangle}{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} + i\delta \text{Im} \frac{\langle \vec{a}, \vec{N}[\vec{a}] \rangle}{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} \right) \vec{a}. \quad (34)$$

Here,  $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \sum_{n=0}^N A_n^* B_n$ , since we are dealing now with complex-valued vectors. The second term in the r.h.s. of (34) keeps the norm of  $\vec{a}$  constant. The last one affects only its phase and one is, in principle, free to choose any value for the parameter  $\delta$ . It may be shown that there is a one-to-one correspondence between fixed points of the dynamics (34) with a basin of attraction of finite measure, and generic solutions (in the sense of the previous paragraph) to the initial problem. A proof of this almost intuitive statement is given in the Appendix. It has nice consequences : in order to determine the possible arrangements of residues  $a_n$ , it suffices to integrate (34) for initial conditions which are not purely real

(otherwise they remain so forever). If after a long enough time, a stationary state  $\vec{a}_f$  is reached, then :

$$\vec{a} = -\vec{a}_f \frac{\langle \vec{a}_f, \vec{a}_f \rangle}{\langle \vec{N}[\vec{a}_f], \vec{a}_f \rangle} \quad (35)$$

contains the desired information. Note that the computational cost of the method increases only linearly with the number of shells  $N + 1$ . It is therefore easy to get rid of finite size effects if necessary. Finally, we would like to mention that for initial conditions of the form  $\vec{a} = i\vec{b}_0$  where  $\vec{b}_0$  is arbitrary but real, stepping forward the fictitious dynamics (34) is in fact equivalent to integrating the original dynamics  $\frac{d}{dt}\vec{b} = \vec{N}[\vec{b}]$  (from the initial condition  $\vec{b}_0$ ) along a trajectory in time space parameterized as :

$$t = -i \int_0^\tau \exp\left(\int_0^{\tau'} A(\tau'') d\tau''\right) d\tau', \quad (36)$$

where  $A(\tau)$  reads :

$$A(\tau) = \text{Re} \frac{\langle \vec{a}(\tau), \vec{N}[\vec{a}](\tau) \rangle}{\langle \vec{a}(\tau), \vec{a}(\tau) \rangle} + i\delta \text{Im} \frac{\langle \vec{a}(\tau), \vec{N}[\vec{a}](\tau) \rangle}{\langle \vec{a}(\tau), \vec{a}(\tau) \rangle}. \quad (37)$$

This property ensures that the objects we are going to find are singularities associated to true physical signals.

We have applied this technique to the ON model and made the following observations. As anticipated on the basis of the preceding considerations, the vector  $\vec{a}$  evolves systematically towards a fixed point provided the condition  $\delta \geq 1$  is met (actually, the marginal case  $\delta = 1$  still works but requires longer times of integration). After performing the rescaling (35), the final state of  $\vec{a}$  (giving access to the residues  $a_n$ ) was found to be always the same, up to complex conjugation (which is an obvious symmetry of (31)) and translation along the shell number axis. Figure 11 shows for instance the modulus and the real part of  $a_n$  for  $\beta = 0.39$ . They were deduced from a numerical integration of (34) with  $N = 29$ ,  $\delta = 2$  and the initial condition  $a_n = i\delta_{n,0}$ . The imaginary part of  $a_n$  has not been represented in order not to burden the figure. A change in the initial conditions or in the value of  $\delta$  would just

lead to a displacement of the peak of the final structure along the horizontal axis. However, such a satisfactory solution is not found anymore for  $\beta > \beta_c = 0.3981 \pm 10^{-4}$ . What happens is the following thing : upon increasing  $\beta$ , the real part of one of the eigenvalues  $\mu_i$  of the Jacobian matrix  $M$  crosses the value -1, so that the fixed point of (34) is disrupted into a limit cycle, which is eventually destroyed via a series of Hopf bifurcations (which we did not study with great care) at  $\beta = \beta_c$ . Strictly speaking, poles are already lost in the intermediate region just below  $\beta_c$ , since the vector  $\vec{a}(\tau)$ , as defined by (30), contains now imaginary exponentials of  $\tau$ . But the structure is spatially fixed, while the emergence of chaos in dynamics (34) entails at once the depinning of the singularity along the  $n$ -axis. In some sense, the transition appears like the dual one of the transition between regular and chaotic dynamics which can be understood as the depinning of self-similar solutions with respect to the K41 fixed point. Here however, neither forcing, nor dissipation play the slightest role; we are dealing with an intrinsic property of the non-linearities.

For  $\beta > \beta_c$ , the leading order behaviour of  $\vec{a}(\tau)$  takes the form :

$$a_n(\tau) \sim a(\xi = n - v\tau, \tau), \quad (38)$$

where the second argument enters only through quasiperiodic terms and the velocity  $v$  in the absence of dissipation is close to the velocity found on the real time axis i.e.  $v \sim 1/z \log Q$  (we work here in a representation where  $\tau = -\log(t - t^*)$ , so that the projection factor  $A$  defined in the last Section is normalized to 1). Note that such solutions, hereafter called type II singularities, as opposed to poles which will be our type I, do exist for every value of  $\beta$  but are more difficult to detect than type I singularities for  $\beta < \beta_c$  in their domain of coexistence. Type II singularities have a self-similar structure which is quite close to (though usually less perfect than) the one unravelled in Section 5. An interesting question concerns the fate of type II singularities in the presence of viscosity, because the relative growth rate of non-linearities with respect to the viscous term when they move from one shell to the next one (i.e.  $Q^{(z-2)}$ ) is *a priori* smaller than 1. It would seem that, however

small the viscosity, dissipation will always win in the end. But we know that viscosity by itself cannot lead to finite time blow-up (even in the complex time domain). The answer to this paradox is simple and beautiful : as soon as viscosity gets relevant, the velocity  $v$  slows down towards the value  $1/2 \log Q$ . This makes the scaling exponent  $z$  become equal to 2, in such a way that non-linearities and viscous terms scale ultimately in the same way all along the cascade. We note that such a behaviour may already be observed in the-real time domain, by integrating the equations of motion backwards in time (which just amounts to changing  $\nu$  into  $-\nu$ ).

This closes our sketchy discussion of type II singularities. We would like now to return to the possible physical meaning (if any) of the transition just found. This might look as an ambitious goal. Indeed, for all the Reynolds numbers we were able to investigate in our numerics on the ON model, the chaotic phase stops at  $\beta^*(R)$ , which is always lower than  $\beta_c$ . This means that we are always working in a region where type I singularities exist. Once again, some decisive insight may be gained from the comparison with the GOY model. A completely similar transition is found to occur there around  $\epsilon_c = 0.715 \pm 0.005$ , whereby poles cease to exist for  $\epsilon$  below  $\epsilon_c$ . We are therefore just in the opposite situation : most computations performed on the GOY model are in fact dealing with a part of the phase diagram from which type I singularities are absent. We therefore conclude that the existence of these objects is not a signature of chaos. Nevertheless, a surprising feature of the transition appears, when comparing the scaling exponents  $z$  of self-similar solutions in both models at the transition :  $z(\beta_c)$  and  $z(\epsilon_c)$  turn out to be quite close to each other (we cannot say there is an exact equality, due to the small uncertainty on  $\beta_c$  and  $\epsilon_c$ ) and equal to  $z = 0.855 \pm 0.005$ , a value lying almost halfway between the two physical bounds  $2/3$  and  $1$ . It would be interesting to see whether this coincidence of numbers persists for different values of the scale parameter  $Q$  and is also found when considering other shell models. If so, we could have in our hands a clear-cut criterion for separating two regimes in the chaotic phase of scalar shell models, exhibiting respectively “strong” and “soft” intermittency. In

the first case, type I singularities, when sufficiently close to the real time axis, would encode “blockings” in the energy cascade leading to spatially disorganized energy backflows. This would kill to a large extent multifractality, while a milder and, altogether, more interesting picture would result in the other case.

## VI. CONCLUSION

Starting from a numerical investigation of the ON model, we were led to identifying elementary bricks in its dynamics, which are present, more generally, in any scalar shell model. Interestingly enough, they appear to have rather constrained structures. Naturally the construction of a statistical theory from these deterministic objects remains a hard task. But we believe that a precise knowledge of their properties may help to formulate new questions. For instance the discrepancy found in the case of the GOY model for  $\epsilon = 0.5$  between the asymptotic growth of scaling exponents of statistical moments and the strength of extreme fluctuations is a puzzling fact, which clearly deserves further investigation. Another issue concerns the selection mechanism of the scaling exponent  $z$  of self-similar solutions whose present understanding is still poor. One must remember that the method developed in the paper is in essence dynamical. We cannot therefore exclude the existence of a larger manifold of solutions, out of which only the element with the smallest  $z$  would be systematically observed. Clearly more mathematically oriented work would be welcome to elucidate this technical point, which may be of some physical relevance. Finally, it would certainly be interesting to explore numerically the  $\beta > \beta_c$  side of the ON model, by increasing sufficiently the Reynolds number and possibly including phase degrees of freedom. This would help to understand whether the transition affecting complex-time singularities has the physical influence conjectured at the end of Section 5.

### Acknowledgment

We are grateful to E. Gledzer for suggesting us to revisit the ON model. He was a con-

stant source of inspiration during the course of this work, which benefitted also from many discussions with B. Castaing and Y. Gagne. Finally, we would like to thank L. Biferale for prompting us to study the formation of residues in the GOY model, which helped us to amend our initial view on this topic.

## APPENDIX

In this Appendix we establish the equivalence between stable fixed points of the dynamical system (34) introduced in the Section 5 and generic movable singularities in shell models. First, we observe that static solutions of (34), if they exist, are such that  $\vec{N}[\vec{a}_f] = \lambda \vec{a}_f$  where the coefficient of proportionality  $\lambda = \frac{\langle \vec{a}_f, \vec{N}[\vec{a}_f] \rangle}{\langle \vec{a}_f, \vec{a}_f \rangle}$  obeys :

$$\lambda = \text{Re}(\lambda) + i\delta \text{Im}(\lambda) \tag{A1}$$

If  $\delta \neq 1$ ,  $\lambda$  is bound to be real. The case  $\lambda = 0$  corresponds to  $\vec{a}_f$  being an inertial fixed point ( $\vec{N}[\vec{a}_f] = \vec{0}$ ). We discard this possibility (whose occurrence would be easily identified in practice) and concentrate on the more interesting case of a finite value of  $\lambda$ . Then  $\vec{a} = -\frac{\vec{a}_f}{\lambda}$  verifies as it should  $\vec{N}[\vec{a}] = -\vec{a}$ .

Now we must ask about stability properties of  $\vec{a}_f$ . By linearizing the system of differential equations (34) around their fixed point, one finds the following evolution of small perturbations  $\delta \vec{a}$  :

$$\frac{d}{dt} \delta \vec{a} = \lambda(M + 1) \delta \vec{a} + \dots \tag{A2}$$

where the terms hidden behind the dots are all directed in the direction of  $\vec{a}_f$  and have been omitted for simplicity. As in Eq. (32) of Section 5,  $M$  is the Jacobian matrix of first order derivatives of the non-linear kernel  $\vec{N}$  evaluated at point  $\vec{a}$  defined above. It appears that the space “transverse” to  $\vec{a}_f$  belongs as a whole to the stable manifold of  $\vec{a}_f$ , if and only if all the eigenvalues  $\mu_i$  of  $M$  for  $1 \leq i \leq N$  have a real part larger (resp. smaller) than -1 with

$\lambda$  negative (resp. positive). The second possibility would lead to a divergence of the trace of  $M$  in the limit  $N \rightarrow +\infty$ , which contradicts the assumption of a finite norm for  $\vec{a}$ . We are thus left with  $\lambda < 0$  and by the same token  $N$  eigenvalues  $\mu_i$  of real part larger than  $-1$ , which is nothing but the criterion for genericity established in Section 5.

Finally, let us consider perturbations along the direction of  $\vec{a}_f$  or  $\vec{a}$ . Since the dynamics (34) preserves the norm of  $\vec{a}(\tau)$ , they reduce to phase fluctuations which may be parameterized as  $\vec{a}(\tau) = e^{i\theta(\tau)}\vec{a}_f$ . The phase  $\theta(\tau)$  is found to obey the equation of motion :

$$\frac{d}{d\tau}\theta = \lambda(\delta - 1)\sin\theta \tag{A3}$$

Therefore complete stability of  $\vec{a}_f$  requires  $\delta > 1$  (since  $\lambda < 0$ ), as announced in the main text of Section 5.

## REFERENCES

- <sup>1</sup> M. Yamada and K. Okhitani, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 983 (1988).
- <sup>2</sup> K. Okhitani and M. Yamada, *Prog. Theor. Phys.* **81**, 329 (1989).
- <sup>3</sup> M. H. Jensen, G. Paladin, and A. Vulpiani, *Phys. Rev. A* **43**, 798 (1991).
- <sup>4</sup> R. Benzi, L. Biferale, and G. Parisi, *Physica D* **65**, 163 (1993).
- <sup>5</sup> L. Biferale, A. Lambert, R. Lima, and G. Paladin, *Physica D* **80**, 105 (1995).
- <sup>6</sup> L. Kadanoff, D. Lohse, J. Wang, and R. Benzi, *Phys Fluids* **7**, 617 (1995).
- <sup>7</sup> A. M. Obukhov, *Atmos. Oceanic Phys.* **7**, 41 (1971).
- <sup>8</sup> V. I. Desnyansky and E. A. Novikov, *Sov. J. Appl. Mech.* **38**, 507 (1974).
- <sup>9</sup> E. B. Gledzer, A. B. Glukhovsky, and A. M. Obukhov, *J. Theor. Appl. Mech.* **7**, 111 (1988).
- <sup>10</sup> E. D. Siggia, *Phys. Rev. A* **17**, 1166 (1978).
- <sup>11</sup> T. Nakano, *Prog. Theor. Phys.* **79**, 569 (1988).
- <sup>12</sup> G. Parisi, University of Rom preprint ROM2F-90/37.
- <sup>13</sup> O. Gat, I. Procaccia, and R. Zeitak, *Phys. Rev. E* **51**, 1148 (1995).
- <sup>14</sup> Z. S. She and E. Lévêque, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 336 (1994).
- <sup>15</sup> U. Frisch and R. Morf, *Phys. Rev. A* **23**, 2673 (1981).
- <sup>16</sup> T. Dombre, U. Frisch, J. M. Greene, M. Hénon, A. Mehr, and A. M. Soward, *J. Fluid Mech.* **167**, 353 (1986).

FIGURES

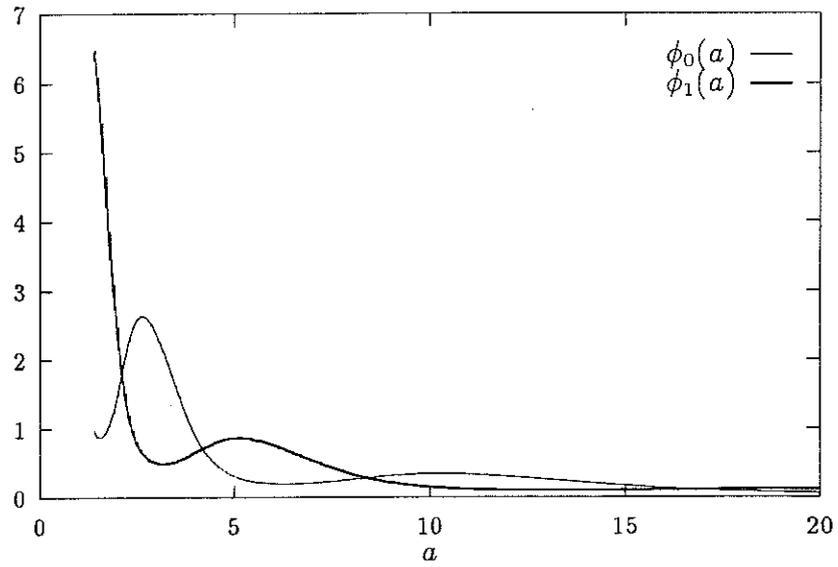


FIG. 1. The amplitudes of the first two shells as functions of the parameter  $a$  describing the dissipative range.

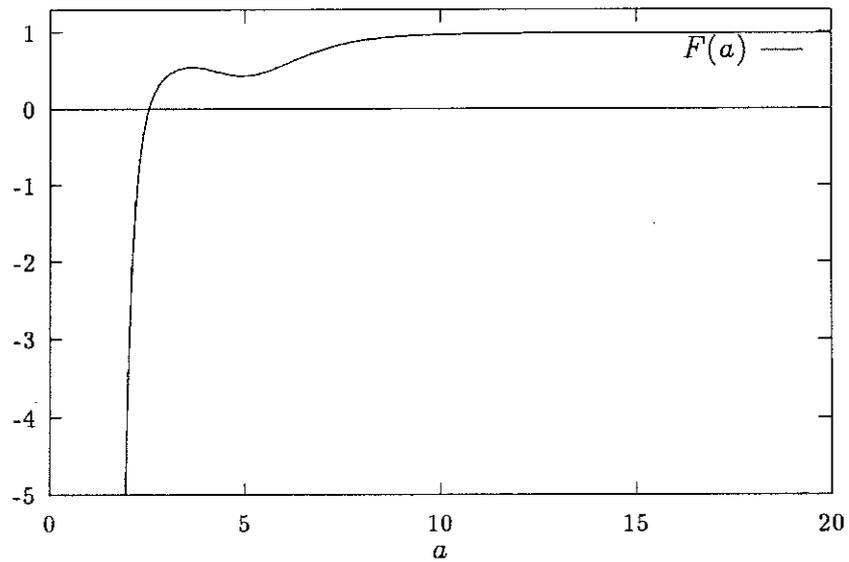


FIG. 2. Plot of the quantity  $F(a)$  defined in the text for  $Q = 2$ ,  $R = 10^5$  and  $\beta = 0.348$ .

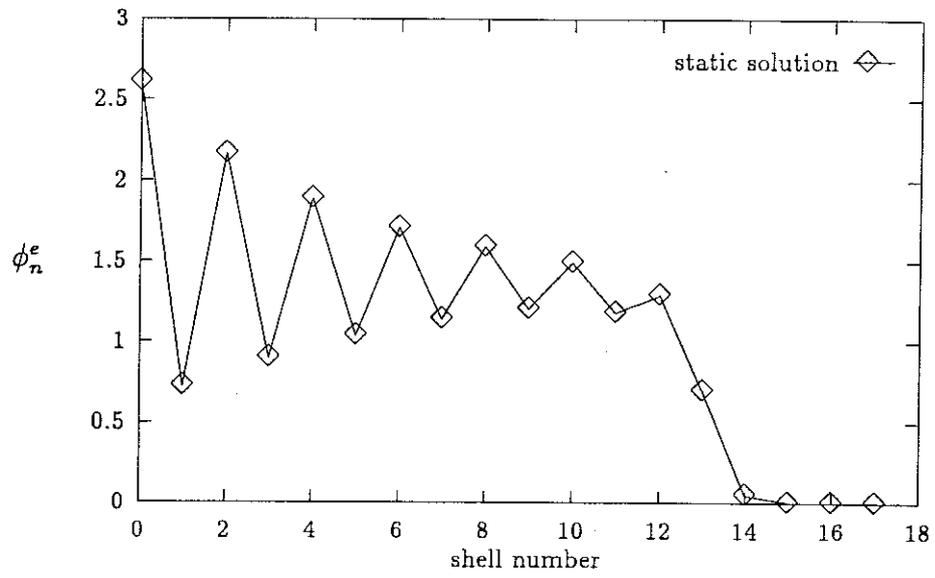


FIG. 3. K41-like static solution for the same value of parameters as Fig. 2.

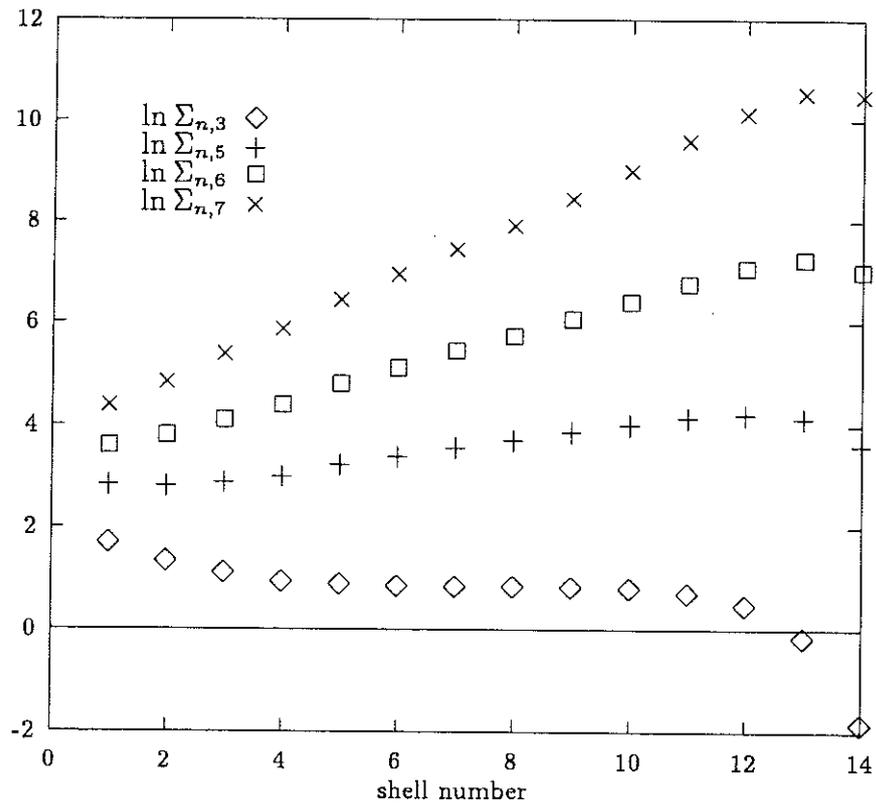


FIG. 4. Scaling properties of  $\Sigma_{n,p}$  for various  $p$  and  $\beta = 0.33$ .

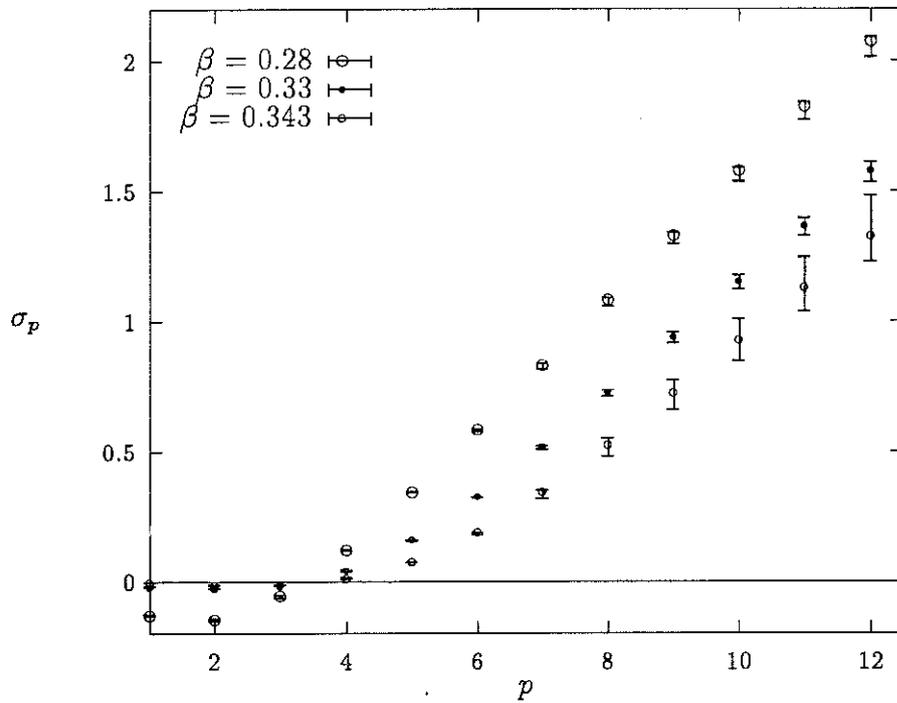


FIG. 5. Scaling exponents  $\sigma_p = \frac{p}{3} - \zeta_p$  versus  $p$  for  $\beta = 0.28$ ,  $\beta = 0.33$ , and  $\beta = 0.343$ . For the lowest value of  $\beta$  and  $p \geq 3$ , the  $\sigma_p$ 's fall on a single straight line. There is more curvature for the other two values of  $\beta$ , indicating multifractality. Nevertheless a linear growth is recovered for  $p \geq 8$ .

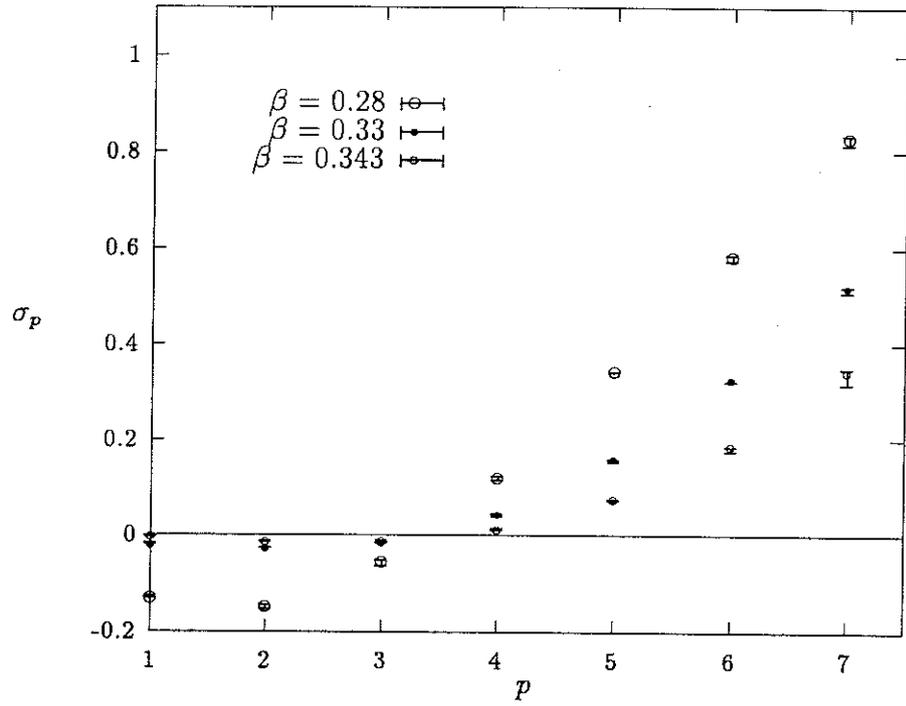


FIG. 6. A zoom on the evolution of the cross-over region with  $\beta$ . A peculiarity of the ON model compared to the GOY model is that it must get very close to the transition before showing a clear curvature of the  $\sigma_p$ 's. As a consequence,  $\sigma_p$  is very small for  $p \leq 3$ .

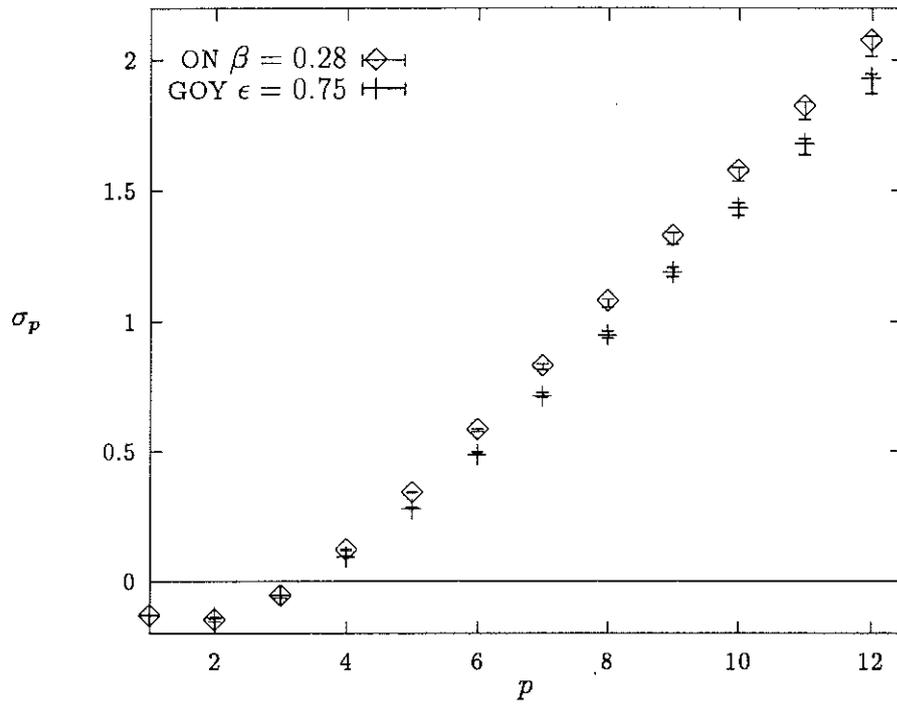


FIG. 7. Comparison of the statistics of the ON and GOY models far from the boundary between regular and chaotic dynamics.

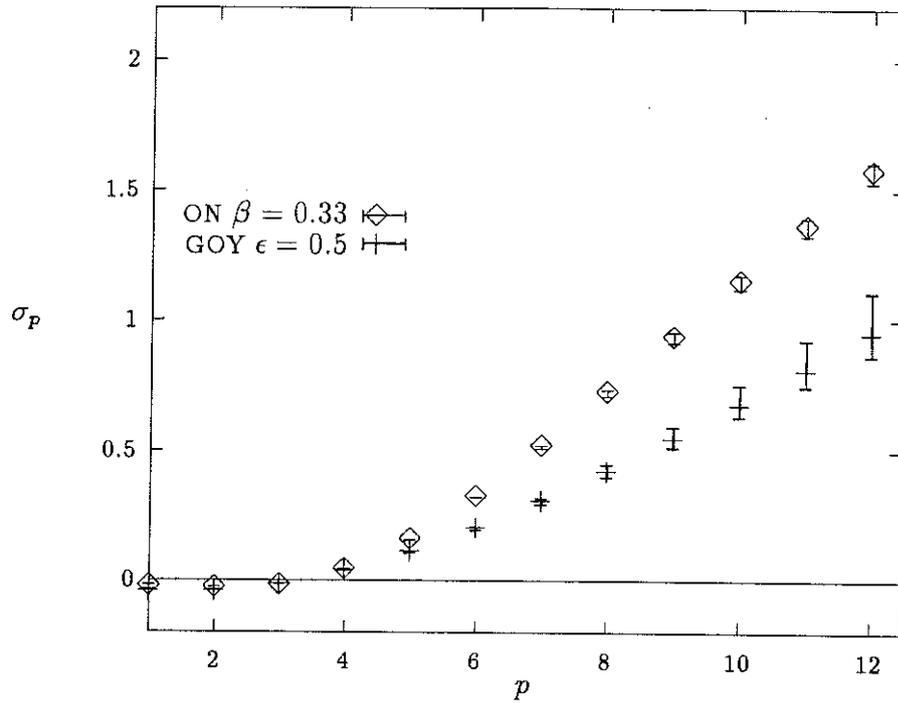


FIG. 8. Comparison of the statistics of the ON and GOY models in a regime where multifractality is well established.

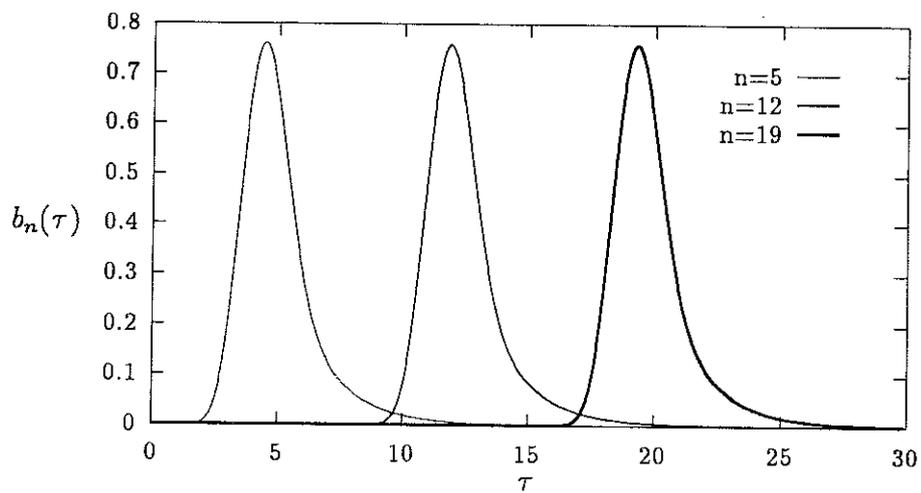


FIG. 9. Amplitudes  $b_5(\tau)$ ,  $b_{12}(\tau)$ ,  $b_{19}(\tau)$  within the "projected" dynamics for  $\beta = 0.335$  and the initial condition  $b_n(0) = \delta_{n,0}$ . The emergence of a travelling wave is clearly demonstrated.

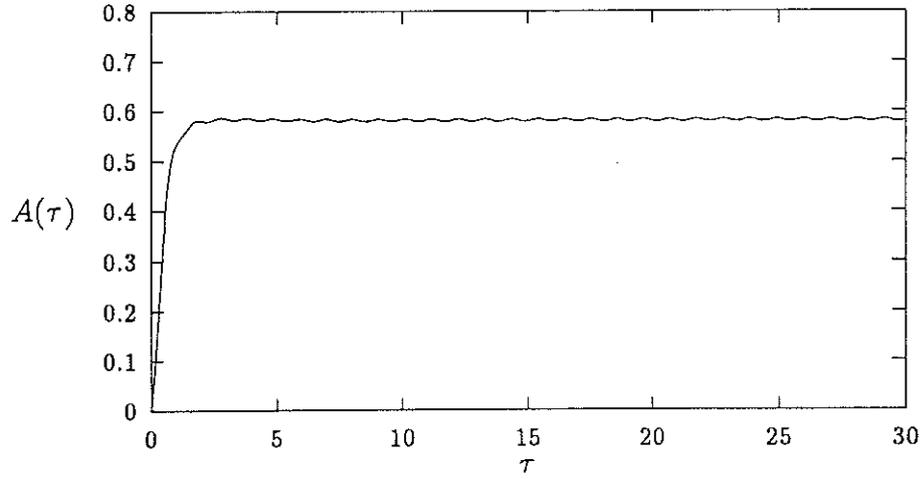


FIG. 10. Time evolution of the quantity  $A(\tau)$  defined in Eq. (23) of the text, for the same values of parameters as in Fig. 9. The small oscillations of  $A$  around its mean value in the asymptotic regime are due to the discreteness of the lattice.

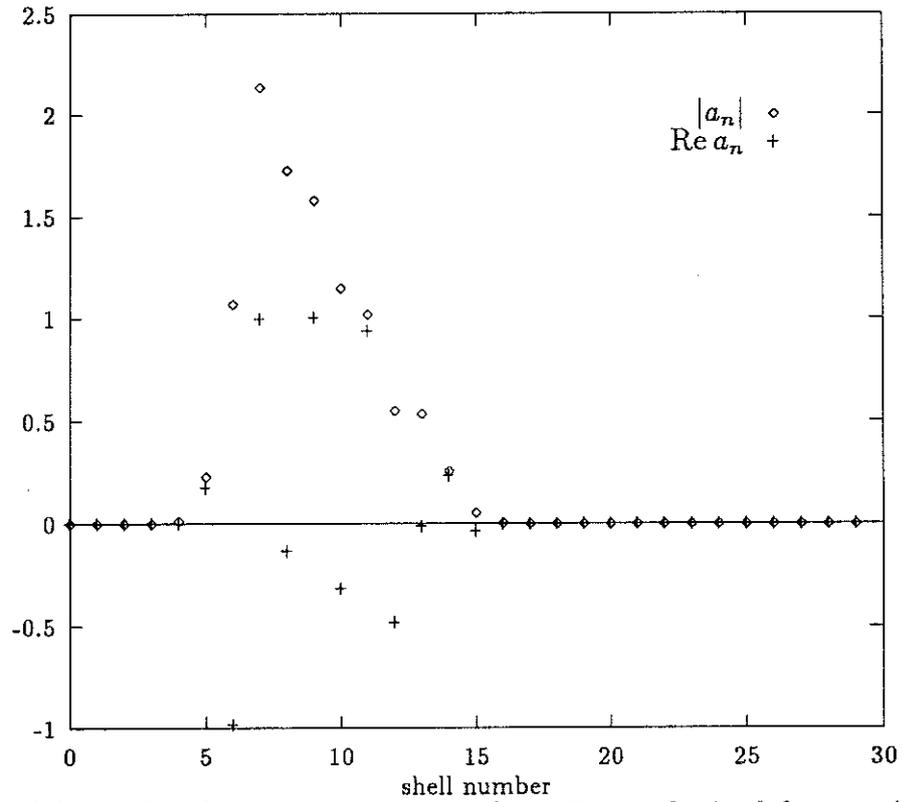


FIG. 11. Modulus and real part of residues for  $\beta = 0.39$ , as obtained from an integration of the fictitious dynamics (34) with  $\delta = 2$  and the initial condition  $a_n = i\delta_{n,0}$  ( $N=29$ ).

TABLES

$\beta$	$z$	$z - \frac{2}{3}$	$\gamma$	error
0.15	0.996	0.329	...	...
0.28	0.921	0.245	0.24	$\pm 10^{-2}$
0.33	0.889	0.223	0.213	$\pm 10^{-2}$
0.343	0.881	0.214	0.20	$\pm 2 \times 10^{-2}$
0.348	0.878	0.212	...	...
0.7	0.721	0.054	regular dynamics	
0.8	0.692	0.025		

TABLE I. Exponents  $z$  of self-similar solutions in the ON model for various values of  $\beta$ . The left columns present estimates obtained from Eq. (29) after numerical integration of Eq. (22). The last digit is given with an  $\pm 1$  accuracy. The last two columns present data extracted from statistical analysis. The comparison between columns 3 and 4 show that scaling properties of self-similar solutions account in a satisfactory way for large-order statistics in the chaotic part of the phase diagram, even close to the transition where  $z$  remains rather large.

$\epsilon$	$z$	$z - \frac{2}{3}$	$\gamma$	error
0.398	0.684	0.018	regular dynamics	
0.5	0.719	0.052	0.12	$\pm 3 \times 10^{-2}$
0.75	0.888	0.222	0.23	$\pm 10^{-2}$
0.8	0.946	0.279	...	...

TABLE II. Same quantities as in Table I but for the GOY model. One observes that  $z$  takes rather small values everywhere in the chaotic part of the phase diagram ( $\epsilon > 0.398$ ). The disagreement between columns 3 and 4 for  $\epsilon = 0.5$  is too large to originate from insufficient statistics.

# Bibliographie

- Anselmet,F., Gagne,Y., Hopfinger,E.J. & Antonia,R.A., J. Fluid. Mech. **140**, 63 (1984).
- Bell,T.H. & Nelkin,M. J. Fluid. Mech. **88**, 369-391 (1978).
- Bender,C. & Orszag,S.A. 1978. Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. McGraw-Hill, New York.
- Benzi,R., Biferale,L., Paladin,G., Vulpiani,A. & Vergassola,M., Phys. Rev. Lett. **67** 2299 (1991)
- Benzi,R., Biferale,L., & Parisi,G. Physica D **65**,163 (1993).
- Benzi,R., Ciliberto,S., Baudet,C., Massaioli,F. & Succi,S., Phys. Rev. E **48**, R29-R32 (1993)
- Benzi,R., Biferale,L., Kerr,R. & Trovatore,E. Phys. Rev. E. **53** 3541 (1996)
- Benzi,R., Biferale,L. & Trovatore,E. Universal Statistics of Non-Linear Energy Transfer in Turbulent Models. preprint chao-dyn/9606003 <http://xyz.lanl.gov>
- Biferale,L. Lambert,A., Lima,R., & Paladin,G. Physica D **80**, 105 (1995).
- Biferale,L. & Kerr,R. Phys. Rev. E. **52** 6113 (1995)
- Burgers,J.M. The Nonlinear Heat Equation. D. Reidel, Dordrecht. 1974.

- Caffisch, R.E. & Papanicolaou, G.C. editeurs *Singularities in Fluids, Plasmas and Optics*, Nato ASI series C : Mathematical and Physical Sciences- Vol 404. (1993).
- Castaing, B., *J. Phys.* **50** 147 (1989)
- Castaing, B., Gagne, Y. & Hopfinger, E., *Physica D* **46**, 177 (1990).
- Castaing, B., *J. Phys. II France* **6** 105-114 (1996).
- Chandrasekhar, S., 1961. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Clarendon, Oxford.
- Desnyansky, V. I. & Novikov, E. A. *Sov. J. Appl. Mech.* **38**, 507 (1974).
- Dubrulle, B., *Phys. Rev. Lett.* **73**, 959-962 (1994)
- Falkovich, G., Kolokolov, I., Lebedev, V. & Migdal, A. *Phys. Rev. E.* (submitted), [chaos-dyn/9512006](https://arxiv.org/abs/chaos-dyn/9512006).
- Fei, Z., Kivshar, Yu.S. & Vásquez, L. *Phys. Rev. A* **45**, 6019-6030 (1990).
- Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. 1. Wiley, New York. 1968.
- Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. 1. Wiley, New York. 1968.
- Freidlin, M.I. & Venttsel, A.D., *Random Perturbations of Dynamical Systems*. Springer, New York, (1984).
- Frisch, U., *Proc. R. Soc. Lond. A* **434**, 89-99, eds. J.C.R. Hunt, O.M. Phillips & D. Williams.
- Frisch, U., *Intermittency (Random Cascade Models, Multifractality and large Deviations) in Turbulence : A Tentative Dictionary*. Edited by P. Tabeling & O. Cardoso, Plenum Press, New-York, (1995).

- Frisch,U., Turbulence, the legacy of A.N.Kolmogorov. Cambridge. University. Press 1995.
- Frisch,U. and Morf,R., Phys. Rev. A **23**, 2673 (1981).
- Gagne,Y., Marchand,M. & Castaing,B., J. Phys. II France **4**, 1 (1994).
- Gardiner,C.W. Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry, and the Natural Sciences. Springer series in synergetics vol 13 editor H.Haken. Springer Verlag 1983
- Gat,O., Procaccia,I. & Zeitak,R., Phys. Rev. E **51**,1148 (1995).
- Gledzer,E.B., Sov. Phys. Dokl. **18** 216-217 (1973)
- Gledzer,E. B., Glukhovsky,A. B. & Obukhov,A. M., J. Theor. Appl. Mech. **7**, 111 (1988).
- Goldstein,H. Classical Mechanics, 2nd edition. Addison-Wesley, Reading, MA. 1980.
- Graham,R. & Tél,T. Phys. Rev. A **33** 1322-1337 (1986).
- Grassberger,P. J. Phys. A : Math. Gen. **22** 3283-3290 (1989).
- Jensen,M. H., Paladin,G. & Vulpiani,A., Phys. Rev. A **43**, 798 (1991).
- Kadanoff,L.P., Lohse,D., Wang,J. & Benzi,R., Phys Fluids **7**, 617 (1995).
- Kadanoff,L.P., Lohse,D. & Schörghofer,N. Scaling and Linear Response in the GOY Turbulence Model. preprint chao-dyn/9603004 <http://xyz.lanl.gov>.
- Kivshar,Yu.S. & Malomed,B.A. Rev. Mod. Phys. **61**, 763 (1989)
- Kolmogorov,A.N., Dokl. Akad. Nauk. SSSR. **30**, 1941a,**32** 1941b. (réédités in Proc. Roy. Soc. London. A **434**, 9-13 et 16-18 (1991) ).
- Kolmogorov,A.N., J. Fluid. Mech. **5**, 497-543 (1962).

- Landau, L.D. & Lifshitz, E.M, *Mécanique des Fluides*. deuxième édition. Editions. Mir. Moscou. (1989).
- Lesieur, M. *Turbulence in Fluids*. 2nd edition. Kluwer, Dordrecht. 1990.
- Lévêque, E. & She, Z.S., *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2690-2693 (1995).
- Lévêque, E. & She, Z.S. *Cascade Structures and Scaling Exponents in a Dynamical Model of Turbulence : Measurements and Comparisons*. preprint 1995.
- Manneville, P. *Structures dissipatives, Chaos et Turbulence*. Collection Aléa Saclay. 1991.
- Martin, P.C., Siggia, E.D. & Rose, H.A, *Phys. Rev. A* **8** 423 (1973)
- Monin, A.S. & Yaglom, A.M. *Statistical Fluid Mechanics*, vol 1. ed J. Lumley. MIT Press. Cambridge, MA. 1971.
- Monin, A.S. & Yaglom, A.M. *Statistical Fluid Mechanics*, vol 2. ed J. Lumley. MIT Press. Cambridge, MA. 1975.
- Naert, A. *Thèse de doctorat*. Université J. Fourier Grenoble 1 (1995)
- Nakano, T., *Prog. Theor. Phys.* **79**, 569 (1988)
- Nakano, T., *Phys. Fluids* **31**, 1420-1430 (1988)
- Novikov, E.A. *Phys. Rev. E.* **50**, R3303 (1994).
- Obukhov, A.M. *J. Fluid. Mech.* **13**, 77-81.
- Obukhov, A. M., *Atmos. Oceanic Phys.* **7**, 41 (1971).
- Okhitani, K. & Yamada, M., *Prog. Theor. Phys.* **81**, 329 (1989).
- Paladin, G & Vulpiani, A., *Anomalous laws, in multifractal objects*. *Phys. Rep.* **156**, 147-225 (1987).

- Parisi,G. & Frisch,U. On the singularity structure of fully developed turbulence, in *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics*, Proceed. Intern. School. of Physics 'E.Fermi',1983, Varenna, Italy, 84-87, eds. M.Ghil, R.Benzi & G.Parisi. North-Holland, Amsterdam. (1985).
- Parisi,G. A mechanism for intermittency in a cascade model for turbulence. University of Rome, preprint ROM2F-90/37.
- Rodríguez-Plaza,M.J. & Vásquez,L. *Phys. Rev. B.* **41** 11437-11448 (1990).
- Rose,H.A. & Sulem,P.-L. Fully developed Turbulence and statistical Mechanics, *J. Phys. France*, 441-484. (1978).
- Schörghofer,N., Kadanoff,L.P., Lohse,D. *Physica D.* **88** 40-54 (1995).
- Schulman,L.S. *Technics and Applications of Path Integration*. John Wiley (1981).
- She,Z.S., Jackson,E. & Orszag,S.A., *Proc. R. Soc. Lond. A* **434**, 101-124 (1991).
- She,Z.S. *Fluid. Dyn. Res.* **8**, 143-158 (1991).
- She,Z. S. & Lévêque,E., *Phys. Rev. Lett.* **72**, 336 (1994).
- She,Z.S. & Waymire, E.C. *Phys. Rev. Lett.* **74**, 262-265 (1995).
- Siggia,E. D., *Phys. Rev. A* **15**, 1730 (1977).
- Siggia,E. D., *Phys. Rev. A* **17**, 1166 (1978).
- Tritton,D.J. *Physical Fluid Dynamics*, 2nd edition. Clarendon Oxford. (1988).
- Yamada,M. and Okhitani,K., *Phys. Rev. Lett.* **60**, 983 (1988).
- Zeldovitch,Ya.B., Rusmaikin,A.A. & Sokoloff,D.D. *The Almighty Chance*. World Scientific, Singapore. 1990.



## Title.

Singular Structures and Intermittency in Shell Models of Turbulence.

## Abstract.

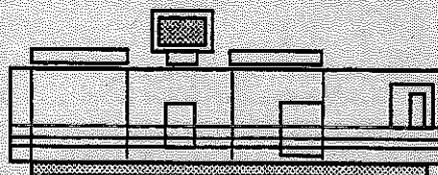
This dissertation aims at understanding, on a dynamical ground, the intermittency of shell models of 3D turbulence. We study two such models : the first one goes back to Obukhov and Novikov's work (ON), the second, most famous in recent years, is due to Gledzer Ohkitani and Yamada (GOY). The introductory first chapter exposes the motivation for such modelling of Navier-Stokes dynamics. The general properties of these models (bifurcation, statistics...) are presented in chapter two. A robust dynamic rescaling method is introduced in chapter three, which enables us to describe the generic formation, in both systems, of singular self-similar solutions to the inviscid equations. Nonlinearities turn out to select a single scaling exponent. As long as these objects are singular enough (ON case), they encode the strongest fluctuations of the dynamics in the presence of forcing and dissipation. However, much more interesting physics appears when they are mild (GOY case). In the fourth chapter we try to interpret the observed multifractality, as the result of interaction between a turbulent background and the, above mentioned, coherent structures. By direct simulation we investigate the consequences of a collision of an ideal object upon a defect, and also the building up of the strongest fluctuations in the true signal. The action of the turbulent medium is then modelled by a random forcing, white in time, with various hypotheses on the behaviour of its variance. When K41 scaling is assumed on the basis of an instanton calculation we predict the vanishing of the multifractality in the limit of infinite Reynolds number.

## Résumé.

Cette thèse vise à décrire l'intermittence des modèles en couches, à partir d'ingrédients de leur dynamique élémentaire. Nous étudions en parallèle deux modèles, l'un dû à Obukhov et Novikov (ON), l'autre plus populaire récemment dû à Gledzer Ohkitani et Yamada (GOY). Le premier chapitre est introductif ; on y décrit en particulier, les origines de la modélisation adoptée. Le second présente les propriétés générales de ces systèmes (bifurcations, statistique...). Une méthode d'intégration adaptative, exposée au troisième chapitre, nous permet de décrire la formation générique de solutions, singulières et autosimilaires, aux équations inviscides des deux modèles. Les non-linéarités sélectionnent une valeur unique de l'exposant d'échelle. Lorsqu'elles sont suffisamment singulières (cas du modèle ON), de telles solutions décrivent correctement les fluctuations les plus intenses de la dynamique en présence de forçage et de dissipation. En revanche, dans le cas du modèle GOY, une physique plus riche apparaît. Le quatrième chapitre tente alors de décrire la multi-fractalité observée à partir des interactions entre un milieu turbulent moyen et les objets cohérents introduits plus haut. Des simulations directes, nous permettent de décrire d'une part les conséquences de collisions entre un objet idéal et un défaut, et d'autre part la formation des fluctuations les plus singulières du vrai signal. Nous modélisons également le milieu turbulent par un forçage aléatoire gaussien décorrélé en temps avec pour la variance différentes hypothèses physiques. Par un calcul analytique d'instantons, nous prédisons la disparition de la multifractalité dans la limite d'un nombre de Reynolds infini.



Grenoble, septembre 1996



Imprimé sur "Xerox 5090",  
au Service Reprographie du CNRS de Grenoble.