

T0400

1996/DU

10 OCT. 1996

**THESE**

présentée par

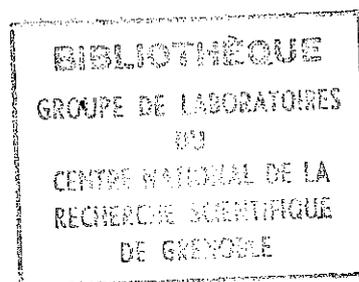
**Enrick OLIVE**

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR de L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER-GRENOBLE 1**

(arrêtés ministériels du 5 Juillet 1984 et du 30 Mars 1992)

(Spécialité: **Physique**)



---

**THERMODYNAMIQUE A L'EQUILIBRE  
ET  
DYNAMIQUE CHAOTIQUE**

**DANS DES SYSTEMES DE BOUSSOLES  
EN INTERACTION DIPOLAIRE**

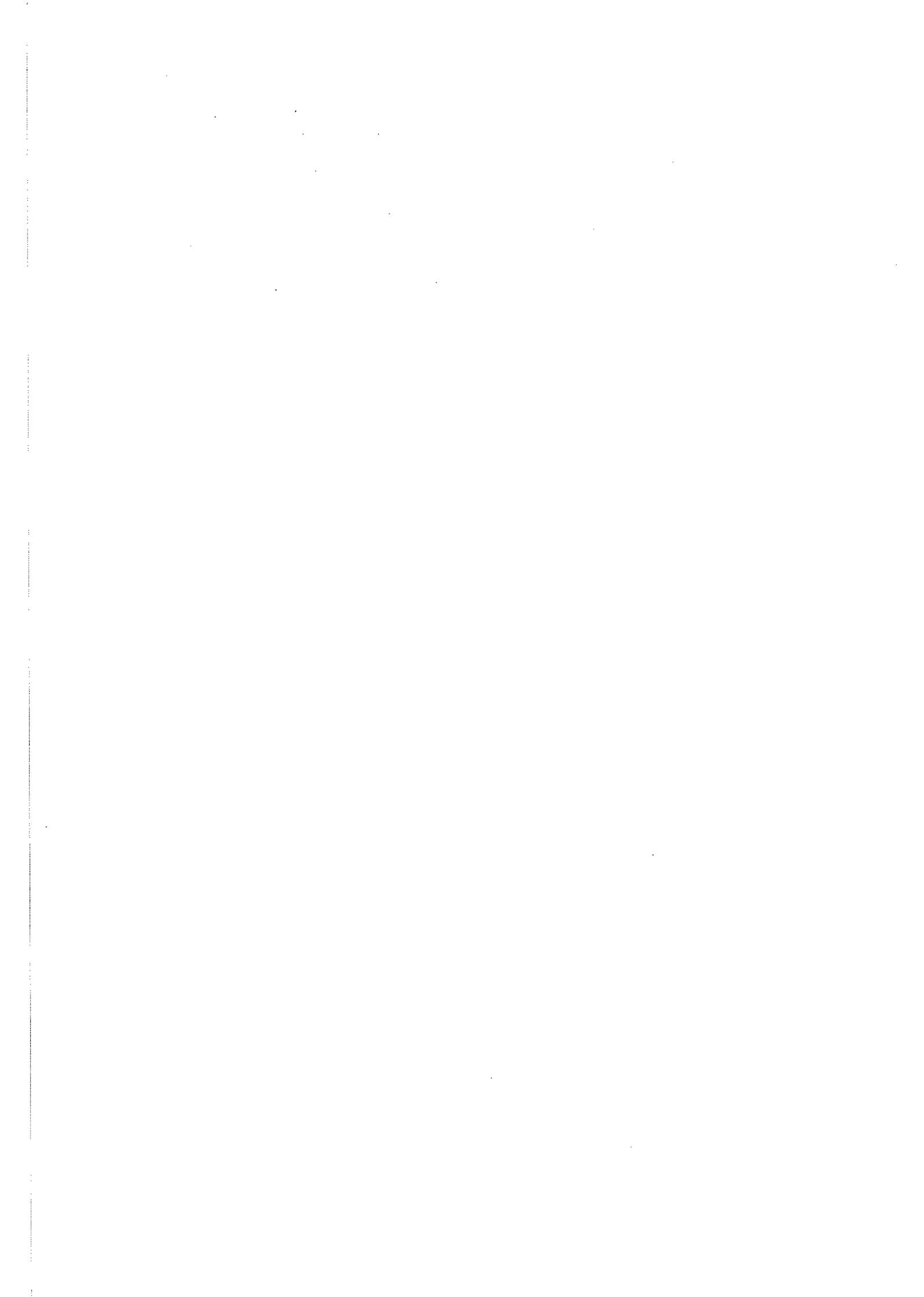
---

Soutenue le 02 Décembre 1996

**Composition du jury:**

Président:	B. Castaing
Rapporteurs:	G. Bertotti S. Fauve
Examineurs:	J. Ferré J. L. Porteseil P. Molho

Thèse préparée au sein du laboratoire de magnétisme Louis Néel  
C.N.R.S. - Grenoble



## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Bernard Castaing pour avoir présidé ce jury de thèse et s'être intéressé très tôt à ces réseaux de boussoles. Bien que très occupé, il sait se rendre disponible et accueillir avec une très grande gentillesse les jeunes bleus égarés dans ce monde impitoyable qu'est la recherche au CNRS.

Un petit pas vers Stephan Fauve à Lyon a permis un grand bond pour l'avancée de ce travail. En une journée j'ai beaucoup appris sur la physique non-linéaire. Mieux que dans une boule de cristal, il a prédit dans les équations les comportements dynamiques de mes boussoles. J'ai pu également apprécier son humour caustique rafraîchissant. A ce propos, je ne sais toujours pas comment considérer sa proposition d'étude d'une ligne de mille boussoles !

Giorgio Bertotti a montré un très grand intérêt pour ce travail. Après avoir résisté au froid au passage des Alpes, il a dû endurer une température d'un genre nouveau, qui gèle plus l'espace des phases que les mains. Boltzmann en deviendrait sûrement tout rouge.

Je remercie également Jacques Ferré pour l'intérêt qu'il a porté à cette étude et pour la prouesse d'être arrivé jusqu'à Grenoble guidé par les boussoles.

Je porte une grande estime à l'homme de culture, de science et de conscience qu'est Jean Louis Porteseil, qui s'est toujours montré disponible et très enthousiaste pour ce travail. Son extrême gentillesse, sa compétence scientifique et son sens pédagogique sont pour l'étudiant un trésor inestimable. Il partageait même l'activité ludiquement infantile mais tellement régénératrice de courir après un ballon.

Une des caractéristiques de ces réseaux de boussoles est leur originalité. Le mérite en revient à Pierre Molho qui a initié ce projet. Il m'a toujours laissé entière liberté et bien qu'à l'origine il entrevoyait d'autres études sur ces réseaux de boussoles, il s'est impliqué dans les directions d'études présentées dans ce mémoire. Je lui en suis extrêmement reconnaissant.

Je remercie donc chaleureusement et sincèrement toutes ces personnes qui composaient le jury de ma soutenance, qui se sont impliquées dans ce travail et qui ont eu une lecture critique du manuscrit.

Mes sincères remerciements vont également à Rafik Ballou. Il a permis une approche rigoureuse de la première partie de ce travail. Il a bien essayé de m'embarquer dans les profondeurs les plus abyssales et les concepts les plus abscons de ses "textbooks" mais j'ai su résister à cette machiavélique entreprise pour rester dans une description simple des réseaux de boussoles. Ses moustaches se dressent encore de toute l'impertinence bienveillante que je lui témoignais.

Je remercie Marcio Portes de Albuquerque et Olivier Martinet qui ont développé les programmes de traitement d'image de ce travail et qui m'ont ainsi permis d'effectuer mes très nombreuses expériences.

Je remercie Alexandre Valance et Chaouqi Misbah pour le temps qu'ils m'ont consacré pour améliorer la simulation numérique et discuter de la partie chaos de ce manuscrit.

Je remercie enfin Dominique Givord, directeur du laboratoire Louis Néel, ainsi que le personnel scientifique, technique et administratif pour m'avoir accueilli, permettant ainsi la réalisation de ce travail.

Le mot de la fin va bien entendu à la bande de gais lurons, qui se reconnaîtra. Véritable attracteur étrange d'une dynamique de groupe, elle en a exploré toutes ses échelles, du travail aux fêtes en passant évidemment par le foot. Sous des apparences de dynamique désordonnée, elle cache une profonde unité entretenue par une amitié sincère. Merci à tous.

# TABLE DES MATIERES

<b>INTRODUCTION .....</b>	<b>5</b>
<b>CHAPITRE I - SYSTEME EXPERIMENTAL .....</b>	<b>9</b>
<b>I.1 ● Réseaux de boussoles .....</b>	<b>9</b>
<b>I.2 ● Montage expérimental.....</b>	<b>11</b>
I.2.1 - Bobines de courant.....	12
I.2.2 - Traitement d'images .....	13
<b>CHAPITRE II - ETUDE THERMODYNAMIQUE DES RESEAUX DE BOUSSOLES .....</b>	<b>17</b>
<b>II.1 ● Comportements à champ nul et température nulle .....</b>	<b>18</b>
II.1.1 - Configurations en lignes antiparallèles.....	18
II.1.2 - Configurations en lignes parallèles.....	19
II.1.3 - Configurations en "domaines" .....	20
<b>II.2 ● Systèmes dipolaires et réseaux de boussoles .....</b>	<b>22</b>
II.2.1 - Interactions dipolaires.....	22
II.2.1.1- Energie d'interaction dipolaire .....	22
II.2.1.2- Etat fondamental .....	23
II.2.2 - Cas des réseaux de boussoles: termes multipolaires.....	25
<b>II.3 ● Simulation numérique des réseaux de boussoles .....</b>	<b>26</b>
II.3.1 - Hamiltonien considéré.....	27
II.3.2 - Procédure quasi-statique .....	28
II.3.3 - Routine Monte Carlo .....	29

<b>II.4 ● Modèle simple des réseaux de boussoles .....</b>	<b>30</b>
II.4.1 - Description des états possibles à température nulle .....	30
II.4.2 - Notion de “défauts” .....	31
<b>II.5 ● Comportements des réseaux avec de la température .....</b>	<b>34</b>
II.5.1 - Chaleur spécifique .....	35
II.5.2 - Concepts thermodynamiques appliqués à ce modèle simple .....	38
II.5.2.1- Nombre de défauts à l'équilibre .....	38
II.5.2.2- Fluctuations à l'équilibre de la variable <i>défauts</i> .....	40
II.5.2.3- Entropie associée à la variable <i>défauts</i> .....	42
II.5.2.4- Description qualitative de la transition .....	46
II.5.2.5- Paramètre d'ordre .....	49
II.5.2.6- Analogie avec les cristaux liquides <i>nématiques</i> .....	52
II.5.2.7- Bilan comparé expérience - simulation numérique .....	53
II.5.3 - Ordre dans les systèmes dipolaires 2D .....	55
<b>II.6 ● Conclusion sur la thermodynamique des réseaux .....</b>	<b>56</b>
 <b>CHAPITRE III - ETUDE DYNAMIQUE DE BOUSSOLES EN INTERACTION .....</b>	<b>59</b>
 <b>III.1 ● Calculs et mesures des paramètres du système .....</b>	<b>61</b>
III.1.1 - Calcul du moment d'inertie .....	61
III.1.2 - Mesure des paramètres de frottements .....	63
III.1.3 - Mesures du moment magnétique: oscillations dans un champ constant .....	66
III.1.3.1- Equation linéarisée: isochronisme des petites oscillations .....	67
a - Cas sans frottements .....	67
b - Cas avec frottements .....	68
III.1.3.2- Equation non linéarisée: non-isochronisme des oscillations .....	69
a - Solution exacte pour la période du pendule .....	69
b - Méthode de Lindstedt-Poincaré .....	69
<b>III.2 ● Simulation numérique .....</b>	<b>73</b>
<b>III.3 ● Dynamique d'une boussole .....</b>	<b>75</b>
III.3.1 - Dynamique d'une boussole dans un champ tournant .....	76
III.3.2 - Dynamique d'une boussole dans un champ tournant et un champ fixe .....	77
<b>III.4 ● Dynamique de deux boussoles en interaction .....</b>	<b>85</b>
III.4.1 - Modes propres d'oscillations .....	85

III.4.1.1 - Equations linéarisées pour des dipôles ponctuels .....	85
III.4.1.2 - Oscillations forcées des systèmes linéaires .....	87
a - Cas sans frottements .....	87
b - Cas avec frottements .....	88
III.4.1.3 - Résonance non linéaire et phénomène de saut .....	90
a - Pendule forcé .....	90
b - Pendule forcé paramétriquement .....	96
III.4.1.4 - Procédures expérimentales pour les mesures des fréquences propres .....	100
a - A partir des petites oscillations .....	101
b - A partir du phénomène de saut .....	102
c - Comparaison des résultats .....	104
III.4.1.5 - La boussole en tant que "dipôle étendu" .....	104
III.4.2 - Régimes dynamiques sous un champ tournant .....	109
III.4.2.1 - Equations du mouvement .....	109
III.4.2.2 - Régimes dynamiques observés et leur diagramme de phase .....	111
a - Réponses sous-harmoniques .....	111
b - Réponses quasipériodiques .....	118
c - Diagramme de phases .....	121
III.4.3 - Déstabilisation des régimes périodiques: routes vers le chaos .....	123
III.4.3.1 - Etude sous champ tournant .....	125
a - Faibles frottements .....	125
b - Frottements élevés .....	134
III.4.3.2 - Etude sous champ alternatif perpendiculaire .....	149
<b>III.5 ● Dynamique d'une ligne de dix boussoles en interaction .....</b>	<b>154</b>
III.5.1 - Comportements sous champ tournant .....	155
III.5.2 - Comportements sous champ alternatif longitudinal et perpendiculaire .....	158
<b>III.6 ● Conclusion sur la dynamique des boussoles .....</b>	<b>161</b>
 <b>CONCLUSION .....</b>	 <b>165</b>
 <b>REFERENCES .....</b>	 <b>169</b>



# INTRODUCTION

**L'**interaction dipolaire est de manière générale peu étudiée dans le domaine du magnétisme. Cette interaction anisotrope à longue portée est en effet négligée dans l'étude des comportements thermiques des matériaux puisque faible par rapport à l'interaction d'échange. Néanmoins, elle redevient un centre d'intérêt majeur pour la physique à l'échelle nanoscopique, par exemple dans l'étude des réseaux de plots lithographiés ou des matériaux en grains. Les réseaux de boussoles que nous avons construits, en tant que modèles dipolaires, sont de ce point de vue une approche originale et intéressante qui permet de mieux appréhender cette interaction.

Une caractéristique particulière de ces réseaux est la possibilité de visualiser les mécanismes régissant leurs comportements, autorisant une approche simplifiée des problèmes physiques sous-jacents. Séduisants en tant que modèle physique simple et "concret" mais également en tant qu'objets aux comportements intrigants, ils permettent une approche didactique du magnétisme. Ils suscitent chez l'observateur de multiples questions, évoquent de nombreuses analogies et suggèrent ainsi des directions d'étude très variées.

Contrairement aux systèmes magnétiques habituels, ces réseaux permettent l'étude simultanée de propriétés globales (échelle "macroscopique" du réseau) et

locales (échelle de quelques boussoles). Cette possibilité participe à la grande richesse d'études réalisables sur ces réseaux. Parmi celles-ci, nous avons choisi au cours de ce travail de doctorat de nous focaliser sur deux études distinctes de ces systèmes de boussoles, menées parallèlement en simulation numérique et expérimentalement.

Dans la première, nous nous intéressons aux comportements du réseau carré sous des effets de température qui sont analysés par un modèle simple dans le cadre de la thermodynamique des systèmes à l'équilibre.

Après une description des configurations du système en champ et température nuls, nous décrivons l'état fondamental d'un réseau en interaction purement dipolaire. Puis nous regardons les modifications qu'entraîne la présence de termes multipolaires dans l'interaction entre boussoles. Nous posons alors les bases d'un modèle simple qui nous permettra de décrire les comportements du réseau. En particulier, les notions importantes de "défauts" et de longueur de ligne sont introduites. Nous traitons ensuite ce modèle dans le cadre de la thermodynamique à l'équilibre. Il montre alors la transition d'une phase ordonnée à une phase désordonnée au passage d'une température critique. Cette transition de phase est mise en évidence par des pics de chaleur spécifique et susceptibilité. Une description qualitative des comportements du réseau nous permet alors de caractériser cette transition de phase en définissant un paramètre d'ordre. L'étude des effets de taille montre la pertinence des concepts développés. Les résultats de cette approche thermodynamique sont alors comparés avec les cristaux liquides de type *nématiques* et avec les systèmes purement dipolaires.

L'étude thermodynamique expérimentale repose sur des effets de température simulés par un champ aléatoire. L'introduction d'une périodicité dans l'excitation sous forme d'un champ tournant peut changer le type de désordre généré puisqu'il autorise par exemple une coexistence entre zones ordonnées et désordonnées au sein du réseau, pour des valeurs critiques du champ. Afin de comprendre les comportements observés, nous avons entamé une étude de la dynamique dans ces systèmes de boussoles. Néanmoins, une approche de la dynamique dans ces réseaux s'avère difficile puisqu'il faut définir des quantités pertinentes pour une telle étude. Dans le but de simplifier cette approche de la dynamique dans les réseaux, nous nous sommes limités à l'étude de quelques boussoles.

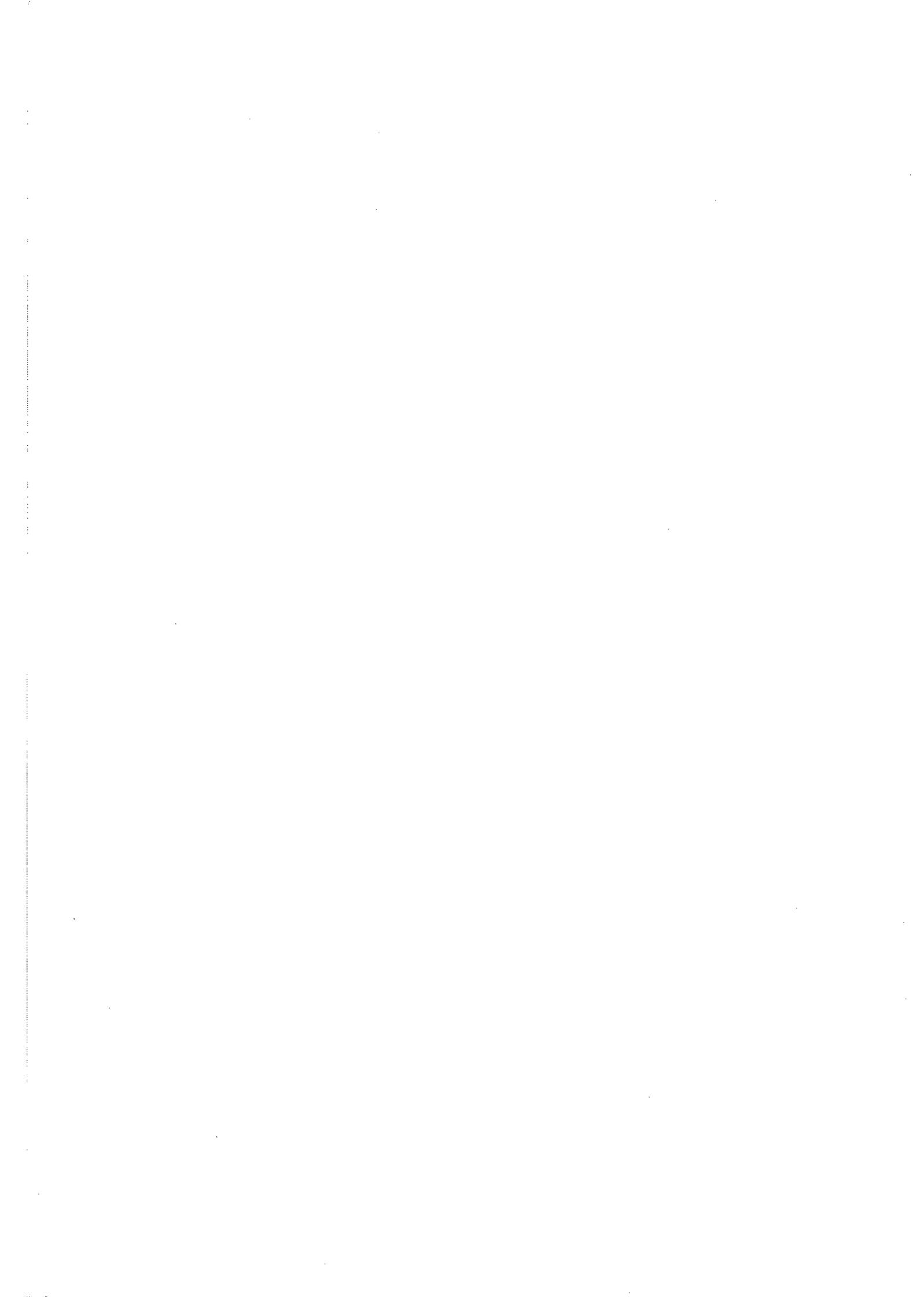
C'est l'objet de la seconde partie de ce travail, qui s'attache à la dynamique individuelle de quelques boussoles en interaction, analysée dans le cadre de la dynamique chaotique hamiltonienne et dissipative.

Cette étude débute par la détermination des paramètres du système: calcul du moment d'inertie des boussoles et mesure des paramètres de frottements et du moment magnétique. Quelques résultats sur l'isochronisme et le non-isochronisme du pendule sont rappelés et une méthode analytique d'approximation est introduite pour comprendre les effets des termes non-linéaires.

Les résultats obtenus sur la dynamique d'une boussole par Croquette et Poitou sont rappelés en guise d'introduction à notre étude sur deux boussoles en interaction. Les quantités pertinentes pour cette dernière sont les modes propres d'oscillations, déterminés expérimentalement grâce aux concepts de résonance non-linéaire qui sont expliqués ici sur le pendule forcé et le pendule paramétrique. La mesure des fréquences propres d'oscillations complète donc la caractérisation du système et autorise ainsi l'étude des comportements dynamiques des deux boussoles soumises à des champs tournants ou alternatifs perpendiculaires. Cette analyse est menée dans le cas de frottements faibles et élevés. Le diagramme de phase des régimes dynamiques observés expérimentalement est établi pour deux boussoles avec de faibles frottements soumises à un champ tournant et la richesse de ce diagramme est discutée.

Pour une dissipation plus élevée, une étude de la déstabilisation des régimes périodiques vers des régimes chaotiques est menée. Les *routes vers le chaos* sont alors identifiées par des *diagrammes de bifurcations* qui révèlent des cascades de doublements de période. Le chaos est mis en évidence numériquement par des *sections de Poincaré* des *attracteurs étranges*.

Cette étude de la dynamique des boussoles se termine par quelques comportements observés et mesurés pour une ligne de dix boussoles en interaction. Un scénario nouveau se dessine alors: *l'intermittence*. Les perspectives d'une étude plus détaillée sur cette ligne sont alors tracées. Elle revêt un caractère majeur pour l'étude du chaos spatio-temporel dans les réseaux de boussoles puisque, comme nous allons le constater au cours de ce mémoire, la notion de lignes est primordiale dans ces réseaux et doit donc en régir les comportements dynamiques.



# CHAPITRE I

## Systeme experimental

**A** vant d'aborder ces deux études, nous allons dans ce chapitre présenter les divers réseaux de boussoles que nous avons construits. Puis nous décrirons l'ensemble du montage expérimental dédié à leur étude, des bobines de courant servant à exciter les réseaux, au dispositif de mesure basé sur l'imagerie.

### **I.1 ● Réseaux de boussoles**

Les réseaux de boussoles sont montés sur des plaques de "plexiglass" de  $30 \times 30 \text{ cm}^2$  sur lesquelles sont implantés des pivots non magnétiques en position verticale. Chacun des pivots a du être retouché manuellement afin de limiter au maximum la dissipation d'énergie par frottements secs (contact pivot-boussole).

Les boussoles, de longueur  $10 \text{ mm}$ , possèdent un petit chapeau dans lequel vient se positionner le pivot. Elles se trouvent ainsi à  $11 \text{ mm}$  au dessus des nappes de courant. Les dimensions sont indiquées sur la figure I.1.

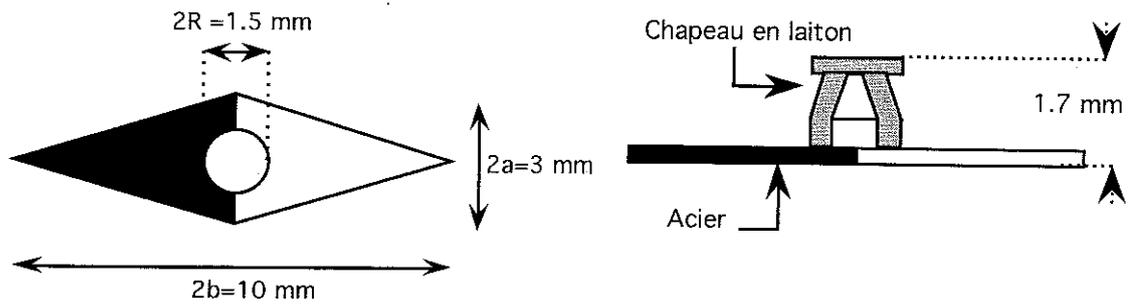


Fig. I.1

Représentation schématique des boussoles

Trois symétries ont été réalisées: des réseaux de symétrie carré ( $22 \times 22$  boussoles) et triangulaire (23 lignes de 21 et 22 boussoles alternativement) et un "réseau quasicristal" (200 boussoles). Le paramètre de maille est de  $12 \text{ mm}$  pour les réseaux carrés et triangulaires. A partir du réseau triangulaire, on peut en enlevant certaines boussoles disposer de réseaux hexagonal et Kagomé. Le "réseau quasicristal" a été élaboré à partir du pavage de Penrose à deux dimensions. La structure de ce pavage, formé de losanges de deux tailles différentes, est représentée sur la figure I.2. Des pivots ont été placés au centre de chaque losange. L'échelle du pavage a été choisie de telle sorte que la plus petite distance entre deux centres de losanges soit de  $12 \text{ mm}$ .

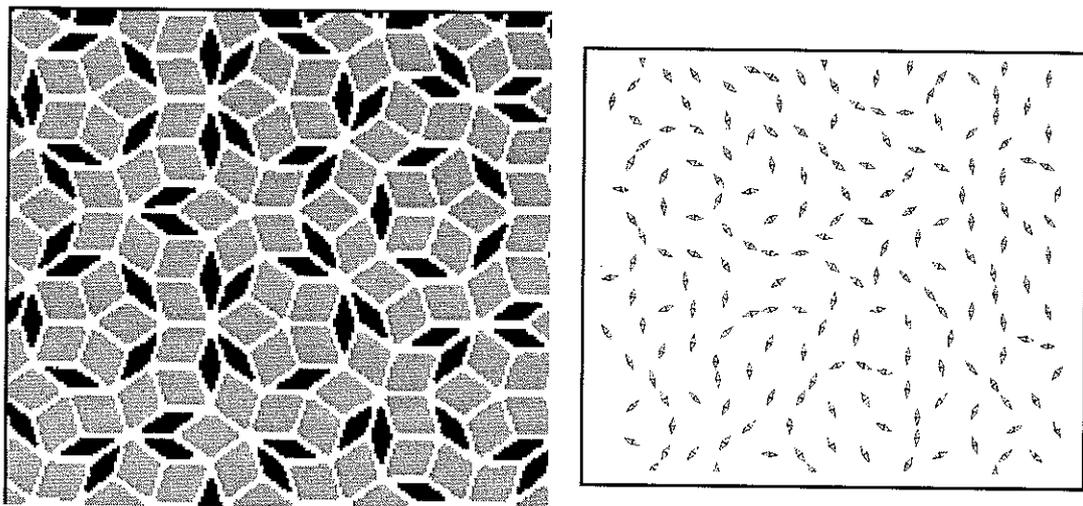


Fig. I.2:

Pavage de Penrose et système de boussoles associé  
(schéma tiré de la thèse de M. Portes de Albuquerque [Por. 95])

Une étude très intéressante peut être menée sur cet échantillon qui est l'un des rares "quasicristaux magnétiques". Un problème est d'en définir les paramètres pertinents pour le caractériser [Mar. 94].

## I.2 ● Montage expérimental

Le montage expérimental dédié à l'étude des réseaux de boussoles est représenté sur la figure I.3.

Les réseaux de boussoles sont placés sur deux bobines perpendiculaires, "plates" dans leur partie supérieure, constituant ainsi deux nappes de courant. Ces bobines, alimentées indépendamment par deux sources de courant, délivrent un champ qui excite les boussoles. Les courants générés par les alimentations sont pilotés par un PC. Les mouvements des boussoles sont filmés par une caméra CCD dont les images sont ensuite traitées sur *Macintosh* via une carte d'acquisition et le logiciel *N.I.H Image*.

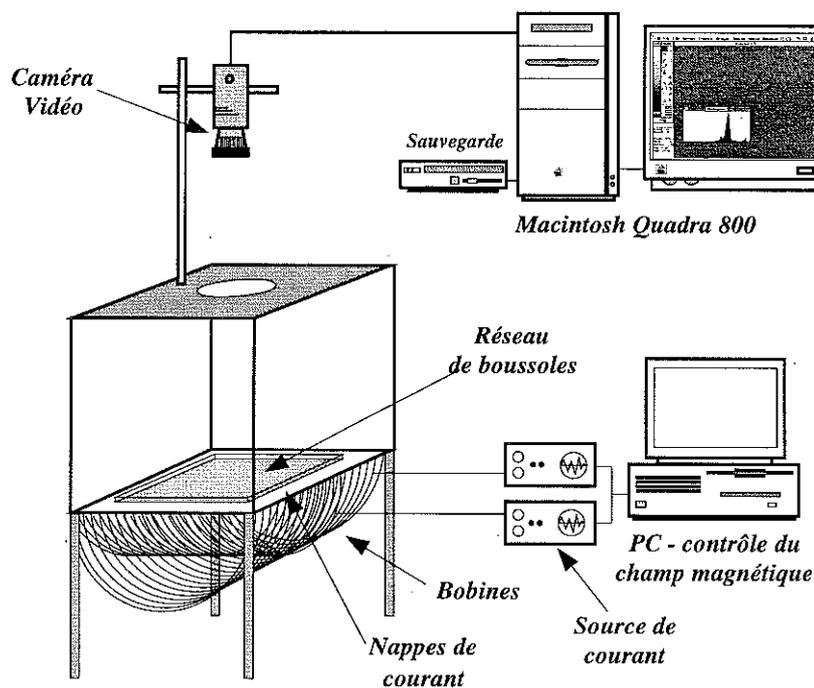


Fig. I.3:

Montage expérimental (schéma tiré de la thèse de M. Portes de Albuquerque [Por. 95])

### ***1.2.1 Bobines de courant***

Il nous fallait réaliser des bobines délivrant un champ uniforme sur une surface de  $30 \times 30 \text{ cm}^2$  (dimension des réseaux).

Les bobines de Helmholtz intéressantes pour l'uniformité du champ délivré ont été abandonnées en raison de leur taille trop imposante. Quatre bobines en position de Helmholtz deux à deux étaient nécessaires pour appliquer un champ dans le plan. La longueur de fil de cuivre à utiliser était alors de l'ordre de  $1700 \text{ m}$ .

Une manière de réduire cette longueur de fil tout en gardant une très bonne homogénéité de champ fut de construire deux nappes planes de courant posées l'une sur l'autre et bobinées dans deux directions perpendiculaires, ce qui permet d'appliquer un champ dans toutes les directions du plan.

Le fil utilisé est de diamètre  $0.6 \text{ mm}$  ce qui donne pour le bobinage en spires jointives  $10/0.6$  spires par centimètre c'est-à-dire  $500$  spires sur la longueur de l'échantillon, chaque spire ayant environ une longueur de  $1 \text{ m}$  (les fils du bas de la bobine ont été éloignés pour que le champ qu'ils créent perturbe le moins possible celui créé par la nappe). Grâce aux nappes de courant, nous n'utilisons qu'une longueur de fil de cuivre de l'ordre de  $1000 \text{ m}$ . D'autre part cette géométrie de nappes permet une meilleure dissipation de l'énergie Joule et évite ainsi tout échauffement de celles-ci.

La résistance de chacune des bobines est de l'ordre de  $30 \Omega$ .

Nous avons placé entre les réseaux et les bobines une tôle douce dont le but est d'écranter (canalisation des lignes de champ) les composantes horizontales des champs créés par la partie inférieure des bobines et par le champ terrestre. On compense enfin les champs résiduels dans le plan, par l'application d'un petit champ. Il suffit alors de vérifier avec une boussole que l'on a effectivement annulé ces champs résiduels.

Le champ maximal que l'on peut créer avec ce dispositif expérimental est de l'ordre de  $10 \text{ Oe}$ . Ces champs, très faibles, suffisent à exciter les réseaux et sont dans la gamme du champ coercitif du système ( $H_c \approx 1 \text{ Oe}$ ).

Un programme de gestion des champs a été écrit sur le PC qui pilote les alimentations de courant. Nous pouvons donc aisément appliquer des champs fixes dans toutes les directions, des champs alternatifs ou tournants et des cycles de champ.

Pour simuler des effets de température sur ces réseaux, nous générons un champ aléatoire en direction, et aléatoire en amplitude entre  $0$  et une valeur maximale définissant la température. La fréquence de changement de ce champ a été choisie de manière à engendrer des effets de désordre dans les réseaux; elle ne peut être ni trop

faible, ni trop élevée, pour que les boussoles y soient sensibles. Un inconvénient que l'on peut reprocher à ce champ aléatoire est son uniformité dans l'espace à chaque instant. Mais il était difficilement envisageable de déposer une spire de courant en dessous de chaque boussole avec des courants générés par autant d'alimentations indépendantes. Il semble néanmoins que la température telle qu'on la simule dans nos expériences traduit bien les effets de température (cf. étude thermodynamique du chapitre II). Dans la suite de ce manuscrit, lorsque nous parlerons de température pour les expériences, il s'agira bien entendu de l'amplitude définie par ce champ aléatoire qui génère des effets de température.

### ***1.2.2 Traitement d'images***

Depuis quelques années, le traitement d'images est très utilisé dans de nombreux domaines scientifiques pour améliorer l'observation de phénomènes. Les perfectionnements de cette technique ont permis de l'utiliser comme outil de mesure. C'est bien évidemment l'outil naturellement adapté à l'étude de ces réseaux de boussoles. Il permet la mesure précise des angles des boussoles. Il est par contre inadapté à la mesure des vitesses.

L'essentiel du travail de programmation qui rend les mesures possibles a été effectué par Marcio Portes de Albuquerque [Por. 95] et Olivier Martinet [Mar. 94]. Nous allons juste ici décrire succinctement les étapes qui permettent ces mesures d'angles.

Une mesure précise requiert une image de bonne qualité c'est-à-dire une image présentant un contraste suffisant. Celui-ci est obtenu grâce à de bonnes conditions d'éclairement que l'on réalise avec quatre spots disposés autour du bâti et dont la lumière est rendue uniforme au passage de plaques de plastique dépoli. D'autre part, les pôles des boussoles se distinguent par deux couleurs différentes (bleu et blanc) permettant ainsi d'obtenir une image en niveaux de gris de fort contraste. Enfin, les réseaux sont placés sur une feuille de couleur intermédiaire. L'image résultante possède donc essentiellement trois niveaux de gris bien distincts.

La caméra CCD est reliée à un boîtier de contrôle permettant de régler d'éventuelles inhomogénéités d'éclairement et d'ajuster le gain et le niveau de référence. La capture des images est réalisée sur 256 niveaux de gris par une carte d'acquisition intégrée au Macintosh. Celles-ci sont visualisées et analysées grâce au logiciel NIH-Image ([NIH 94]), logiciel performant et très maniable. Il nous permet de stocker en mémoire vive 1024 images. La carte d'acquisition permet pour une taille d'images de l'ordre de  $500 \times 500$  pixels d'obtenir une image toutes les 0,12 s.

C'est cette taille d'image qui est utilisée pour les expériences sur les réseaux (cf. chapitre II). Pour celles-ci, on analyse et sauvegarde une image tout de suite après son acquisition avant de passer à la suivante. Le temps nécessaire pour ces opérations est de quatre secondes, qui représente donc la "fréquence" d'échantillonnage des expériences sur les réseaux soumis à des effets de température.

Par contre, pour les expériences de dynamique sur quelques boussoles (cf. chapitre III), nous voulions une fréquence d'échantillonnage aussi rapide que possible afin de reconstruire au mieux la dynamique de deux et dix boussoles en interaction. Dans ce dernier cas, la taille des images est de  $500 \times 70$  pixels (zoom de la caméra différent de celui pour les expériences sur les réseaux). La durée entre deux acquisitions est alors de  $0.06$  s. Nous verrons que de telles fréquences d'acquisitions ( $16.67$  Hz) sont suffisantes pour analyser les fréquences des mouvements ( $< 6$  Hz). Les 1024 images (ou 512 selon les expériences) stockées en mémoire vive, sont ensuite analysées. Le nombre d'images dans ces expériences est une puissance de deux afin de pouvoir utiliser une routine FFT ("Fast Fourier Transform" [Pre. 86]).

Le principe d'analyse des angles des boussoles repose d'abord sur la détermination de la position des centres des boussoles. Il faut pour cela tenir compte des déformations spatiales (essentiellement liées à la carte d'acquisition, [Por. 95]), du zoom de l'objectif et du décalage angulaire du réseau par rapport à l'image. Ensuite, à partir de ces positions, on trace un cercle (de rayon ajustable suivant le zoom et les vitesses des boussoles) qui intersecte la boussole. On recherche alors parmi les pixels intersectés par le cercle, les deux points qui ont les intensités extrêmes, qui correspondent donc en niveaux de gris à un point noir (pôle bleu de la boussole) et à un point blanc (pôle blanc) puisque le fond de l'image a un niveau de gris intermédiaire. On trace alors une droite joignant ces deux points et l'on obtient ainsi l'angle de la boussole. Un exemple de configuration reconstruite à partir des angles analysés par cette méthode, est montré sur la figure I.4.

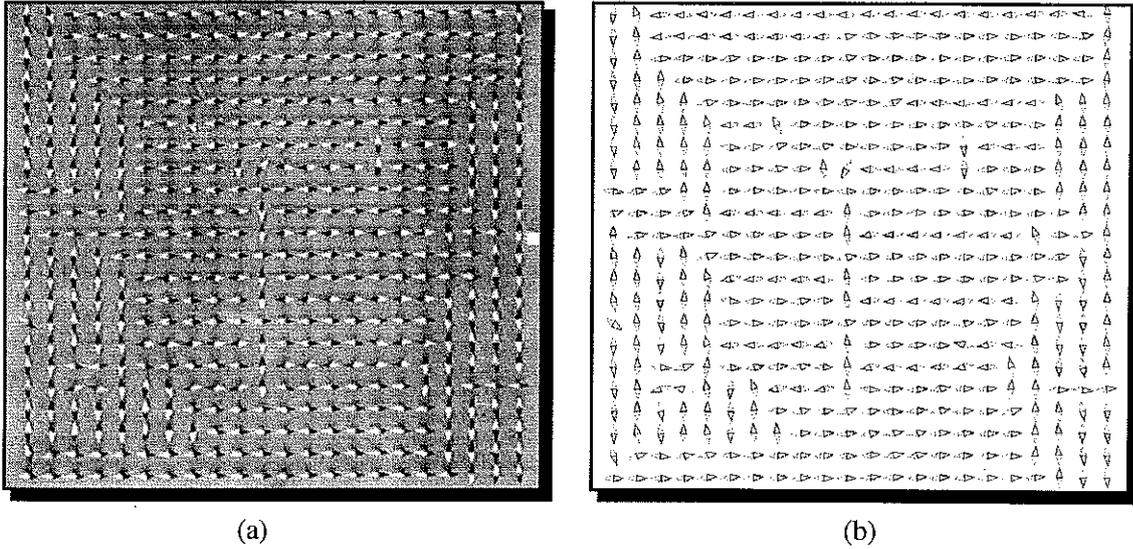


Fig. 1.4:

Reconstruction d'une image à partir des angles analysés  
a) image originale; b) image reconstruite  
(schéma tiré de la thèse de M. Portes de Albuquerque [Por. 95])



## CHAPITRE II

# Etude thermodynamique des réseaux de boussoles

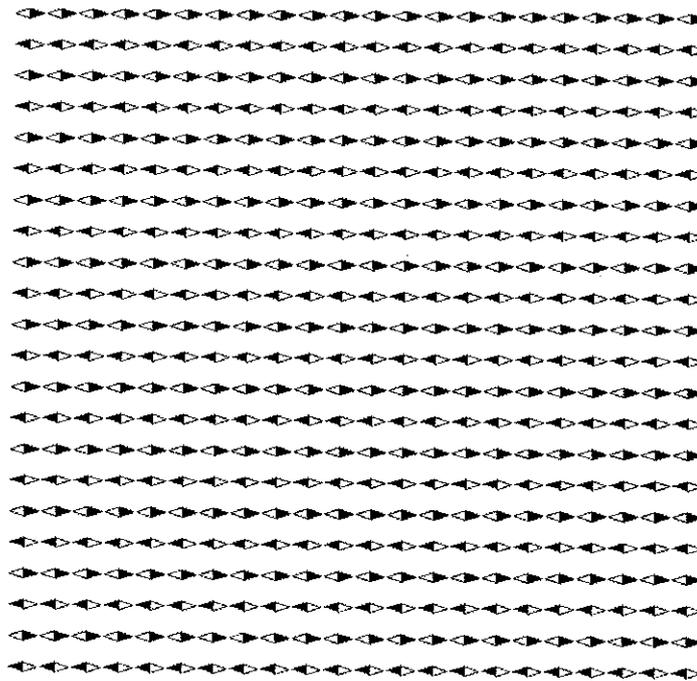
**N**ous commençons ce chapitre par une description des états observés à température nulle et à champ nul. Celle-ci nous permettra de dégager une caractéristique essentielle de ces réseaux de boussoles. Puis nous comparerons ces états à ceux d'un système dipolaire afin de conclure sur les effets des termes multipolaires présents dans l'interaction entre boussoles. Suite à ces conclusions, nous décrirons les ingrédients mis dans la simulation numérique afin de reproduire les comportements de ces réseaux. Nous détaillerons ensuite un modèle simple permettant de décrire les états observés. Enfin, nous appliquerons les concepts de la thermodynamique à l'équilibre à ce modèle simple, afin de caractériser les comportements thermiques de ces réseaux. Cette étude ne concernera que le réseau carré.

## II.1 ● Comportements à champ nul et température nulle

Les premières observations expérimentales du réseau carré de boussoles montrent l'existence de trois types d'états qui sont stables en champ nul et température nulle.

### II.1.1 - Configurations en lignes antiparallèles (Fig. II.1)

Nous verrons plus loin que cette configuration est celle de plus basse énergie. Le système tend donc à relaxer vers cet état fondamental en champ et température nuls.



*Fig. II.1*  
*Configuration en lignes antiparallèles.*

Pour observer cet état en lignes antiparallèles, il faut créer des conditions (de température notamment puisque l'application d'un champ magnétique ne peut engendrer cet état) qui permettent d'amener lentement le système vers cet état. Une manière est de partir d'un état désordonné et de faire décroître très lentement la

température. Lorsque l'on réalise ces conditions on s'aperçoit qu'en plusieurs endroits du réseau des lignes se forment dans cette configuration antiparallèle mais le système se trouve confronté à une situation d'incohérence entre ces divers endroits qui se traduit par des problèmes de raccordement de ces parties. Donc localement le système arrive à trouver cette configuration mais globalement sur tout le réseau il en est incapable.

Nous allons voir que les chemins menant à cette configuration sont rendus inaccessibles par les barrières d'énergie que rencontre le point représentatif du système dans l'espace des phases, définissant ainsi des états métastables.

Le seul moyen d'arriver à stabiliser cet état est de le construire "manuellement". Nous pouvons pour cela construire une à une les lignes en déposant successivement les boussoles sur les pivots. Une fois obtenue cette configuration, nous pouvons vérifier sa stabilité vis à vis de perturbations. Si ces dernières sont localisées sur les bords des lignes, alors le système adopte une configuration nouvelle sur une échelle de quelques boussoles sans que cela ne déstabilise le reste du réseau.

### II.1.2 - Configurations en lignes parallèles (fig. II.2)

Toutes les boussoles sont alignées dans la même direction. On pourrait l'appeler configuration de type ferromagnétique

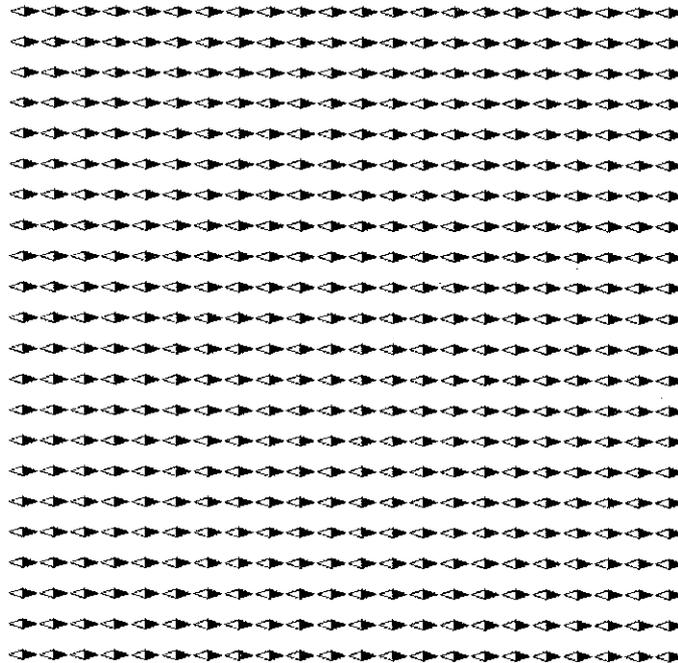


Fig. II.2  
Configuration en lignes parallèles.

Cet état est également très stable bien qu'il ne soit pas l'état d'équilibre du système. A la différence de ce dernier, il s'obtient très facilement en appliquant un champ d'amplitude suffisamment forte suivant l'une des quatre directions du réseau carré (quelque soit l'état de départ) puis en revenant ensuite en champ nul. Le système reste alors dans cette configuration très stable puisque le champ démagnétisant (négligeable) ne parvient pas à perturber cette situation très ordonnée.

### II.1.3 - Configurations en "domaines" (fig. II.3)

Il s'agit de configurations définissant une multitude d'états métastables, dans lesquelles deux, trois ou quatre directions du réseau carré sont représentées (c'est-à-dire qu'il existe des boussoles orientées dans ces directions).

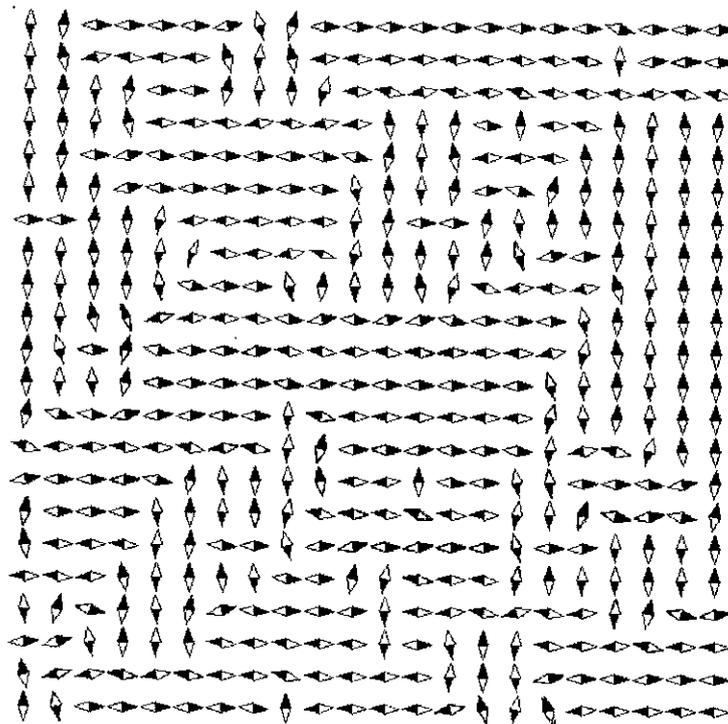


Fig. II.3  
Configuration en "domaines".

Pour obtenir cet état, on peut faire l'analogie d'une trempe qui consiste à chauffer l'échantillon pour le désordonner et à le refroidir brutalement. On rend donc le système paramagnétique, grâce au champ aléatoire qui simule la température, puis on

coupe brutalement celui-ci. Les boussoles finissent alors par se piéger dans l'une des quatre directions d'anisotropie. L'état final, d'aimantation statistiquement nulle, est une configuration en petits "domaines". Nous appelons "domaine" une partie du réseau où les boussoles forment des lignes parallèles ou antiparallèles dans une direction donnée. Nous justifierons plus loin cette dénomination. Avec cette expérience de trempe, on obtient des domaines de taille minimale, imposée entre autres par les temps caractéristiques associés à la dissipation. Cette taille de domaine augmente quand la vitesse de refroidissement décroît.

Une des conclusions importantes de ces premières observations du réseau carré est donc la mise en évidence des quatre directions d'anisotropie correspondant aux directions cristallographiques du réseau carré. En saturant l'échantillon avec un champ dans une direction autre que les quatre directions du carré puis en revenant en champ nul, chacune des boussoles relaxe vers l'une de ces directions. Si par exemple on sature l'échantillon dans la direction  $45^\circ$  alors en revenant en champ nul nous aurons statistiquement autant de boussoles qui relaxent vers la direction  $0$  que vers la direction  $90^\circ$ . Ces directions d'anisotropie sont autant de pièges pour le système. La multitude d'états métastables ainsi générée suggère une analogie avec les systèmes de type "verres de spin". Ces réseaux de boussoles semblent donc constituer un système original pour une telle étude.

Une deuxième analogie frappante réside dans les comportements des réseaux lors du retournement d'aimantation. En effet, si grâce à l'application d'un champ on aligne toutes les boussoles dans l'une des quatre directions du réseau carré, alors en revenant en champ nul le système restera dans cette configuration d'aimantation maximale, se comportant ainsi comme un aimant. Si l'on applique maintenant un champ opposé à cette aimantation, on observera le retournement de l'aimantation par deux processus: nucléation de domaine inverse en un ou plusieurs points fragiles du système (bords), suivie d'une avalanche qui se propage dans tout le système sous forme d'un front d'onde, définissant ainsi un cycle d'hystérésis carré (champ de retournement égal au champ coercitif). Une étude originale peut donc être menée sur ces systèmes pour comprendre l'influence des interactions dipolaires dans les phénomènes de retournement d'aimantation dans les aimants. Dans cette analogie, les boussoles

représentent les grains dans un matériau dur et c'est l'effet des interactions dipolaires entre grains qui peut être modélisée.

Les comportements des réseaux de boussoles décrits dans ce paragraphe permettent de mieux appréhender ces systèmes. Ils ouvrent un champ d'investigations très large. Nous avons en effet évoqué au travers de deux analogies, deux exemples parmi la grande richesse d'études de ces systèmes.

Nous allons dans la suite de ce chapitre nous intéresser aux comportements des réseaux sous des effets de température. Nous les analyserons par un modèle simple dans le cadre de la thermodynamique des systèmes à l'équilibre.

## II.2 ● Systèmes dipolaires et réseaux de boussoles

### II.2.1- Interactions dipolaires

#### II.2.1.1 - Energie d'interaction dipolaire

L'interaction entre les boussoles est décrite par l'interaction dipolaire entre dipôles de moments magnétiques  $\vec{\mu}_i$ . L'Hamiltonien décrivant les interactions d'une collection de dipôles situés dans des positions  $\vec{r}_i$  s'écrit comme la somme des interactions de paires sommées sur tous les dipôles:

$$H_{dip} = \sum_i \sum_{j, j>i} \frac{1}{r_{ij}^3} \left[ \vec{\mu}_i \cdot \vec{\mu}_j - \frac{3}{r_{ij}^2} (\vec{\mu}_i \cdot \vec{r}_{ij})(\vec{\mu}_j \cdot \vec{r}_{ij}) \right] \quad (\text{II.1})$$

$$\text{où } \vec{r}_{i,j} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$$

Une des particularités de l'interaction dipolaire est son caractère longue portée. Cette dénomination est utilisée pour décrire la décroissance lente de l'interaction en

puissance de  $r$  comparée à celle plus rapide de l'interaction d'échange (généralement en exponentielle).

On remarque d'autre part le caractère anisotrope de cette interaction qui en plus de l'orientation relative des dipôles (terme isotrope en  $\vec{\mu}_i \cdot \vec{\mu}_j$ ) dépend de leur orientation par rapport au vecteur  $\vec{r}_{i,j}$  (terme anisotrope en  $(\vec{\mu}_i \cdot \vec{r}_{i,j})(\vec{\mu}_j \cdot \vec{r}_{i,j})$ ). Nous devons néanmoins noter (pour des dipôles sur réseaux) que cette anisotropie de l'interaction n'exclut pourtant pas une invariance par rotation continue de l'état fondamental et ce même pour les symétries triangulaires et hexagonales. Ce point sera développé dans le paragraphe suivant.

La minimisation de l'énergie d'interaction dipolaire devant satisfaire à deux aspects qui sont orientation relative des dipôles et orientation par rapport à  $\vec{r}_{i,j}$ , la formation de lignes de dipôles est donc favorisée. Pour un système de taille finie à une dimension on peut construire un état satisfaisant à toutes les énergies de paires. Par contre à deux et trois dimensions ceci est évidemment rendu impossible puisqu'un dipôle ne peut s'aligner simultanément dans plusieurs directions de l'espace. On aboutit donc aisément à un concept proche de la frustration qu'induit l'interaction dipolaire à deux ou trois dimensions et ce quelle que soit la symétrie du réseau considéré, contrairement à l'interaction d'échange antiferromagnétique dont la frustration ne dépend que de la symétrie du système et pas de sa dimension (pour une interaction entre premiers voisins).

### **II.2.1.2 - Etat fondamental**

#### *a) Système infini*

Les principes de recherche de l'état fondamental d'un système avec des interactions dipolaires furent développés par Luttinger et Tisza [Lut. 46] pour les réseaux cubiques (3D) de taille infinie. Pour le réseau carré (2D) infini de dipôles, cette même méthode fut utilisée par Belobrov [Bel. 84]. Une méthode analytique de minimisation fut développée dans l'espace de Fourier par Rozenbaum [Roz. 84].

L'état de plus basse énergie du réseau carré (2D) est composé de deux sous-réseaux antiferromagnétiques. La maille magnétique est donc quadruple de la maille cristallographique et est définie par les quatre sites numérotés de un à quatre sur la figure II.4.a.

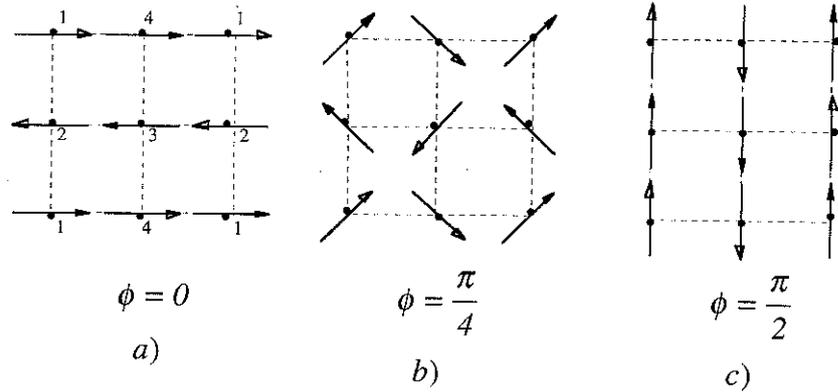


Fig. II.4 a,b,c

*Dégénérescence de l'état fondamental du réseau carré.*

Une rotation des sites de chacun des deux sous réseaux (définis par les sites pairs et impairs) d'un même angle  $\phi$  quelconque, mais dans des directions opposées, ne change pas l'énergie totale dipolaire (figure II.4.b, c).

L'état fondamental du réseau carré de dipôles est donc continûment dégénéré. Notons que ceci reste également vrai si l'on considère une interaction limitée aux premiers voisins. Cette dégénérescence continue, bien que surprenante si l'on se réfère au caractère anisotrope de l'interaction, est vraie pour les réseaux de symétrie supérieure (triangulaire et hexagonale)

### *b) Système fini*

Les effets de bords sur le système fini ne modifient pas cette dégénérescence continue des états définis ci-dessus. Mais ces états ne sont alors plus les états de plus basse énergie. En effet l'état fondamental est alors une configuration où les quatre bords forment une "ligne" fermée le long du périmètre, les dipôles dans ces "lignes" s'écartant légèrement des axes du réseau. Plus on se rapproche de la partie centrale du réseau, plus les dipôles se mettent en configuration de microvortex telle que  $\phi = \frac{\pi}{4}$  (cf. fig. II.5).

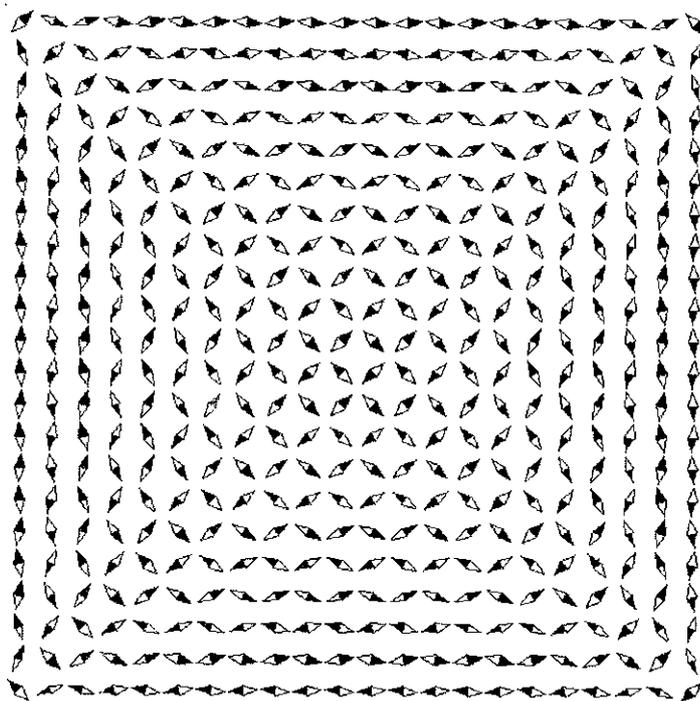


Fig. II.5

Etat fondamental d'un réseau fini de dipôles en interaction purement dipolaire.

### II.2.2 - Cas des réseaux de boussoles: termes multipolaires

Le terme d'interaction dipolaire est bien entendu insuffisant pour modéliser correctement l'interaction entre les boussoles. En effet les distances séparant ces dernières ( $a = 1.2 \text{ cm}$  dans le réseau carré) ne peuvent être considérées comme grandes devant leur taille ( $l = 1 \text{ cm}$ ). Il convient donc de prendre en compte des termes d'ordre supérieur.

Leur effet principal est de renforcer le caractère anisotrope de l'interaction dipolaire. En effet, à champ appliqué nul et température nulle, toutes les configurations que l'on obtient avec les réseaux de boussoles sont caractérisées par des lignes très franches c'est-à-dire que chacune des boussoles (sauf les bords et quelques boussoles en bout de ligne) est alignée avec l'un des axes cristallographiques du réseau. Cette situation est alors différente de celle que l'on obtiendrait en ne considérant que le terme dipolaire (cf. figure II.5).

Cet effet d'anisotropie des termes d'ordre supérieur est notamment montré par Klymenko [Kly. 93] mais dans un but légèrement différent sur lequel nous reviendrons

plus tard. Signalons juste pour le moment que cette référence montre que ces termes brisent l'invariance par rotation de l'état fondamental (système infini) en sélectionnant les quatre directions du carré montrant ainsi leur effet d'anisotropie. Cet effet ressort également du travail d'Erber [Erb. 67].

Cette anisotropie présente dans les réseaux de boussoles a donc deux conséquences.

En supposant une taille infinie pour notre réseau, l'effet d'anisotropie induit par les termes multipolaires lèverait la dégénérescence de l'état fondamental en sélectionnant les directions cristallographiques. On aboutirait alors à un état fondamental dégénéré quatre fois. Nous verrons plus loin la conséquence fondamentale qu'entraîne cette levée de dégénérescence sur la notion d'ordre à longue distance.

La deuxième conséquence de cette anisotropie est l'existence d'une multitude d'états métastables qui représentent des pièges pour le système. Ces derniers empêchent le système d'atteindre à basse température ses états d'équilibre. On pourrait donc s'attendre à des comportements analogues aux systèmes "verres de spin", mettant en évidence une température de gel.

### **II.3 ● Simulation numérique des réseaux de boussoles**

Nous avons vu, à travers diverses analogies, que ces réseaux de boussoles sont une simulation analogique de systèmes réels. La comparaison avec une simulation numérique, qui reproduit les comportements sous champ et température des réseaux, permet de comprendre les rôles respectifs des termes dipolaires et multipolaires. Outre cet aspect simulation numérique, le modèle numérique autorise les calculs de quantités telles que l'énergie dipolaire de configurations expérimentales.

### II.3.1 - Hamiltonien considéré

L'Hamiltonien contient le terme dipolaire décrit par l'équation (II.1). Nous avons choisi dans nos simulations de prendre en compte tous les voisins pour les calculs d'énergie. L'interaction dipolaire est à longue portée et la prise en compte de douze voisins mène pour l'état de type ferromagnétique à une énergie qui diffère de 1% de celle calculée avec tous les voisins. Ce nombre assez important de voisins à prendre en compte, pour obtenir une énergie à 1% près, ne justifie donc pas une coupure dans la portée de l'interaction si l'on veut simuler le réseau expérimental  $22 \times 22$ . On peut noter que pour la configuration de type antiferromagnétique, il faut tenir compte de cinq voisins pour obtenir une énergie à 1% près. Dans ce cas, en fonction du nombre de voisins, on observe une énergie oscillante.

Comme nous l'avons signalé, nous devons introduire des termes d'ordre supérieur au dipolaire. Pour éviter d'alourdir les calculs nous avons choisi de ne pas les écrire explicitement mais de les modéliser par un terme plus simple rendant compte de leurs effets d'anisotropie. Ce terme supplémentaire est écrit:

$$H_{ani} = k \sum_i \mu_i^2 \sin^2 2\theta_i$$

Cette expression traduit bien les quatre directions privilégiées correspondant aux premiers voisins. La présence de la constante réelle  $k$  nous permet d'ajuster l'intensité de ce terme d'anisotropie afin que cela traduise bien l'effet des termes multipolaires observé dans le réseau de boussoles.

Nous allons maintenant introduire deux procédures de relaxation qui permettent numériquement de laisser évoluer le système. Toutes les simulations sont écrites avec des bords libres afin de pouvoir être comparées à l'expérience.

La première, dans une démarche quasi-statique, cherche à reproduire les comportements du système à température nulle.

La deuxième, plus classique, est une méthode de Monte Carlo basée sur l'algorithme de Metropolis qui permet au système d'évoluer vers son état d'équilibre à une température donnée.

### II.3.2 - Procédure quasi-statique

L'idée de cette routine est de chercher à chaque instant la boussole la plus "fragile" du système et de la faire tourner. Dans cette procédure de relaxation on considère que chaque boussole peut tourner indépendamment des autres pendant un instant très court c'est-à-dire qu'elle peut tourner d'un petit angle sans que les autres sites voient cette rotation.

On peut donc pour chaque site se représenter le paysage local d'énergie vu par ce site en considérant toutes les autres boussoles comme figées dans leur position. La boussole du site  $i$  est soumise à un couple :

$$|\vec{\Gamma}_i| = \frac{\partial}{\partial \theta_i} (E_{dip} + E_{ani} + E_{champ})$$

où l'énergie totale est la somme de l'énergie dipolaire, de l'énergie d'anisotropie et de l'énergie des boussoles dans un champ extérieur.

La boussole considérée comme la plus fragile est celle qui subit le couple  $\frac{\partial E}{\partial \theta_i}$  le plus intense ; il s'agit donc de chercher la dérivée maximale.

Cette routine de relaxation calcule donc toutes les dérivées partielles de l'énergie totale par rapport aux angles des boussoles et cherche la dérivée maximale; on fait alors tourner la boussole correspondante d'un petit angle proportionnel à la dérivée et dans le sens de la pente (c'est-à-dire dans la direction du minimum local). Une fois cette rotation effectuée, on recalcule toutes les dérivées et ainsi de suite.

Cette routine de relaxation montre un comportement très réaliste dans le sens où elle reproduit bien les effets de nucléation (les premières boussoles à tourner étant généralement les coins) et d'avalanche puisque quand une boussole a tourné ce sont ses voisins qui correspondent aux dérivées maximales et donc que l'on fait tourner à leur tour.

Cette procédure quasi-statique nous permet de fixer un ordre de grandeur pour la constante  $k$  du terme d'anisotropie introduit au paragraphe précédent pour représenter les effets des termes multipolaires. Nous avons choisi une valeur  $\frac{k}{\mu^2 r^3} = 1$ , qui permet à cette procédure quasi-statique de reproduire qualitativement les effets de retournement de l'aimantation sous un champ inverse observés expérimentalement.

Notons que cette procédure ouvre un champ d'étude assez large en simulation des comportements de réseaux dipolaires sous l'effet de champs magnétiques. Citons entre autres l'étude de cycles d'hystérésis (dans les directions de facile et difficile aimantation) et des champs coercitifs, ainsi que l'action du champ dipolaire dans les processus de retournement de l'aimantation.

### II.3.3 - Routine Monte Carlo

L'algorithme utilisé est celui de Metropolis qui permet de trouver l'état d'équilibre du système à une température  $T$ . Nous ne souhaitons pas rentrer dans les détails de cet algorithme classique (pour une revue détaillée, voir par exemple [Bin 76]).

Rappelons juste brièvement qu'elle permet de faire tourner, dans le cas où cela améliore l'énergie totale du système, une boussole tirée au hasard d'un angle lui aussi tiré au hasard.

Dans le cas où cette nouvelle position n'améliore pas l'énergie, la rotation est acceptée avec une probabilité en  $e^{-\Delta E/kT}$ , où  $\Delta E = E(\theta_{final}) - E(\theta_{initial}) > 0$ .

L'unité de temps, notée MCS ("Monte Carlo Step"), est définie comme  $N^2$  tirages aléatoires ( $N^2$  étant le nombre de dipôles simulés).

Les quantités thermodynamiques sont calculées après avoir laissé les transitoires pour ne considérer que des valeurs à l'équilibre.

Plusieurs tailles de réseau carré  $N \times N$  ont été simulées. Chronologiquement, la première des tailles étudiées n'était pourtant pas un réseau carré  $N \times N$ , mais un réseau carré de taille  $21 \times 18$ . Ce choix de taille (peu habituel) correspondait à l'origine à une contrainte expérimentale. En effet, l'image issue du signal vidéo n'étant pas carrée, nous devions pour filmer l'intégralité du réseau  $22 \times 22$  éloigner la caméra et donc perdre en résolution. La taille maximale autorisée par la résolution était alors  $21 \times 18$ . Ultérieurement, un nouvel objectif de caméra nous a permis d'analyser l'intégralité du réseau  $22 \times 22$ .

Nous verrons dans les résultats numériques que cette taille est en fait intéressante à étudier pour voir les conséquences de cet effet de forme sur les variables caractéristiques de ces réseaux.

Toutes les notions, expériences et résultats qui seront abordés par la suite seront supposés à champ magnétique appliqué nul. Nous allons uniquement nous intéresser aux effets de température sans jamais appliquer de champ.

## **II.4 ● Modèle simple de ces réseaux de boussoles**

Grâce aux outils que l'on a définis, nous allons maintenant voir comment nous pouvons caractériser de manière simple ces réseaux de boussoles.

Nous avons vu que le terme d'interaction dipolaire contenait un terme anisotrope décrivant l'orientation des dipôles par rapport aux vecteurs  $\vec{r}_{ij}$ , donnant ainsi à l'interaction un aspect directionnel. L'existence de quatre directions d'anisotropie renforce cet aspect directionnel et amène de manière naturelle la notion de lignes de boussoles suivant les axes du réseau carré. Ainsi, l'état fondamental n'est plus continûment dégénéré et seules les configurations de lignes antiparallèles sur les axes sont de plus basse énergie (figure II.1).

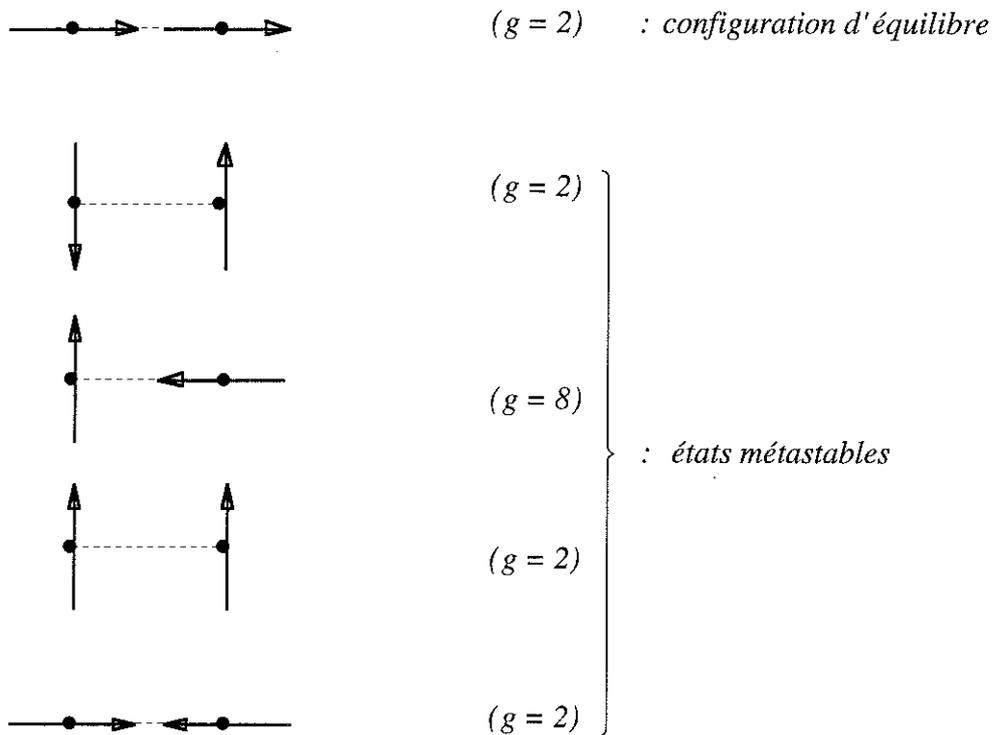
Les configurations de type ferromagnétique, très stables, sont caractérisées par des lignes parallèles (figure II.2) tandis que les configurations en "domaines" (figure II.3) sont caractérisées par des lignes réparties sur les quatre axes.

Ainsi nous voyons que les configurations à température nulle peuvent se décrire en termes de lignes antiparallèles, parallèles, perpendiculaires, voire des demi lignes opposées. De manière équivalente, la description peut se faire en termes d'*interruptions de lignes*. Cette notion nous amène donc à considérer les liaisons du réseau qui interrompent ou non la formation de lignes de boussoles.

Nous allons donc définir les états possibles des liaisons du réseau carré.

### ***II.4.1 - Description des états possibles à température nulle***

Nous allons donc considérer les quatre positions possibles, induites par l'anisotropie, pour chaque boussole. Nous définissons ainsi  $4^2$  états pour deux boussoles voisines, qui sont représentés sur la figure II.6.



**Fig. II.6**  
 Etats possibles de deux boussoles à température nulle.

$g$  est la dégénérescence de chaque état.

Dans tout état métastable observable à température nulle, chacune des liaisons du réseau est dans l'un des seize états décrits ci-dessus (effet d'anisotropie des termes multipolaires).

#### II.4.2 - Notion de "défauts"

L'évolution du système sous champ semble guidée, comme pour un système magnétique traditionnel, par l'aimantation qui caractérise bien l'ordre du système soumis à un champ extérieur.

Cependant la situation en champ nul est différente. L'état en lignes parallèles est parfaitement stable à température nulle et à champ nul montrant ainsi la faible valeur du

champ démagnétisant devant les interactions. Pourtant, l'état fondamental est l'état en lignes antiparallèles. Il ne semble donc pas judicieux de prendre l'aimantation comme paramètre d'ordre représentatif du système en champ nul puisqu'elle nous fait considérer ces deux situations comme très différentes (l'une d'aimantation nulle, l'autre d'aimantation maximale). La situation des lignes parallèles bien que d'énergie supérieure au fondamental est également une situation parfaitement ordonnée. Le critère essentiel pour résoudre les interactions est la formation de lignes, peu importe leur sens. Ces deux configurations, toutes deux parfaitement ordonnées, sont donc deux situations que l'on a envie de caractériser de la même manière ; c'est en ce sens que l'aimantation ne caractérise pas l'ordre et l'évolution du système en champ nul.

Compte tenu de cette tendance à former des lignes, un paramètre s'impose alors clairement: la longueur moyenne des lignes observées, qui doit refléter "l'état d'ordre" de ces réseaux de boussoles.

Nous avons choisi une notion équivalente à cette notion de longueur de lignes qui consiste à compter le nombre d'interruptions de lignes. Les liaisons associées à ces interruptions seront appelées "défaut".

Nous allons définir cette variable à partir des seize états à deux boussoles définis dans le paragraphe précédent.

Une liaison sera *défaut* dans les situations suivantes:



En effet dans ces dix cas ( $g$  est la dégénérescence), la liaison marque l'interruption d'une ligne de boussoles (une ligne du réseau  $N \times N$  est définie par le nombre de boussoles alignées c'est-à-dire que sa longueur est comprise entre 1 et  $N$ ).

Par contre, pour les autres états définis sur la figure II.6, on dira que les liaisons ne sont pas des défauts puisqu'elles n'interrompent pas de lignes.

Pour caractériser un certain état d'ordre du système, il suffit donc de répertorier, sur l'ensemble des  $2N(N-1)$  liaisons du réseau carré  $N \times N$ , le nombre de défauts dans la structure.

Nous souhaitons maintenant revenir brièvement sur la notion de “domaines” que l’on a introduite au paragraphe II.1.3. De la même manière que nous avons redéfini un paramètre qui caractérise un certain état d’ordre du système sans différencier les situations parallèles et antiparallèles (toutes les deux équivalentes du point de vue ordre), nous allons redéfinir la notion de domaines dans le même but. En effet la définition classique des domaines (liés à l’énergie démagnétisante) introduit une différence notable entre ces deux configurations: l’une serait monodomaine, l’autre pas. Compte tenu de cette tendance à former des lignes, il est raisonnable de définir les domaines comme étant les régions où les lignes sont colinéaires qu’elles soient parallèles ou antiparallèles. Ainsi plusieurs valeurs possibles de l’aimantation sont possibles à l’intérieur même des domaines et notamment zéro. Notons que les défauts jouent alors dans une telle structure, le rôle de parois de domaines puisque ces derniers sont séparés entre eux par des lignes fermées de défauts (figure II.7).

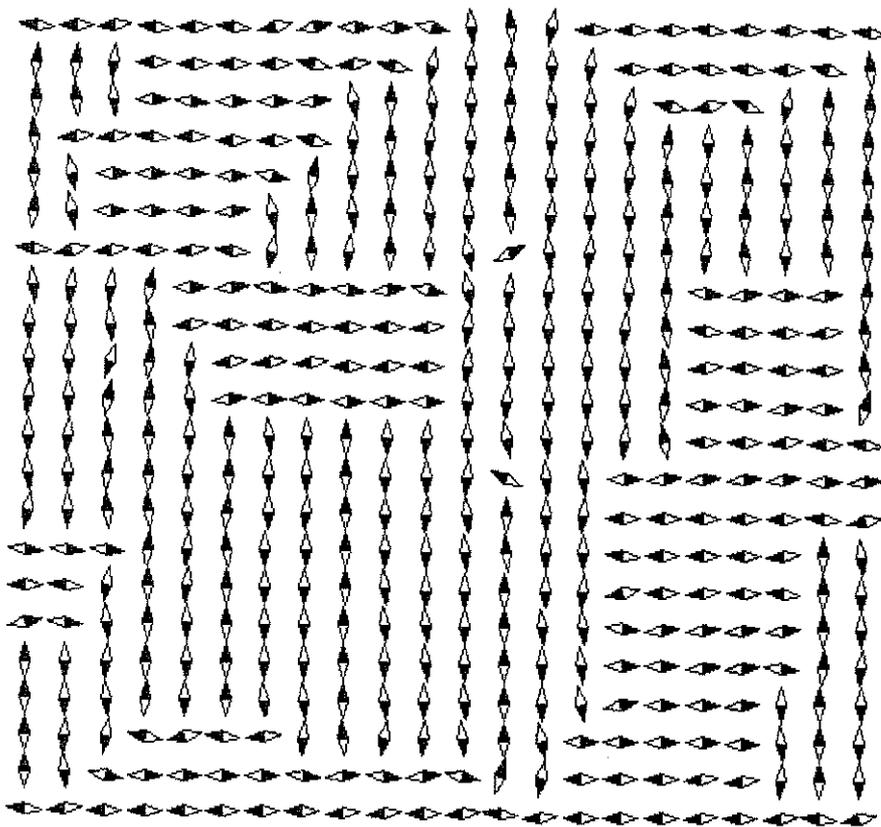


Fig. II.7  
Image reconstruite d’une configuration en “domaines” expérimentale.

## II.5 ● Comportements des réseaux avec de la température

Nous allons nous intéresser maintenant aux comportements de ces réseaux de boussoles sous des effets de température. Nous rappelons qu'expérimentalement les effets de température sont simulés par un champ aléatoire en amplitude et en direction. Nous comparerons les résultats expérimentaux aux résultats issus des simulations numériques Monte Carlo (avec des bords libres) qui décrivent les états d'équilibre du système soumis à une température  $T$ .

Les expériences et les simulations consistent, à partir d'une configuration initiale donnée, à appliquer une température  $T$  sur le système. Les configurations du système sont analysées et sauvegardées lorsque l'équilibre semble atteint. Expérimentalement, la fréquence d'échantillonnage des images est de 0.25 Hz. En effet, ces quatre secondes sont nécessaires à l'analyse et à la sauvegarde des  $22 \times 22$  angles des boussoles. La durée des expériences est de deux heures ce qui donne accès à 1800 configurations du système à une température donnée. En simulation Monte Carlo, la statistique est plus élevée puisque nous générons jusqu'à 200000 configurations et les moyennes sont effectuées sur un nombre de configurations de l'ordre de 20000.

Nous décrirons les résultats dans le cadre de la thermodynamique des systèmes à l'équilibre. Nous verrons alors comment se comporte notre modèle simple dans une telle description. Les résultats que nous présenterons ne concernent que les états d'équilibre du système au delà d'une certaine température. Nous avons en effet déjà signalé que ces réseaux de boussoles contenaient une multitude d'états métastables, d'énergies équivalentes, à température nulle. Ces états sont des pièges pour le système qui n'arrive alors pas à trouver son état d'équilibre. Ce comportement type "verre de spin" reste vrai pour des basses températures. C'est pourquoi nous limitons l'étude thermodynamique du système au dessus d'une certaine température, où les états d'équilibre sont clairement définis et accessibles.

Nous commençons cette étude par des résultats de simulation numérique montrant le comportement de la chaleur spécifique en fonction de la température. Cette étude repose sur les états d'équilibre du système à une température donnée. Pour vérifier que l'équilibre est atteint, nous partons de trois états différents du système (qui sont les trois configurations définies au paragraphe II.1. Dans les trois cas le système finit par

atteindre un état caractérisé par les mêmes valeurs moyennes temporelles et fluctuations autour de ces valeurs moyennes, montrant ainsi l'existence d'un état d'équilibre à cette température. Par la suite nous désignerons par  $\langle A \rangle$  la valeur moyenne de la grandeur  $A$  à une température  $T$  donnée.

### II.5.1 - Chaleur spécifique

La chaleur spécifique est une grandeur thermodynamique définie comme:

$$C_v = \frac{d}{dT} \langle E \rangle$$

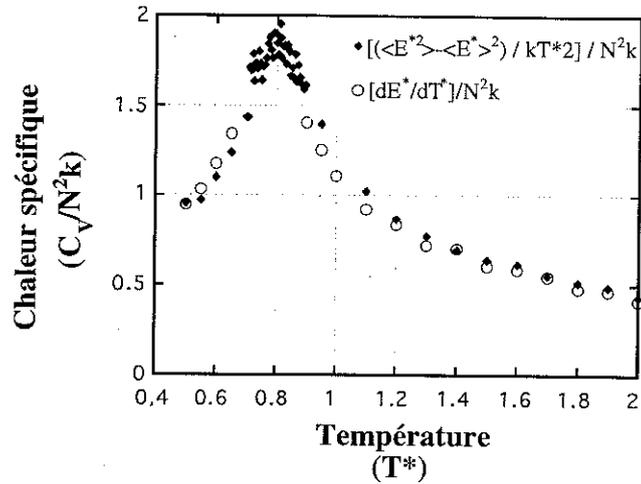
où  $E$  est l'énergie interne du système, et  $T$  la température du thermostat.

Cette quantité thermodynamique peut se calculer à partir des fluctuations de l'énergie interne autour de sa valeur moyenne (théorème de *fluctuation-dissipation*):

$$C_v = \frac{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}{kT^2}$$

Un test de la bonne marche de la simulation peut donc être réalisé en comparant ces deux relations. Sur la figure II.8 sont représentées les chaleurs spécifiques (normalisées par  $N^2k$ ) calculées à partir de ces deux relations pour le réseau  $21 \times 18$ . On constate un très bon accord entre ces courbes pour des températures inférieures à  $T^* = 0.7$  et supérieures à  $T^* = 0.9$ , où  $T^* = \frac{kT}{\mu/r^3}$ . Cet accord montre que nos

moyennes sont bien faites sur des grandeurs à l'équilibre thermodynamique, vérifiant ainsi le théorème de *fluctuation-dissipation*.



**Fig. II.8:**

*Comparaison des chaleurs spécifiques calculées à partir des fluctuations de l'énergie interne et à partir de la dérivée de l'énergie interne (réseau carré  $21 \times 18$ ).*

On note la présence d'un maximum très prononcé sur cette chaleur spécifique, ce qui suggère l'existence d'une transition de phase au passage d'une température critique.

Les calculs de mécanique statistique montrent l'existence de transitions de phase uniquement à la limite thermodynamique c'est-à-dire lorsque le volume et le nombre de particules tendent vers l'infini (avec une densité de particules par unité de volume fixée). C'est seulement dans cette limite que les grandeurs thermodynamiques présentent des singularités à la température de transition. On peut néanmoins sur des systèmes de taille finie pressentir l'existence d'une transition de phase en faisant varier la taille  $N$ . Pour ce qui est des systèmes réels qui sont de taille finie, la notion de limite thermodynamique ne pose pas vraiment de problème compte tenu du nombre de particules mis en jeu. Les quantités thermodynamiques semblent alors réellement présenter des singularités puisque les effets de taille finie (faibles) ne peuvent être décelés par la résolution expérimentale.

Les principaux effets de taille finie que l'on peut citer sont:

- la présence d'un terme de surface dans l'énergie libre du système.
- un "arrondissement" des quantités thermodynamiques à l'approche de la température critique puisqu'il ne peut y avoir divergence.
- un déplacement de la température critique avec la taille du système, la température critique pour une taille donnée étant généralement définie par le maximum de la chaleur spécifique.

Cet effet d'arrondi est très nettement visible sur la figure II.8, pour des températures  $0.7 < T^* < 0.9$ .

C'est pour cette raison que nous n'avons pas représenté les points de  $\frac{1}{N^2 k} \frac{d}{dT^*} \langle E^* \rangle$  dans cette gamme de température puisqu'alors le théorème de *fluctuation-dissipation* n'est plus valable. En effet les effets de taille finie se font alors sentir à l'approche de la température critique traduisant le fait que les longueurs de corrélation du système deviennent du même ordre de grandeur que la taille du système.

Nous allons maintenant voir comment varie la chaleur spécifique avec la taille  $N$  du système. Les courbes sont représentées sur la figure II.9 pour plusieurs tailles du réseau carré. On note que les maxima deviennent de plus en plus "aigus" au fur et à mesure que l'on augmente la taille du système. D'autre part on vérifie le déplacement de la température critique; celle-ci augmente avec la taille du système.

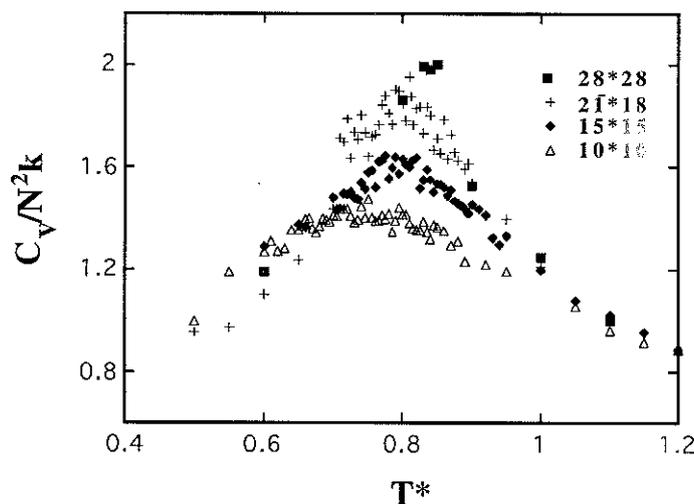


Fig. II.9:

Chaleur spécifique calculée à partir des fluctuations de l'énergie interne, pour diverses tailles du réseau carré ( $10 \times 10$ ,  $15 \times 15$ ,  $21 \times 18$ ,  $28 \times 28$ )

La présence de maxima de chaleur spécifique, augmentant avec la taille du système et semblant tendre vers une divergence, indique donc l'existence d'une transition de phase.

### ***II.5.2 - Concepts thermodynamiques appliqués à ce modèle simple***

Nous allons maintenant appliquer les concepts de la thermodynamique à l'équilibre à notre modèle simple afin d'essayer de confirmer les conclusions avancées dans le paragraphe précédent, et de caractériser plus en détail cette transition de phase.

Nous présenterons en parallèle tous les résultats expérimentaux et ceux issus de simulations numériques. Cette juxtaposition permettra de confronter de manière qualitative ces résultats. Le dernier paragraphe (§ II.5.2.7) s'attachera, au delà de cette comparaison qualitative, à confronter de manière plus précise l'expérience et la modélisation numérique.

#### ***II.5.2.1 - Nombre de défauts à l'équilibre***

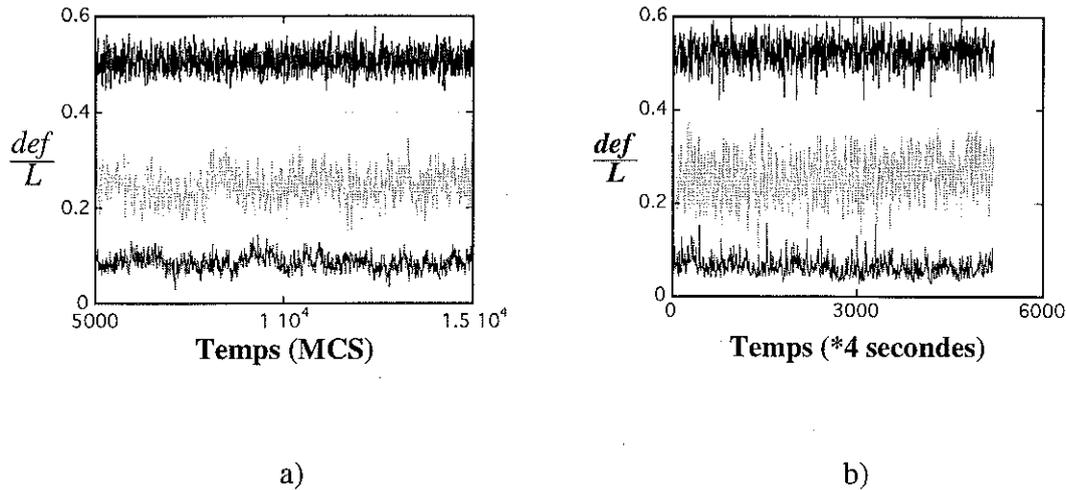
Nous avons au paragraphe II.4, compte tenu des forts effets d'anisotropie présents dans le système, proposé la notion de défauts qui prenait son origine dans une schématisation des états possibles à deux boussoles. Celle-ci était justifiée à température nulle puisque aucune fluctuation ne venait perturber ces états où les boussoles étaient sur les axes cristallographiques.

A température non nulle, les états possibles des boussoles sont affectés par les fluctuations thermiques. Cependant nous allons garder la notion de défauts telle que nous l'avons définie. Cela nous amène à une discrétisation qui consiste à rabattre "virtuellement" la boussole sur l'axe cristallographique le plus proche, afin de calculer le nombre de défauts à une température  $T$ .

Il faut bien remarquer ici que la discrétisation n'intervient pas au niveau de la simulation des boussoles, mais seulement au niveau de la caractérisation du système par des défauts.

Une fois défini le cadre de ce modèle, il convient de s'assurer que la variable *nombre de défauts* décrit des états d'équilibre clairement définis. En partant de

configurations initiales différentes, le système soumis à une température  $T$  relaxe effectivement vers un état d'équilibre caractérisé par un nombre de défauts moyen et des fluctuations autour de cette valeur moyenne. Ces variations sont représentées sur la figure II.10 pour trois températures différentes.



**Fig. II.10**

*Fluctuations thermiques du nombre de défauts à l'équilibre en fonction du temps, pour trois températures, en dessous, au dessus et au voisinage de la température critique.  $def$  est normalisé par le nombre  $L$  de liaisons. a) pour le réseau carré  $21 \times 18$  simulé; b) sur le réseau carré  $22 \times 22$  expérimental.*

La courbe de l'évolution du nombre moyen de défauts (normalisé par le nombre total  $L$  de liaisons) en fonction de la température est représentée sur la figure II.11. Nous avons noté  $T_{exp}$  la température expérimentale (liée à une amplitude maximale de champ aléatoire). Comme déjà indiqué, pour la simulation  $T^* = \frac{kTr^3}{\mu}$ .

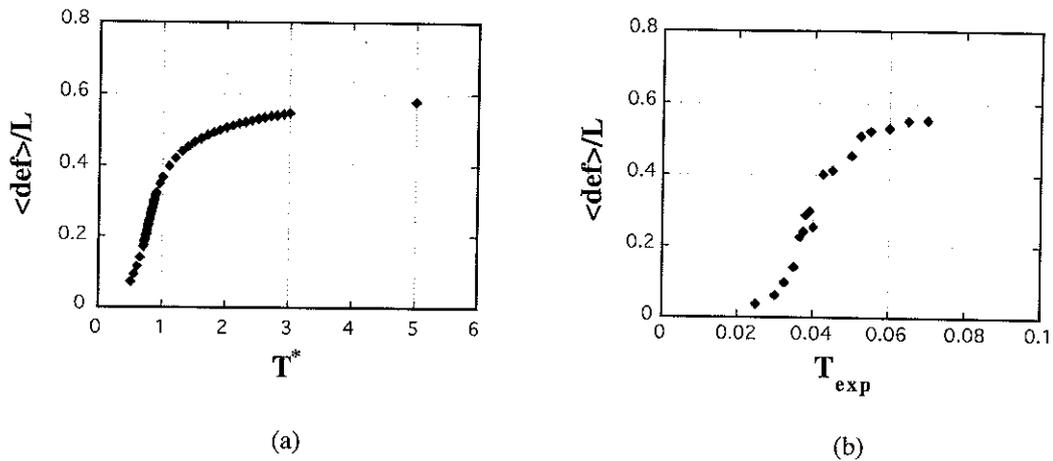


Fig. II.11

Variation du nombre de défauts moyen à l'équilibre en fonction de la température, pour le réseau carré.  $\langle def \rangle$  est normalisé par le nombre  $L$  de liaisons.

(a) Simulations du réseau  $21 \times 18$ ; (b) Expériences sur le réseau  $22 \times 22$

### II.5.2.2 - Fluctuations à l'équilibre de la variable "défauts"

On définit une susceptibilité associée à cette variable *défauts* comme

$$\chi_{def} = \frac{1}{L} \frac{\langle def^2 \rangle - \langle def \rangle^2}{T^*},$$

où  $\langle def^2 \rangle - \langle def \rangle^2$  est la variance du nombre de défauts à l'équilibre.

La susceptibilité définie dans l'expérience est obtenue en remplaçant la température  $T^*$  par la température expérimentale  $T_{exp}$ , dans l'expression de  $\chi_{def}$

Les susceptibilités ainsi définies sont représentées sur la figure II.12 pour les diverses tailles de réseau étudiées

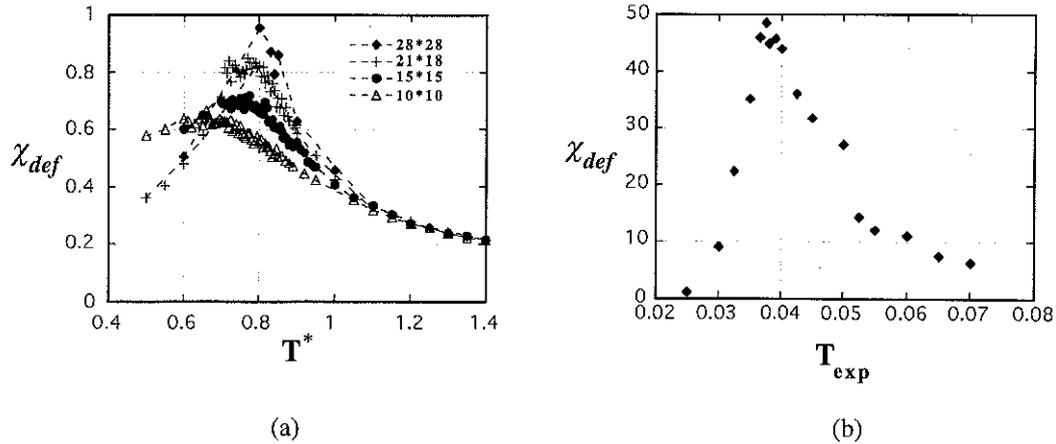


Fig. II.12

Susceptibilités à l'équilibre en fonction de la température.

(a) Simulations des réseaux  $28 \times 28$ ,  $21 \times 18$ ,  $15 \times 15$ ,  $10 \times 10$ ; (b) Expériences sur le réseau  $22 \times 22$

Les susceptibilités calculées expérimentalement et numériquement avec cette variable *défauts* présentent un pic. Celui de susceptibilité issu des simulations numériques coïncide avec celui de la chaleur spécifique (cf. § II.5.1). Ces susceptibilités confirment donc l'existence d'une transition de phase.

La confirmation est également apportée que cette variable *défauts* traduit bien une certaine notion d'ordre dans ces réseaux de boussoles. Nous allons maintenant essayer de mieux comprendre ce paramètre pour voir si effectivement il caractérise cette transition entre une phase ordonnée et une phase désordonnée, c'est-à-dire s'il peut constituer le paramètre d'ordre du système.

Pour cela nous allons d'abord nous intéresser à l'entropie du système. Nous en chercherons le maximum afin de connaître le nombre de défauts que l'on attend dans une phase désordonnée où toutes les corrélations entre les boussoles ont disparu.

### II.5.2.3 - Entropie associée à la variable “défauts”

L'entropie statistique est une quantité mesurant le manque d'informations dont on dispose sur un système. Si l'on considère  $n$  états possibles du système, chacun ayant une probabilité  $p_i$ , l'entropie statistique est définie par

$$S = -k \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i.$$

L'hypothèse microcanonique suppose les  $n$  états équiprobables ; ceci reste vrai dans une description canonique (à la limite thermodynamique) où le système est en équilibre avec un thermostat. L'entropie s'écrit alors:

$$S = k \ln \Omega$$

où  $\Omega$  est le nombre de configurations possibles du système, à énergie donnée.

Nous avons caractérisé l'état de chaque liaison reliant deux boussoles par une schématisation à seize états, dont dix sont considérés comme *défauts*.

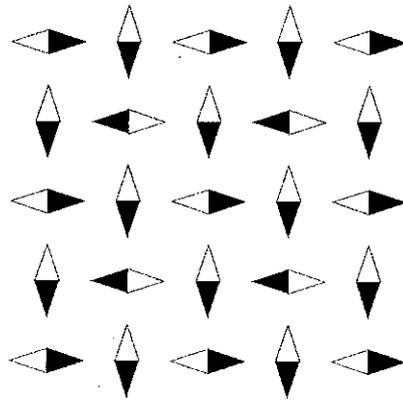
Le nombre total d'états possibles du système est  $4^{N \times N}$ , puisqu'il y a  $N \times N$  boussoles ayant chacune quatre états possibles. Nous devons compter le nombre de configurations possibles du système à énergie fixée, c'est-à-dire que dans le cadre de notre modèle simple, nous devons compter le nombre de configurations du système à  $x$  défauts donnés. S'il nous fallait compter le nombre de configurations du système à partir des états des boussoles, alors le calcul d'entropie ne poserait pas de problème. Or dans notre modèle, le système est caractérisé à partir des états des  $L = 2N(N-1)$  liaisons du réseau. Le problème d'analyse combinatoire s'avère alors extrêmement plus complexe puisque les liaisons ne sont pas indépendantes ; fixer l'état d'une liaison n'est pas sans effet sur les liaisons voisines dont le nombre d'états possibles est alors modifié.

Il semble que la seule approche analytique du problème consiste à décrire le réseau par des liaisons indépendantes. Le terme *indépendantes* se réfère ici à une indépendance statistique c'est-à-dire que l'on considère que l'état dans lequel se trouve une liaison n'a pas d'influence sur les probabilités des états des liaisons voisines.

Dans un tel cadre, nous considérons évidemment trop d'états puisque par exemple si l'on considère une cellule carrée de quatre boussoles liées par quatre

liaisons, nous avons  $4^4$  états différents, et non pas  $16^4$  comme le supposerait une description en termes de liaisons indépendantes.

Nous ne souhaitons pas ici modéliser l'énergie libre mais seulement rechercher le maximum d'entropie (c'est-à-dire l'équilibre statistique [Lan 67]), ou plus exactement le nombre de défauts qui maximise l'entropie, cette valeur étant celle que l'on attend à très haute température, c'est-à-dire à une température où les corrélations entre boussoles n'existent plus. Notons que cette valeur qui maximise l'entropie ne correspond pas au nombre de défauts maximal (égal au nombre de liaisons  $L$ ) puisqu'une telle configuration est en fait très ordonnée dans le sens où il existe peu d'états que l'on peut construire ainsi. En effet la seule possibilité est que les quatre voisines d'une boussole soient perpendiculaires à la première (cf. figure II.13).



**Fig. II.13**  
Configuration type pour laquelle le nombre de défauts est maximal.

Le nombre de défauts  $N_c$  qui maximise l'entropie est donc tel que  $0 < N_c < L$ . Soit  $x$  le nombre de défauts d'une configuration donnée, si  $x < N_c$  alors, statistiquement, les fluctuations créent des défauts et si  $x > N_c$ , alors statistiquement les fluctuations annihilent des défauts.

Malgré l'impossibilité de calculer exactement l'entropie, il est par contre facile de calculer  $N_c$ . En effet, nous avons vu lors de la schématisation des états possibles à deux boussoles que sur seize états, dix sont défauts. La probabilité qu'une liaison soit défaut est donc  $\frac{5}{8}$ . Lorsque les corrélations entre boussoles disparaissent, le nombre de défauts sera donc  $\frac{5L}{8}$ . Pour un réseau de taille finie, à très haute température, le nombre de défauts fluctue donc autour d'une valeur moyenne  $N_c = \frac{5}{8}L$ .

Nous pouvons donc maintenant construire avec la variable *défauts* un paramètre variant de 1 à 0, sachant que l'état ordonné serait caractérisé par zéro défaut alors que l'état désordonné serait caractérisé par  $\frac{5}{8}L$  défauts. Un tel paramètre s'écrit alors

$$q_{def} = 1 - \frac{8}{5L} \langle def \rangle$$

Ce paramètre est représenté sur la figure II.14 pour diverses tailles du réseau simulé et pour le réseau expérimental.

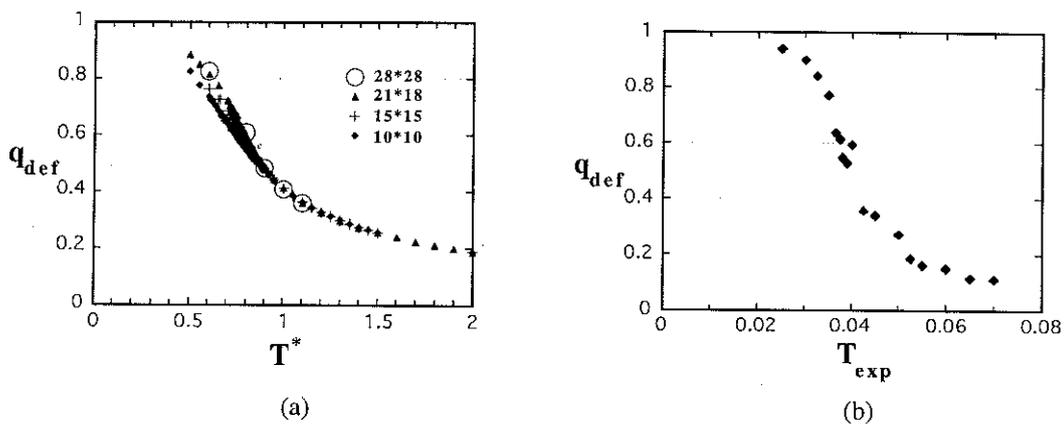


Fig. II.14

Variation de  $q_{def}$  en fonction de la température

a) pour diverses tailles de réseau simulées ; b) expériences sur le réseau  $22 \times 22$

Ces courbes amènent plusieurs remarques.

Tout d'abord nous constatons, sur chaque courbe, la présence d'un point d'inflexion entre les températures  $0.7 < T^* < 0.8$ . Ces derniers coïncident avec les maxima des courbes de chaleur spécifique.

Cependant, bien que présentant un point d'inflexion à la température critique, ce que l'on attend d'un paramètre d'ordre, on peut remarquer que ce paramètre  $q_{def}$  ne s'annule pas peu après le point d'inflexion. Au contraire, le système, quelle que soit sa taille, est encore loin de son nombre de défauts maximal, qu'il n'atteindrait en fait qu'à température infinie. Or dans la phase désordonnée, le paramètre d'ordre doit s'annuler traduisant ainsi le désordre. Les effets de taille finie se traduisent généralement par une

annulation un peu au delà de la température critique. Les paramètres d'ordre pour diverses tailles de système, doivent s'annuler de plus en plus rapidement au fur et à mesure que la taille augmente, traduisant ainsi que le système infini sera caractérisé par un paramètre d'ordre nul dès le passage par la température critique. Or nous observons qu'au contraire les effets de taille disparaissent un peu au delà de la température critique puisque les courbes se superposent. Le paramètre  $q_{def}$  ne peut donc être choisi comme paramètre d'ordre du système.

Cependant nous avons signalé à plusieurs reprises qu'il caractérisait un certain ordre du système. Le paramètre *nombre de défauts* que l'on peut relier à une longueur de lignes de boussoles, traduit en fait plus les corrélations spatiales présentes. Cette longueur  $l$  est une longueur moyennée sur une configuration donnée. A partir d'un nombre de défauts dans une configuration donnée, on ne peut pas calculer exactement la longueur de lignes  $l$ , car celle-ci dépend de la position relative des défauts et pas seulement de leur nombre. Néanmoins, statistiquement sur toutes les configurations obtenues par la simulation à  $T^*$  donnée, on observe qu'à une moyenne thermique du nombre de défauts  $\langle def \rangle$ , est associée une moyenne thermique de longueur de lignes  $\langle l \rangle$ .

Cette variable  $\langle l \rangle$  s'apparente donc à une longueur de corrélation et permet une estimation de l'ordre à courte distance. La simulation montre que cet ordre à courte distance persiste à très haute température.

Nous allons à présent décrire plus en détail les comportements thermiques de ces réseaux de boussoles afin de mieux comprendre comment s'installe progressivement le désordre à l'approche de la température critique. Cette analyse nous permettra alors de définir un paramètre d'ordre.

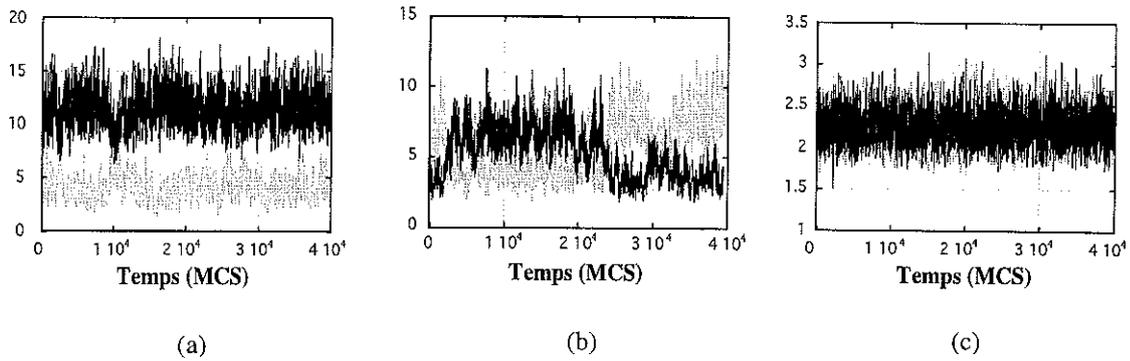
#### II.5.2.4 - Description qualitative de la transition

Nous avons souligné jusqu'à présent l'importance de l'aspect directionnel de l'interaction dipolaire et de manière plus évidente encore pour les boussoles où les termes multipolaires accroissent cet effet. Lorsque l'on observe les configurations obtenues en "trempant" le système (cf. fig. II.7), on voit aisément que ces lignes peuvent se former suivant les quatre axes du réseau carré. Nous avons également souligné que l'orientation relative de deux lignes colinéaires de boussoles importait peu pour caractériser l'ordre dans les réseaux.

On introduit ainsi aisément la notion de deux directions préférentielles dans le réseau carré qui sont les deux directions perpendiculaires correspondant aux premiers voisins que nous noterons  $x$  et  $y$ .

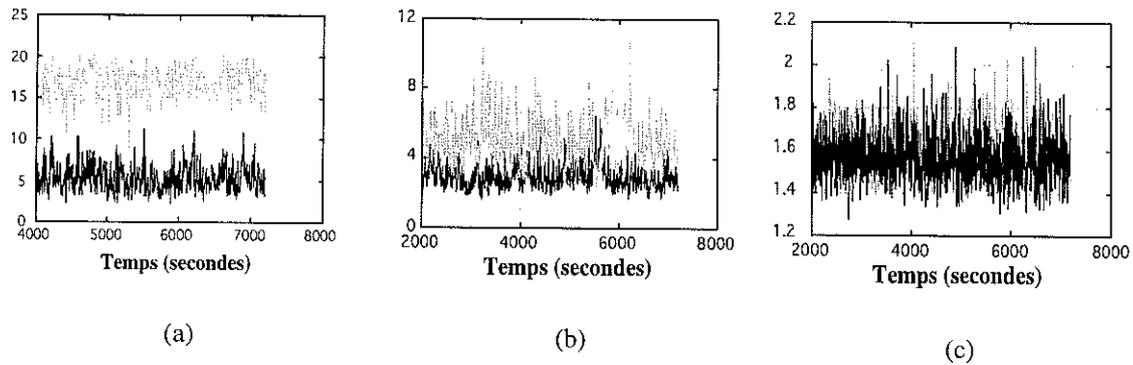
Afin de mieux comprendre le type de désordre qui s'installe à l'approche de la température critique, nous allons donc regarder le comportement des longueurs de lignes dans les deux directions perpendiculaires  $x$  et  $y$ . Comme pour la longueur globale  $l$  définie plus haut, il est à noter que ces longueurs  $l_x$  et  $l_y$  sont des longueurs moyennées sur une configuration donnée. Puis nous calculons les valeurs moyennes thermiques  $\langle l_x \rangle$  et  $\langle l_y \rangle$ . Pour le calcul de  $l_x$  et  $l_y$ , chaque boussole dont l'angle a été "rabattu" sur l'un des axes, compte pour une longueur unité dans cette direction et nulle dans la direction perpendiculaire. Une boussole voisine de la précédente participera à la même ligne si elle est alignée et de même sens que celle-ci. Si elle est alignée et de sens opposé elle participe alors à une autre ligne.

Les évolutions typiques de ces longueurs de lignes  $l_x$  et  $l_y$ , à l'équilibre, sont représentées en fonction du temps sur les figures II.15 et II.16, pour trois températures différentes.



**Fig. II.15**

Evolution (simulation numérique) des longueurs de lignes  $l_x$  et  $l_y$  à l'équilibre en fonction du temps Monte Carlo pour trois températures différentes.  
 a) avant la température critique, b) à l'approche de la température critique, c) au dessus de la température critique



**Fig. II.16**

Evolution expérimentale des longueurs de lignes  $l_x$  et  $l_y$  à l'équilibre en fonction du temps pour trois températures différentes.  
 a) avant la température critique, b) à l'approche de la température critique, c) au dessus de la température critique

Nous voyons qu'en dessous de la température critique une des deux directions  $x$  ou  $y$  est privilégiée dans le sens où les lignes de boussoles s'y forment préférentiellement (longueur de ligne plus grande). Les deux directions sont à priori équivalentes et le système choisit l'une ou l'autre suivant les configurations initiales. Si la configuration initiale privilégie une des deux directions alors le système restera en moyenne aligné avec celle-ci au cours de ses excursions thermiques. Si la configuration initiale ne privilégie aucune des deux directions (par exemple si l'on part d'une configuration en domaines cf. fig. II.7) alors ce seront les fluctuations thermiques qui guideront le système dans une des deux directions. On définit donc clairement dans cette gamme de température l'existence d'une direction privilégiée qui suivant les conditions initiales est dans la direction  $x$  ou  $y$ .

A l'approche de la température de transition, on observe sur la figure II.15.b que les fluctuations thermiques permettent au système de changer de direction préférentielle au cours du temps. Malgré cette alternance, cette figure montre que cette notion de direction privilégiée garde encore tout son sens puisque dans son état d'équilibre, c'est-à-dire sur des échelles de temps grandes devant l'unité de temps Monte Carlo, le système est soit suivant la direction  $x$ , soit suivant la direction  $y$ . Ce phénomène d'alternance, très clair en simulation, apparaît de manière moins nette dans les expériences. On peut voir néanmoins sur la figure II.16.b que ce phénomène n'est pas exclu expérimentalement. On montre en simulation numérique que ce phénomène tend à disparaître lorsque l'on introduit une anisotropie de forme de l'échantillon (réseau  $21 \times 18$ ) puisqu'alors les deux directions ne sont plus équivalentes et le système choisit de former des lignes dans la plus grande des deux directions. Il devient alors plus difficile pour le système de changer de direction préférentielle. Une autre possibilité pour rendre difficile cette alternance de la direction privilégiée est d'augmenter l'importance du terme d'anisotropie via la constante  $k$  (cf. § II.3.1). Cela revient donc à considérer des termes multipolaires plus importants.

Par contre, lorsque l'on passe la température critique (figures II.15.c et II.16.c), cette notion d'alternance de la direction préférentielle est devenue obsolète puisqu'il faut alors descendre à l'échelle de seulement quelques unités de temps Monte Carlo, pour discerner une longueur de lignes plus grande que l'autre. La notion de direction préférentielle n'a alors plus de sens.

Au passage de la température critique, en refroidissant le système depuis la phase désordonnée (phase isotrope sans direction privilégiée), on observe donc une brisure de symétrie qui entraîne l'apparition d'une direction préférentielle.

Maintenant que l'on dispose d'une bonne description de la transition de phase observée, nous sommes en mesure, grâce à cette notion de direction privilégiée, de la caractériser de manière quantitative par la construction d'un paramètre d'ordre.

### II.5.2.5 - Paramètre d'ordre

D'après la description que nous venons de faire sur la transition, l'ordre est caractérisé par l'existence d'une direction préférentielle dans le réseau carré. Puisque dans une direction donnée deux lignes parallèles ou antiparallèles sont équivalentes, la polarité des boussoles se trouve alors, d'une certaine manière, masquée. Il est donc naturel pour construire le paramètre d'ordre dans le cadre de notre modèle simple de compter les boussoles suivant les deux directions du carré, soit  $n_x$  et  $n_y$ . La différence de ces deux nombres doit donc traduire s'il existe une des directions qui est plus peuplée que l'autre.

Or, nous avons également vu que cette direction pouvait changer au cours du temps pour une température donnée proche de la température critique. Cette alternance de la direction préférentielle ne doit pas affecter le paramètre d'ordre qui doit continuer à traduire l'existence d'une direction privilégiée ( $x$  ou  $y$ ). La valeur absolue de la différence  $|n_x - n_y|$  permet donc de conserver cette information.

Le paramètre d'ordre ainsi construit s'écrit

$$q = \frac{1}{N^2} \langle |n_x - n_y| \rangle$$

$$\text{avec } N^2 = n_x + n_y$$

Les courbes représentant l'évolution de ce paramètre d'ordre en fonction de la température sont tracées sur la figure II.17 pour le système expérimental et le système simulé numériquement.

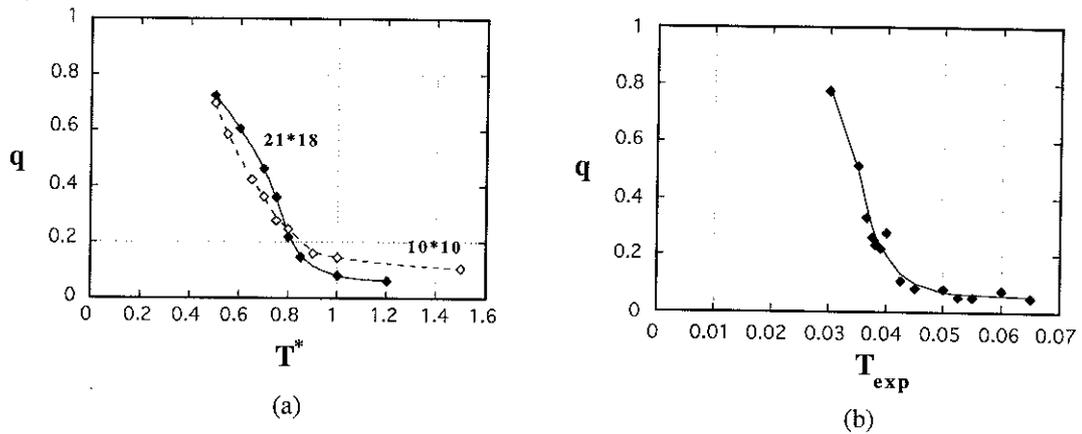
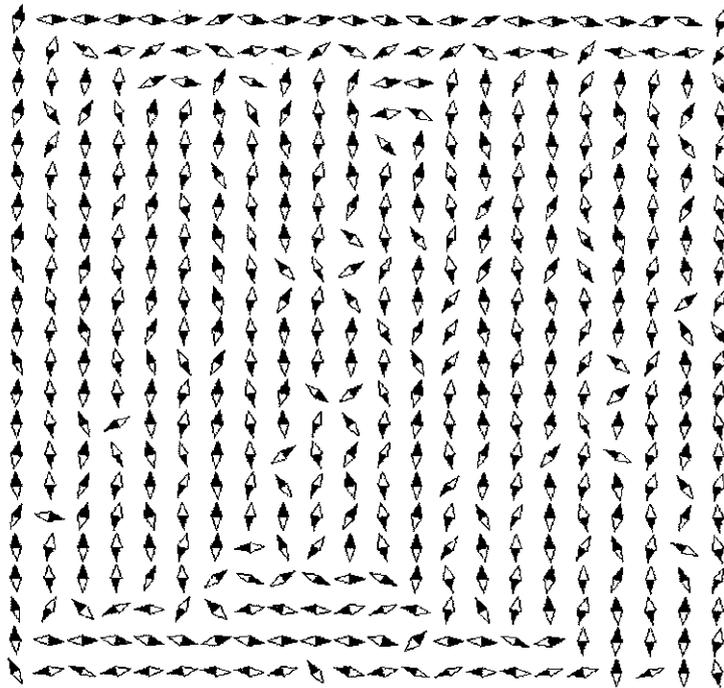


Fig. II.17

Evolution du paramètre d'ordre en fonction de la température  
 a) pour deux tailles de réseau simulées ; b) expériences sur le réseau  $22 \times 22$

Les effets de taille finie se manifestent dans toute la gamme de température. Nous avons déjà évoqué leurs effets près de la température critique: arrondissement de la chaleur spécifique et de la susceptibilité traduisant l'absence de divergence et déplacement de la température critique avec la taille du système.

A basse température, le paramètre d'ordre s'écarte rapidement de la valeur  $1$  qu'il a dans l'état ordonné. Ceci est dû aux effets de bords. Pour minimiser l'énergie du système, les boussoles le long des bords perpendiculaires à la direction privilégiée s'alignent le long de ceux-ci (figure II.18), diminuant la valeur de  $|n_x - n_y|$  et donc du paramètre d'ordre.



**Fig. II.18**

*Effet de bord sur le réseau  $22 \times 22$  montrant que la direction privilégiée n'est pas la seule peuplée en dessous de la température critique .*

*Configuration de simulation numérique à  $T^* = 0.6$*

Au delà de la température critique, les effets de taille finie font que le paramètre d'ordre ne s'annule pas rigoureusement. En effet il tend de plus en plus rapidement vers zéro au fur et à mesure que l'on augmente la taille du système reflétant ainsi l'annulation à la température critique pour le système infini. Néanmoins, les queues observées pour les tailles finies comportent un aspect qui n'a pas de réalité physique. Ce phénomène est d'ailleurs bien connu ([Kna. 79]). En effet, à très haute température le système fini est désordonné puisque  $n_x$  et  $n_y$  fluctuent de manière identique autour de la même valeur moyenne  $\langle n_x \rangle = \langle n_y \rangle = N^2/2$ . Néanmoins, la valeur absolue de la différence  $|n_x - n_y|$  fluctue autour d'une valeur non nulle générant ainsi un paramètre d'ordre qui ne s'annule rigoureusement à aucune température quelle que soit la taille finie du système.

### II.5.2.6 - Analogie avec les "nématiques" [Pri. 74]

La phase nématique des cristaux liquides est fluide et n'induit donc pas d'ordre translationnel à longue distance entre les positions des centres de masse des molécules. Ces dernières sont représentées par des bâtonnets qui tendent à s'aligner parallèlement générant ainsi un ordre orientationnel à longue distance. Dans cette phase anisotrope uniaxe, on définit la notion de *directeur* qui représente la direction la plus peuplée à température finie.

C'est cet aspect directionnel, qui se retrouve dans l'interaction dipolaire et qui amène de manière naturelle cette analogie. Celle-ci est renforcée dans le cas des réseaux de boussoles puisque les termes multipolaires accroissent cet effet directionnel en sélectionnant les quatre directions du réseau carré.

Il faut néanmoins remarquer que, à la différence de dipôles, les nématiques sont généralement des molécules non polaires dont les deux extrémités sont équivalentes. Cependant, nous avons souligné que l'orientation relative de deux lignes colinéaires de boussoles importait peu dans la notion d'ordre dans le réseau.

Par analogie avec les nématiques, nous appellerons *directeurs* ces deux directions  $x$  et  $y$ . La phase ordonnée composée de lignes de boussoles est donc caractérisée par un directeur qui peut soit être dans la direction  $x$  (lignes suivant  $x$ ), soit être dans la direction  $y$  (lignes suivant  $y$ ).

Le paramètre d'ordre 3D défini pour les nématiques s'écrit à l'aide du polynôme de Legendre d'ordre deux  $P_2(\cos \theta)$ . Pour un système 2D ce paramètre s'écrirait donc

$$q_{\text{nématiques}} = 2 \left\langle \frac{1}{m} \sum_i \cos^2 \theta_i \right\rangle - 1$$

où  $m$  est le nombre de molécules et  $\theta_i$  leur angle avec le directeur.

Dans le cas des réseaux de boussoles, nous avons défini un directeur qui est soit dans la direction  $x$ , soit dans la direction  $y$ . Pour caractériser notre système nous avons rabattu chaque boussole sur l'axe le plus proche. Soit  $n^* = \text{Max}(n_x, n_y)$  le nombre de boussoles dans la direction la plus peuplée (directeur). Alors notre paramètre d'ordre s'écrit:

$$q = \frac{1}{N^2} \left\langle n^* - (N^2 - n^*) \right\rangle = \frac{2}{N^2} \langle n^* \rangle - 1$$

Le paramètre d'ordre que nous avons défini dans le cas des réseaux de boussoles est donc très analogue au paramètre d'ordre que l'on définirait dans le cas de nématiques 2D.

C'est d'ailleurs par analogie avec les nématiques que Romano calcule le paramètre d'ordre pour un réseau carré purement dipolaire [Rom. 87]. La démarche utilisée est alors légèrement différente puisqu'en l'absence de termes multipolaires (effet d'anisotropie), les dipôles ne s'alignent pas préférentiellement sur les axes (cf. § II.2.1.2) et le directeur n'est donc pas connu à l'avance. Comme dans une approche macroscopique des nématiques (chapitre 6 dans [Pri. 74]), il utilise un tenseur d'ordre deux qui définit le directeur ([Zan. 79]), sur une échelle de temps donnée de la simulation Monte Carlo. Le directeur est défini pour chacun des quatre sous-réseaux qui définissent l'état fondamental (cf. § II.2.1.2).

Les résultats de ces calculs numériques sont en très bon accord avec nos résultats, l'absence de termes multipolaires conduisant à une température de transition légèrement inférieure.

Nous pouvons noter enfin que notre paramètre d'ordre est formellement analogue à celui d'un système de spins Ising dans le sens où nous définissons deux états possibles: alignement avec la direction  $x$  ou  $y$ . Notre paramètre d'ordre qui est la valeur absolue de la différence des deux populations est alors bien équivalent à l'aimantation définie pour un système de spins Ising [Lan. 76]:

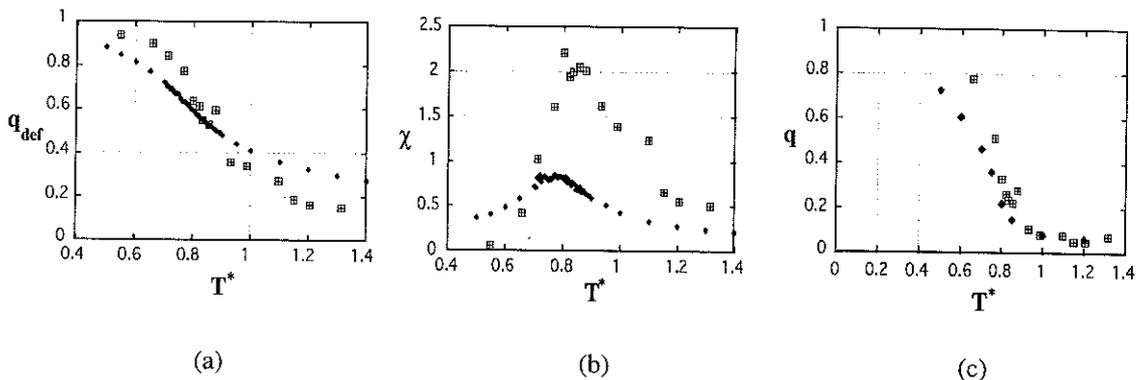
$$\langle |M| \rangle \leftrightarrow \langle |n_x - n_y| \rangle.$$

#### ***II.5.2.7 - Bilan comparé expérience - simulation numérique***

Nous avons pu tout au long de ce paragraphe II.5.2 remarquer le très bon accord qualitatif entre les résultats expérimentaux et la simulation numérique. Le modèle numérique, qui prend en compte une interaction dipolaire sommée sur tous les voisins avec des bords libres, et qui modélise les effets des termes multipolaires par un terme classique d'anisotropie biaxiale, reproduit le pic de susceptibilité indiquant l'existence d'une transition de phase. Celle-ci est caractérisée dans les deux cas par l'apparition d'une direction privilégiée ( $x$  ou  $y$ ) au passage de la température critique montrant ainsi clairement la brisure de symétrie associée à cette transition entre le régime des hautes températures (absence de direction privilégiée) vers celui des basses températures.

Nous souhaitons ici, au delà de cette comparaison qualitative, confronter quantitativement les résultats. Il est pour cela nécessaire d'effectuer un changement d'échelle de notre température expérimentale. Il est alors naturel de prendre comme base de changement d'échelle la température de transition.

Sur la figure II.19 sont représentées les variations, en fonction de la température, du paramètre  $q_{def}$ , de la susceptibilité du nombre de défauts et du paramètre d'ordre.



**Fig. II.19**

*Comparaison des résultats expérimentaux (réseau  $22 \times 22$  représenté avec des carrés) et numériques (réseau  $21 \times 18$  représenté avec des losanges) pour a) le nombre de défauts; b) la susceptibilité associée aux défauts; c) le paramètre d'ordre. La température expérimentale a été renormalisée en se basant sur la température de transition*

La superposition de ces courbes montre quelques différences quantitatives entre l'expérience et la simulation numérique. En effet en dessous de la température critique on observe plus de défauts en simulation qu'expérimentalement. Au contraire, au dessus de cette température, le nombre de défauts est plus élevé dans l'expérience. De même, le paramètre d'ordre issu de la simulation est plus faible à basse température qu'expérimentalement, alors qu'au delà de la température critique l'accord est très bon. Quant aux fluctuations du nombre de défauts (susceptibilité), elles semblent de manière générale plus élevées dans l'expérience.

Quelques simulations sur le réseau  $22 \times 22$  (non montrées ici) montrent que ces différences ne s'expliquent ni par des effets de taille finie différents ( $22 \times 22$  en expérience et  $21 \times 18$  en simulation), ni par l'anisotropie de forme induite par la taille du réseau  $21 \times 18$  simulé. Il semblerait que l'on peut obtenir un meilleur accord quantitatif entre les résultats de simulation numérique et les résultats expérimentaux, en augmentant la constante d'anisotropie  $k$  (cf. § II.3.1). Cela permet en effet de diminuer

le nombre de défauts et d'augmenter le paramètre d'ordre, en dessous de la température critique. Cela permet de plus, d'augmenter les fluctuations du nombre de défauts. Cette augmentation de la constante d'anisotropie  $k$  laisserait donc supposer que l'effet des termes multipolaires est plus important que notre estimation initiale. Cette dernière nous permettait de reproduire les phénomènes d'avalanches observés lors du retournement de l'aimantation traduisant un cycle d'hystérésis "rectangulaire". Nous disposons donc d'une faible marge de manoeuvre pour changer cette constante d'anisotropie  $k$ .

On peut alors avancer une deuxième hypothèse pour expliquer les désaccords quantitatifs entre expérience et simulation. Nous avons jusqu'ici supposé une loi de variation linéaire de la température expérimentale en fonction de l'amplitude maximale du champ aléatoire. Si maintenant nous imposons aux deux courbes de la figure II.19.a de se superposer, cela nous amène à une variation non linéaire de la "température" avec l'amplitude maximale du champ aléatoire. Cette nouvelle renormalisation de la température permet alors d'obtenir un bon accord quantitatif, mis à part les fluctuations du nombre de défauts où les différences observées semblent traduire en fait une thermalisation différente du système, dans l'expérience et la simulation.

Il faut réaliser que l'expérience et la simulation sont deux "systèmes" avec leurs propres niveaux d'approximations. La correspondance, entre le multipolaire et l'anisotropie d'une part, et entre la température simulée par un champ aléatoire et celle qui intervient dans une routine Monte Carlo d'autre part, soulève des questions fondamentales qui ouvrent des perspectives d'études intéressantes.

### ***II.5.3 - Ordre dans les systèmes dipolaires 2D***

Les fluctuations de grande longueur d'onde dans les systèmes de spin unidimensionnels rendent impossible l'établissement d'une phase ordonnée. Ceci n'est plus le cas à trois dimensions. Par contre, les systèmes bidimensionnels constituent un cas intermédiaire [Str. 88]. La notion d'ordre dans ces systèmes de spin 2D est plus délicate. D'un côté, l'absence d'ordre à longue distance à température finie pour le modèle d'Heisenberg a été montrée rigoureusement par Mermin et Wagner [Mer. 66]. Pourtant, Stanley et Kaplan [Sta. 66], par des développements en série à haute température, ont trouvé une divergence de susceptibilité suggérant ainsi l'existence d'une transition de phase. La réponse à cette contradiction fut apportée par Kosterlitz et Thouless [Kos. 73] qui ont proposé un nouveau mécanisme pour une transition de phase sans ordre à longue distance conventionnel. La transition est caractérisée par la dissociation de paires de vortex qui deviennent libres.

Si dans le modèle d'Heisenberg 2D on prend en compte un terme d'énergie d'interaction dipolaire à longue portée alors on montre qu'un ordre à longue distance peut être stabilisé ([Pok. 79], [Mal. 91]).

Pour les modèles purement dipolaires, l'ordre à longue distance existe pour tous les réseaux de Bravais 2D sauf pour le réseau carré [Mal. 91]. La théorie prédit une transition de "type Kosterlitz Thouless" c'est-à-dire avec une fonction de corrélation décroissant en fonction de la distance en une loi puissance ([Rom. 87], [Rom. 94], [Pra. 90]). Cependant Prakash et Henley [Pra. 90] prédisent un deuxième mécanisme concourant à cette transition. Celle-ci, "discrète", résulte d'une levée de dégénérescence de l'état fondamental par les fluctuations thermiques qui tendent alors à sélectionner les quatre directions principales du carré. Cette levée de dégénérescence entraîne alors la stabilisation d'un ordre à longue portée. Cette sélection par les fluctuations thermiques est l'analogie de la notion "d'ordre en tant qu'effet du désordre" développée dans les systèmes de spin à frustration géométrique [Vil. 80]. Notons que cette transition "discrète" stabilisant un ordre à longue distance n'a pas été observée par Romano [Rom. 94]. Cette dégénérescence peut également être levée par l'application d'un champ ([Pra. 90], [Kly. 90]).

Dans le cas de nos réseaux de boussoles, la dégénérescence est levée par la présence des termes multipolaires qui sélectionnent comme nous l'avons signalé les quatre axes du réseau carré. On s'attend donc dans notre système à la stabilisation d'un ordre à longue distance. C'est également aux termes d'ordre supérieur au dipolaire que Klymenko attribue la stabilisation d'un ordre à longue distance pour des molécules diatomiques polaires [Kly. 93].

## **II.6 • Conclusion sur la thermodynamique des réseaux**

---

En tant que système modèle permettant une visualisation des comportements des moments magnétiques à l'échelle atomique, les réseaux de boussoles sont très souvent utilisés pour illustrer le magnétisme des matériaux à des groupes scolaires. Les configurations observées en champ nul et température nulle permettent cette approche

pédagogique en donnant une représentation “concrète” aux divers états magnétiques de la matière. Cette analogie comporte néanmoins quelques pièges puisque l’interaction dipolaire n’est pas l’interaction d’échange. De même la notion de “domaines” dans ces réseaux s’apparente plus à une cristallisation puisqu’ils ne résultent pas d’une énergie démagnétisante mais sont des états métastables obtenus par trempe. Néanmoins, l’application du champ aléatoire simulant les effets de température illustre le passage du ferromagnétisme au paramagnétisme.

L’étude thermodynamique qui vient d’être présentée montre la pertinence d’une telle illustration puisqu’elle révèle l’existence d’une transition entre une phase ordonnée et une phase désordonnée. Elle permet également, grâce au modèle simple développé dans ce chapitre, de mieux appréhender l’interaction dipolaire et ses comportements thermiques. Une des caractéristiques essentielles de cette interaction est son aspect directionnel. Bien que masqué à température nulle compte tenu de la dégénérescence continue de l’état fondamental, cet aspect directionnel est mis en évidence par les fluctuations thermiques qui sélectionnent les quatre axes du réseau autorisant alors la formation de lignes. Dans le cas de notre réseau de boussoles, il n’est pas nécessaire d’invoquer les fluctuations thermiques puisque la sélection des axes du réseau carré s’opère principalement via les termes multipolaires qui induisent des effets d’anisotropie.

Ces lignes nous ont amené de manière naturelle à la notion de *directeur* (direction privilégiée) qui permet de caractériser la transition de phase observée au passage d’une température critique. La brisure de symétrie associée à cette transition, marque l’apparition d’un directeur dans la phase ordonnée. Le paramètre d’ordre caractérisant cette transition est alors une mesure du “peuplement” du directeur.

Nous avons donc, dans le cadre d’un modèle simple, dégagé les notions de *défauts* et de *longueur de lignes*, qui permettent, en appliquant les concepts de la thermodynamique à l’équilibre, de caractériser la transition observée. A l’aide des résultats de simulation numérique, nous avons également tenté d’appliquer les concepts de “*finite size scaling*” ([Fis. 72] et [Lan. 76]) qui permettent de déduire de l’étude de systèmes finis, les exposants critiques caractérisant la transition du système infini. Nous n’avons cependant pas reproduit ici ce travail puisque, compte tenu de la présence de termes de surface due aux bords libres, nous ne pouvons en déduire les exposants critiques du système infini.



## CHAPITRE III

# Etude dynamique de boussoles en interaction



étude thermodynamique que nous avons menée a montré un bon accord entre l'expérience et la simulation numérique. Il semble que les effets de désordre créés par le champ aléatoire traduisent correctement les effets d'un désordre thermique. Comme nous l'avons signalé dans le chapitre I, les fréquences de ce champ aléatoire ne peuvent être ni trop élevées ni trop basses afin que les boussoles y soient sensibles. Pour simuler la température, nous imposons une fréquence des impulsions aléatoires de l'ordre de  $8 \text{ Hz}$ . Si maintenant nous excitons le réseau vers  $2 \text{ Hz}$ , le système est globalement moins sensible mais une phase désordonnée arrive à naître au sein de la phase ordonnée et ces deux phases coexistent alors. Ainsi, le type de désordre obtenu est différent de celui généré avec une fréquence de l'ordre de  $8 \text{ Hz}$ .

Ce type de désordre, où ces deux phases peuvent coexister, peut également être généré par un champ tournant. La phase désordonnée peut se déplacer dans le réseau tout en gardant une taille caractéristique constante. Elle peut par contre, pour d'autres valeurs de paramètres, prendre le dessus sur la phase ordonnée ou au contraire disparaître.

Les observations faites avec ces diverses excitations ne justifient alors plus la dénomination unique de *désordre* pour caractériser les fluctuations des boussoles. Nous avons envisagé une étude des comportements du réseau sous champ tournant lorsque cette coexistence de phase est observée pour comprendre comment ce désordre apparaît et se propage, donnant naissance à des structures spatiales intrigantes.

La difficulté d'une telle étude repose entre autres sur cette double dimension, spatiale et temporelle, du désordre. Elle réside d'autre part dans le choix de grandeurs pertinentes pouvant caractériser l'apparition de ce désordre dans ses deux dimensions. Pour réduire ces difficultés, et aborder l'étude du désordre dans le réseau avec une compréhension précise de la manière dont l'ordre induit par l'interaction dipolaire se déstabilise sous l'influence d'une excitation périodique, nous nous sommes d'abord intéressés à la dynamique de deux boussoles en interaction. L'étape suivante suppose une étude de la dynamique d'une ligne de boussoles puisque, comme nous avons pu le constater, les lignes sont une composante essentielle des comportements du réseau.

Ces deux étapes, indispensables à l'étude de la dynamique des réseaux, se sont avérées très riches, relevant d'une complexité intrinsèque aux lois physiques qui régissent leurs comportements. En effet, une simplification de l'approche du problème en ne considérant que deux boussoles en interaction, ne réduit pas la complexité qui est propres aux non-linéarités présentes dans les équations de la dynamique. Celles-ci induisent une richesse de comportements que la mécanique classique ne soupçonnait pas il y a encore quelques années.

Nous allons donc dans cette seconde partie décrire en détail cette dynamique complexe de deux boussoles en interaction. Puis nous présenterons quelques résultats concernant une ligne de dix boussoles.

Nous commençons cette étude par la détermination des paramètres du système et exposons des notions de physique non-linéaire essentielles à cette analyse.

### III.1 • Calcul et mesures des paramètres du problème

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à une boussole en rotation autour d'un axe s'écrit

$$J\ddot{\theta}(t) = \sum \text{moments des forces extérieures}$$

où  $\ddot{\theta}(t)$  est l'accélération angulaire et  $J$  le moment d'inertie de la boussole par rapport à son axe de rotation. Lorsqu'un champ magnétique est appliqué, le moment magnétique  $\vec{\mu}$  de la boussole est soumis à un couple  $\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \wedge \vec{H}$ . A ce couple, se rajoutent ceux exercés par les forces de frottements.

Les paramètres nécessaires à l'étude de l'équation du mouvement sont donc le moment d'inertie  $J$ , le moment magnétique  $\vec{\mu}$  et les paramètres de frottements.

#### III.1.1 - Calcul du moment d'inertie (Fig. III.1)

Un schéma de la boussole est présenté ci-dessous. Le cercle au centre de la boussole représente le petit chapeau (creux) de laiton dans lequel vient se positionner le pivot. La masse de la partie magnétique (acier) est  $M_{mag} = 23 \text{ mg}$ ; la masse du chapeau est  $M_{chap} = 32 \text{ mg}$ .

Soit  $\rho_{mag}$  et  $\rho_{chap}$  les masses volumiques supposées uniformes, de l'acier et du laiton respectivement.

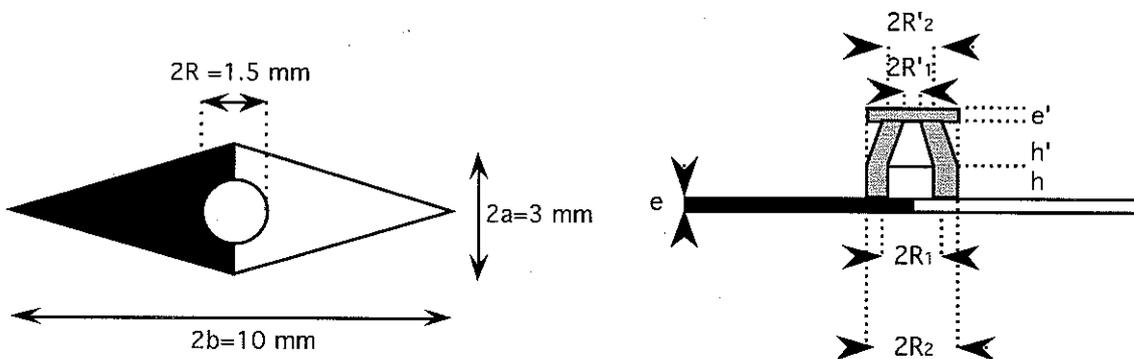


Fig. III.1:

Description schématique des boussoles: vue de haut et vue de profil

$$\begin{array}{l}
 R_1 = 0.55 \text{ mm} \quad R_1' = 0.45 \text{ mm} \\
 \text{Valeurs numériques:} \quad R_2 = 1 \text{ mm} \quad R_2' = 0.9 \text{ mm} \\
 h = 0.6 \text{ mm} \quad h' = 0.7 \text{ mm} \quad e = e' = 0.2 \text{ mm}
 \end{array}$$

L'axe de rotation des boussoles est perpendiculaire au plan (a,b) et passant par le centre de celles-ci. Le moment d'inertie  $J = \sum m_i r_i^2$  par rapport à cet axe est donc,

◆ Pour la partie magnétique:

$$J_{mag} = 4\rho_{mag}e \int_0^b \left( \int_0^{a(1-\frac{y}{b})} (x^2 + y^2) dx \right) dy - \underbrace{\rho_{mag}e \int_0^R r^2 2\pi r \cdot dr}_{\text{trou au centre de la boussole}}$$

c'est-à-dire 
$$J_{mag} = \rho_{mag}e \left( \frac{ab(a^2 + b^2)}{3} - \frac{\pi}{2} R^4 \right) \quad \text{où} \quad \rho_{mag} = \frac{M_{mag}}{e(2ab - \pi R^2)}$$

◆ Pour le chapeau en laiton:

$$\begin{aligned}
 J_{mag} = & \underbrace{\rho_{chap}h \left( \int_0^{R_1} r^2 2\pi r \cdot dr - \int_0^{R_2} r^2 2\pi r \cdot dr \right)}_{\text{partie inférieure du chapeau}} \\
 & + \underbrace{\rho_{chap} \left( \left( \int_0^h \int_0^{R_e} r^2 2\pi r \cdot dr \cdot dz \right) - \left( \int_0^h \int_0^{R_i} r^2 2\pi r \cdot dr \cdot dz \right) \right)}_{\text{partie du milieu du chapeau}} \\
 & + \underbrace{\rho_{chap}e' \int_0^{R_2} r^2 2\pi r \cdot dr}_{\text{partie supérieure du chapeau}}
 \end{aligned}$$

$$\text{avec} \quad R_i = R_1 - (R_1 - R_1') \frac{z}{h} \quad \text{et} \quad R_e = R_2 - (R_2 - R_2') \frac{z}{h}$$

c'est-à-dire 
$$J_{chap} = \rho_{chap} \left( \frac{\pi h}{2} (R_2^4 - R_1^4) + \frac{\pi h'}{10} \left( \frac{R_2^5 - R_2'^5}{R_2 - R_2'} - \frac{R_1^5 - R_1'^5}{R_1 - R_1'} \right) + \frac{\pi e'}{2} R_2^2 \right)$$

avec 
$$\rho_{chap} = \frac{M_{chap}}{\underbrace{\pi h (R_2^2 - R_1^2) + \frac{\pi h'}{3} \left( \frac{R_2^3 - R_2'^3}{R_2 - R_2'} - \frac{R_1^3 - R_1'^3}{R_1 - R_1'} \right)}_{\text{volume de la partie du milieu du chapeau}} + \pi e' R_2^2}$$

L'application numérique donne

$$J = J_{mag} + J_{chap} = 1.18 \cdot 10^{-3} + 0.19 \cdot 10^{-3}$$

soit 
$$J = 1.37 \cdot 10^{-3} \text{ g.cm}^2$$

### III.1.2- Mesures des paramètres de frottements

Trois origines différentes ont été envisagées pour la dissipation de l'énergie.

Une boussole de vitesse angulaire  $\dot{\theta}(t)$  est soumise à un couple de frottements visqueux dans l'air que l'on suppose proportionnel à cette vitesse:  $\Gamma_{fv} = -k\dot{\theta}(t)$

Elle est de plus soumise à un couple de frottements secs dû au contact avec le pivot sur lequel elle tourne. Ce couple de module constant ne dépend que du signe de la vitesse

$$\begin{aligned} \Gamma_{fs} &= -\delta & \text{si } \dot{\theta}(t) > 0 \\ \text{c'est-à-dire } \Gamma_{fs} &= \delta & \text{si } \dot{\theta}(t) < 0 & \text{ avec } \delta > 0 \\ \Gamma_{fs} &= 0 & \text{si } \dot{\theta}(t) = 0 \end{aligned}$$

Un amortissement par courants induits assimilables à un frottement a également été envisagé dû aux déplacements d'un conducteur (la boussole) dans un champ. Ces courants sont supposés se propager dans le chapeau de laiton (meilleur conducteur que

l'acier). Une modélisation de ceux-ci par des spires de courant a montré leur faible importance par rapport aux termes de frottements.

Seuls les deux premiers types de frottements seront donc envisagés par la suite, ceux-ci permettant à eux seuls de reproduire les effets d'amortissement observés sur le mouvement des boussoles.

Pour déterminer les paramètres de frottements secs et visqueux, une boussole est lancée dans un mouvement de rotation avec une vitesse initiale  $\dot{\theta}_0$ , son mouvement est enregistré et analysé jusqu'à l'arrêt dû aux frottements. L'angle de la boussole en fonction du temps est montré dans la figure III.2.

L'équation du mouvement s'écrit:

$$J\ddot{\theta}(t) = -k\dot{\theta}(t) - \delta$$

Ici  $\delta$  ne change pas de signe puisque le mouvement est une rotation (la vitesse ne change pas de signe)

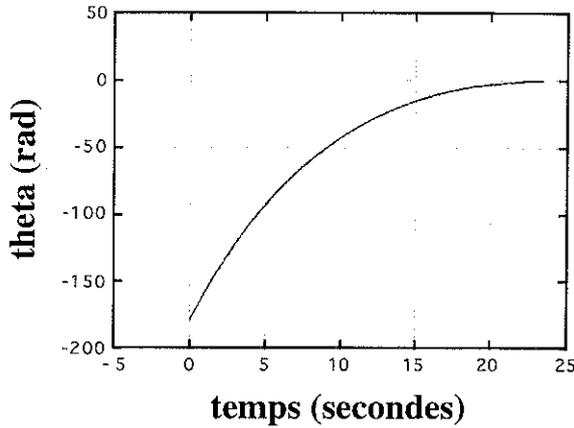
Cette équation différentielle linéaire à coefficients constants se résout facilement en fonction des conditions initiales sur l'angle et la vitesse  $\theta_0$  et  $\dot{\theta}_0$ .

La solution est:

$$\theta(t) = \theta_0 - \frac{\delta}{k}t + \frac{J}{k} \left( \dot{\theta}_0 + \frac{\delta}{k} \right) \left( 1 - e^{-\frac{k}{J}t} \right)$$

Cette équation permet un ajustement de la courbe expérimentale (les deux sont représentés sur la figure III.2). Sont choisis comme paramètres libres, les deux paramètres inconnus  $\frac{k}{J}$  et  $\frac{\delta}{J}$ . L'angle initial  $\theta_0$  est connu et la vitesse initiale  $\dot{\theta}_0$  est mesurée par la pente initiale de la courbe.

Les paramètres trouvés par cet ajustement sont reportés ci-dessous.



Paramètres fixés:

$$\theta_0 = -178.66 \text{ rad}$$

$$\dot{\theta}_0 = 21.65 \text{ rad.s}^{-1}$$

Paramètres libres:

$$\frac{\delta}{J} = 0.29 \text{ rad.s}^{-2}$$

$$\frac{k}{J} = 0.08 \text{ s}^{-1}$$

**Fig. III.2:**

*Mesure directe des frottements.*

*Evolution de l'angle d'une boussole au cours du temps; cette boussole a reçu une vitesse initiale à  $t=0$ ; le mouvement de rotation ne tient compte que des frottements puisqu'elle n'est soumise à aucun champ.*

Notons que plusieurs mesures ont été effectuées avec la même boussole sur des pivots différents, garantissant la qualité des ajustements, qui trouvent la même valeur de  $\frac{k}{J}$  (qui ne dépend que de la boussole). Notons que le paramètre  $\frac{\delta}{J}$  dépend beaucoup de la paire boussole-pivot considérée et du positionnement de l'une sur l'autre ( $\frac{\delta}{J}$  peut varier de 0.2 à 1.8  $\text{rad.s}^{-2}$ ).

Notons enfin que dans cette expérience il n'y a pas de courants induits car la boussole ne se déplace dans aucun champ.

Remarque:

Nous allons voir dans la suite de ce mémoire l'importance des frottements dans l'étude de la dynamique chaotique d'un système. Ses propriétés dynamiques sont en effet très différentes suivant la présence ou non de frottements. On parle alors de dynamique chaotique dissipative ou de dynamique chaotique hamiltonienne. Il est souvent très intéressant dans une étude du chaos de se donner la possibilité de faire varier les frottements. Notre système expérimental ne nous permet pas de contrôler

précisément et à volonté les frottements. Néanmoins nous pouvons étudier deux cas limites: frottements très faibles et frottements très forts et cela en jouant essentiellement sur les frottements secs. Il nous suffit en effet de limer très finement les pivots (frottements secs faibles) ou de les aplatir à leur extrémité afin d'augmenter la surface de contact avec la boussole (frottements secs élevés). L'essentiel de nos expériences a été réalisé avec des frottements faibles (tels que ceux montrés figure III.2). Des expériences supplémentaires ont été effectuées avec des frottements élevés afin de montrer leur influence sur la dynamique chaotique. Nous devons néanmoins reconnaître qu'augmenter les frottements via les frottements secs ne simplifie pas la problématique. En effet son caractère non-analytique complique singulièrement la mathématique de l'équation puisque proportionnel à  $\text{sgn}(\dot{\theta})$  (où  $\text{sgn}$  est la fonction signe) ce qui limite quelque peu les traitements analytiques des équations. D'autre part ce terme est très délicat à traiter de manière numérique.

Lorsque nous travaillerons avec les pivots qui frottent peu, nous pouvons négliger ce terme de frottements secs tout en augmentant en conséquence la valeur des frottements visqueux. Si l'on reprend la courbe présentée figure III.2, en imposant  $\delta = 0$  on obtient alors un bon ajustement qui nous donne alors une valeur pour les frottements visqueux de  $\frac{k}{J} = 0.11 \text{ s}^{-1}$ . Pour les pivots qui sont tels que  $\frac{\delta}{J} = 1.8 \text{ rad.s}^{-1}$  (frottements secs un peu plus importants) alors un ajustement avec uniquement des frottements visqueux fait tripler la valeur que l'on obtenait en prenant en compte  $\frac{\delta}{J}$ . On rappelle que toutes ces valeurs numériques correspondent à ce que l'on considère comme des frottements faibles. Les frottements très élevés n'ont pu être mesurés.

Nous supposons par la suite que nos faibles frottements sont uniquement d'origine visqueuse.

### **III.1.3- Mesure du moment magnétique: oscillations dans un champ constant**

La boussole est maintenant placée sur son pivot et peut donc tourner sous l'effet de champs magnétiques. Ces derniers sont de l'ordre de l'oersted et donc négligeables devant le champ coercitif ( $\approx 100 \text{ oe}$ ) qui fait se retourner l'aimantation à l'intérieur de la boussole.

La mesure du moment magnétique d'une boussole peut se faire par la mesure des fréquences d'oscillations dans un champ fixe. Ce système est alors complètement analogue au pendule qui oscille dans le champ gravitationnel.

Une boussole est donc placée dans un champ uniforme et constant et écartée d'un angle initial par rapport au champ. La boussole va osciller autour de la direction du champ. S'il n'y a pas d'amortissement l'amplitude d'oscillation reste constante. Dans le cas contraire, la boussole s'aligne finalement dans le champ.

Soit  $\theta(t)$  l'angle entre la boussole et la direction du champ  $\vec{H}$ . L'équation du mouvement s'écrit:

$$\boxed{\ddot{\theta}(t) + \frac{k}{J} \dot{\theta}(t) = -\frac{\mu H}{J} \sin(\theta(t))} \quad (\text{III.1})$$

L'étude de cette équation a ici deux objectifs:

- montrer que la fréquence d'oscillations est peu modifiée par nos valeurs de frottements et qu'elle permet de connaître le moment magnétique  $\mu$
- introduire la notion générale de non-isochronisme d'un oscillateur

### *III.1.3.1 - Equation linéarisée: isochronisme des petites oscillations*

L'équation (III.1) linéarisée devient

$$\boxed{\ddot{\theta}(t) + \frac{k}{J} \dot{\theta}(t) + \Omega_0^2 \theta(t) = 0} \quad (\text{III.2})$$

avec  $\Omega_0^2 = \frac{\mu H}{J}$

#### *a) Cas sans frottements*

L'équation (III.2) devient  $\ddot{\theta}(t) + \Omega_0^2 \theta(t) = 0$

dont la solution est  $\theta(t) = \theta_0 \cos(\Omega_0 t + \phi)$

La solution de l'équation sans frottements linéarisée est donc une solution oscillante de pulsation  $\Omega_0 = \sqrt{\frac{\mu H}{J}}$ . Connaissant le champ H appliqué et J le moment

d'inertie, la mesure de la fréquence d'oscillation permet donc de mesurer le moment magnétique  $\mu$  de la boussole.

*b) Cas avec frottements*

L'équation (III.2) a pour équation caractéristique:  $r^2 + \frac{k}{J}r + \Omega_0^2 = 0$

Pour avoir une solution oscillante le discriminant  $\Delta^2 = \left(\frac{k}{J}\right)^2 - 4\Omega_0^2$

doit être négatif et la solution s'écrit alors

$$\theta(t) = \lambda e^{-\frac{k}{2J}t} \cos\left(\sqrt{\Omega_0^2 - \left(\frac{k}{2J}\right)^2} t + \phi\right)$$

Cette solution oscillante s'amortit dans le temps avec une enveloppe en  $e^{-\frac{k}{2J}t}$

La fréquence d'oscillations est modifiée d'un facteur  $\sqrt{1 - \frac{1}{\Omega_0^2} \left(\frac{k}{2J}\right)^2}$  qui est très proche de 1 si les frottements sont faibles.

Les fréquences d'oscillations avec et sans frottements sont donc constantes et en particulier indépendantes de l'amplitude d'oscillation; c'est ce que l'on appelle l'isochronisme des petites oscillations (cas de l'équation linéarisée).

Connaissant l'amplitude du champ appliqué (mesure) et le moment d'inertie des boussoles (calcul), il est donc possible de calculer leur moment magnétique à partir de la mesure de leur fréquence d'oscillations. Les mesures nous donnent un moment magnétique de l'ordre de 0.3 *emu*.

Le principe général de la mesure du moment magnétique  $\mu$  étant exposé, nous allons voir comment est modifiée la fréquence pour des amplitudes d'oscillations plus grandes

**III.1.3.2 - Equation non linéarisée: non isochronisme des oscillations**

*a) Solution exacte pour la période du pendule*

L'équation du pendule sans frottements est

$$\ddot{\theta}(t) + \Omega_0^2 \sin(\theta(t)) = 0 \quad (\text{III.3})$$

La solution exacte de la période d'oscillation est connue (voir par exemple [Mic. 81]) et s'exprime à l'aide d'intégrales elliptiques qui sont tabulées:

$$\frac{2\pi}{\omega(\theta_0)} = \frac{4}{\Omega_0} K(a) \quad \text{où} \quad K(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\Phi}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \Phi}} \quad (\text{III.4})$$

avec 
$$a = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = a \sin(\Phi)$$

Contrairement au cas des petites oscillations, la fréquence des grandes oscillations du pendule dépend donc de leur amplitude (cette amplitude reste constante et égale à sa valeur initiale  $\theta_0$  puisque l'équation (III.3) ne comporte pas de terme de dissipation). C'est le non-isochronisme des grandes oscillations (équation non linéarisée).

Pour obtenir une solution analytique approchée de la fréquence d'oscillation du pendule sans frottements en fonction de son amplitude initiale, nous allons utiliser une méthode de perturbation.

*b) Méthode de Lindstedt-Poincaré*

Considérons l'équation (III.1), en négligeant le terme de frottement. Pour voir le comportement de notre pendule magnétique au delà des petites oscillations, nous allons garder le premier terme non linéaire dans le développement de  $\sin(\theta(t))$  c'est-à-dire

$$\sin(\theta(t)) = \theta(t) - \frac{\theta^3(t)}{6}$$

L'équation (III.1) devient alors

$$\boxed{\ddot{\theta}(t) + \Omega_0^2 \theta(t) - \frac{\Omega_0^2}{6} \theta^3(t) = 0} \quad (\text{III.5})$$

L'étude des équations différentielles non linéaires est un domaine à part entière dans le monde de la physique non linéaire et de nombreuses techniques analytiques d'approximations ont été développées pour en obtenir des solutions. Parmi les plus importantes, citons la méthode de perturbation de Lindstedt-Poincaré, les méthodes d'amplitude et de phase lentement variables, et la méthode de développement en échelles multiples. Ces diverses méthodes sont expliquées en détail dans [Mic. 81] et [Jor. 77]. De manière générale la première technique est simple et permet d'obtenir des développements uniformément valides pour les solutions périodiques. En revanche cette méthode ne donne pas d'information sur les solutions non périodiques.

Le non-isochronisme des solutions oscillantes de l'équation (III.5) sera montré ici par cette méthode.

L'équation (III.5) s'écrit en posant  $\tau = \Omega_0 t$  et  $y = \frac{\theta}{\theta_0}$  ( $\theta_0$  angle initial)

$$\Omega_0^2 \theta_0 \frac{d^2 y(\tau)}{d\tau^2} + \Omega_0^2 \theta_0 y(\tau) - \frac{\Omega_0^2}{6} \theta_0^3 y^3(\tau) = 0$$

c'est-à-dire  $\boxed{\frac{d^2 y(\tau)}{d\tau^2} + y(\tau) - \varepsilon y^3(\tau) = 0} \quad (\text{III.6})$

avec  $\varepsilon = \frac{\theta_0^2}{6}$

Cette équation (III.6) est connue sous le nom d'équation de Duffing.

Le terme non linéaire est multiplié dans cette équation par un petit paramètre  $\varepsilon$  c'est-à-dire que l'on se restreint à des amplitudes d'oscillations assez petites pour que  $\varepsilon = \frac{\theta_0^2}{6}$  reste petit devant un.

Notons que si l'on impose  $\varepsilon \leq 0,1$ , l'équation (III.6) est une bonne approximation de l'équation exacte pour  $\theta_0 < \frac{\pi}{4}$

Pour prendre en compte la variation de la fréquence du pendule avec son amplitude d'oscillations, une nouvelle variable  $\alpha = \xi \tau$  est introduite.  $\xi = \frac{\Omega}{\Omega_0}$  est la pulsation du pendule normalisée par la fréquence propre. L'équation (III.6) s'écrit alors

$$\xi^2 \frac{d^2 y}{d\alpha^2} + y - \varepsilon y^3 = 0 \quad (\text{III.7})$$

$y$  et  $\xi$  sont alors développés en puissance de  $\varepsilon$  comme suit:

$$y(\alpha) = y_0(\alpha) + \varepsilon y_1(\alpha) + \varepsilon^2 y_2(\alpha) + \dots \quad (\text{III.8})$$

$$\xi = 1 + \varepsilon \xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2 + \dots \quad (\text{III.9})$$

L'équation (III.9) autorise donc un déplacement de la fréquence propre de l'oscillateur avec l'amplitude d'oscillations.

Les équations (III.8) et (III.9) sont insérées dans (III.7) et les coefficients des diverses puissances de  $\varepsilon$  égalées à zéro.

En posant  $y' = \frac{dy}{d\alpha}$  et  $y'' = \frac{d^2 y}{d\alpha^2}$ , on obtient le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} y_0'' + y_0 = 0 \\ y_1'' + y_1 = y_0^3 - 2\omega_1 y_0'' \\ \vdots \end{cases}$$

Compte tenu des conditions initiales  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ , la première de ces équations a pour solution  $y_0(\alpha) = \cos \alpha$ . En insérant cette solution dans la deuxième équation, on obtient

$$y_1'' + y_1 = \left( 2\xi_1 + \frac{3}{4} \right) \cos \alpha + \frac{1}{4} \cos 3\alpha \quad (\text{III.10})$$

La solution  $y_1(\alpha)$  doit être périodique ce qui implique que le coefficient de  $\cos \alpha$  doit être nul sinon des solutions non périodiques avec des termes en  $\alpha \cos \alpha$ , appelés termes séculaires, apparaîtraient.

L'annulation du coefficient de  $\cos \alpha$  impose  $\omega_1 = -\frac{3}{8}$

L'équation (III.10) se résout alors en

$$y_1(\alpha) = \frac{\cos \alpha - \cos 3\alpha}{32}$$

Les termes séculaires pour l'équation de  $y_2(\alpha)$  s'annulent si  $\omega_2 = -\frac{21}{256}$

Finalement on obtient,

$$y(\alpha) = \cos(\alpha) + \frac{\varepsilon}{32}(\cos \alpha - \cos 3\alpha) + O(\varepsilon^2)$$

avec 
$$\xi = 1 - \frac{3}{8}\varepsilon - \frac{21}{256}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$$

L'équation (III.5) possède donc une solution oscillante de pulsation

$$\boxed{\Omega \approx \Omega_0 \left( 1 - \frac{3}{8} \frac{\theta_0^2}{6} - \frac{21}{256} \left( \frac{\theta_0^2}{6} \right)^2 \right)} \quad (\text{III.11})$$

Cette équation montre donc que plus les amplitudes d'oscillations sont grandes, plus la fréquence de ces oscillations est petite.

Dans le tableau III.1 présenté ci-dessous, les fréquences d'oscillations d'un pendule simple (masse suspendue par un fil rigide de longueur  $L=1$  m, soumise au champ de pesanteur d'accélération  $g$  et oscillant dans le plan vertical avec  $\Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} = 3,131$  HZ dans le cas linéaire) sont calculées à partir du résultat exact de l'équation (III.4) [Mic. 81] et à partir de l'équation (III.11) issue de la méthode de perturbation.

$\theta_0$ (degrés)	Fréquence d'oscillations par Méthode de perturbation (HZ)	Fréquence d'oscillations Résultat exact (HZ)
5°	3.128	3.128
10°	3.125	3.106
20°	3.106	3.037
45°	3.009	2.652

**Tableau III.1:**

*comparaison des fréquences d'oscillations du pendule simple sans frottements pour un angle initial donné.*

On notera que même pour des angles initiaux de 45°, la différence entre les calculs exacts et perturbatifs est inférieure à 15%.

### **III.2 ● Simulation numérique**

L'apport de la simulation numérique a été d'une importance majeure pour la compréhension des systèmes dynamiques non linéaires puisque les traitements analytiques exacts sont très rares. Elle a permis de montrer la pertinence de nombreuses méthodes analytiques d'approximations. Et depuis quelques années, l'évolution des ordinateurs aidant, elle a ouvert un vaste champ de recherche permettant une étude rapide des phénomènes chaotiques.

Néanmoins, cet outil puissant possède comme toute chose ses limitations (précision finie, discrétisation du temps,...) et les diverses erreurs générées peuvent ne pas être apparentes. Des précautions sont donc nécessaires avant toute utilisation de résultats de simulations numériques qui doivent alors être confrontées aux expériences, à la théorie et au bon sens.

Des programmes de simulation qui intègrent numériquement les équations différentielles du mouvement des boussoles ont été écrits. Nous avons pour cela utilisé la procédure Runge Kutta du quatrième ordre. Cette méthode est couramment utilisée puisqu'elle réalise un très bon compromis entre temps de calcul et précision. Cet

algorithme explicite utilise des temps intermédiaires pour le calcul à un instant  $t$ . Pour plus de détails sur cette procédure voir par exemple [Pre. 86] et [Par. 89].

Nous avons choisi un pas d'intégration de temps de  $10^{-3}$  secondes, qui est 160 fois plus petit que la plus petite des périodicités de champ utilisées. Nous avons pris soin de vérifier que des pas d'intégration plus petits ne changeaient pas la dynamique résultante.

Les paramètres que nous avons utilisés numériquement sont ceux que l'on a mesurés expérimentalement: frottements, moments magnétiques, taille des dipôles étendus (cf. § III.4.1.5) qui règle les fréquences propres du système, distance entre dipôles, moment d'inertie et amplitude de champ. Nous avons imposé deux moments magnétiques légèrement différents ( $\approx 3\%$ ). Cette dissymétrie, qui correspond à une réalité expérimentale, est également intéressante dans le sens où elle nous permet d'appliquer des conditions initiales identiques d'angles et de vitesses pour les boussoles. En effet, s'il n'existe aucune dissymétrie, les boussoles ont toutes des mouvements rigoureusement identiques puisque ceux-ci sont régis par les mêmes équations.

Pour avoir une vue générale des scénarios de déstabilisation des régimes périodiques, nous avons établi des diagrammes de bifurcations (cf. § III.3.2). Ils consistent, partant de conditions initiales données, à augmenter progressivement, de manière très lente l'amplitude du champ au cours du calcul. Le pas de champ doit être petit pour respecter des conditions d'adiabaticité (cf. § III.4.3). Il faut de plus bien entendu s'assurer que les régimes transitoires soient passés avant d'augmenter l'amplitude du champ. De tels diagrammes reposent sur une stroboscopie, à la fréquence du champ, des angles et vitesses des boussoles. On ne peut pas effectuer une stroboscopie à n'importe quelle fréquence compte tenu de la précision numérique. Seules les périodicités multiples du pas d'intégration sont possibles. Il nous était donc difficile de jouer sur la fréquence d'excitation du système pour réaliser ces diagrammes de bifurcations..

Nous allons voir par la suite que les nombreuses simulations numériques effectuées sont en excellent accord avec les résultats expérimentaux lorsque la dissipation est forte. Par contre nous n'avons pu reproduire tous les comportements de notre système en présence d'une très faible dissipation.

La simulation numérique est donc un complément indispensable à l'expérience puisqu'il permet des variations adiabatiques du paramètre de contrôle, des mesures de vitesses et la construction de sections de Poincaré (cf. § III.3). Elle permet de plus, de manière plus aisée qu'avec l'expérience, l'enregistrement de mouvements dynamiques

sur de longs temps ainsi que la visualisation de la phase des boussoles par rapport aux diverses excitations.

### **III.3 • Dynamique d'une boussole**

Nous nous sommes intéressés jusqu'à maintenant aux équations très générales décrivant la dynamique d'oscillateurs sans toujours en préciser la nature physique. Pour bien comprendre la portée de ces résultats, il convient de rappeler la grande variété que cache cette notion générale d'oscillateurs. On trouve en effet dans la littérature des études de la dynamique d'oscillateurs mécaniques, électroniques, optiques, chimiques, biologiques. On retrouve également ces études appliquées à la physique du solide ainsi qu'aux dynamiques de populations. Nous allons maintenant étudier plus précisément la dynamique de ces oscillateurs magnétiques que forment les boussoles soumises à des champs magnétiques.

Il est d'abord rappelé que l'espace des phases est l'espace dont les axes sont les coordonnées de position et de quantité de mouvement. Il contient les courbes appelées trajectoires de phase qui représentent les évolutions du système. La notion de degré de liberté reçoit selon les auteurs deux définitions: un couple de coordonnées position-vitesse est soit un degré de liberté, soit considéré comme deux degrés de liberté. Nous allons garder ici la première définition.

Le caractère chaotique des systèmes déterministes était il y a quelques années encore mal compris. L'exemple de la turbulence dans les fluides en est un parfait exemple. Dans les années 50, la théorie de la turbulence de L. Landau rendait compte du caractère chaotique des solutions, en invoquant la manifestation simultanée d'un très grand nombre de modes, devenus instables les uns après les autres en augmentant de manière progressive le nombre de Reynolds, chacun étant associé à une fréquence particulière. L'existence de ces modes définissant un attracteur de dimension très grande dans l'espace des phases, impliquait donc que seuls les systèmes à grand nombre de degrés de liberté devenaient chaotiques, puisque la dimension de l'espace des phases (défini par les degrés de liberté du système) est nécessairement supérieure à celle de l'attracteur. En 1963, Lorenz [Lor. 63] modélisa les mouvements convectifs d'une couche d'air avec un système d'équations déterministes, sans faire intervenir cette infinité de modes.

Il n'est donc pas nécessaire de faire intervenir un grand nombre de degrés de liberté pour faire apparaître du chaos; seuls deux degrés de liberté sont nécessaires. C'est ce qu'ont voulu montrer entre autres Croquette et Poitou [Cro. 81]: à l'aide d'une boussole placée dans deux champs magnétiques, l'un étant fixe et l'autre tournant. Les principaux résultats de cette étude vont donc être rappelés afin de les comparer à ceux obtenus lorsque l'on met plusieurs boussoles en interaction.

Les comportements d'une boussole dans un champ fixe ont été décrits dans le paragraphe III.1.3. Nous allons maintenant décrire le comportement d'une boussole soumise uniquement à un champ tournant.

### III.3.1- Dynamique d'une boussole dans un champ tournant

Ce système ne possède qu'un degré de liberté: la position angulaire de la boussole; il n'est donc pas susceptible d'engendrer des mouvements chaotiques.

L'équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{k}{J}\dot{\theta}(t) + \frac{\mu H}{J}\sin(\omega t - \theta(t)) \quad (\text{III.12})$$

où  $\omega$  est la pulsation du champ tournant.

En se plaçant dans le référentiel tournant, on pose:  $\varphi(t) + \varphi_0 = \omega t - \theta(t)$

L'équation linéarisée du mouvement s'écrit alors

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{k}{J}\dot{\varphi}(t) + \Omega^2\varphi(t) = 0$$

$$\text{avec } \Omega^2 = \frac{\mu H}{J}\cos\varphi_0 = \Omega_0^2\cos\varphi_0 \quad \text{et} \quad \Omega_0^2\sin\varphi_0 = \omega\frac{k}{J}$$

Cette équation du mouvement dans le référentiel tournant montre donc que la boussole a en plus de son mouvement de rotation à la vitesse du champ, un mouvement d'oscillation (qui s'amortit s'il y a des frottements) autour d'une direction faisant un angle  $\varphi_0$  (déterminé par les frottements) avec celle du champ.

### III.3.2- Dynamique d'une boussole dans un champ tournant et un champ fixe

Lorsque l'on superpose au champ tournant un champ fixe, le système possède alors un degré de liberté supplémentaire; en effet l'équation (III.12) devient alors

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{k}{J}\dot{\theta}(t) - \frac{\mu H_{\text{tournant}}}{J}\sin(\theta(t) - \omega t) - \frac{\mu H_{\text{fixe}}}{J}\sin \theta(t)$$

qui sous forme adimensionnelle s'écrit

$$\theta''(\tau) + \alpha\theta'(\tau) = -M \sin \theta - P \sin(\theta - \tau)$$

$$\text{où } \theta''(\tau) = \frac{d^2\theta(\tau)}{d\tau^2}$$

Cette équation différentielle non-autonome (car dépendant explicitement du temps) est équivalente à un flot (système d'équations différentielles) dans  $\mathfrak{R}^3$  qui s'écrit à l'aide des trois variables  $y, \theta, \phi$  associées aux degrés de liberté ([Ber. 84]):

$$\begin{aligned} y' &= -\alpha y - M \sin \theta - P \sin(\theta - \phi) \\ \theta' &= y \\ \phi' &= 1 \end{aligned}$$

L'étude des comportements dynamiques de ce système expérimental est très complexe et une revue détaillée en est décrite dans l'article de V. Croquette [Cro. 82]. Les principaux résultats en sont exposés ici.

Rappelons qu'un système à  $N$  degrés de liberté est intégrable s'il est décomposable en  $N$  systèmes indépendants à un degré de liberté (appelés modes propres). Lorsque le système est linéaire, il est toujours possible de trouver ces modes propres; tous les systèmes linéaires sont donc intégrables. En revanche, il est rarement possible de trouver les modes propres d'un système non-linéaire. Le pendule simple est l'un des rares systèmes non-linéaires intégrables (cf. § III.1.3.2.a).

Un système intégrable à deux degrés de liberté possède des trajectoires dans l'espace des phases qui s'inscrivent sur des tores de dimension deux. Donc si la boussole supposée sans frottements et soumise à un champ fixe et à un champ tournant était un problème intégrable (il ne l'est en fait pas), alors le mouvement du point représentatif du système serait la superposition de deux mouvements oscillatoires décrivant la surface d'un tore: l'un à la fréquence du champ tournant, l'autre à la fréquence propre d'oscillations autour de l'un des champs, fixe ou tournant (cf. pendule linéaire forcé sans frottements § III.4.1.2.a). Dans le cas réel, ces deux oscillateurs ne sont plus indépendants et les couplages non-linéaires détruisent certains de ces tores. Ceux qui persistent par suite de faibles couplages non-linéaires, sont appelés tores de K.A.M, du nom des instigateurs de cette théorie, énoncée par Kolmogorov ([Kol. 54]) et démontrée par Moser ([Mos. 62]) et Arnold ([Arn. 63]). Ces tores se regroupent en deux régions de l'espace des phases appelées résonances principales: la résonance autour du champ fixe qui décrit les mouvements oscillatoires de la boussole autour de celui-ci, et la résonance autour du champ tournant où la boussole oscille autour de sa direction en l'accompagnant dans son mouvement (cf. § III.3.1). Les tores caractérisés par des fréquences qui sont dans un rapport rationnel n'existent pas dans le cas non-intégrable et sont remplacés par des zones stochastiques (chaos à grande échelle) entourant des îlots d'accrochage c'est-à-dire des petits tores dont l'une des deux fréquences reflète le fait que la fréquence d'oscillations de la boussole s'est accrochée à un rapport simple de celle du champ tournant ( $\frac{f}{5}, \frac{f}{4}, \frac{f}{3}, \frac{f}{2}$ ). Tout ceci est illustré sur la figure III.3 qui montre une section de Poincaré pour un jeu de paramètres donné.

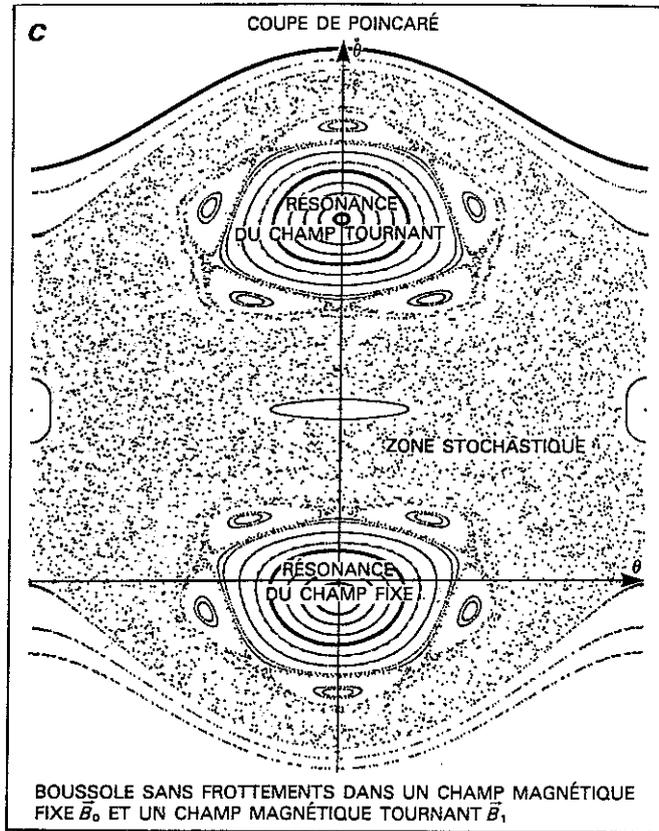


Fig. III.3:

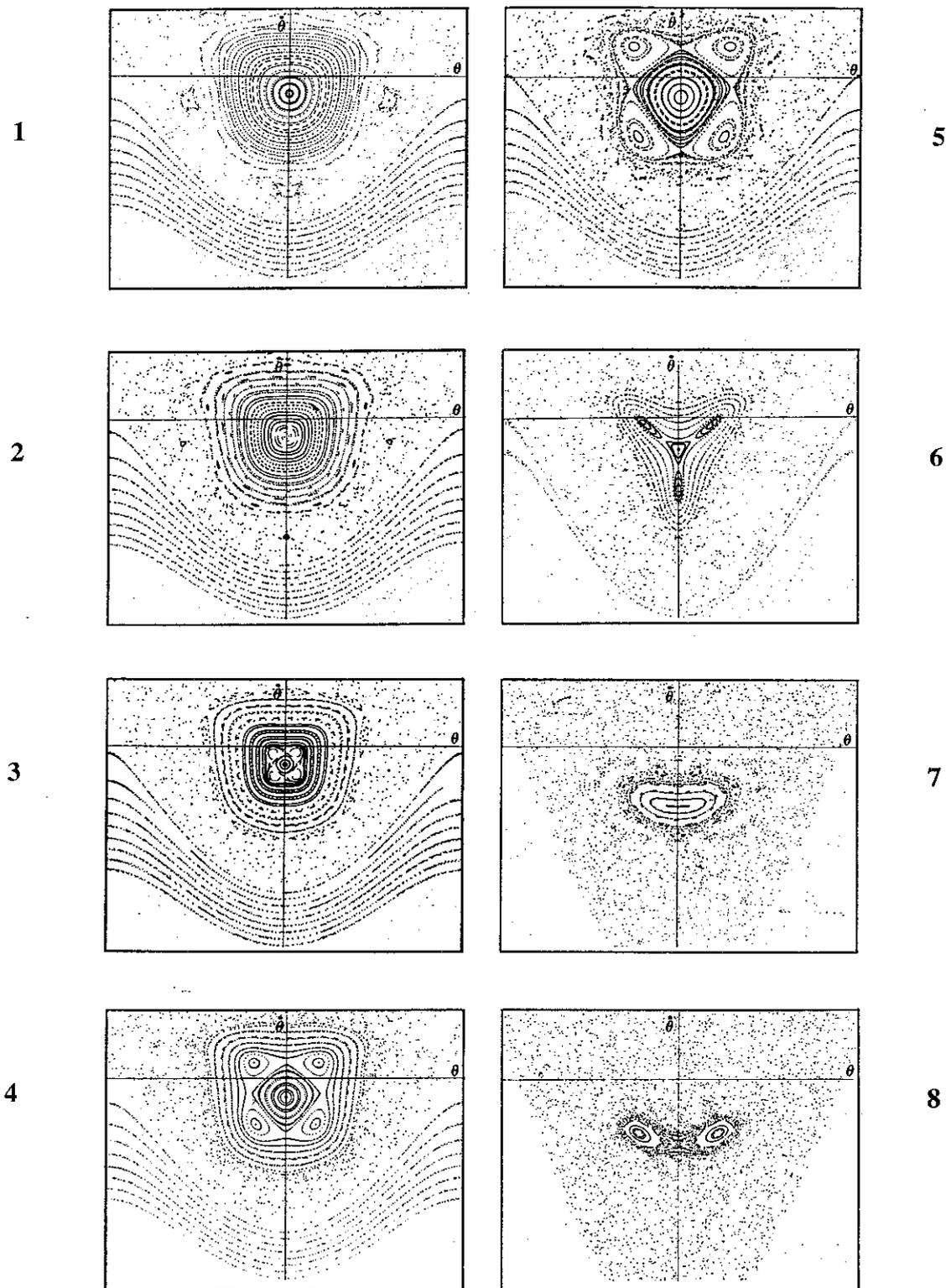
Section de Poincaré des trajectoires (une condition initiale donne une trajectoire) d'une boussole sans frottements soumise à un champ tournant et à un champ fixe.  
Figure tirée de [Cro. 82].

Les trajectoires de cette boussole sans frottements évoluent dans un espace des phases à trois dimensions  $(\theta, \dot{\theta}, \phi)$  où  $\phi = \omega t$ . Il est toujours délicat de raisonner sur des espaces à trois dimensions ou plus. C'est pourquoi il est plus aisé de travailler sur des coupes à deux dimensions, appelées sections de Poincaré, réalisées dans l'espace des phases. Sur de telles coupes, on ne garde que les intersections dans un sens donné des trajectoires avec le plan de coupe. Lorsque le système est soumis à une excitation extérieure périodique, une méthode très simple pour obtenir de telles sections est de regarder les états dynamiques du système seulement à des temps séparés par cette période excitatrice. En effet cette fréquence extérieure est une base de temps naturelle pour réaliser cette stroboscopie puisque les mouvements périodiques du système doivent entre autres posséder cette périodicité (voir les problèmes de systèmes forcés périodiquement).

Sur cette figure III.3, sont représentées toutes les trajectoires possibles (ou plus précisément les intersections avec le plan de coupe) de la boussole soumise à un champ fixe et à un champ tournant donnés. Elles correspondent donc à toutes les conditions initiales possibles; puisqu'il n'y a pas de frottements, chaque condition initiale donne une trajectoire.

Le paramètre de contrôle de cette étude est défini à partir des trois paramètres que sont les deux amplitudes des champs (tournant et fixe) et la fréquence du champ tournant. Ils sont regroupés en un paramètre unique appelé paramètre de stochasticité puisqu'il permet de décrire l'apparition de mouvements stochastiques. Ce paramètre (sans dimension) est égal à la somme des demi-largeurs de chacune des résonances divisée par leur distance dans l'espace des phases.

Au fur et à mesure que l'on augmente ce paramètre de stochasticité, les îlots d'accrochage s'écartent du centre de la résonance vers les zones stochastiques pour laisser place à un autre accrochage qui prend naissance au coeur de la résonance. On assiste ainsi à un défilement des accrochages. Le dernier accrochage visité est l'accrochage  $1/2$  et il a pour particularité de scinder la résonance d'où il est né en deux résonances distinctes, séparées par une région stochastique. Cette évolution de l'espace des phases avec le paramètre de stochasticité est représentée par les sections de Poincaré de la figure III.4.



**Fig. III.4:**

*Evolution des sections de Poincaré des trajectoires formant la résonance autour du champ fixe en fonction du paramètre de stochasticité  $s$  (les figures de 1 à 8 correspondent à  $s$  croissant)  
Figure tirée de [Cro. 82].*

Les deux nouvelles résonances ainsi formées (fig. III.4 n°8), vont alors suivre la même évolution que les autres, jusqu'à un nouvel accrochage  $1/2$  qui va scinder les résonances en deux et ainsi de suite. Avec un paramètre de stochasticité croissant, ces dédoublements se suivent en cascades.

Lorsque les frottements sont pris en compte, l'évolution est plus progressive rendant l'apparition du chaos plus tardive et cette cascade plus apparente. Leur effet est de faire tomber le point représentatif du système au coeur des résonances; pour des frottements importants les trajectoires ne sont plus sur les tores et le mouvement oscillatoire de la boussole ne possède plus qu'une seule fréquence: celle du champ tournant. Lorsque le paramètre de stochasticité augmente on observe toujours la cascade de doublements de période mais d'une nature différente de celle sans frottements puisque après cette cascade, une cascade inverse est observée. En effet toutes les sous harmoniques de la fréquence du champ qui étaient apparues progressivement, vont disparaître dans l'ordre inverse de leur apparition laissant place progressivement à du bruit, signe précurseur du chaos.

Pour avoir une vue générale de la manière dont se déstabilisent les mouvements périodiques de la boussole en fonction du paramètre de stochasticité, on trace un diagramme de bifurcations qui permet de visualiser immédiatement les diverses bifurcations successives que traverse le système. Sur l'axe des ordonnées est représentée la vitesse angulaire stroboscopée à la fréquence du champ tournant. On regarde alors l'évolution de cette quantité en fonction du paramètre de stochasticité.

Dans un tel diagramme, pour une valeur donnée du paramètre de stochasticité, un point représente donc un régime dynamique qui a la périodicité du champ, deux points représentent une périodicité double, ...etc. Un ensemble continu de points représente soit un régime quasipériodique (fréquences incommensurables avec celle du champ) soit un régime chaotique.

Le diagramme de bifurcations pour la boussole avec frottement est représenté sur la figure III.5.

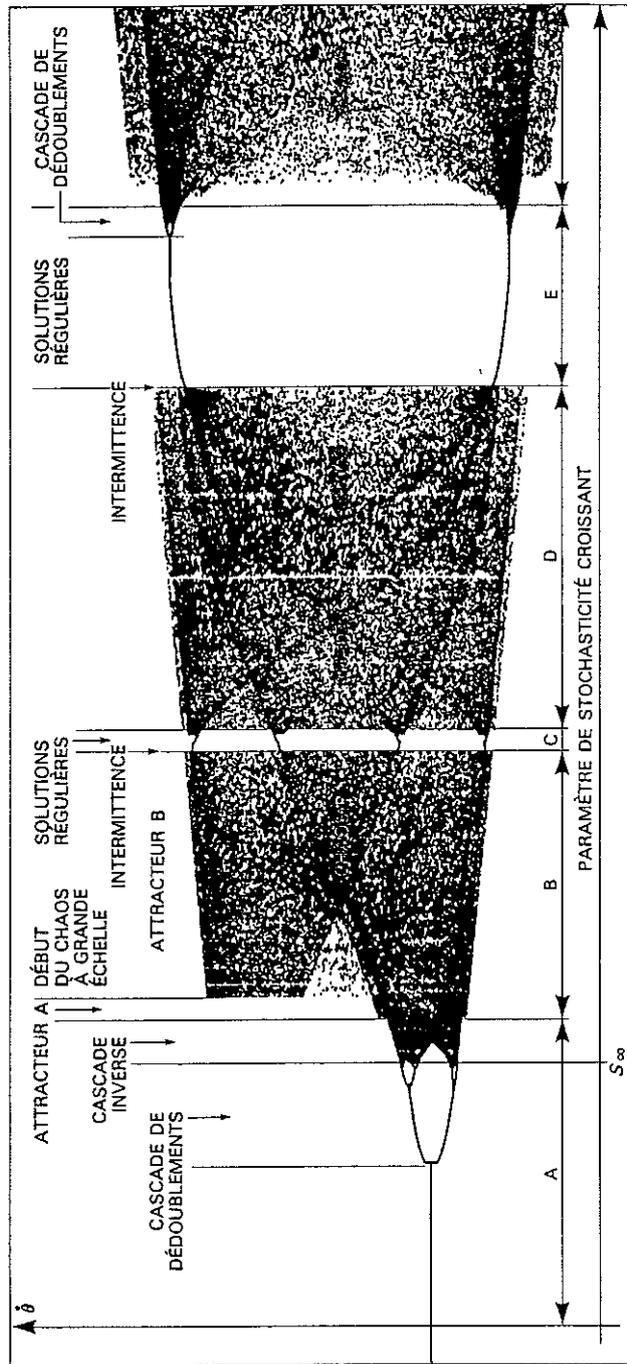


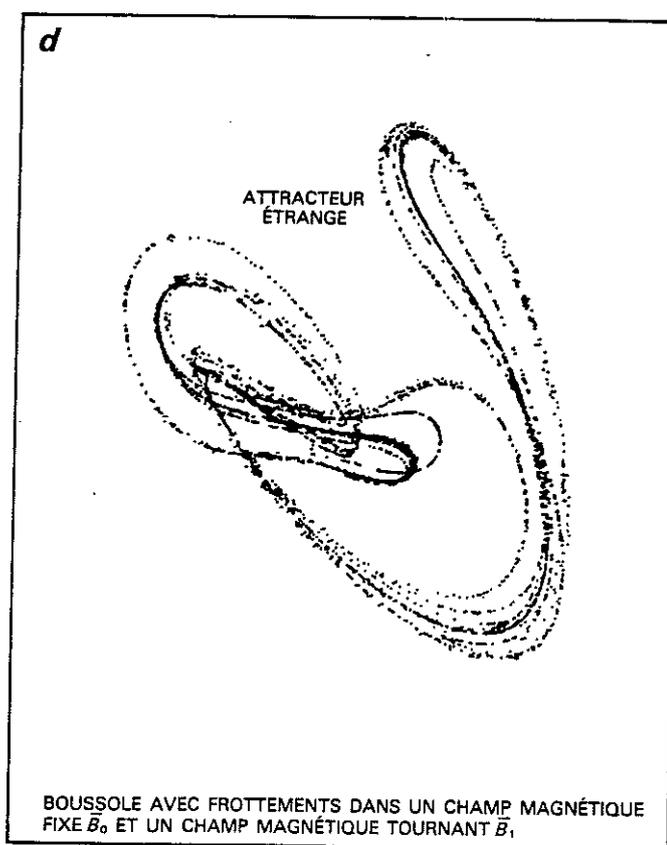
Fig. III.5:

Diagramme de bifurcations de la boussole avec frottements  
Figure tirée de [Cro. 82].

On y reconnaît alors les régimes périodiques qui se déstabilisent par cascade de doublements de période puis par cascade inverse, laissant place ensuite à des phases chaotiques. On remarque que ces phases chaotiques sont entrecoupées de phases régulières, le passage du chaos à des phases régulières se faisant par le scénario dit d'intermittence (nous y reviendrons plus loin dans ce mémoire).

Dans le cas des systèmes dissipatifs, les trajectoires chaotiques restent confinées dans une région limitée de l'espace des phases appelée attracteur étrange. Cet objet est de nature topologiquement complexe possédant une structure fractale. Une deuxième caractéristique de tels objets est la sensibilité aux conditions initiales. En effet, deux trajectoires initialement voisines sur cet attracteur vont s'écartier exponentiellement au cours du temps. Cette rapidité de divergence est donnée par les exposants de Lyapunov.

Une section de Poincaré de l'attracteur étrange décrivant les régimes dynamiques chaotiques de la boussole est représentée sur la figure III.6



*Fig. III.6:*

*Attracteur étrange d'une boussole avec frottements  
Figure tirée de [Cro. 82].*

### III.4 ● Dynamique de deux boussoles en interaction

Nous allons maintenant nous intéresser aux comportements dynamiques de deux boussoles en interaction.

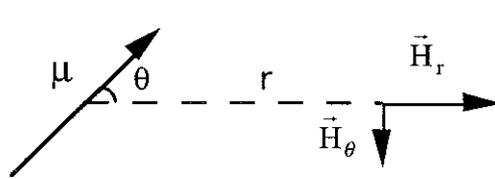
Nous allons dans un premier temps considérer ces dipôles comme ponctuels. Pour mesurer les fréquences des modes propres d'oscillations, nous allons utiliser des résultats de résonance non linéaire. Après de brefs rappels de résonance linéaire, les concepts et principaux résultats de résonance non linéaire seront donc exposés. Une fois les mesures de fréquences propres réalisées, nous verrons qu'une description en termes de dipôles étendus sera alors nécessaire pour mieux décrire ces mesures.

Ce système de deux boussoles en interaction, lorsqu'il n'est pas soumis à des champs extérieurs, possède deux degrés de liberté (l'angle de chaque boussole) ou quatre (angle et vitesse de chaque boussole) suivant la définition adoptée. Il existe donc deux modes propres de petites oscillations que nous allons mettre en évidence à partir des équations linéarisées.

#### III.4.1- Modes propres d'oscillations

##### III.4.1.1- Equations linéarisées pour des dipôles ponctuels

Le champ créé par un dipôle de moment magnétique  $\mu$ , à une distance grande devant sa demi-longueur (dipôle ponctuel) s'écrit:



$$H_r = 2\mu \frac{\cos \theta}{r^3}$$

$$H_\theta = \mu \frac{\sin \theta}{r^3}$$

Fig. III.7:  
Composantes radiales et orthoradiales du champ créé par un dipôle ponctuel à une distance  $r$  (supposée grande devant la taille des dipôles)

Les équations du mouvement pour deux dipôles  $A$  et  $B$  s'écrivent en négligeant les frottements

$$J\ddot{\theta}_A(t) = |\vec{\mu}_A \wedge \vec{H}_B|$$

$$J\ddot{\theta}_B(t) = |\vec{\mu}_B \wedge \vec{H}_A|$$

c'est-à-dire

$$\ddot{\theta}_A(t) + \frac{\mu_A \mu_B}{2Jr^3} (\sin(\theta_A(t) - \theta_B(t)) + 3\sin(\theta_A(t) + \theta_B(t))) = 0 \quad (\text{III.13})$$

$$\ddot{\theta}_B(t) + \frac{\mu_A \mu_B}{2Jr^3} (\sin(\theta_B(t) - \theta_A(t)) + 3\sin(\theta_B(t) + \theta_A(t))) = 0 \quad (\text{III.14})$$

En linéarisant ces équations, puis en les ajoutant et en les retranchant on obtient

$$\ddot{X}(t) + \Omega_1^2 X(t) = 0 \quad \text{avec} \quad X(t) = \theta_A(t) + \theta_B(t) \quad \text{et} \quad \Omega_1^2 = \frac{3\mu_A \mu_B}{Jr^3} \quad (\text{III.15})$$

$$\ddot{Y}(t) + \Omega_2^2 Y(t) = 0 \quad \text{avec} \quad Y(t) = \theta_A(t) - \theta_B(t) \quad \text{et} \quad \Omega_2^2 = \frac{\mu_A \mu_B}{Jr^3} \quad (\text{III.16})$$

Les deux modes propres sont alors mis en évidence:

$X(t)$ , qui correspond à un mode d'oscillations à la pulsation  $\Omega_1$  où les deux boussoles sont en phase entre elles c'est-à-dire  $\theta_A(t) = \theta_B(t)$ .

$Y(t)$ , qui correspond à un mode d'oscillations à la pulsation  $\Omega_2$  où les deux boussoles sont en opposition de phase entre elles c'est-à-dire  $\theta_A(t) = -\theta_B(t)$ .

Remarque:

Nous travaillons dans le système d'unités *CGS* ce qui nous amène à ne pas distinguer les notions de champ et d'induction.

Avant de s'intéresser à la mesure expérimentale des fréquences d'oscillations de ces modes, des notions de résonance linéaire et non-linéaires sont rappelées. Ces notions seront développées pour le cas du pendule.

### III.4.1.2- Oscillations forcées des systèmes linéaires

L'équation du mouvement considérée est

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{k}{J} \dot{\theta}(t) + \Omega_0^2 \theta(t) = \frac{\Gamma}{J} \cos \omega t$$

où  $J$  est le moment d'inertie,  $k$  le terme de frottements et  $\Omega_0$  la pulsation propre de l'oscillateur.  $\Gamma$  est le couple ressenti par celui-ci sous l'action de l'excitation extérieure de pulsation  $\omega$ . Nous allons travailler avec des variables sans dimension. Pour cela on pose:

$$\begin{aligned} \tau = \Omega_0 t & \quad \frac{I}{\Omega_0} \frac{k}{J} = \alpha & \quad \frac{\omega}{\Omega_0} = \xi \\ & \quad \frac{I}{\Omega_0^2} \frac{\Gamma}{J} = \gamma & \quad \theta''(\tau) = \frac{d^2 \theta(\tau)}{d\tau^2} \end{aligned}$$

L'équation du mouvement se réécrit donc:

$$\theta''(\tau) + \alpha \theta'(\tau) + \theta(\tau) = \gamma \cos \xi \tau$$

#### a) Cas sans frottements ( $\alpha = 0$ )

Le mouvement d'un pendule linéaire forcé par une excitation extérieure est donc décrit par l'équation différentielle

$$\theta''(\tau) + \theta(\tau) = \gamma \cos \xi \tau \tag{III.17}$$

Si les conditions initiales sont  $\theta(0) = \theta_0$  et  $\dot{\theta}_0 = 0$  alors :

- pour  $\xi \neq 1$ , l'équation (III.17) a pour solution générale

$$\theta(\tau) = \left( \theta_0 + \frac{\gamma}{\xi^2 - 1} \right) \cos \tau - \left( \frac{\gamma}{\xi^2 - 1} \right) \cos \xi \tau$$

L'oscillation est alors la superposition de deux mouvements, l'un ayant une fréquence  $1$  correspondant aux oscillations propres du système, l'autre ayant la fréquence de l'excitation extérieure. Si  $\xi$  est un nombre irrationnel, la superposition des deux mouvements donne des oscillations quasipériodiques c'est-à-dire presque périodiques.

Pour  $\xi < 1$  les oscillations forcées sont en phase avec l'excitation extérieure, alors que pour  $\xi > 1$  elles sont en opposition de phase (déphasage de  $180^\circ$ ).

- pour  $\xi = 1$ , la solution est

$$\theta(\tau) = \theta_0 \cos \tau + \left( \frac{\gamma \tau}{2} \right) \sin \tau$$

L'excitation extérieure rend ici le mouvement non périodique. Il est cependant oscillatoire avec une amplitude croissant linéairement avec le temps; c'est le phénomène de résonance.

#### a) Cas avec frottements

L'équation décrivant le mouvement s'écrit

$$\theta''(\tau) + \alpha \theta'(\tau) + \theta(\tau) = \gamma \cos \xi \tau \quad (\text{III.18})$$

La solution générale est la somme de la solution de l'équation sans second membre et d'une solution de l'équation complète. La première représente le mouvement propre de l'oscillateur, mouvement amorti qui n'est que transitoire. La seconde décrit le régime permanent des oscillations forcées qui prend place après celui-ci. La solution est alors:

$$\theta(\tau) = \theta_m \cos(\xi\tau - \phi) \quad \text{avec} \quad \boxed{\tan \phi = \frac{\alpha\xi}{1 - \xi^2}}$$

et l'amplitude d'oscillation  $\theta_m$  est  $\boxed{\theta_m = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 \xi^2 + (1 - \xi^2)^2}}}$

Les courbes représentant la phase  $\phi$  et l'amplitude  $\frac{\theta_m}{\gamma}$  en fonction de la pulsation excitatrice  $\xi$  sont tracées sur la figure III.8, pour diverses valeurs du coefficient d'amortissement  $\alpha$ .

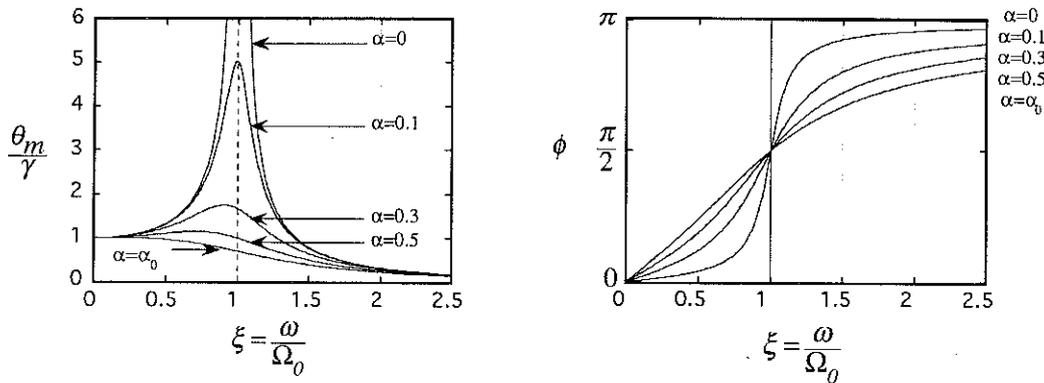


Fig. III.8:

Evolutions de l'amplitude maximale et de la phase des oscillations du pendule, en fonction de la fréquence excitatrice, paramétrées par quelques valeurs du coefficient d'amortissement.

L'effet des frottements est donc

- de borner l'amplitude des oscillations même à la résonance ( $\xi = 1$ )
- diminuer l'acuité de la résonance (tassement des courbes de résonance)
- éloigner la fréquence de résonance (maximum de  $\frac{\theta_m}{\gamma} = f(\xi)$ ) de la fréquence propre ( $\xi = 1$ )
- atténuer les variations rapides de la phase en fonction de la pulsation excitatrice.

Notons enfin qu'il existe une valeur limite de  $\alpha$  ( $\alpha_0 = 1/\sqrt{2}$ ) au dessus de laquelle il n'existe plus de phénomène de résonance ( $\frac{\theta_m}{\gamma}$  ne passe plus par un maximum).

### III.4.1.3- Résonance non linéaire et phénomène de saut

Lorsque les termes non-linéaires sont pris en compte dans les équations, les courbes de réponse (cf. figure III.8) sont modifiées et des phénomènes nouveaux apparaissent alors.

#### a) Pendule forcé

Pour décrire ces notions de résonance non-linéaire, nous commençons par l'exemple du pendule forcé qui est décrit, si les frottements sont pris en compte, par l'équation:

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{k}{J} \dot{\theta}(t) + \Omega_0^2 \theta(t) - \frac{\Omega_0^2}{6} \theta^3(t) = \frac{\Gamma}{J} \cos \omega t \quad (\text{III.19})$$

En posant  $\tau = \omega t$      $\xi = \frac{\Omega_0}{\omega}$      $\alpha = \frac{k}{J\omega}$      $\gamma = \frac{\Gamma}{J\omega^2}$

l'équation (III.19) devient  $\theta''(\tau) + \alpha\theta'(\tau) + \xi^2\theta(\tau) - \frac{\xi^2}{6}\theta^3(\tau) = \gamma \cos \tau$

où  $\theta'' = \frac{d^2\theta}{d\tau^2}$      $\theta' = \frac{d\theta}{d\tau}$

Nous allons supposer  $\theta$  petit en posant  $\theta = \varepsilon \tilde{\theta}$  où  $\varepsilon \ll 1$ . L'équation précédente s'écrit alors

$$\tilde{\theta}''(\tau) + \alpha \tilde{\theta}'(\tau) + \xi^2 \tilde{\theta}(\tau) - \varepsilon^2 \frac{\xi^2}{6} \tilde{\theta}^3(\tau) = \frac{\gamma}{\varepsilon} \cos \tau \quad (\text{III.20})$$

Le terme non linéaire apparaît alors à l'ordre deux en epsilon. Pour voir comment ce terme non linéaire influence sur les courbes de réponse du pendule, nous allons considérer des frottements et un forçage petits et également à l'ordre deux en epsilon ( $\gamma/\varepsilon = \varepsilon^2 \tilde{\gamma}$  et  $\alpha = \varepsilon^2 \tilde{\alpha}$ ). De plus pour traduire le déplacement de la fréquence de résonance nous allons développer  $\xi$  comme  $\xi = 1 + \varepsilon \xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2 + \dots$ .

L'équation (III.20) se réécrit alors

$$\tilde{\theta}''(\tau) + \varepsilon^2 \tilde{\alpha} \tilde{\theta}'(\tau) + (1 + \varepsilon \xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2)^2 \tilde{\theta}(\tau) - \frac{\varepsilon^2}{6} (1 + \varepsilon \xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2)^2 \tilde{\theta}^3(\tau) = \varepsilon^2 \tilde{\gamma} \cos \tau \quad (\text{III.21})$$

La méthode perturbative suppose un développement de la solution en

$$\tilde{\theta}(\tau) = \tilde{\theta}_0(\tau) + \varepsilon \tilde{\theta}_1(\tau) + \varepsilon^2 \tilde{\theta}_2(\tau) + \dots$$

Insérée dans (III.21), et les coefficients des diverses puissances de  $\varepsilon$  égalées à zéro, cette équation donne le système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\theta}_0''(\tau) + \tilde{\theta}_0(\tau) = 0 \\ \tilde{\theta}_1''(\tau) + \tilde{\theta}_1(\tau) = -2\xi_1 \tilde{\theta}_0(\tau) \\ \tilde{\theta}_2''(\tau) + \tilde{\theta}_2(\tau) = \tilde{\gamma} \cos \tau - \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_0'(\tau) - 2\xi_1 \tilde{\theta}_1(\tau) - 2\xi_2 \tilde{\theta}_0(\tau) - \xi_1^2 \tilde{\theta}_0(\tau) + \frac{\tilde{\theta}_0^3(\tau)}{6} \end{array} \right.$$

La solution de la première est  $\tilde{\theta}_0(\tau) = \tilde{a}_0 \cos \tau + \tilde{b}_0 \sin \tau$

Insérée dans la deuxième équation cette solution donne

$$\tilde{\theta}_1''(\tau) + \tilde{\theta}_1(\tau) = -2\xi_1 (\tilde{a}_0 \cos \tau + \tilde{b}_0 \sin \tau)$$

La solution  $\tilde{\theta}_j(\tau)$  doit être périodique ce qui implique que les coefficients de  $\cos \tau$  et  $\sin \tau$  doivent être nuls sinon des solutions non périodiques avec des termes séculaires en  $\tau \cos \tau$  et  $\tau \sin \tau$  apparaîtraient. Donc  $\xi_j = 0$ .

La troisième équation nous donne alors

$$\tilde{\theta}_2''(\tau) + \tilde{\theta}_2(\tau) = A \cos \tau + B \sin \tau + C \cos 3\tau + D \sin 3\tau$$

L'annulation des termes séculaires donne donc

$$B = 0 \Rightarrow \tilde{\alpha} \tilde{a}_0 - \tilde{b}_0 \left( 2\xi_2 - \frac{I}{8} (\tilde{a}_0^2 + \tilde{b}_0^2) \right) = 0 \quad (\text{III.22})$$

$$A = 0 \Rightarrow \tilde{\alpha} \tilde{b}_0 + \tilde{a}_0 \left( 2\xi_2 - \frac{I}{8} (\tilde{a}_0^2 + \tilde{b}_0^2) \right) = \tilde{\gamma} \quad (\text{III.23})$$

Soit  $\tilde{r}_0 = \sqrt{\tilde{a}_0^2 + \tilde{b}_0^2} > 0$  l'amplitude de la solution  $\tilde{\theta}(\tau)$ ; ces deux équations se réécrivent

$$\tilde{r}_0^2 \left( \tilde{\alpha}^2 + \left( 2\xi_2 - \frac{I}{8} \tilde{r}_0^2 \right)^2 \right) = \tilde{\gamma}^2 \quad (\text{III.24})$$

En revenant aux paramètres originaux de l'équation (III.19), l'équation (III.24) à l'ordre deux en epsilon s'écrit:

$$\boxed{r_0^2 \left( \frac{k^2}{J^2} \omega^2 + \left( \omega^2 - \Omega_0^2 + \frac{I}{8} \Omega_0^2 r_0^2 \right)^2 \right) = \frac{\Gamma^2}{J^2}} \quad (\text{III.25})$$

Cette équation permet donc de connaître l'amplitude d'oscillations du pendule en fonction de la fréquence et de l'amplitude du forçage. Elle met en évidence des caractéristiques nouvelles par rapport aux courbes de réponse du pendule linéarisé.

*i - Cas sans frottements:*

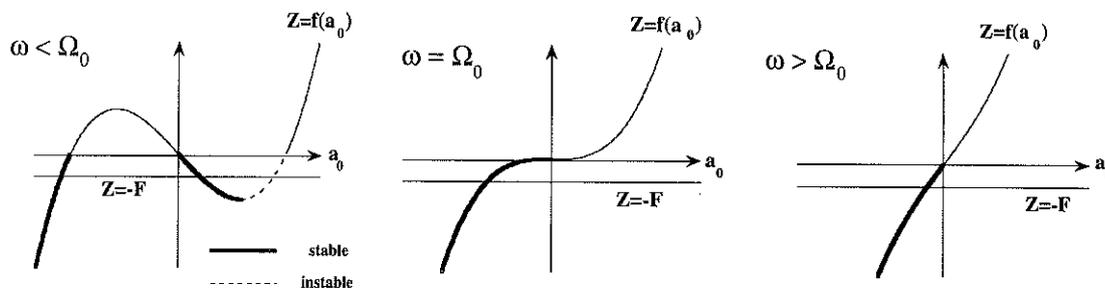
Les équations (III.22) et (III.23) ont pour solution lorsque  $\tilde{\alpha} = 0$ :

$$\tilde{b}_0 = 0 \qquad \tilde{a}_0 \left( 2\xi_2 - \frac{1}{8}\tilde{a}_0^2 \right) = \tilde{\gamma}$$

cette dernière équation se réécrivant

$$\boxed{a_0 \left( \omega^2 - \Omega_0^2 + \frac{1}{8}\Omega_0^2 a_0^2 \right) = -\frac{\Gamma}{J}} \qquad \text{(III.26)}$$

On peut comprendre de manière graphique le comportement de ces solutions en cherchant les intersections de la fonction  $Z = f(a_0) = a_0 \left( \omega^2 - \Omega_0^2 + \frac{1}{8}\Omega_0^2 a_0^2 \right)$  avec les lignes  $Z = -\frac{\Gamma}{J}$  noté  $-F$  sur la figure ( $F > 0$ )



**Fig. III.9:**

Résolution graphique de l'équation (III.26)

Donc si  $\omega > \Omega_0$  une seule solution oscillatoire de pulsation  $\omega$  est possible. Cette oscillation est déphasée de  $180^\circ$  par rapport à l'excitation. Si  $F$  est petit, on retrouve la solution du pendule linéaire.

Si  $\omega < \Omega_0$  et  $F$  assez grand, une seule réponse déphasée de  $180^\circ$  est également possible. Par contre pour de plus faibles valeurs de  $F$  ( $F < \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \Omega_0^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_0^2}\right)^{3/2}$ ), trois réponses sont possibles: une déphasée de  $180^\circ$  avec le forçage et deux en phase. On montre qu'une des deux solutions en phase avec l'excitation est instable.

On note que les amplitudes d'oscillations restent toujours bornées même à la résonance, contrairement au cas linéaire où seuls les frottements permettent des solutions bornées à la résonance. Les non-linéarités contrôlent donc l'amplitude d'oscillations ; en effet le forçage tendrait à augmenter indéfiniment l'amplitude (cf. pendule linéaire sans frottements à la résonance). Or l'effet des non-linéarités est de diminuer la fréquence propre lorsque l'amplitude d'oscillations augmente (cf. non-isochronisme).

Les courbes de réponse définies par l'équation (III.26) sont montrées sur la figure III.10 pour diverses valeurs de  $F$  dans le plan  $(a_0, \omega)$ . Pour une valeur de  $F$  donnée correspondent deux branches distinctes, l'une associée au déphasage  $180^\circ$ , l'autre au déphasage  $0^\circ$ .

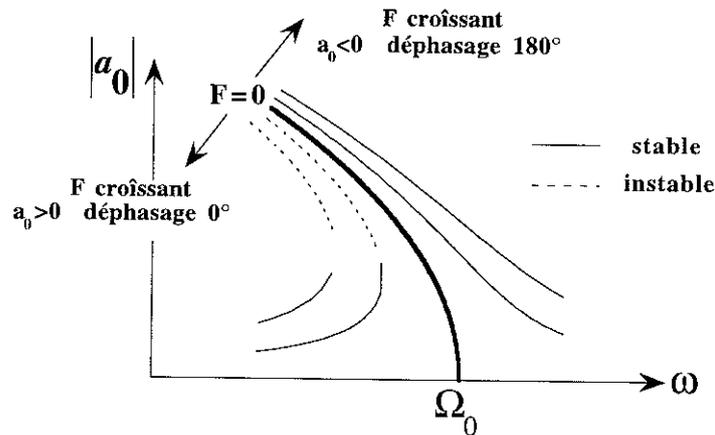


Fig. III.10:

Courbes de réponses du pendule non linéaire sans frottements à une excitation d'amplitude  $F$  et de pulsation  $\omega$

ii - Cas avec frottements:

L'équation (III.25) donne les courbes de réponses montrées figure III.11

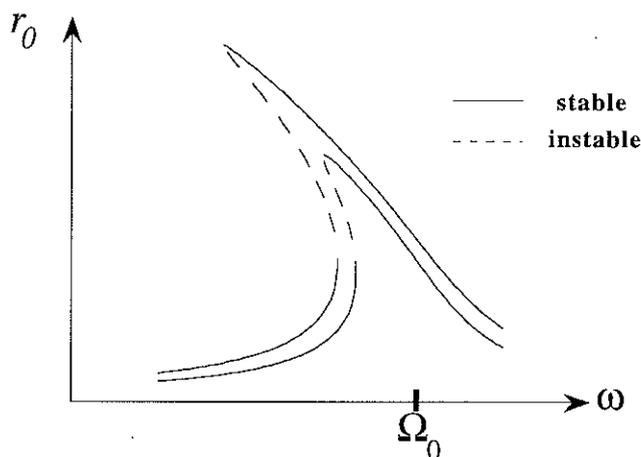


Fig. III.11:

Courbes de réponse du pendule non linéaire de la figure III.10 modifiées par la présence des frottements

Les deux branches d'une courbe pour  $F$  donné, se referment maintenant pour ne former qu'une seule courbe continue. Pour  $\omega \geq \Omega_0$  une seule solution est possible.

Pour  $\omega < \Omega_0$ , si la fréquence  $\omega$  varie continûment à  $F$  fixé, on voit apparaître une discontinuité de la réponse (cf. fig. III.11); de même si la fréquence est fixée une discontinuité dans l'amplitude de l'oscillation apparaît si l'on varie continûment l'amplitude du forçage (cf. figure III.12). Les mêmes discontinuités sont observées dans la phase avec l'excitation.

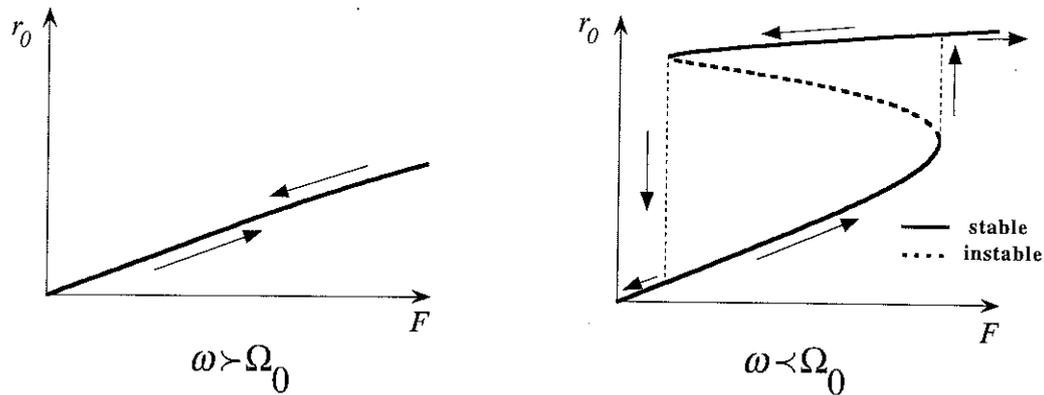


Fig. III.12:

Evolution de l'amplitude de la réponse du pendule forcé avec frottements en fonction de l'amplitude du forçage suivant que l'on se trouve au dessus ou en dessous de la résonance

C'est le phénomène de saut caractéristique de la résonance non-linéaire, associé à une bifurcation sous-critique. Ce phénomène n'a lieu qu'en dessous de la résonance; il est donc possible à partir de l'observation de ce phénomène de situer la résonance dans l'échelle de fréquences. En effet il suffit de repérer ce phénomène de saut. Cependant, de manière pratique, il n'est pas toujours aisé de repérer celui-ci. Pour améliorer la mesure des modes propres nous allons donc appliquer une autre excitation sur le pendule qui se comporte alors de manière analogue mais qui est plus précise pour la recherche des modes propres.

### b) Pendule forcé paramétriquement

Le point de suspension du pendule simple, de masse  $m$  et de longueur  $l$ , est maintenant soumis à un mouvement vertical alternatif de pulsation  $\omega$  et de moment  $\Gamma$ . L'équation du mouvement s'écrit alors

$$\ddot{\theta}(t) + \left( \Omega_0^2 + \frac{\Gamma}{ml^2} \cos \omega t \right) \sin \theta = 0 \quad (\text{III.27})$$

avec  $\Omega_0^2 = g/l$ .

Cette équation peut être vue comme celle d'un pendule oscillant dans un champ de pesanteur variable  $g(t) = g + \frac{\Gamma \cos \omega t}{ml}$ . Ce pendule, dont l'un des paramètres varie avec le temps, est appelé oscillateur paramétrique.

Si l'on considère l'équation (III.27) linéarisée pour des petits angles, on montre que pour certaines fréquences d'excitation, la position  $\theta(t) = 0$  du pendule devient instable et des oscillations, dont l'amplitude diverge, naissent de cette instabilité. Ces résonances ont lieu pour  $\omega = \frac{2}{n} \Omega_0$  ( $n$  entier) et la principale d'entre elles prend place pour  $\omega = 2\Omega_0$ .

Si l'on prend en compte des termes non-linéaires dans l'équation (III.27), alors des solutions oscillantes sont stabilisées par les non-linéarités qui contrôlent l'amplitude d'oscillations. Ce type d'instabilité est qualifié de sous-harmonique car il conduit le pendule à osciller à la fréquence moitié de l'excitation (pour la résonance  $n = 1$ ).

Nous allons nous intéresser à ces résonances dans un diagramme de phase  $(\Gamma, \omega)$  pour de faibles amplitudes de forçage.

*i - Equation linéaire*

Sous forme adimensionnelle l'équation (III.27) une fois linéarisée devient

$$\theta''(\tau) + \left( \xi^2 + \gamma \cos \tau \right) \theta(\tau) = 0 \tag{III.28}$$

avec  $\tau = \omega t \quad \xi = \frac{\Omega_0}{\omega} \quad \gamma = \frac{\Gamma}{ml^2 \omega^2}$

Cette équation (III.28) est appelée équation de Mathieu.

Pour  $n = 1$ , qui correspond à la plus forte résonance, les courbes de transition entre régimes stables et instables sont données par

$$\xi = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \gamma \tag{III.29}$$

Si l'on rajoute un terme de frottements dans l'équation (III.28), on obtient

$$\theta''(\tau) + \alpha\theta'(\tau) + \left(\xi^2 + \gamma \cos \tau\right)\theta(\tau) = 0$$

qui se réécrit, en posant  $\theta(\tau) = e^{-\frac{1}{2}\alpha\tau} \eta(\tau)$ ,  $\eta''(\tau) + \left(\xi^2 - \frac{1}{4}\alpha^2 + \gamma \cos \tau\right)\eta(\tau) = 0$

On retrouve alors une équation de Mathieu, qui donne pour les régions stables près de  $\xi = \frac{1}{2}$

$$\left(\xi^2 - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}(\gamma^2 - \alpha^2) > 0 \tag{III.30}$$

La figure III.13 représente les zones de stabilité linéaire (pour  $n = 1, 2, 3, 4$ ) définies par les équations (III.29) et (III.30), réécrites avec les paramètres de l'équation (III.27). Notons  $F = \frac{\Gamma}{ml^2}$ .

On voit donc qu'en présence de frottements, un seuil d'excitation fini est nécessaire pour déstabiliser l'oscillateur paramétrique à la résonance.

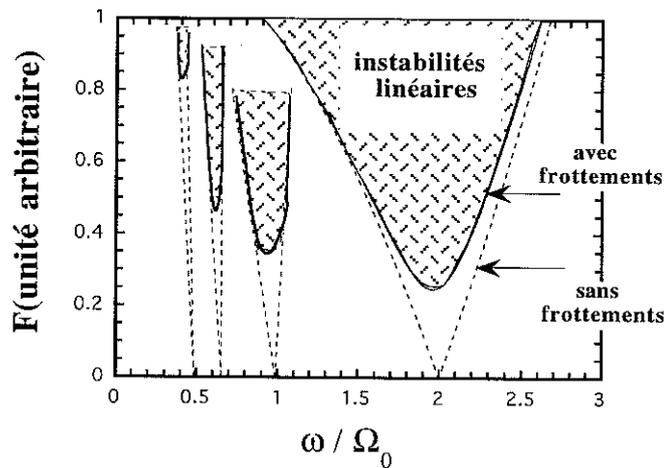


Fig. III.13:  
Diagramme de stabilité pour l'équation de Mathieu

Ce diagramme concerne l'étude linéaire de l'oscillateur paramétrique. Nous allons maintenant voir comment il se modifie lorsque les termes d'ordres supérieurs sont pris en compte

ii - Effet des non linéarités

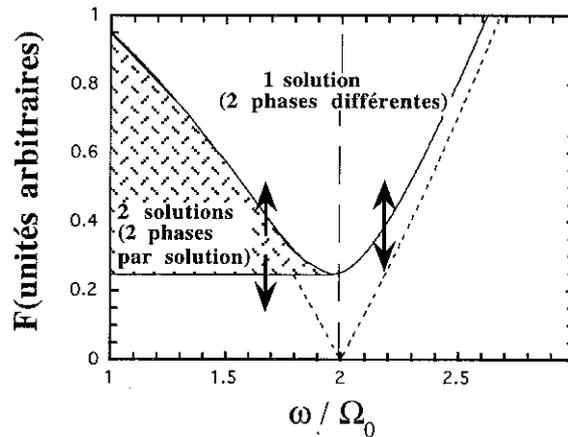


Fig. III.14:

Diagramme de stabilité du pendule paramétrique (équation (III.27)).

Les instabilités (résonances) du cas linéaire sont stabilisées par les termes non linéaires (les non linéarités contrôlent l'amplitude d'oscillations). Il y a alors deux solutions de même amplitude mais de phases différentes (cf. fig. III.14)

Si  $\omega > 2\Omega_0$ , toutes les solutions sont stables; si l'on fait croître  $F$ , alors à partir d'un certain seuil (qui augmente avec  $\omega$ ) l'amplitude des oscillations passe continûment d'une valeur nulle à une valeur non nulle. Lorsque  $F$  décroît ce processus est réversible. Dans les deux cas, ceci se passe pour la même valeur du forçage  $F$ . La bifurcation qui caractérise ce passage est une bifurcation sur-critique.

Par contre pour  $\omega < 2\Omega_0$ , une région instable apparaît (zone hachurée sur la figure III.14). Dans cette zone il existe deux solutions d'amplitudes différentes. On montre que l'une des deux est instable. Tout comme le pendule forcé, deux phénomènes nouveaux apparaissent lorsque l'on passe de l'analyse linéaire à l'analyse non linéaire: le passage d'une amplitude d'oscillation nulle à une amplitude finie est discontinu; on retrouve donc ici le phénomène de saut (cf. pendule forcé). D'autre part cette bifurcation présente de l'hystérésis c'est-à-dire que l'amplitude du forçage pour laquelle cette bifurcation est observée n'est pas la même si celle-ci croît ou décroît. Cette bifurcation est une bifurcation sous-critique.

Ces deux types de bifurcation sont montrés sur la figure III.15, où l'amplitude des oscillations est représentée en fonction de l'amplitude du forçage. La ligne en pointillés représente la solution instable. Le seuil  $F_1$  augmente au fur et à mesure que l'on s'écarte de la résonance  $2\Omega_0$ . Le seuil  $F_2$  est par contre indépendant de  $\omega$  (pourvu que  $\omega < 2\Omega_0$ ) et ne dépend que des frottements (c'est la droite  $F = \text{constante}$  de la figure III.14).

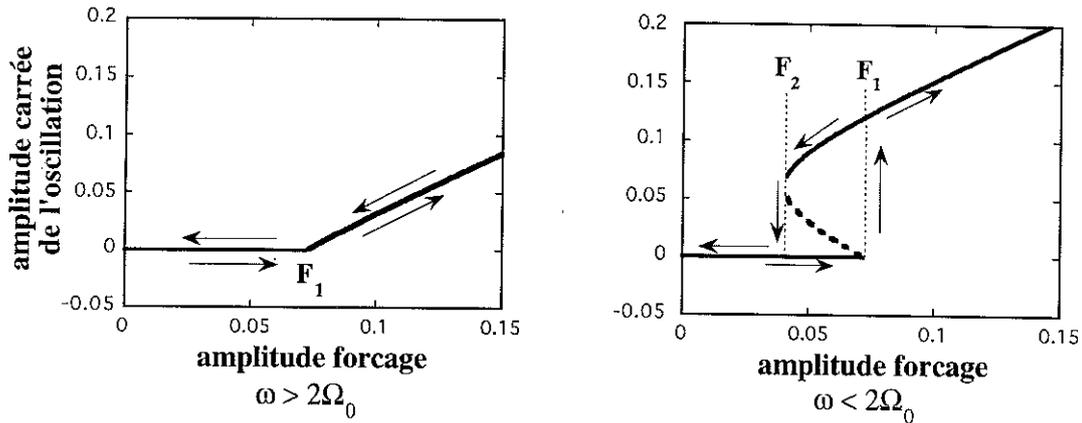


Fig. III.15:

*Evolution de l'amplitude de la réponse du pendule paramétrique avec frottements en fonction de l'amplitude du forçage suivant que l'on se trouve au dessus ou en dessous de la résonance  $2\Omega_0$ .*

Nous avons vu que les phénomènes de résonance non-linéaire introduisent des comportements différents en dessous et au dessus de la résonance. En dessous de celle-ci un phénomène de saut apparaît. Nous avons cependant signalé qu'en pratique, ce phénomène n'est pas aisément repérable de manière précise. Par contre, nous allons voir qu'en excitation paramétrique il est possible de faire des mesures plus précises à partir du diagramme présenté sur la figure III.14.

#### III.4.1.4- Procédures expérimentales pour les mesures des fréquences propres

Pour des oscillateurs linéaires, la recherche des fréquences propres peut se faire à partir de la mesure de l'amplitude d'oscillations qui passe par un maximum à la résonance si les frottements ne sont pas trop élevés (cf. § III.4.1.2). Il est évident qu'ici

cette méthode n'est pas adaptée puisque d'une part il est difficile d'estimer, pour une oscillation donnée, si les termes non linéaires sont importants et d'autre part si on se limite aux très petites oscillations, la précision expérimentale sur la mesure de l'angle ne permet pas de conclure.

Deux méthodes de mesure des fréquences propres  $f_1 = \frac{\Omega_1}{2\pi}$  et  $f_2 = \frac{\Omega_2}{2\pi}$ , définies dans les équations (III.15) et (III.16) ont été utilisées expérimentalement.

La première s'appuie sur le résultat des équations linéarisées des modes propres: les oscillations de petite amplitude ont des fréquences  $f_1$  et  $f_2$  pour respectivement les modes en phase et en opposition de phase.

La deuxième méthode est liée aux phénomènes de résonance non-linéaire et plus spécifiquement à l'apparition d'un seuil de forçage indépendant de la fréquence pour  $\omega < 2\Omega_0$  lié à une bifurcation sous-critique (cf. paragraphe précédent).

#### *a) A partir des petites oscillations*

Les deux boussoles sont excitées avec des champs alternatifs, soit perpendiculaires à  $\vec{r}_{A,B}$ , soit longitudinalement (excitation paramétrique). Dans le premier cas, la fréquence excitatrice doit donc être autour de la fréquence propre du mode considéré ( $f_1$  ou  $f_2$ ). Dans le cas de l'excitation paramétrique, la fréquence excitatrice doit être autour du double de la fréquence propre puisque dans ce cas le système répond à la fréquence moitié.

Une fois obtenus ces modes propres d'oscillations, l'excitation extérieure est coupée et le système relaxe (dû aux frottements) vers la position d'équilibre stable  $\theta_A = \theta_B = 0$ . Lors de ces relaxations, le système garde le type d'oscillation qui était excité par le champ extérieur puisqu'ils sont modes propres du système. Au moment où l'excitation extérieure est coupée, le système oscille à la fréquence imposée par le champ ( $f = \frac{\omega}{2\pi}$  pour l'excitation perpendiculaire, et  $f = \frac{1}{2} \frac{\omega}{2\pi}$  dans le cas paramétrique). La fréquence d'oscillations varie alors continûment jusqu'à atteindre  $f_1$  ou  $f_2$  pour les petites amplitudes d'oscillations. Il suffit donc d'enregistrer ces oscillations qui relaxent, et par un spectre de Fourier de voir vers quelle valeur tend la fréquence d'oscillations.

Nous présentons sur la figure III.16, le spectre de Fourier d'un tel mouvement de relaxation. Le système est excité par un champ de fréquence 3 Hz. Le mouvement est un mouvement d'oscillations des deux boussoles en phase. Lorsque l'on coupe l'excitation, l'oscillation a perdu progressivement de l'amplitude, augmentant ainsi sa fréquence d'oscillations. La fin du mouvement est caractérisée par une fréquence

d'oscillation de l'ordre de 3.8 Hz qui est donc la fréquence du mode propre d'oscillations des deux boussoles en phases (cf. équation (III.15)).

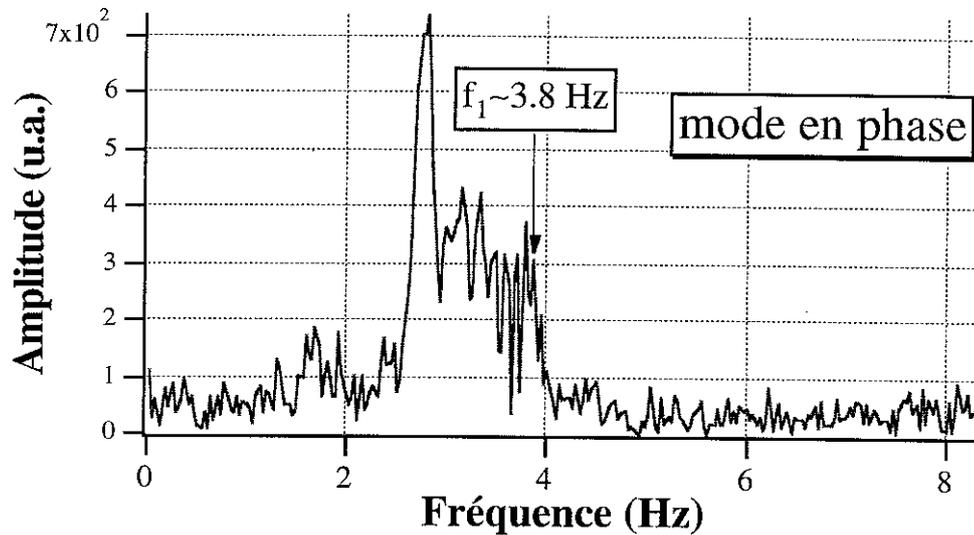


Fig. III.16:

*Spectre de Fourier d'un mouvement d'oscillations en phase des deux boussoles. Le système était excité par un champ de 3 Hz qui a été coupé à  $t=0$  (début de l'enregistrement du mouvement). L'oscillation qui relaxe augmente progressivement sa fréquence jusqu'à atteindre la fréquence propre (mesurée ici à 3.8 Hz).*

*b) A partir des phénomènes de saut*

La deuxième procédure expérimentale utilise les résultats développés sur l'oscillateur paramétrique dans le cadre de la résonance non-linéaire et notamment l'existence du phénomène de saut associé à une bifurcation sous-critique lorsque la fréquence d'excitation est inférieure à la fréquence de résonance.

Les modes propres sont excités par un champ alternatif longitudinal, c'est-à-dire que l'on se trouve dans le cas de l'oscillateur paramétrique. Puis on fait décroître progressivement l'amplitude de ce champ. Si la fréquence du champ est supérieure au double de la fréquence de résonance, alors l'amplitude d'oscillations va décroître de manière continue jusqu'à zéro (bifurcation sur-critique). Par contre, si la fréquence du champ est inférieure au double de la fréquence de résonance, alors une discontinuité dans la décroissance de l'amplitude d'oscillations sera observable (phénomène de saut associé à une bifurcation sous-critique). La variation de l'amplitude du champ pour laquelle on observe ces bifurcations, en fonction de la fréquence du champ est donnée figure III.17.

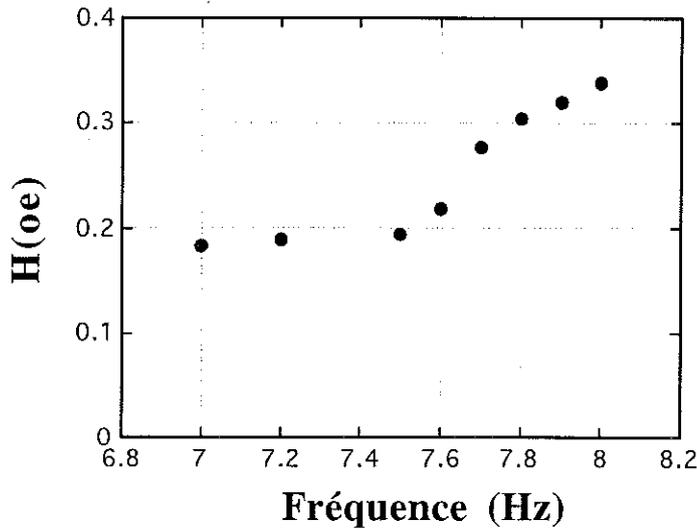


Fig. III.17:

Variation de l'amplitude du champ pour laquelle on n'observe plus d'oscillations dans le cas d'une excitation paramétrique des deux boussoles.

Cette courbe a donc la même forme que celle présentée sur la figure III.14 (courbe définie par les flèches descendantes qui correspond à la procédure expérimentale effectuée). La fréquence propre que l'on en déduit est donc en très bon accord avec la mesure à partir des petites oscillations.

Les figures III.16 et III.17 nous permettent donc de conclure sur une fréquence d'oscillations du mode propre en phase (cf. équation (III.15)):

$$f_1 = 3.8 \text{ Hz}$$

Les mêmes procédures ont été employées pour la mesure de la fréquence propre correspondant au mode d'oscillations en opposition de phase. On trouve alors pour cette fréquence

$$f_2 = 2.4 \text{ Hz}$$

c) Comparaison des résultats

Si l'on calcule ces fréquences à partir des valeurs de moments magnétiques mesurées, on s'aperçoit que les résultats ne sont pas compatibles. En effet, les fréquences des modes propres sont d'après les équations (III.15) et (III.16):

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3\mu_A\mu_B}{Jr^3}} \quad \text{et} \quad f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_A\mu_B}{Jr^3}}$$

ce qui nous donne pour des moments magnétiques  $\mu_A = 0.29 \text{ emu}$  et  $\mu_B = 0.28 \text{ emu}$  ( $J = 1.37 \cdot 10^{-3} \text{ gcm}^2$ ,  $r = 1.2 \text{ cm}$ ) des fréquences propres:  $f_1 = 1.70 \text{ Hz}$  et  $f_2 = 0.98 \text{ Hz}$ . Il y a donc un désaccord très important avec les valeurs mesurées directement.

Il est évident que compte tenu des tailles des boussoles ( $l = 1 \text{ cm}$ ) et des distances qui les séparent ( $r_{A,B} = 1.2 \text{ cm}$ ), il est difficile de considérer le champ créé par une boussole sur sa voisine comme celui créé par un dipôle ponctuel. Il paraît donc nécessaire ici d'introduire des termes d'ordres supérieurs dans l'expression du champ créé par une boussole. Celle-ci va donc être maintenant considérée comme un dipôle de demi-longueur  $d$ . La taille de ce dipôle sera alors ajustée pour obtenir les fréquences propres mesurées expérimentalement. On peut noter que ceci ne remet pas en cause les mesures de moments magnétiques à partir des oscillations dans un champ constant; qu'il soit ponctuel ou étendu, son équation du mouvement dans un champ uniforme reste inchangée.

#### III.4.1.5- La boussole en tant que "dipôle étendu"

Le dipôle est constitué de deux "charges magnétiques"  $\pm m$  séparées d'une distance  $2d$ . Le moment magnétique est alors  $\mu = 2md$ . Au deuxième ordre, le potentiel à une distance  $r$  du centre du dipôle est (cf. [Erb. 67]):

$$V(r, \theta) = \mu \frac{\cos \theta}{r^2} \left( 1 + \frac{d^2}{2r^2} (5 \cos^2 \theta - 3) \right)$$

où  $\theta$  est l'angle entre  $\vec{\mu}$  et  $\vec{r}$  (cf. figure III.7)

Le premier terme représente le potentiel créé par un dipôle ponctuel alors que le second représente la contribution octupolaire (compte tenu de la symétrie des boussoles, il n'y a pas de termes quadrupolaires).

Le champ créé par ce dipôle étendu est (cf. figure III.7)

$$H_r(r, \theta) = 2\mu \frac{\cos \theta}{r^3} \left( 1 + \frac{d^2}{r^2} (5 \cos^2 \theta - 3) \right)$$

$$H_\theta(r, \theta) = \mu \frac{\sin \theta}{r^3} \left( 1 + \frac{3d^2}{2r^2} (5 \cos^2 \theta - 1) \right)$$

Couple exercé sur le dipôle B:

La figure III.18 représente les deux dipôles A et B de demi longueur  $d$ . Ils sont écartés de la direction  $\vec{r}$  de  $\theta_A$  et  $\theta_B$ .

Les charges  $m$  sont appelées PA et MA pour le dipôle A et PB et MB pour le dipôle B.

On définit des directions  $\vec{r}_{PB}$  et  $\vec{r}_{MB}$  rejoignant le centre du dipôle A aux extrémités PB et MB du dipôle B, en faisant respectivement des angles  $\theta_{PB}$  et  $\theta_{MB}$  avec le dipôle A.

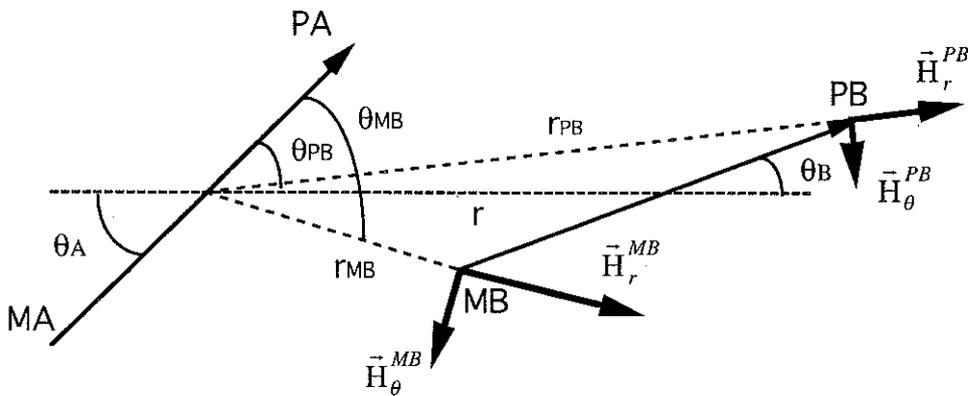


Fig. III.18:

Représentation schématique des deux dipôles étendus A et B ainsi que les forces s'appliquant sur les charges du dipôle B.

La charge MB du dipôle B subit une force  $\vec{F}_{MB} = -\frac{\mu_B}{2d} \left( \vec{H}_r^{MB} + \vec{H}_\theta^{MB} \right)$

La charge PB du dipôle B subit une force  $\vec{F}_{PB} = +\frac{\mu_B}{2d} \left( \vec{H}_r^{PB} + \vec{H}_\theta^{PB} \right)$

Le moment exercé sur le dipôle B est

$$\vec{M}_B = \vec{d} \wedge (\vec{F}_{PB} - \vec{F}_{MB})$$

En procédant de la sorte pour le dipôle A, on obtient après quelques calculs les équations du mouvement suivantes pour deux dipôles étendus en interaction:

$$\ddot{\theta}_A = -\frac{\mu_A}{2J} \left( -H_r^{PA} \frac{r \sin \theta_A}{r_{PA}} - H_r^{MA} \frac{r \sin \theta_A}{r_{MA}} + H_\theta^{PA} \frac{r \cos \theta_A - d}{r_{PA}} + H_\theta^{MA} \frac{r \cos \theta_A + d}{r_{MA}} \right) \quad (\text{III.31})$$

$$\ddot{\theta}_B = -\frac{\mu_B}{2J} \left( +H_r^{PB} \frac{r \sin \theta_B}{r_{PB}} + H_r^{MB} \frac{r \sin \theta_B}{r_{MB}} + H_\theta^{PB} \frac{r \cos \theta_B + d}{r_{PB}} + H_\theta^{MB} \frac{r \cos \theta_B - d}{r_{MB}} \right) \quad (\text{III.32})$$

avec:

$$r_{PA} = \sqrt{d^2 + r^2 - 2dr \cos \theta_A}$$

$$r_{PB} = \sqrt{d^2 + r^2 + 2dr \cos \theta_B}$$

$$r_{MA} = \sqrt{d^2 + r^2 + 2dr \cos \theta_A}$$

$$r_{MB} = \sqrt{d^2 + r^2 - 2dr \cos \theta_B}$$

$$\cos \theta_{PA} = \frac{d \cos(\theta_A - \theta_B) - r \cos \theta_B}{r_{PA}}$$

$$\cos \theta_{PB} = \frac{d \cos(\theta_B - \theta_A) + r \cos \theta_A}{r_{PB}}$$

$$\sin \theta_{PA} = \frac{d \sin(\theta_A - \theta_B) + r \sin \theta_B}{r_{PA}}$$

$$\sin \theta_{PB} = \frac{-d \sin(\theta_B - \theta_A) + r \sin \theta_A}{r_{PB}}$$

$$\cos \theta_{MA} = -\frac{d \cos(\theta_A - \theta_B) + r \cos \theta_B}{r_{MA}}$$

$$\cos \theta_{MB} = \frac{-d \cos(\theta_B - \theta_A) + r \cos \theta_A}{r_{MB}}$$

$$\sin \theta_{MA} = \frac{-d \sin(\theta_A - \theta_B) + r \sin \theta_B}{r_{MA}}$$

$$\sin \theta_{MB} = \frac{d \sin(\theta_B - \theta_A) + r \sin \theta_A}{r_{MB}}$$

$$H_r^{PA} = 2\mu_B \frac{\cos \theta_{PA}}{r_{PA}} \left( 1 + \frac{d^2}{r_{PA}^2} (5 \cos^2 \theta_{PA} - 3) \right)$$

$$H_r^{PB} = 2\mu_A \frac{\cos \theta_{PB}}{r_{PB}} \left( 1 + \frac{d^2}{r_{PB}^2} (5 \cos^2 \theta_{PB} - 3) \right)$$

$$H_\theta^{PA} = \mu_B \frac{\sin \theta_{PA}}{r_{PA}} \left( 1 + \frac{3d^2}{2r_{PA}^2} (5 \cos^2 \theta_{PA} - 1) \right)$$

$$H_\theta^{PB} = \mu_A \frac{\sin \theta_{PB}}{r_{PB}} \left( 1 + \frac{3d^2}{2r_{PB}^2} (5 \cos^2 \theta_{PB} - 1) \right)$$

$$H_r^{MA} = 2\mu_B \frac{\cos \theta_{MA}}{r_{MA}} \left( 1 + \frac{d^2}{r_{MA}^2} (5 \cos^2 \theta_{MA} - 3) \right)$$

$$H_r^{MB} = 2\mu_A \frac{\cos \theta_{MB}}{r_{MB}} \left( 1 + \frac{d^2}{r_{MB}^2} (5 \cos^2 \theta_{MB} - 3) \right)$$

$$H_\theta^{MA} = \mu_B \frac{\sin \theta_{MA}}{r_{MA}} \left( 1 + \frac{3d^2}{2r_{MA}^2} (5 \cos^2 \theta_{MA} - 1) \right)$$

$$H_\theta^{MB} = \mu_A \frac{\sin \theta_{MB}}{r_{MB}} \left( 1 + \frac{3d^2}{2r_{MB}^2} (5 \cos^2 \theta_{MB} - 1) \right)$$

Les modes propres de ces deux dipôles étendus en interaction s'obtiennent en linéarisant ces équations pour des petits angles  $\theta_A$  et  $\theta_B$ .

Pour le mode en phase  $X(t) = \theta_A(t) + \theta_B(t)$ , on obtient

$$\ddot{X}(t) + \frac{\mu_A \mu_B}{2J} r \left[ \frac{1}{(r-d)^4} \left( 3 + 10 \frac{d^2}{(r-d)^2} \right) + \frac{1}{(r+d)^4} \left( 3 + 10 \frac{d^2}{(r+d)^2} \right) \right] X(t) = 0 \quad (\text{III.33})$$

c'est-à-dire de la forme  $\ddot{X}(t) + \Omega_1^2 X(t) = 0$

Pour le mode en opposition de phase  $Y(t) = \theta_A(t) - \theta_B(t)$ , on obtient

$$\ddot{Y}(t) + \frac{\mu_A \mu_B}{2J} \left[ \frac{1}{(r-d)^4} \left( r + 2d + \frac{2d^2}{(r-d)^2} (6d-r) \right) + \frac{1}{(r+d)^4} \left( r - 2d - \frac{2d^2}{(r+d)^2} (6d+r) \right) \right] Y(t) = 0 \quad (\text{III.34})$$

c'est-à-dire de la forme  $\ddot{Y}(t) + \Omega_2^2 Y(t) = 0$

Notons que lorsque la taille  $d$  des dipôles tend vers zéro, on retrouve bien les pulsations propres correspondant aux dipôles ponctuels :

$$\Omega_1^2 = \frac{3\mu_A \mu_B}{Jr^3} \quad \text{et} \quad \Omega_2^2 = \frac{\mu_A \mu_B}{Jr^3}$$

La taille  $2d$  des dipôles est donc déduite de la mesure de ces fréquences propres d'oscillations. Les deux mesures ( $f_1 = 3.8 \text{ Hz}$  et  $f_2 = 2.4 \text{ Hz}$ ) sont compatibles avec une taille  $2d = 0.84 \text{ cm}$  qui nous donne comme fréquences propres  $f_1 = 3.85 \text{ Hz}$  et  $f_2 = 2.38 \text{ Hz}$ . Notons que la taille des dipôles trouvée est parfaitement raisonnable pour des boussoles avec une telle géométrie (cf. figure III.1).

### III.4.2- Régimes dynamiques sous un champ tournant

Après avoir complètement caractérisé le système, nous allons nous attacher à ses comportements dynamiques observés expérimentalement avec très peu de frottements. Nous nous intéresserons dans ce paragraphe uniquement aux régimes périodiques d'oscillations; une grande diversité en a été observée.

Dans un premier temps, les équations du mouvement seront écrites. Elles nous permettront de comprendre les régimes périodiques d'oscillations observés que nous inclurons dans un diagramme de phase.

#### III.4.2.1- Equations du mouvement

Chacune des deux boussoles ressent un couple dû au champ tournant, un couple dû au champ créé par sa voisine, et des couples dus aux frottements .

Le couple ressenti par une boussole de moment magnétique  $\mu$  dû au champ tournant d'amplitude  $H$  et de pulsation  $\omega$  s'écrit  $\Gamma_H = \mu H \sin(\omega t - \theta)$  où  $\theta$  est l'angle de la boussole avec la direction  $\vec{r}_{A,B}$  séparant les deux boussoles.

Le couple  $|\vec{\Gamma}_{\text{dipolaire } B \rightarrow A}|$  ressenti par la boussole  $A$ , dû au champ créé par sa voisine  $B$  est décrit par l'équation (III.31).

Les équations du mouvement s'écrivent donc

$$\ddot{\theta}_A(t) = -\frac{k}{J} \dot{\theta}_A(t) + \frac{\mu H}{J} \sin(\omega t - \theta_A(t)) + |\vec{\Gamma}_{\text{dipolaire } B \rightarrow A}| \quad (\text{III.35})$$

$$\ddot{\theta}_B(t) = -\frac{k}{J} \dot{\theta}_B(t) + \frac{\mu H}{J} \sin(\omega t - \theta_B(t)) + |\vec{\Gamma}_{\text{dipolaire } A \rightarrow B}| \quad (\text{III.36})$$

En ajoutant et en retranchant les équations du mouvement des boussoles  $A$  et  $B$ , on obtient les équations des modes en phase  $X(t) = \theta_A(t) + \theta_B(t)$  et en opposition de phase  $Y(t) = \theta_A(t) - \theta_B(t)$  qui, en conservant le premier terme non linéaire s'écrivent :

$$\ddot{X}(t) + \frac{k}{J} \dot{X}(t) + \left[ \frac{\mu H}{J} \cos \omega t + \Omega_1^2 \right] X(t) + \frac{\mu H}{4J} \sin \omega t (X^2 + Y^2) = 2 \frac{\mu H}{J} \sin \omega t \quad (\text{III.37})$$

$$\ddot{Y}(t) + \frac{k}{J} \dot{Y}(t) + \left[ \frac{\mu H}{J} \cos \omega t + \Omega_2^2 \right] Y(t) + \frac{\mu H}{2J} \sin \omega t XY = 0 \quad (\text{III.38})$$

avec (cf. équations (III.33) et (III.34)):

$$\Omega_1^2 = \frac{\mu^2}{2J} r \left[ \frac{1}{(r-d)^4} \left( 3 + 10 \frac{d^2}{(r-d)^2} \right) + \frac{1}{(r+d)^4} \left( 3 + 10 \frac{d^2}{(r+d)^2} \right) \right] \quad (\text{III.39})$$

$$\Omega_2^2 = \frac{\mu^2}{2J} \left[ \frac{1}{(r-d)^4} \left( r + 2d + \frac{2d^2}{(r-d)^2} (6d-r) \right) + \frac{1}{(r+d)^4} \left( r - 2d - \frac{2d^2}{(r+d)^2} (6d+r) \right) \right] \quad (\text{III.40})$$

Les équations (III.37) et (III.38) révèlent alors toute la richesse de comportements dynamiques possibles pour ce système de deux dipôles en interaction soumis à un champ tournant. En effet, le mode en opposition de phase linéarisé, est amplifié paramétriquement (cf. § III.4.1.3.b), tandis que le mode en phase linéarisé est forcé et amplifié paramétriquement. On peut alors facilement concevoir que ces modes et des couplages entre ces modes introduisent une grande diversité et une profonde complexité de la dynamique.

Nous allons cependant tenter d'en dégager quelques mouvements caractéristiques pour les inclure dans un "diagramme de phase" dans le plan  $(H, \omega)$ . Nous nous limiterons aux régimes purement d'oscillations. Les régimes de rotations n'ont pas été étudiés expérimentalement. A amplitude de champ tournant élevée, ils sont facilement observables. Ils peuvent être regroupés en trois grandes catégories: des régimes de rotations où les deux boussoles tournent dans le sens du champ, des régimes de rotations où une boussole tourne avec le champ tandis que l'autre tourne en sens inverse, mais également des régimes où une boussole tourne dans le sens du champ tandis que l'autre oscille autour d'une direction fixe.

D'autre part nous limiterons ce diagramme de phase expérimental au cas où les frottements sont faibles. Les régimes correspondant à une dissipation importante ne seront introduits que dans le cadre de routes vers le chaos.

### **III.4.2.2- Régimes dynamiques observés et leur diagramme de phase**

Dans un tel diagramme où sont répertoriés les divers régimes dynamiques observés, on distingue trois grandes classes: les réponses périodiques, quasipériodiques et chaotiques. Nous allons d'abord nous intéresser à la première; les deux dernières seront discutées plus loin.

Parmi les réponses périodiques, on observe bien évidemment, comme tout problème d'oscillateurs forcés, beaucoup de réponses ayant la périodicité de l'excitation extérieure; elles sont observées à basse amplitude de champ.

Lorsque celle-ci augmente, les non linéarités deviennent de plus en plus importantes et d'autres réponses sont alors possibles. Parmi celles-ci se trouvent les réponses sous-harmoniques.

#### *a) Réponses sous-harmoniques*

Une réponse sous-harmonique est une réponse dont la fréquence est un sous-multiple de la fréquence d'excitation. Ce type de réponse est très fréquent dans les problèmes d'oscillateurs non-linéaires forcés.

Mais il faut tout d'abord noter que des réponses sous-harmoniques sont également possibles pour l'oscillateur linéaire forcé sans frottements. L'absence de frottements est alors nécessaire sinon l'oscillateur n'a qu'une seule fréquence de réponse possible: celle de l'excitation. Dans le cas où les frottements sont absents et si l'on n'excite pas à la fréquence propre de l'oscillateur alors des réponses sous-harmoniques sont possibles. En effet, en posant  $\tau = \omega t$ , l'équation du mouvement s'écrit:

$$\theta''(\tau) + \frac{\Omega_0^2}{\omega^2} \theta(\tau) = \gamma \cos \tau$$

Si on impose  $\frac{\Omega_0}{\omega} = \frac{p}{q} < 1$  avec  $p$  et  $q$  entiers alors

$$\theta(\tau) = A \cos\left(\frac{p}{q} \tau\right) + B \sin\left(\frac{p}{q} \tau\right) + \frac{\gamma \omega^2}{\Omega_0^2 - \omega^2} \cos \tau.$$

On voit alors que la périodicité de la réponse est  $2\pi q$  pour une périodicité de l'excitation de  $2\pi$ , c'est-à-dire que la réponse de l'oscillateur a une fréquence dans un rapport  $1/q$  avec celle de l'excitation.

Par contre, la prise en compte des termes non linéaires génère de manière naturelle des réponses sous-harmoniques même en présence de frottements.

Considérons l'équation très générale d'un oscillateur forcé:  $\ddot{y} + g(y) = F \cos \omega t$  où  $g(y)$  contient les termes non linéaires. Rosenberg [Ros. 58] et Kauderer [Kau. 58] ont trouvé les conditions pour en obtenir des solutions sous-harmoniques de la forme  $y = A \cos\left(\frac{\omega t}{q}\right)$ .

Les conditions d'obtention de ces solutions peuvent également être déduites de méthodes de perturbation, notamment par la méthode développée par Melnikov [Mel. 63], et généralisée par Holmes et Marsden [Hol. 81] et [Hol. 82]. Celle-ci permet de trouver un critère pour l'apparition d'oscillations chaotiques dans un système dynamique où les frottements et l'amplitude de l'excitation sont supposés faibles. Cette méthode de Melnikov (décrite en détail dans la référence [Guc. 83]) donne de très bons résultats pour certains systèmes dynamiques à deux degrés de liberté comme le pendule magnétique soumis à un champ fixe et à un champ alternatif perpendiculaire [Moo. 87a] et le mouvement forcé d'une particule dans un double puits de potentiel dont l'analyse figure dans le livre [Guc. 83] et la confirmation expérimentale dans la référence [Moo. 80].

De manière générale, il ressort des méthodes perturbatives que pour une faible amplitude d'excitation et de faibles frottements, il faut exciter l'oscillateur avec une fréquence proche de  $q\Omega_0$  pour obtenir une réponse sous-harmonique d'ordre  $1/q$ . Cependant, pour des amplitudes d'excitation plus grandes, plusieurs réponses sous-harmoniques peuvent exister pour une même amplitude et fréquence d'excitation. Ce résultat est notamment montré dans le cas de l'oscillateur paramétrique par la méthode de Melnikov dans la référence [Koc. 85].

Les réponses sous-harmoniques les plus facilement observables sont celles de petite périodicité (2, 3, 4, ... fois la périodicité de l'excitation). Plus la périodicité de la réponse est grande plus la région d'attraction dans l'espace des phases est petite [Gre. 83a].

Afin d'illustrer ceci, nous présentons ici quelques unes des nombreuses réponses sous-harmoniques obtenues avec ce système de deux boussoles en interaction soumises à un champ tournant. On notera dans certains cas l'absence de pics de Fourier à la fréquence  $f_0$  du champ extérieur traduisant des réponses purement sous-harmoniques.

La figure III.19 montre une des réponses obtenues pour un jeu de paramètres  $(H, \omega)$  donné. La figure III.19a présente le spectre de Fourier du mode  $X(t) = \theta_A(t) + \theta_B(t)$  et qui met en évidence une réponse sous-harmonique à la fréquence moitié de l'excitation. Le spectre de Fourier du mode  $Y(t) = \theta_A(t) - \theta_B(t)$  présenté figure III.19b montre lui une réponse de périodicité quatre fois supérieure à celle de l'excitation

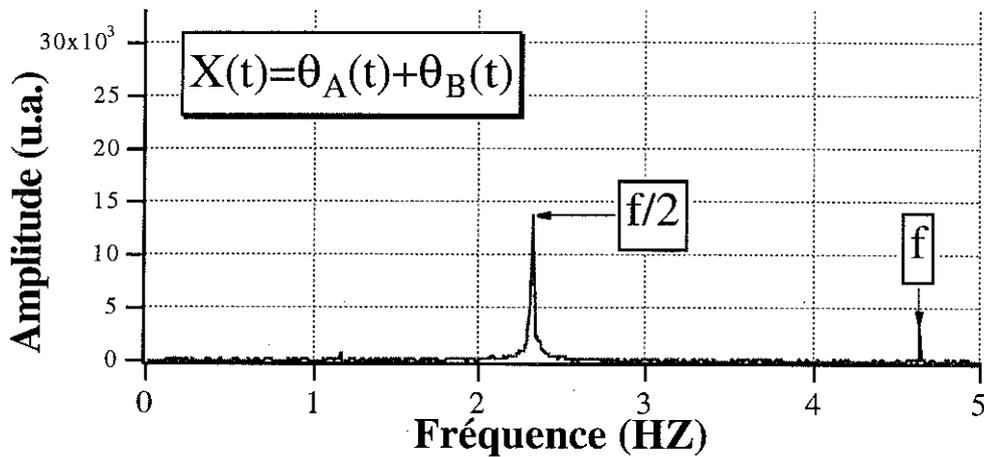


Fig. III.19a:

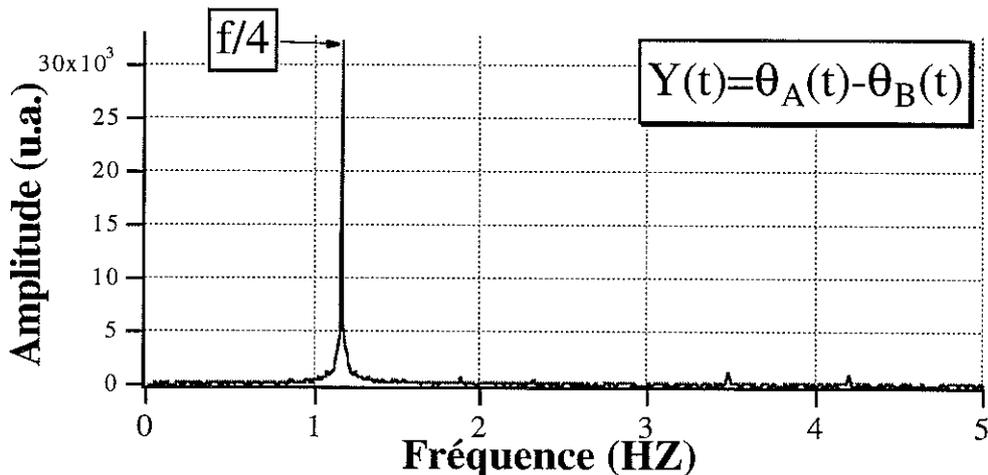


Fig. III.19b

Fig. III.19(a,b): Spectres de Fourier de la réponse des oscillateurs  $X(t) = \theta_A(t) + \theta_B(t)$  (fig. III.19a) et  $Y(t) = \theta_A(t) - \theta_B(t)$  (fig. III.19b) à un champ tournant d'amplitude  $H=0,133$  Oe et de fréquence  $f=4,64$  Hz. Enregistrement du signal: 1024 images échantillonnées à  $f_{éch}=10$  Hz

La figure III.20 montre une réponse analogue à celle de la figure III.19. On y distingue en effet des périodicités quatre et huit fois supérieures à celle de l'excitation pour les modes  $X(t)$  et  $Y(t)$  respectivement. On notera sur ces spectres que les réponses sont purement sous-harmoniques puisque la fréquence excitatrice  $f$  n'apparaît pas.

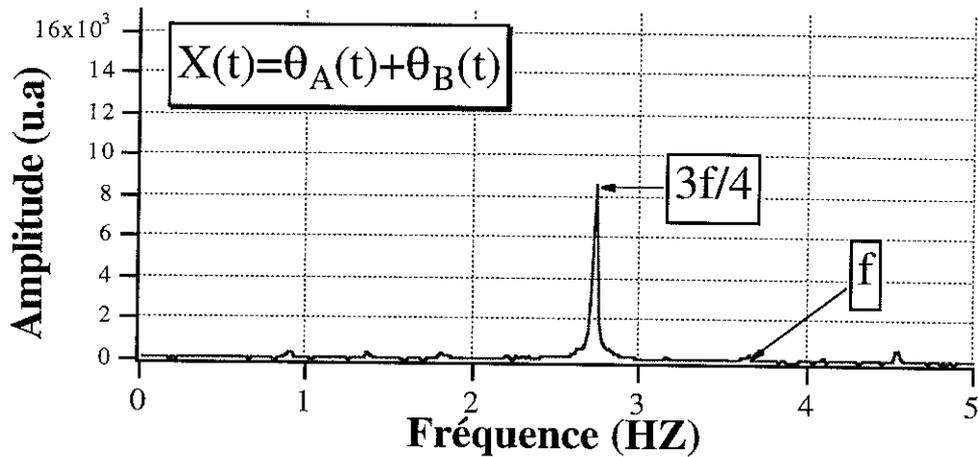


Fig. III.20a

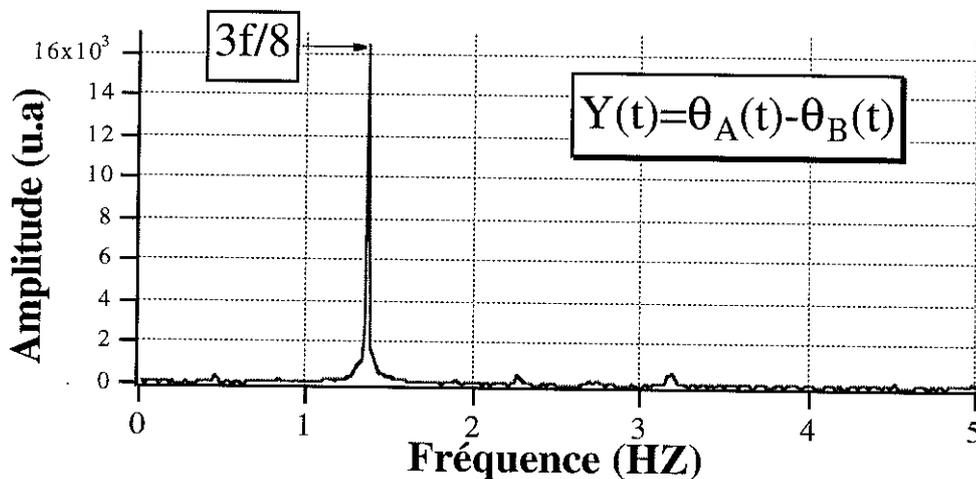


Fig. III.20b

**Fig. III.20(a,b):** Spectres de Fourier de la réponse des oscillateurs  $X(t) = \theta_A(t) + \theta_B(t)$  (fig. III.20a) et  $Y(t) = \theta_A(t) - \theta_B(t)$  (fig. III.20b) à un champ tournant d'amplitude  $H=0,070$  Oe et de fréquence  $f=3,63$  Hz. Enregistrement du signal: 512 images échantillonnées à  $f_{\text{éch}}=10$  Hz

La figure III.21 présente elle une réponse sous-harmonique pour le mode  $X(t) = \theta_A(t) + \theta_B(t)$  de périodicité triple par rapport à l'excitation. Il n'apparaît par contre aucune fréquence dans le mode  $Y(t) = \theta_A(t) - \theta_B(t)$ . En effet le régime dynamique qui était alors excité était un régime où les deux boussoles oscillaient en phase l'une avec l'autre traduisant l'absence de toute réponse pour ce mode  $Y(t)$

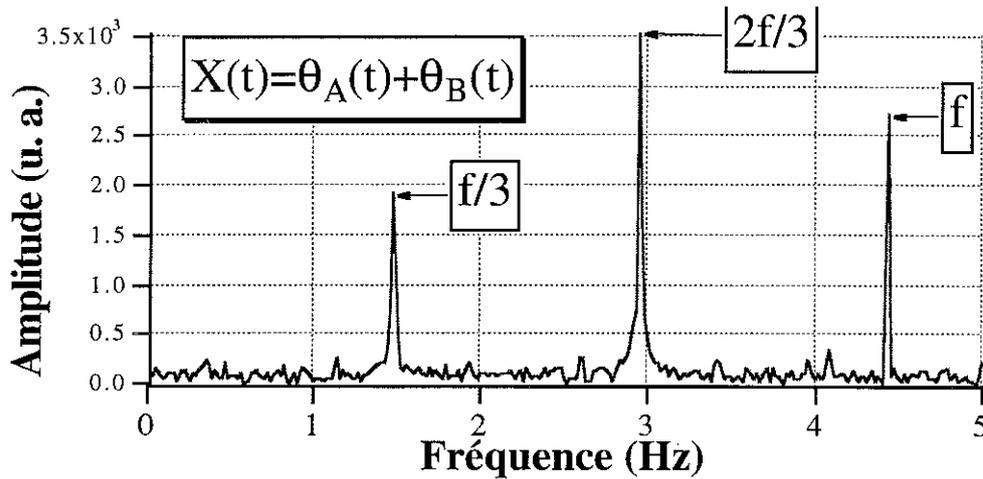


Fig. III.21a

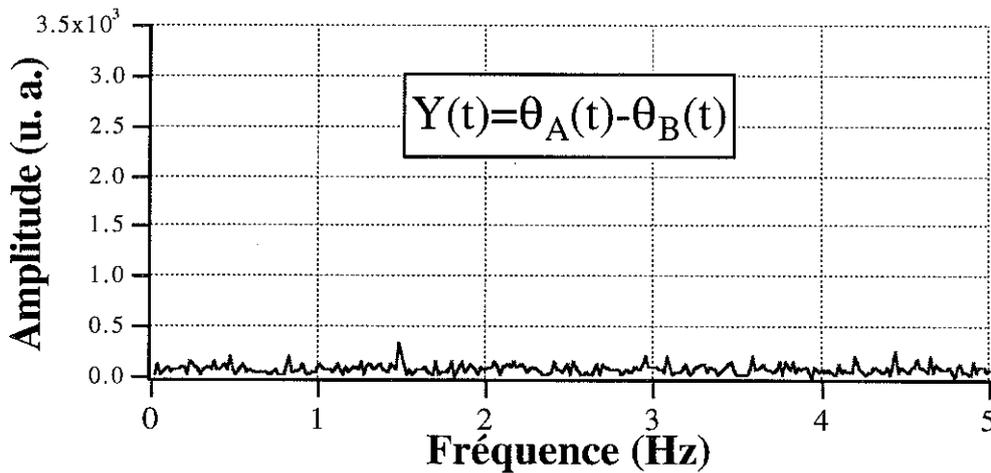


Fig. III.21b

Fig. III.21(a,b): Spectres de Fourier de la réponse des oscillateurs  $X(t) = \theta_A(t) + \theta_B(t)$  (fig. III.21a) et  $Y(t) = \theta_A(t) - \theta_B(t)$  (fig. III.21b) à un champ tournant d'amplitude  $H=0,343$  Oe et de fréquence  $f=4,43$  Hz. Enregistrement du signal: 512 images échantillonnées à  $f_{éch}=10$  Hz

Les figures III.19 à III.21 sont des exemples parfaitement représentatifs des diverses réponses sous-harmoniques obtenues dans le sens où, comme nous l'avons signalé, les réponses sous-harmoniques les plus facilement observables sont celles de faible périodicité par rapport à l'excitation (2, 3, 4, 8 ici) car prenant plus d'ampleur dans l'espace des phases.

Afin de montrer que plusieurs réponses sous-harmoniques différentes sont possibles pour un jeu de paramètres donné  $(H, \omega)$ , nous présentons ici quelques réponses obtenues avec des conditions expérimentales différentes où ceci a été observé d'une manière très flagrante. Nous avons bloqué une des deux boussoles afin de l'empêcher de tourner. Notons alors que ce système diffère du précédent puisque ainsi nous perdons un degré de liberté; le système consiste en une boussole oscillant dans un champ fixe (créé par sa voisine immobile) et un champ tournant. Pour un jeu de paramètres donné  $(H, \omega)$ , nous avons alors pour diverses conditions initiales obtenu des réponses de périodicité 1, 2, 3, 4 par rapport à celle de l'excitation (cf. figure III.22).

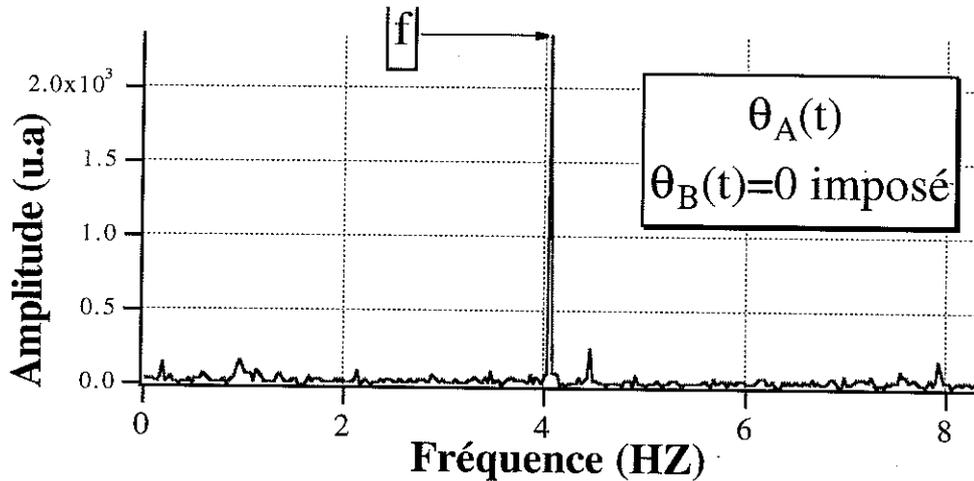


Fig. III.22a

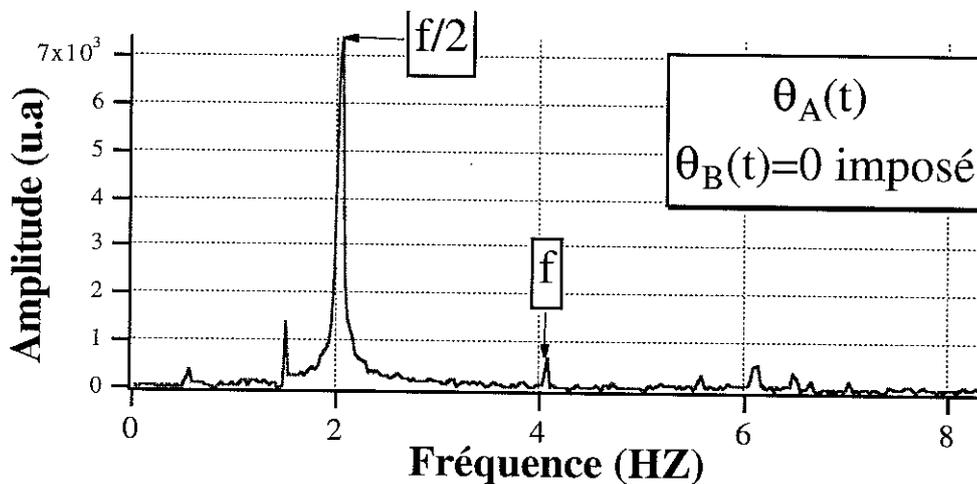


Fig. III.22b

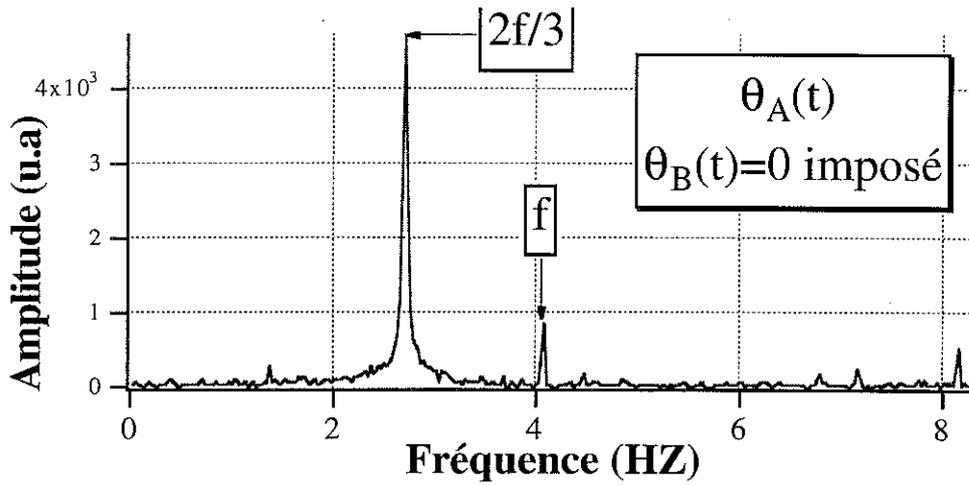


Fig. III.22c

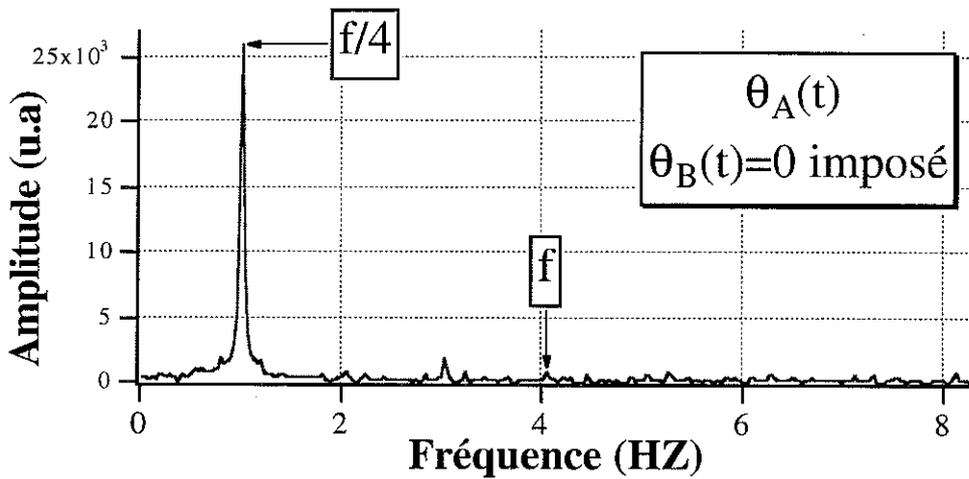


Fig. III.22d

Fig. III.22(a,b,c,d): Spectres de Fourier des diverses réponses de l'oscillateur  $\theta_A(t)$  lorsque la deuxième boussole est maintenue à  $\theta_B = 0$ ; champ tournant d'amplitude  $H=0,210$  Oe et de fréquence  $f=4,07$  Hz. Enregistrement du signal: 512 images échantillonnées à  $f_{ech}=16.67$  Hz

Après les régimes périodiques, la deuxième grande classe de réponses à l'excitation extérieure observées dans notre système, est constituée de régimes quasipériodiques.

### *b) Réponses quasipériodiques*

Nous nous contenterons ici de signaler ce type de réponses et de les décrire brièvement afin de les inclure dans le diagramme de phase. Nous y reviendrons plus en détail dans le contexte de route vers le chaos.

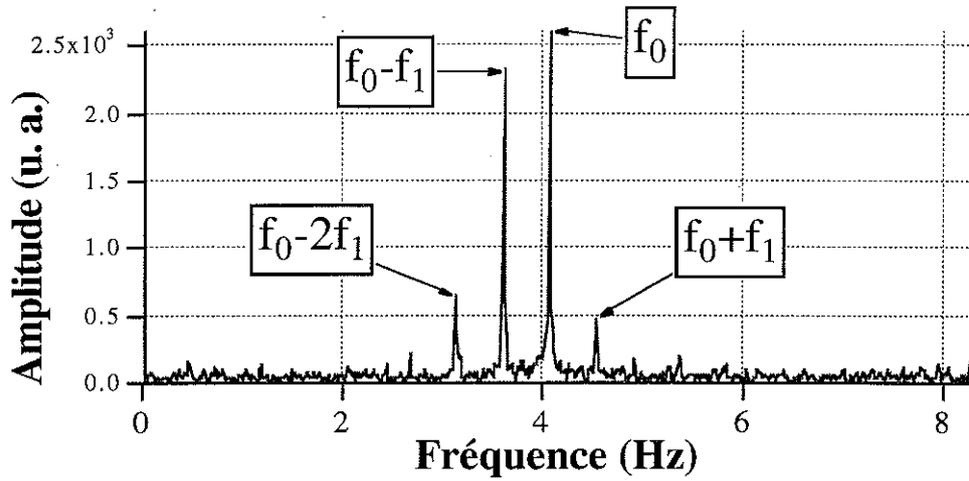
Une réponse quasipériodique est une oscillation presque périodique composée de plusieurs fréquences incommensurables entre elles. Lorsque le signal est la superposition de deux mouvements périodiques à deux fréquences incommensurables  $f$  et  $f'$ , les trajectoires correspondantes dans l'espace des phases s'enroulent sur la surface d'un tore que l'on peut dessiner dans  $\mathfrak{R}^3$ . Les deux mouvements en question sont donc une révolution autour de la plus grande dimension (caractérisé par une fréquence  $f'$ ) et une rotation autour de l'axe du "cylindre" formant le tore (caractérisé par une fréquence  $f$ ). Si les deux fréquences sont effectivement incommensurables (rapport  $f'/f$  irrationnel) alors la trajectoire ne se referme jamais sur elle-même et couvre de façon dense la surface du tore.

Ce type de réponse quasipériodique est observé dans notre système de deux boussoles en interaction soumises à un champ tournant où à un champ alternatif perpendiculaire, pour une fréquence d'excitation proche de celle du mode propre  $X(t)$  (cf. équation (III.39)).

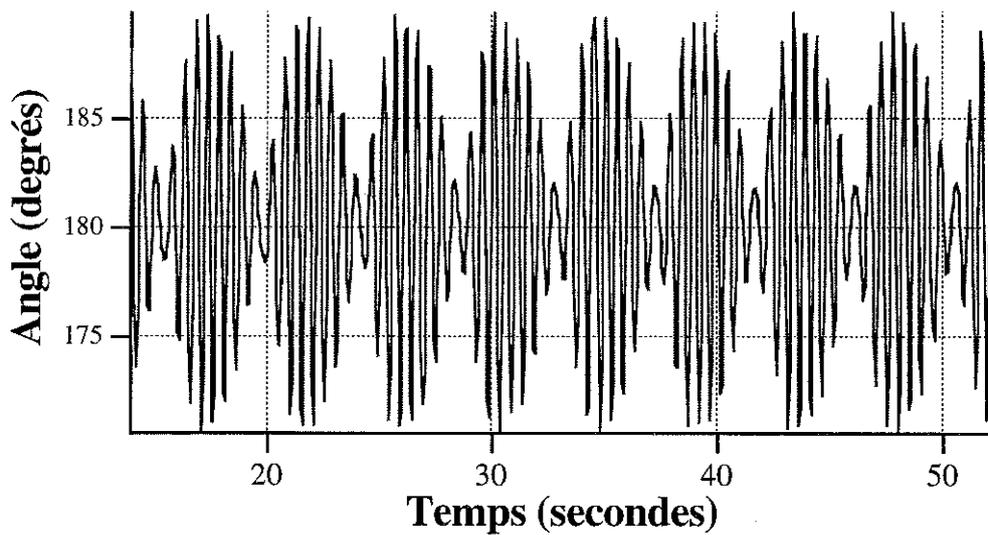
Un spectre de Fourier typique d'un tel régime est présenté sur la figure III.23. Il est composé de fréquences qui sont des combinaisons entre les deux fréquences de base  $f$  (fréquence du champ) et  $f'$  fréquence incommensurable avec  $f$ .

De tels régimes correspondent à une modulation de l'amplitude d'oscillations des boussoles (cf. figure III.24). Le signal présenté est reconstruit après filtrage du spectre de Fourier de la figure III.23 afin de supprimer le bruit expérimental. De plus il correspond à une fréquence d'échantillonnage deux fois plus importante que l'original (33.33 Hz au lieu de 16.67 Hz) afin de mieux voir l'évolution de l'oscillation de la boussole. Les deux fréquences sont donc la fréquence d'oscillations  $f$  à l'intérieur de l'enveloppe et la fréquence  $f'$  qui est la modulation périodique de cette enveloppe.

On observe que cette deuxième fréquence  $f'$  augmente avec l'amplitude du champ. Nous y reviendrons plus en détail dans le paragraphe III.4.3.1.a.



**Fig. III.23:**  
 Spectre de Fourier d'un régime quasipériodique  
 champ tournant d'amplitude  $H=0,063$  Oe et de fréquence  $f=4,07$  Hz.  
 Enregistrement du signal: 1024 images échantillonnées à  $f_{éch}=16.67$  Hz



**Fig. III.24:**  
 Angle d'une des deux boussoles correspondant au spectre de Fourier de la figure III.23. Le signal est reconstruit à partir du spectre de Fourier précédent dans lequel seuls les quatre pics dominants ont été gardés (filtrage du bruit expérimental).

Certaines des réponses quasipériodiques mesurées, présentent en plus des deux fréquences de base ( $f$  et  $f'$ ), un doublement de période par rapport à la périodicité du champ c'est-à-dire qu'un pic à  $f/2$  peut également être observé dans les spectres de Fourier correspondants. Il n'y a pas de systématique quant à la présence ou non de ce doublement dans les réponses du système autour de cette résonance; cela dépend des conditions initiales. Ce doublement de période (quand il existe) apparaît dans toute la gamme de champ et uniquement dans le mode  $Y(t) = \theta_A(t) - \theta_B(t)$ . C'est en regardant l'équation du mouvement de ce mode (cf. équation III.38) que l'on en comprend alors l'origine. Cette équation, linéarisée, est celle d'un oscillateur paramétrique et nous sommes dans le cas où la fréquence d'excitation du champ extérieur est proche du double de la fréquence propre  $f_2 = \frac{\Omega_2}{2\pi}$  du mode  $Y(t)$  considéré. Il est donc parfaitement compréhensible que suivant les conditions initiales, on excite de manière paramétrique une oscillation à fréquence moitié de l'excitation (cf. paragraphe III.4.1.3.b). Pour s'en convaincre, il suffit de changer l'excitation et d'appliquer maintenant un champ alternatif perpendiculaire à  $\vec{r}_{A,B}$ . Le terme d'interaction avec le champ tournant dans les équations (III.35) et (III.36), devient sous un champ alternatif perpendiculaire:  $\frac{\mu H}{J} \sin \omega t \cos \theta(t)$ .

Les équations (III.37) et (III.38) s'écrivent alors:

$$\ddot{X}(t) + \frac{k}{J} \dot{X}(t) + \Omega_1^2 X(t) + \frac{\mu H}{4J} \sin \omega t (X^2 + Y^2) = 2 \frac{\mu H}{J} \sin \omega t \quad (\text{III.41})$$

$$\ddot{Y}(t) + \frac{k}{J} \dot{Y}(t) + \Omega_2^2 Y(t) + \frac{\mu H}{2J} \sin \omega t XY = 0 \quad (\text{III.42})$$

Ces équations ne diffèrent de celles sous champ tournant ((III.37) et (III.38)) que par la disparition du terme paramétrique. Ceci était tout à fait attendu puisque le champ tournant est en fait la somme en quadrature de deux champ alternatifs, l'un perpendiculaire à  $\vec{r}_{A,B}$  et l'autre longitudinal. C'est cette composante longitudinale qui introduit une composante paramétrique au système.

En excitant alors les deux boussoles de la sorte, on obtient des régimes tout à fait comparables c'est-à-dire que pour un jeu de paramètres ( $H, \omega$ ) donné autour de la résonance du mode propre  $X(t)$ , on obtient des régimes quasipériodiques caractérisés par les mêmes fréquences d'oscillations. La seule différence observée est l'absence

systematique de ces doublements de période qui étaient parfois observés sous champ tournant. Ceci confirme donc l'origine paramétrique de ces doublements.

Notons enfin, que ces régimes quasipériodiques disparaissent lorsque l'on augmente les frottements.

Remarque:

Nous avons également observé des régimes quasipériodiques autour de 2.5 Hz. Peu de mesures ont été effectuées dans cette zone car contrairement à la gamme autour de 4 Hz, nous ne tombions pas systématiquement sur de tels régimes ce qui rendait l'étude plus délicate. Cependant, sur les quelques régimes quasipériodiques mesurés, tout comme vers 4 Hz la deuxième fréquence (quand elle existait) augmentait avec l'amplitude du champ.

Il semble donc que l'on obtienne des régimes quasipériodiques lorsque la fréquence d'excitation est proche de celle d'un des deux modes propres du système ( $f_1 = 3.8 \text{ Hz}$  et  $f_2 = 2.4 \text{ Hz}$ ). Nous discuterons de ces régimes quasipériodiques dans le paragraphe III.4.3.1.a.

c) Diagramme de phases

Le bilan des divers régimes dynamiques est présenté sous forme d'un diagramme de phase (fig. III.25). Les grandeurs servant d'axes à un tel diagramme dépendent évidemment des paramètres utilisés pour l'étude du système considéré. Dans notre système d'oscillateurs forcés, nous avons pris comme paramètres d'étude l'amplitude et la fréquence du champ extérieur.

Ce diagramme schématique répertorie plus de mille expériences regroupées en trois classes: les régimes périodiques, quasipériodiques et chaotiques.

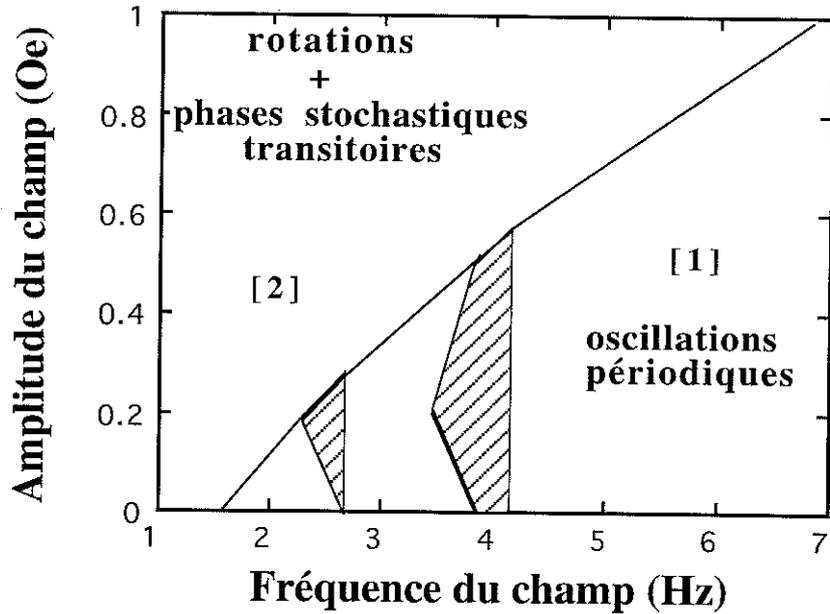


Fig. III.25

Diagramme de phase ( $H, \omega$ ) des régimes dynamiques de deux boussoles en interaction avec de faibles frottements soumises à un champ tournant. Les régions hachurées correspondent aux zones où les régimes quasipériodiques sont observés

La région [1] regroupe les zones où l'on observe des oscillations périodiques. Les boussoles peuvent osciller en phase ou déphasées, avec des fréquences correspondant à celle de l'excitation ou des sous-harmoniques.

La région [2] regroupe les zones où sont observées des phases stochastiques transitoires (voir § III.4.3.1.a) et les régimes de rotations.

Enfin, les zones hachurées sont le siège d'oscillations quasipériodiques.

De manière générale, il semblerait que ce diagramme de phase soit peu différent de celui que l'on pourrait construire en ne considérant qu'une seule boussole soumise à un champ fixe et un champ tournant (cf. [Cro. 82] et § III.4.3.1.a). En effet, autour de la résonance du mode en phase des régimes quasipériodiques sont observés puis à amplitude de champ plus élevée on retrouve des phases stochastiques transitoires suivies de rotations. Au delà de cette résonance on observe des régimes périodiques d'oscillations. Dans toute cette gamme de fréquence la majeure partie des régimes observés sont des oscillations des deux boussoles en phase. Le champ dipolaire ressenti par chacune des deux boussoles comporte une composante longitudinale oscillant autour d'une valeur moyenne non nulle qui définirait ainsi un champ fixe "moyen"; la

composante perpendiculaire à  $\vec{r}_{A,B}$  oscille elle autour de zéro. Sous champ tournant, il semble donc, que les effets de l'oscillation du champ dipolaire créée par l'oscillation de la boussole voisine, soient très analogues à ceux du champ fixe ne modifiant ainsi que très peu la dynamique du système.

Une différence doit pourtant ressortir de la comparaison de ces deux systèmes. Le système de deux boussoles possède un degré de liberté supplémentaire. Les régimes dynamiques doivent donc être différents dans la gamme de fréquence où des couplages des modes  $X(t)$  et  $Y(t)$  apparaissent. Ceux-ci s'établissent principalement pour des fréquences comprises entre celles de ces deux modes propres. Notons tout de même que ces régimes plus complexes issus de couplages entre les deux modes  $X(t)$  et  $Y(t)$  peuvent également intervenir au delà de  $4 Hz$ . Un cas particulier de couplages entre ces modes est l'observation de doublements de période pour des fréquences d'excitation de l'ordre de  $4 Hz$ . Nous avons attribué ces doublements à une excitation paramétrique du mode en opposition de phase dont la fréquence propre est proche de la moitié.

### ***III.4.3- Déstabilisation des régimes périodiques: routes vers le chaos***

L'étude de la dynamique chaotique d'un système comprend deux grandes parties: comprendre comment un régime périodique se déstabilise progressivement sous l'influence d'un paramètre de contrôle et en "bout de chaîne", étudier les régimes chaotiques alors obtenus. Les trajectoires chaotiques des systèmes dissipatifs restent confinées dans une région de l'espace des phases appelée attracteur étrange que l'on caractérise qualitativement par sa topologie et quantitativement par des exposants de Lyapunov et des dimensions fractales.

Une étude expérimentale de phénomènes chaotiques est très délicate et ce pour plusieurs raisons. Elle requiert d'abord une bonne sensibilité de mesure pour maximiser le rapport signal sur bruit afin de bien voir l'émergence de nouvelles fréquences de réponses du système. Lorsque le système devient chaotique, un bruit caractéristique intrinsèque apparaît, qui doit donc être facilement discernable du bruit expérimental. D'autre part une certaine finesse dans les variations du paramètre de contrôle est nécessaire; il faut en effet réussir à voir le plus grand nombre de seuils de bifurcations lorsque le système va vers les régimes chaotiques. Une autre notion très importante dans l'étude des routes vers le chaos liée à cette finesse de variation du paramètre de contrôle est l'adiabaticité de celle-ci. L'étude des routes vers le chaos veut dire l'étude de la déstabilisation de régimes dynamiques donnés. Or comme nous l'avons déjà signalé, plusieurs régimes dynamiques différents peuvent coexister à paramètre de

contrôle donné (ce sont les conditions initiales qui décident de la réponse du système). Ceci implique que lorsque l'on varie de manière non-adiabatique le paramètre de contrôle, le système peut quitter une trajectoire pour une autre. On met alors en évidence une bifurcation liée à une variation brutale de l'excitation extérieure et non pas une bifurcation intrinsèque du régime dynamique auquel on s'intéressait. Une variation non-adiabatique du paramètre de contrôle peut alors mettre en évidence un scénario de transition différente vers le chaos. Arnéodo et al. [Arn. 83] ont ainsi montré qu'une variation non adiabatique du paramètre de contrôle permettait dans le cadre de récurrences (aussi appelées applications ou "mapping") à deux dimensions (la récurrence présentée est celle de Hénon [Hén. 76], qui modélise la convection thermique de type Rayleigh-Bénard) de s'écarter du scénario classique de cascade de doublements de période. Ils ont en effet montré numériquement que la non adiabaticité peut engendrer une interruption de la cascade par des triplements de période, corroborant ainsi des résultats expérimentaux sur la convection de Rayleigh-Bénard dans l'hélium [Lib. 80] et dans le mercure [Lib. 83].

La précision expérimentale sur nos mesures d'angles est de  $2^\circ$  lorsque les vitesses ne sont pas trop grandes. Lorsque les vitesses deviennent grandes, les extrémités des boussoles deviennent floues et il faut alors diminuer le rayon du cercle qui permet la mesure de l'angle, ce qui en diminue la précision.

La limitation majeure de notre dispositif expérimental réside dans les variations de champ (amplitude et fréquence). Il est clair que ses variations ne sont pas adiabatiques mais il serait illusoire de prétendre qu'un système expérimental le permette rigoureusement. On essaye néanmoins d'approcher au mieux cette notion dans les variations du paramètre de contrôle. C'est pour cette raison que nous avons étudié les routes vers le chaos en choisissant de fixer la fréquence d'excitation et de prendre comme paramètre de contrôle l'amplitude du champ. Particulièrement sensibles aux points de bifurcation du système, les variations "adiabatiques" expérimentales du paramètre de contrôle peuvent être comparées à une résolution numérique des équations du mouvement qui peut estimer le pas de variation du paramètre de contrôle permettant une évolution adiabatique.

### III.4.3.1- Etude sous champ tournant

Le scénario de déstabilisation des régimes périodiques observé pour ce système de deux boussoles en interaction est la cascade de doublements de période. Après avoir introduit ce scénario, nous nous intéresserons aux comportements expérimentaux de ce système dans le cas où la dissipation est faible (nous ne présenterons pas de résultats de simulations numériques lorsque la dissipation est faible). Puis nous verrons comment une dissipation plus importante modifie ces régimes dynamiques. Les résultats expérimentaux et de simulation numérique seront présentés en parallèle pour la dissipation élevée.

Nous étudierons séparément les comportements observés pour une fréquence d'excitation proche de la résonance du mode  $X(t)$ , et loin de cette résonance.

#### a) Faibles frottements

Ce scénario est maintenant abondamment décrit dans la littérature. L'universalité de certaines de ses propriétés a été montrée dans le cadre du groupe de renormalisation par Coulet et Tresser [Cou. 78a-78b-80] et par Feigenbaum [Fei. 78-79].

Pour approcher cette notion de cascades de doublements de période (aussi appelée cascade de bifurcations sous-harmoniques), nous reprenons l'exemple classique de l'application logistique. Une application est le système dynamique le plus simple que l'on puisse imaginer: on considère une variable  $x$  et une loi d'évolution discrète sous la forme d'une récurrence  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Cette application logistique est par exemple un modèle simple de croissance de population:  $x_{n+1} = ax_n - bx_n^2$ . Le premier terme représente l'effet de croissance (naissances) tandis que le deuxième terme, non-linéaire, qui sature l'instabilité, représente les limitations de la croissance de la population considérée (limitation de nourriture, prédateurs,...). Dans le cas linéaire ( $b=0$ ), la solution est  $x_n = x_0 a^n$ . Cette solution est stable pour  $|a| < 1$  et instable pour  $|a| > 1$ . Dans ce dernier cas le modèle linéaire prédit une croissance qui diverge (solution non bornée), qui n'est pas réaliste. Le modèle non-linéaire est souvent écrit sous la forme adimensionnelle:

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n)$$

Pour  $1 < \lambda < 3$ , l'application possède deux points fixes  $x = 0$  et  $x = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$ . Le premier est instable car pour  $x$  aussi proche de zéro que l'on veut il n'y a pas

convergence vers  $x = 0$ . Le deuxième est stable c'est-à-dire que quel que soit  $x_0 \neq 0$  les itérations successives convergeront vers le point fixe  $x = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$ .

Pour  $\lambda = 3$  le point  $x = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$  devient instable et l'application possède deux points particuliers  $x_1$  et  $x_2$  tels que  $x_1 = f(x_2)$  et  $x_2 = f(x_1)$ . Donc à chaque étape de l'itération on passe d'une valeur à l'autre. Pour revenir au même point il faut donc deux étapes ce qui définit une périodicité deux par rapport au point fixe qui existait pour  $1 < \lambda < 3$ . Ces deux points  $x_1$  et  $x_2$  ne sont donc pas des points fixes de  $f(x)$  mais de  $f(f(x)) = f^2(x)$ .

Si l'on continue à augmenter le paramètre  $\lambda$  les deux points  $x_1$  et  $x_2$  vont à leur tour devenir instables et des points de périodicité quatre apparaîtront, et ainsi de suite (périodicités huit, seize, trente deux,...) jusqu'à ce que  $\lambda$  approche la valeur  $\lambda_\infty = 3,56994\dots$ , appelée point d'accumulation.

Au delà de  $\lambda_\infty$  des itérations chaotiques apparaissent mais il existe également dans l'intervalle  $\lambda_\infty < \lambda < 4$  des itérations périodiques.

Près de la valeur  $\lambda_\infty$ , une loi d'échelle prédit les seuils de bifurcation  $\lambda_n$  successifs où la périodicité se double:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 4,66920\dots$ . Ce nombre appelé exposant de

Feigenbaum, et ces phénomènes de cascade, sont universels pour une certaine classe d'applications à une dimension.

Ce scénario de cascade de doublements de période est très souvent observé dans divers systèmes expérimentaux. Nous l'avons notamment déjà mentionné dans le système d'une boussole soumise à un champ tournant et à un champ fixe (cf. § III.3.2). Nous allons voir qu'il régit également la transition vers des régimes chaotiques dans le système de deux boussoles en interaction.

#### *i - Excitation au dessus de la résonance*

Lorsque la fréquence d'excitation est supérieure à la fréquence du mode propre  $X(t)$  (mode d'oscillation des deux boussoles en phase l'une avec l'autre) qui est de l'ordre de 4Hz, on observe expérimentalement ces phénomènes de doublements de période. En effet à partir d'un certain seuil d'amplitude de champ, les régimes qui oscillaient avec la périodicité du champ, oscillent maintenant avec une périodicité double. Ces seuils d'amplitude de champ augmentent au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la résonance en augmentant la fréquence d'excitation. On note cependant

que ces doubléments de période ne sont pas suivis par une cascade. Ce sont en fait les très faibles frottements ( $\frac{k/J}{\omega} \approx 9.10^{-3}$ ) qui limitent l'observation de la cascade rendant plus étroites les plages de champ correspondant à chacune des périodicités. Ainsi, le pas de variation de champ est trop grand avec de tels frottements pour rendre la cascade plus apparente. Nous retrouvons ici la notion de non adiabaticité des variations du paramètre de contrôle. Il faut tout de même préciser que de manière générale, on ne voit jamais plus que quatre ou cinq doubléments successifs dans une cascade expérimentale, même avec des frottements élevés.

En augmentant le paramètre de contrôle à partir des régimes à périodicité double, nous observons directement une phase chaotique puisque nous n'avons pas accès à la cascade. Cette phase chaotique correspond à des mouvements totalement erratiques des deux boussoles. Ces dernières, qui oscillaient en phase entre elles à la périodicité du champ, puis à la périodicité double, se perdent complètement durant cette phase chaotique; leurs mouvements respectifs apparaissent alors fortement décorrélés. Ces mouvements erratiques consistent en des rotations avec le champ durant quelques tours suivies de brusques changements du sens de rotation puis d'arrêts, quelques périodes d'oscillations, rotations, etc. .... Ce type de mouvements chaotiques est qualifié de chaos à grande échelle puisque ces inversions de rotations traduisent des mouvements de grande ampleur dans l'espace des phases. Si l'on continue à augmenter l'amplitude du champ tournant, les boussoles se piègent dans ces régimes de rotation avec le champ.

Cette notion de chaos à grande échelle (ou stochasticité à grande échelle) est en fait développée dans le cadre des systèmes hamiltoniens c'est-à-dire non dissipatifs. Les études sur la dynamique chaotique hamiltonienne ont historiquement précédé celles sur les systèmes dissipatifs; en effet les domaines de la physique concernés étaient la cosmologie, la physique des plasmas et la physique des accélérateurs de particules. L'apparition du chaos à grande échelle est décrite par le critère de recouvrement des résonances, énoncé par Chirikov [Chi. 79] dans le cadre d'une récurrence décrivant le mouvement d'un rotateur plan non dissipatif soumis à des impulsions périodiques. Cependant une dynamique chaotique hamiltonienne est couramment étendue aux systèmes faiblement dissipatifs (voir par exemple [Cro. 81] et "conservative chaos" dans [Moo. 87b]). C'est ce que nous observons dans ce système de deux boussoles en interaction avec de faibles frottements, corroborant ainsi les résultats obtenus sur une seule boussole ([Cro. 81]). On pourrait alors se demander quel est le rôle joué par les frottements dans ces systèmes faiblement dissipatifs. En effet on a jusqu'à maintenant laissé entendre que ceux-ci se comportaient comme des systèmes hamiltoniens. Or il existe des différences fondamentales entre ces deux types de systèmes. La plus grande

d'entre elles est que les trajectoires chaotiques d'un système dissipatif explorent une partie restreinte de l'espace des phases, appelée attracteur étrange, dont la structure est fractale. En fait cette stochasticité à grande échelle observée dans les systèmes faiblement dissipatifs peut n'être que transitoire et c'est précisément le rôle de la dissipation que de ramener les trajectoires sur un attracteur qui peut être par exemple un régime régulier de rotation avec le champ. La durée de ces errances chaotiques n'est pas liée aux temps caractéristiques associés à des frottements mais peut être très variable (de quelques minutes à quelques heures). On peut donc pour ces systèmes faiblement dissipatifs parler de chaos hamiltonien (appelé stochasticité) pour cette phase transitoire.

Il est important de parler de phase stochastique transitoire pour ces boussoles, et non de chaos transitoire puisque ce dernier est un terme générique décrivant une des conséquences d'un concept nouveau introduit en 1983. Celui-ci, que nous allons brièvement résumer, décrit comment un attracteur étrange perd sa stabilité à partir d'une valeur seuil du paramètre de contrôle, pour donner des phases chaotiques transitoires. Ce n'est donc pas ce type de phénomène qui est observé pour les boussoles puisqu'un tel attracteur étrange stable n'existe pas.

Greboği et al. [Gre. 83b] ont introduit la notion de "crise" qui représente un changement soudain dans une phase chaotique suite à la variation d'un paramètre. Une des conséquences d'un tel phénomène est ce que l'on appelle le "chaos transitoire". Ce terme générique désigne une transition entre des régimes chaotiques stables en dessous d'un seuil du paramètre de contrôle, et des régimes réguliers. Cette transition s'effectue via l'existence d'une phase chaotique transitoire qui soudainement devient régulière. La durée moyenne de cette phase chaotique transitoire suit une loi d'échelle  $\langle \tau \rangle \approx (s - s_{bc})^{-1/2}$  où  $s$  est le paramètre de contrôle et  $s_{bc}$  sa valeur critique à partir de laquelle des régimes chaotiques transitoires apparaissent. Ce phénomène est interprété comme une "boundary crisis" qui se réfère à une collision entre l'attracteur chaotique et des points fixes (ou orbites périodiques) instables qui coexistent [Gre. 83b]. On peut noter, en supposant ce processus réversible, que les auteurs définissent donc un nouveau type de route vers le chaos qui permet de passer de régimes réguliers à des régimes chaotiques par l'intermédiaire de phases chaotiques transitoires.

#### *ii - Excitation au voisinage de la résonance*

La fréquence d'excitation est ici très proche de la fréquence de résonance du mode propre d'oscillation  $X(t)$  ( $3.8 \text{ Hz} \leq f_{\text{champ}} \leq 4.2 \text{ Hz}$ ). Nous avons observé dans cette gamme de fréquence presque exclusivement des régimes d'oscillations

quasipériodiques des deux boussoles en phase entre elles et ce, quelles que soient les conditions initiales choisies. De tels régimes correspondent à une modulation périodique de l'amplitude d'oscillations des boussoles. Le mouvement de chacune des deux boussoles est donc la superposition de deux mouvements, le premier oscillant à la fréquence du champ appliqué, le deuxième oscillant à une fréquence plus basse et traduisant cette modulation périodique de l'amplitude d'oscillations. Ces régimes sont très stables dans le temps.

La fréquence qui correspond à la modulation de l'amplitude d'oscillations varie avec le champ. Son évolution, normalisée par la fréquence excitatrice, est représentée sur la figure III.26 en fonction de la racine carrée de l'amplitude du champ tournant. L'autre fréquence d'oscillations, qui est celle du champ tournant, reste constante puisque l'on travaille à fréquence d'excitation fixée avec pour paramètre de contrôle l'amplitude du champ tournant.

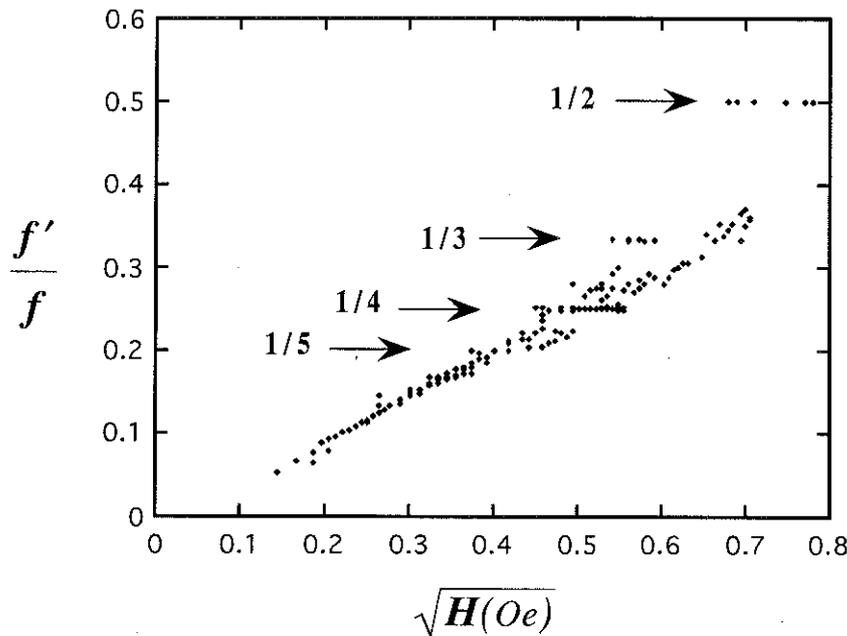


Fig. III.26

Variation du rapport des deux fréquences définissant les régimes quasipériodiques en fonction de la racine carrée de l'amplitude du champ tournant.

La fréquence d'excitation est ici  $f = 4 \text{ Hz}$

L'évolution de cette deuxième fréquence  $f'$  montre un comportement global en racine carrée du champ. De plus, cette courbe laisse apparaître des "paliers" c'est-à-dire des plages de champ où cette deuxième fréquence ne varie plus. Nous allons discuter de ces deux points ainsi que de l'aspect bruité de la courbe pour les champs élevés.

Mais nous souhaitons tout d'abord justifier l'existence de cette quasipériodicité à deux fréquences.

La quasipériodicité à deux fréquences indique que dans l'espace des phases, les trajectoires s'enroulent sur la surface de tores. Dans le cas d'une boussole sans frottement soumise à un champ fixe et à un champ tournant (cf. § III.3.2 et [Cro. 82]), l'existence de ce type de trajectoires est justifiée par de faibles couplages non-linéaires qui, selon la théorie de KAM, ne détruisent pas tous les tores du problème intégrable.

Le problème est analogue dans le cas de deux boussoles avec une très faible dissipation. Le problème intégrable indique que les trajectoires s'enroulent sur des tores et les couplages non-linéaires restent suffisamment faibles pour que certains de ces tores subsistent. Ceci explique également pourquoi cette quasipériodicité n'est observée qu'à la résonance. En effet, l'autre mode propre est alors "invisible" supprimant ainsi les couplages non-linéaires entre les modes  $X(t)$  et  $Y(t)$ .

Nous définissons trois zones dans l'espace des phases, appelées résonances, où se regroupent les tores. Ces trois résonances sont celles associées à des mouvements d'oscillations autour du champ tournant, et à ceux associés aux deux modes propres  $X(t)$  et  $Y(t)$  du système. Les fréquences caractérisant les tores associés au mode  $X(t)$  sont la fréquence  $f = \omega/2\pi$  qu'imprime le champ tournant aux boussoles et une fréquence proche de la fréquence propre  $f_1 = \Omega_1/2\pi$ . En fait, la courbe représentée sur la figure III.26 montre une fréquence  $f'$  qui varie avec l'amplitude du champ tournant. Nous avons essayé de comprendre analytiquement cette loi de variation par diverses méthodes énoncées dans les paragraphes précédents (méthode de perturbation, méthode de Lindstedt-Poincaré, méthode d'amplitude lentement variable) mais aucune n'a donné de résultat vraiment convaincant pour faire apparaître cette variation en racine carrée de l'amplitude du champ. Cette fréquence  $f'$  doit provenir de la différence entre la fréquence du champ  $f$  et une fréquence qui résulte de la fréquence propre  $f_1$ , perturbée par un couplage avec le champ. Le fait que ces régimes soient obtenus avec un champ tournant ou perpendiculaire suggère que ce n'est pas le couplage avec le terme paramétrique mais plutôt le couplage avec le terme non linéaire  $\frac{\mu H}{4J} \sin \omega t \cdot X^2$  (cf. équations III.37 et III.41), qui conduit à cette évolution en racine carrée du champ.

Deux procédures expérimentales différentes ont été effectuées. La première consiste à réaliser des expériences "isolées" en changeant l'amplitude du champ sans en chercher une variation continue, c'est-à-dire qu'entre deux mesures (au même champ ou à deux champs différents) on repart de conditions initiales aléatoires. Le deuxième type de procédure expérimentale consiste au contraire à essayer de faire varier

l'amplitude du champ de manière continue c'est-à-dire de manière adiabatique pour essayer de suivre la déstabilisation des régimes périodiques. Comme nous l'avons déjà signalé, les variations de  $H$  ne sont en fait jamais rigoureusement adiabatiques puisque changer  $H$  crée toujours une perturbation sur le mouvement oscillatoire des boussoles. Cependant dans la gamme des faibles amplitudes de champ, ces perturbations peuvent être considérées comme faibles. C'est en effet ce que l'on peut voir sur la courbe de la figure III.26 où pour les faibles amplitudes de champ la courbe est rectiligne. Tous ces points ont été faits dans une certaine continuité c'est-à-dire qu'à partir d'une oscillation donnée on pouvait augmenter l'amplitude du champ en ne perturbant que très faiblement le régime oscillatoire.

Puis, au fur et à mesure que l'on augmente l'amplitude du champ, les perturbations créées par ces variations sont de plus en plus importantes. On perd alors le suivi des régimes oscillants. Le système arrive néanmoins à rester dans un régime d'oscillations transitoire qui lui permet de recalibrer son déphasage avec le champ. On obtient alors de nouvelles oscillations quasipériodiques dont la deuxième fréquence n'est pas forcément tout à fait dans la continuité de la droite.

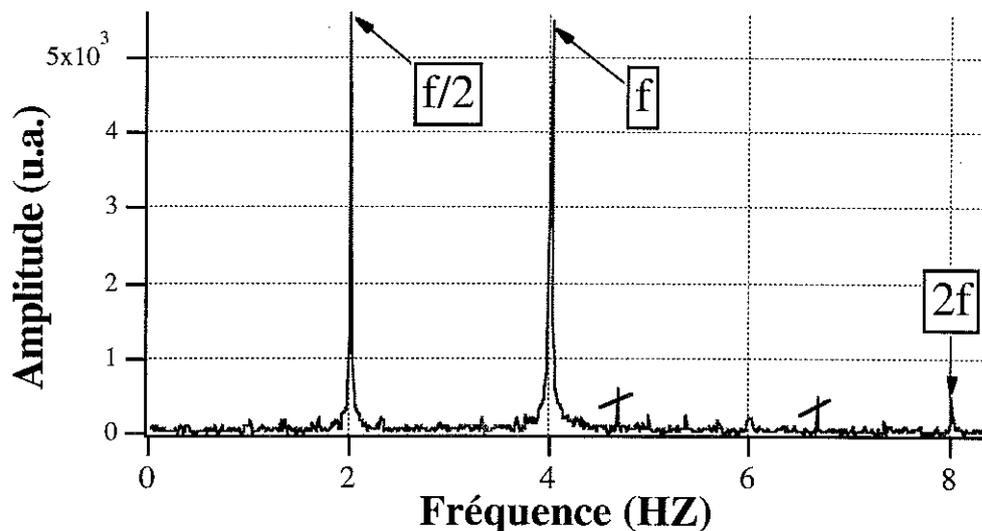
Puis pour des champs plus élevés, ces variations non adiabatiques emmènent alors le système dans une phase chaotique où on observe des rotations avec de brusques changements de sens, des arrêts, etc. ... Mais ces phases chaotiques ne sont que transitoires et le système finit à plus ou moins long terme par retrouver un nouveau régime d'oscillations (toujours caractérisé par deux fréquences) ou alors des régimes réguliers de rotations. On rappelle que ces régimes réguliers de rotations peuvent être soit des régimes où les deux boussoles tournent dans le sens du champ, soit des régimes où les deux boussoles tournent en sens inverse l'une de l'autre, soit des régimes où une boussole tourne tandis que l'autre oscille.

Lorsque l'on augmente encore l'amplitude du champ, on obtient essentiellement ces régimes réguliers de rotation. Cependant, en changeant de nombreuses fois les conditions initiales, on arrive de temps en temps avec de la persévérance à tomber sur des régimes d'oscillations (qui sont toujours caractérisés par deux fréquences). C'est ce qui explique l'aspect plus "bruité" de la courbe représentée figure III.26 pour les forts champs. En effet si l'on arrive pour une amplitude de champ donnée à stabiliser ces régimes d'oscillations avec des conditions initiales différentes (dans notre expérience, on ne peut de toute manière jamais avoir rigoureusement les mêmes conditions initiales), alors la deuxième fréquence de ces régimes d'oscillations sera différente selon celles-ci. Cette dépendance aux conditions initiales montre le caractère très faiblement dissipatif de notre système. A basse amplitude de champ c'est la variation "adiabatique" du champ qui nous permet d'obtenir une droite non "bruitée".

Une caractéristique flagrante de la courbe représentée figure III.26 est l'existence de plages d'amplitude de champ pour lesquelles la deuxième fréquence  $f'$  reste constante. Ces plages sont appelées "paliers d'accrochages" car elles correspondent à des rapports rationnels simples des deux fréquences caractérisant les mouvements quasipériodiques. Notons que justement dans ce cas le signal n'est plus quasipériodique mais périodique puisque les deux fréquences deviennent commensurables. On dit alors que la fréquence  $f'$  a accroché la fréquence  $f$ .

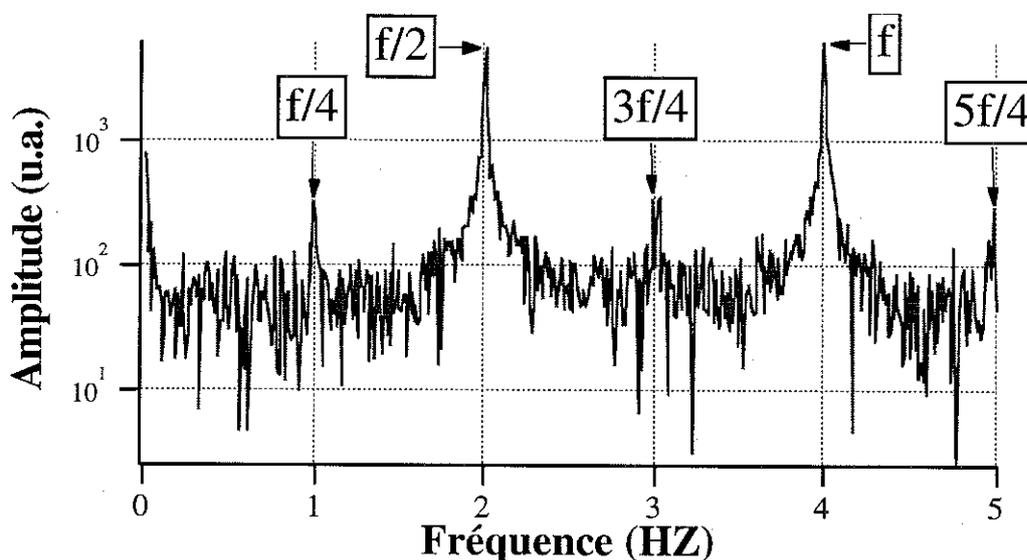
Les paliers les plus nets correspondent à des accrochages simples c'est-à-dire des rapports  $f'/f$  tels que  $\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ . En observant bien la figure III.26 on peut voir d'autres paliers d'accrochages, plus petits, correspondant aux rapports  $\frac{2}{9}, \frac{2}{7}$  et  $\frac{3}{11}$ . Avec une meilleure résolution de cette courbe, on pourrait voir d'autres plages d'accrochages encore plus petites et correspondant à des rapports de nombres plus grands. On peut montrer en fait qu'il existe une infinité de paliers entre deux paliers. C'est pour cette raison qu'une telle courbe est appelée *escalier du diable* (voir par exemple [Ber. 84], [Cvi. 85], [Als. 86], [Hau. 87]). Entre deux paliers correspondant aux accrochages  $\frac{p_1}{q_1}$  et  $\frac{p_2}{q_2}$  se trouve le palier, de largeur plus petite,  $\frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2}$ .

Le scénario décrit dans ce paragraphe est identique à celui trouvé pour une boussole: le système se déstabilise par cascades de doublements de période. Chaque doublement de période résulte d'une subdivision en deux de chacune des résonances considérées dans l'espace des phases. Entre chaque doublement de période, en augmentant l'amplitude du champ, les trajectoires bobinées sur les tores changent leur fréquence de révolution autour de ceux-ci. Pour le système de deux boussoles, on observe très bien ces tores (cf. fig. III.26) jusqu'au premier doublement de période. A partir de ce premier doublement nous n'observons plus les tores, contrairement aux résultats de simulation numérique sur une boussole (cf. [Cro. 82]). On comprend en fait qu'il devient plus difficile d'observer la suite de ce scénario à partir de l'accrochage  $\frac{1}{2}$  puisque tout maintenant se passe à des échelles plus petites. En effet les plages de paramètre de contrôle sont plus restreintes et les zones stochastiques ont pris de l'ampleur dans l'espace des phases au détriment des zones régulières. Il devient donc en fait très difficile expérimentalement d'observer les régimes réguliers à partir de l'accrochage  $\frac{1}{2}$  et le système trouve la plupart du temps ces régions stochastiques. Nous avons cependant réussi à obtenir quelques régimes avec doublement de période et quadruplement de période. (voir figure III.27a et III.27b)



**Fig. III.27a:** Spectre de Fourier d'un régime montrant l'accrochage  $\frac{1}{2}$ .  
 Champ tournant d'amplitude  $H=0.56$  Oe et de fréquence  $f=4$  Hz.  
 Enregistrement du signal: 1024 images échantillonnées à  $f_{éch}=16.67$  Hz.  
 Les pics barrés sont liés à la fréquence d'acquisition  $f_{éch}$

Par contre nous observons bien la suite du scénario à savoir un quadruplement de période, deuxième étape de la cascade (cf. figure III.27b)



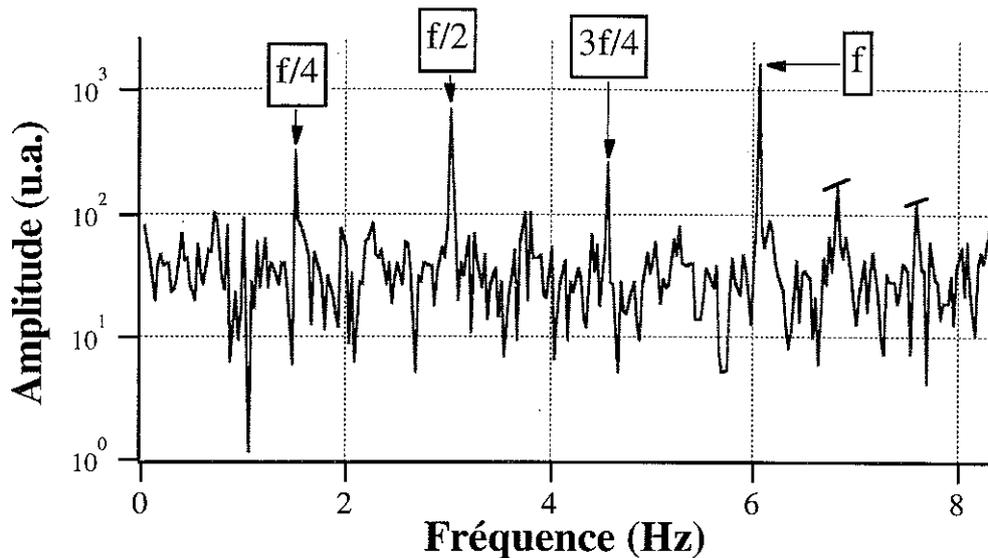
**Fig. III.27b:**  
 Spectre de Fourier d'un régime montrant l'accrochage  $\frac{1}{2}$  affectant chacune des deux résonances  
 créées par le premier accrochage  $\frac{1}{2}$ .  
 Champ tournant d'amplitude  $H=0.595$  Oe et de fréquence  $f=4$  Hz.  
 Enregistrement du signal: 1024 images échantillonnées à  $f_{éch}=16.67$  Hz.  
 Les pics barrés sont liés à la fréquence d'acquisition  $f_{éch}$

*b) Frottements élevés*

Quelques expériences avec des frottements élevés ont été menées sur ce système de deux boussoles en interaction. Nous nous sommes intéressés à deux fréquences d'excitation: 4 Hz (près de la résonance du mode d'oscillations  $X(t)$ ) et 6 Hz (loin de cette résonance). Les expériences ont été complétées par des simulations numériques qui nous permettent de construire des diagrammes de bifurcations et des sections de Poincaré des attracteurs. Nous allons pouvoir constater alors les changements qu'apporte une dissipation plus élevée dans les comportements dynamiques de ce système. La valeur des frottements mise dans la simulation est cent fois plus élevée que celle mesurée expérimentalement dans le cas des faibles frottements. Cependant nous ne pouvons la comparer à celle des frottements élevés expérimentaux qui n'a pu être mesurée. Les amplitudes de champs des diverses bifurcations ne sont donc pas tout à fait comparables entre expérience et simulation, mais restent néanmoins du même ordre de grandeur.

*i - Fréquence d'excitation fixée à 6 Hz*

Les mesures expérimentales ont montré le même scénario de route vers le chaos que dans le cas des faibles frottements à 6 Hz. En effet ici aussi nous observons des cascades de doublements de période. La différence attendue avec le cas faibles frottements est ici la possibilité d'observer plus que le premier doublement de période. En effet comme nous l'avons déjà signalé, l'évolution d'un système très dissipatif est plus progressive rendant l'apparition du chaos plus tardive et cette cascade plus apparente. Ainsi nous pouvons voir sur la figure III.28 le spectre de Fourier d'un régime montrant un quadruplement de période. On peut même deviner l'émergence des pics multiples de  $f/8$  montrant le troisième doublement de période de cette cascade. Nous ne montrons pas les étapes précédentes de la cascade où le système commence par osciller avec la fréquence  $f$  du champ, puis, à amplitude de champ croissante, génère un doublement de période au seuil de bifurcation (le spectre de Fourier présente alors les deux fréquences  $f$  et  $f/2$ ). D'autre part dire que l'apparition du chaos est plus tardive signifie que les amplitudes de champ pour lesquelles on observe les bifurcations successives sont plus élevées que dans le cas faibles frottements.



**Fig. III.28:**

*Spectre de Fourier du régime d'oscillations d'une boussole montrant la deuxième étape de la cascade de doublements de période (quadruplement) avec des frottements élevés.*

*Champ tournant d'amplitude  $H=0.91$  Oe et de fréquence  $f=6.05$  Hz.*

*Enregistrement du signal: 512 images échantillonnées à  $f_{éch}=16.67$  Hz.*

*Les pics barrés sont liés à la fréquence d'acquisition  $f_{éch}$*

Nous allons maintenant voir en quoi l'évolution du système très dissipatif est plus progressive que pour le système faiblement dissipatif. Nous avons vu dans le cas de faibles frottements à 6 Hz qu'en augmentant l'amplitude du champ, le doublement de période observé (suivi d'une cascade que nous n'avons pu observer à cause des faibles frottements) était immédiatement suivi d'une phase de chaos à grande échelle. Il y a donc pour ces systèmes faiblement dissipatifs, passage brutal d'une phase strictement périodique à une phase de chaos à grande échelle (rotations erratiques des boussoles). Lorsque le système présente plus de dissipation, on observe que l'apparition du chaos est plus progressive. En effet entre ces deux phases (périodique et totalement chaotique) se situe une étape intermédiaire durant laquelle le mouvement périodique est affecté par la naissance d'un bruit intrinsèque, signe précurseur du chaos. En effet, lorsque l'on augmente graduellement l'amplitude du champ, les sous-harmoniques qui étaient apparues lors de la cascade vont disparaître une à une dans l'ordre inverse de leur apparition. La disparition de chacune de ces sous-harmoniques se fait par l'émergence d'un bruit caractéristique du chaos.

Cette apparition progressive du chaos dans notre système expérimental est montrée dans les spectres de Fourier représentés sur les figures III.29a, b et c. Ces spectres sont la suite de celui montré sur la figure III.28.

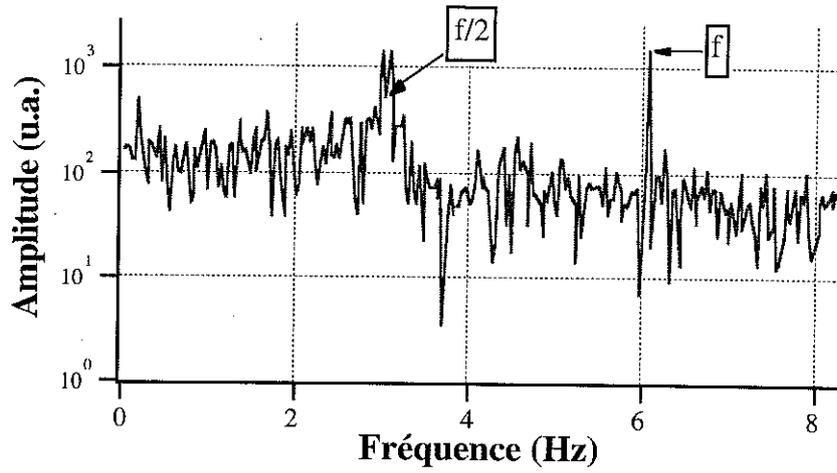


Fig. III.29a:  $H=1.05 Oe$

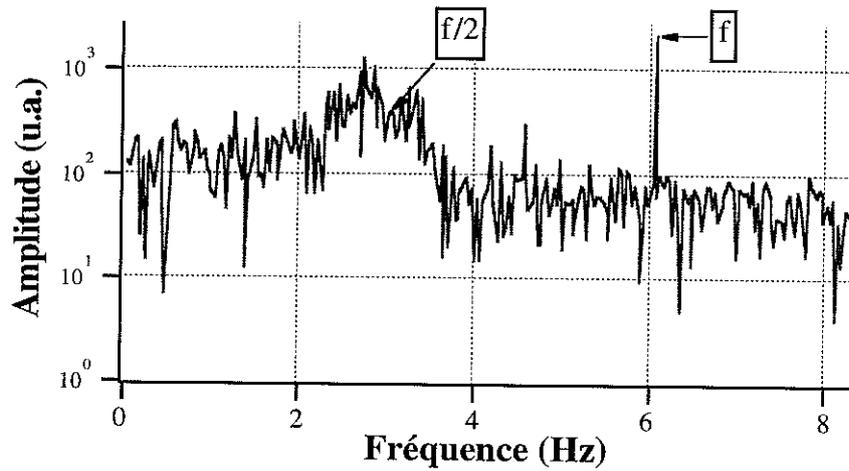


Fig. III.29b:  $H=1.12 Oe$

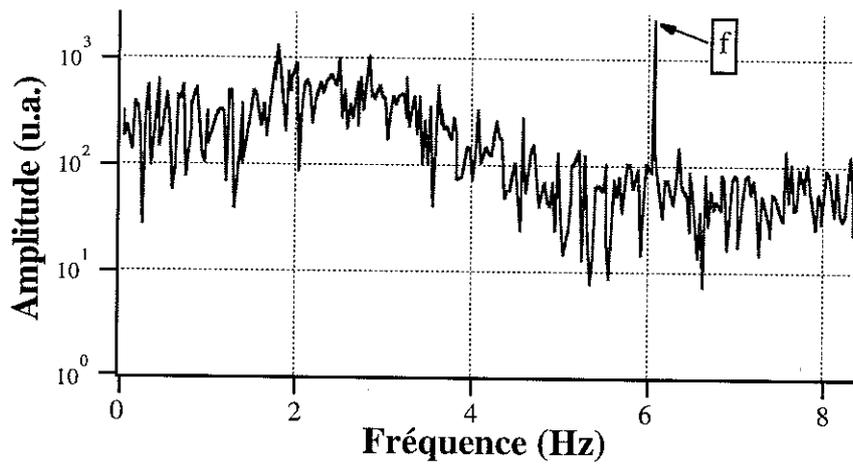


Fig. III.29c:  $H=1.40 Oe$

Fig. III.29a, b et c:

Spectres de Fourier de régimes montrant l'apparition du bruit caractéristique de la cascade inverse associée à la cascade de doublements de période pour les systèmes dissipatifs.

Champ tournant de fréquence  $f=6.05$  Hz.

Enregistrement du signal: 512 images échantillonnées à  $f_{éch}=16.67$  Hz.

La figure III.29 a, représente le mouvement oscillatoire d'une des deux boussoles, où seule subsiste la sous-harmonique d'ordre deux. Toutes les sous-harmoniques plus basses ont déjà été remplacées par du bruit; le niveau de bruit qui était inférieur à 100 dans la figure III.28, est maintenant supérieur à 100 pour les fréquences plus basses que  $f/2$ . Cette figure III.29a montre même que le bruit commence à affecter cette sous-harmonique. Sur les deux derniers spectres (figure III.29b,c), seule reste comme composante périodique la fréquence du champ  $f$ , le niveau de bruit ayant augmenté de manière très visible.

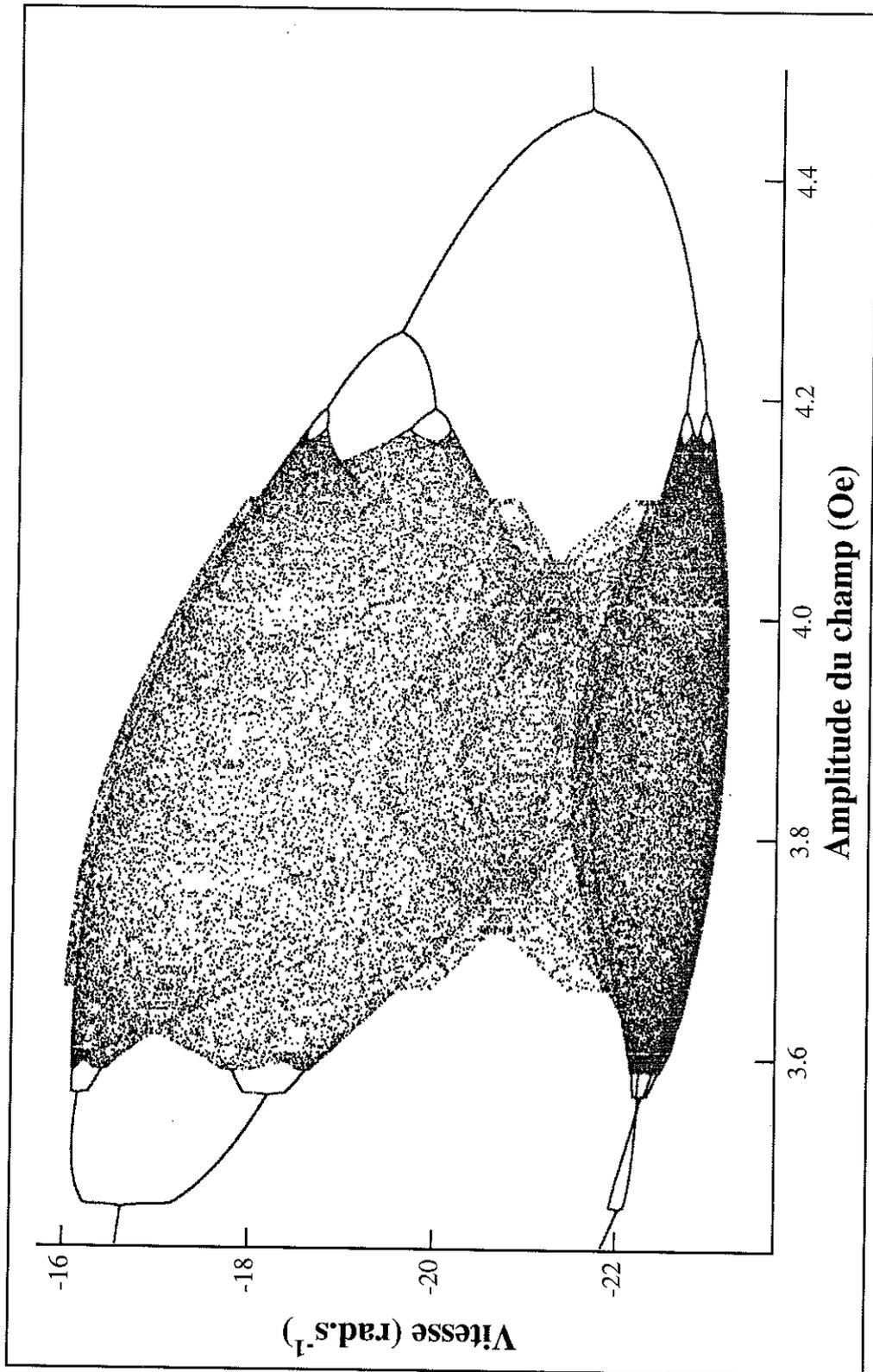
Cette phase de cascade inverse est déjà considérée comme une phase chaotique puisque non périodique. Elle correspond à des régimes oscillants des deux boussoles mais non périodiques. On parle alors d'oscillations erratiques ou de chaos d'oscillations.

Il est à noter que cette cascade inverse (disparition hiérarchisée des sous-harmoniques apparues lors de la cascade directe) suit la même loi d'échelle que la cascade directe c'est-à-dire que l'on définit ces disparitions successives avec le même exposant (exposant de Feigenbaum). On rappelle ici que seuls des calculs numériques permettent de connaître cet exposant puisqu'expérimentalement on a accès à un nombre très restreint de bifurcations.

Si l'on continue à augmenter l'amplitude du champ, on s'aperçoit que le système reste dans cette phase de chaos d'oscillations. En effet contrairement au scénario usuel, notre système n'est pas plongé dans une phase chaotique de grande extension après la cascade inverse. Enfin si l'on augmente encore l'amplitude du champ, les deux boussoles partent dans des régimes réguliers de rotation avec le champ.

Si l'on compare ces observations expérimentales avec la simulation numérique, nous observons ce même scénario à une différence près, que nous discuterons en fin de paragraphe. Nous présentons des résultats de simulation numérique non pas à  $6 \text{ Hz}$  mais à  $6.25 \text{ Hz}$  puisque cette fréquence nous permet alors d'effectuer des stroboscopies (on regarde l'angle et la vitesse toutes les  $16$  unités de temps).

Le diagramme de bifurcations calculé numériquement est présenté sur la figure III.30.



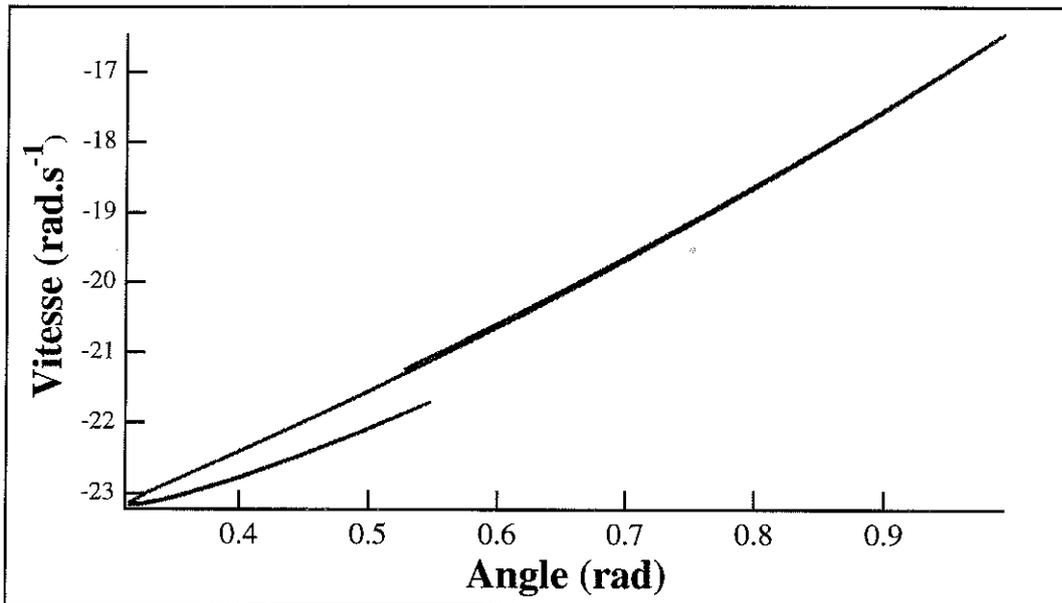
**Fig. III.30:**

*Diagramme de bifurcations pour une fréquence d'excitation de 6.25 Hz et des frottements élevés.  
(simulation numérique sous champ tournant)*

Ce diagramme montre, avec un champ croissant, la séquence suivante: cascade de doublements de période suivie d'une cascade inverse, puis chaos d'oscillations suivi d'une cascade "miroir".

Nous allons décrire plus en détail la phase de chaos d'oscillation, puis nous évoquerons cette cascade miroir.

En accord avec les observations expérimentales, on voit que le chaos ne prend pas beaucoup d'extension (chaos d'oscillation). En effet si l'on regarde une section de Poincaré de cet attracteur pour un champ de  $3.9 Oe$  (figure III.31), on remarque que la gamme de vitesse est assez restreinte. De plus on note une très faible extension transversale traduisant la forte dissipation.



**Fig. III.31:**  
Section de Poincaré de l'attracteur à 6.25 Hz pour une amplitude de champ de 3.9 Oe.  
(simulation numérique sous champ tournant)

En fait, ce système de deux boussoles soumis à un champ tournant de l'ordre de 6 Hz, ne peut pas développer une phase chaotique de grande ampleur et donc construire un attracteur étrange; en effet, il n'arrive pas à dépasser le stade de la cascade inverse, qui n'est en général qu'une étape vers ce chaos de grande extension. Il apparaît même qu'au lieu de cela, le système fasse "marche arrière" et retourne sur des régimes réguliers via des bifurcations inverses (cascade "miroir") qui seront discutées en fin de paragraphe. Si l'on regarde le spectre de Fourier (figure III.32) du régime dynamique d'une des deux boussoles (dont la section de Poincaré de l'attracteur correspondant est

représentée sur la figure III.31), on voit en effet un spectre typique de fin de cascade inverse, où toutes les sous-harmoniques ont disparu dans le bruit caractéristique du chaos. Seul reste le doublement de période bien qu'également touché par le bruit.

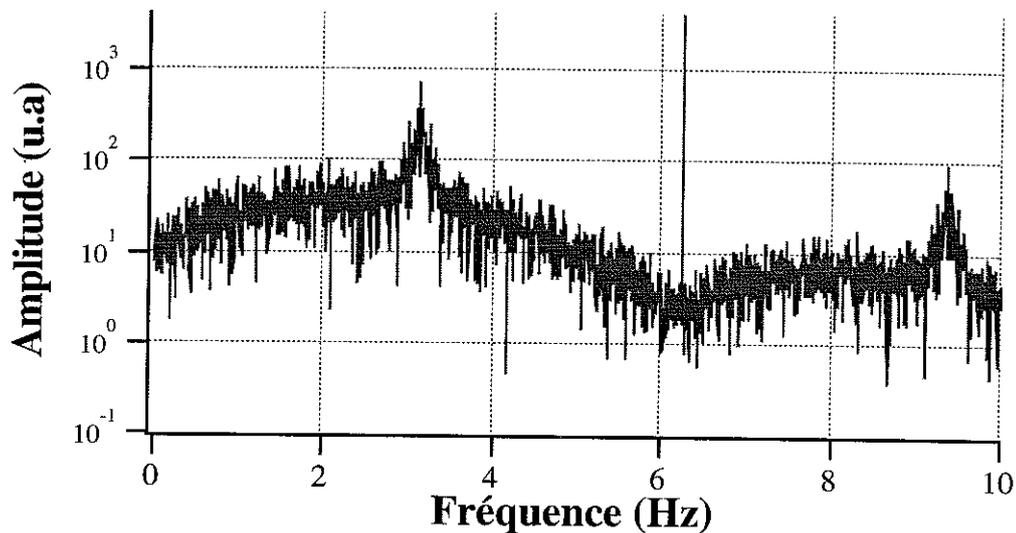


Fig. III.32:

*Spectre de Fourier du régime dynamique d'une des deux boussoles dont la section de Poincaré de l'attracteur est représentée sur la figure III.31; excitation à 6.25 Hz,  $H=3.9 Oe$  (simulation numérique sous champ tournant)*

#### Carte de premier retour:

Puisque nous sommes en présence d'une section de Poincaré qui reste presque confinée sur une dimension, nous pourrions envisager une modélisation de l'évolution dynamique de notre système par une application (ou récurrence) à une dimension c'est-à-dire qui ne fait intervenir qu'une seule variable soumise à une loi d'évolution discrète  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Il s'agit en fait de la même démarche adoptée pour l'application logistique qui modélise très simplement la dynamique d'une population, ou celle adoptée par Hénon [Hén. 76] pour modéliser la convection thermique (application à deux dimensions).

Pour construire cette carte de premier retour, il faut partir d'une section de Poincaré de l'attracteur et relever dans l'ordre chronologique la suite des itérés  $x_n$  qui génèrent cette section. On construit donc cette carte de premier retour en traçant  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Si l'on place un curseur sur un point de la section de Poincaré et que l'on regarde défiler chronologiquement la suite des points qui construisent cette section alors cette suite d'itérés apparaît désordonnée. Pourtant en traçant la carte de premier retour

$x_{n+1} = f(x_n)$ , on s'aperçoit que les itérés successifs s'ordonnent presque bien autour d'une courbe (figure III.33) possédant un extremum (tout comme l'application logistique qui nous a servi à introduire les phénomènes de cascade de doublements de période).

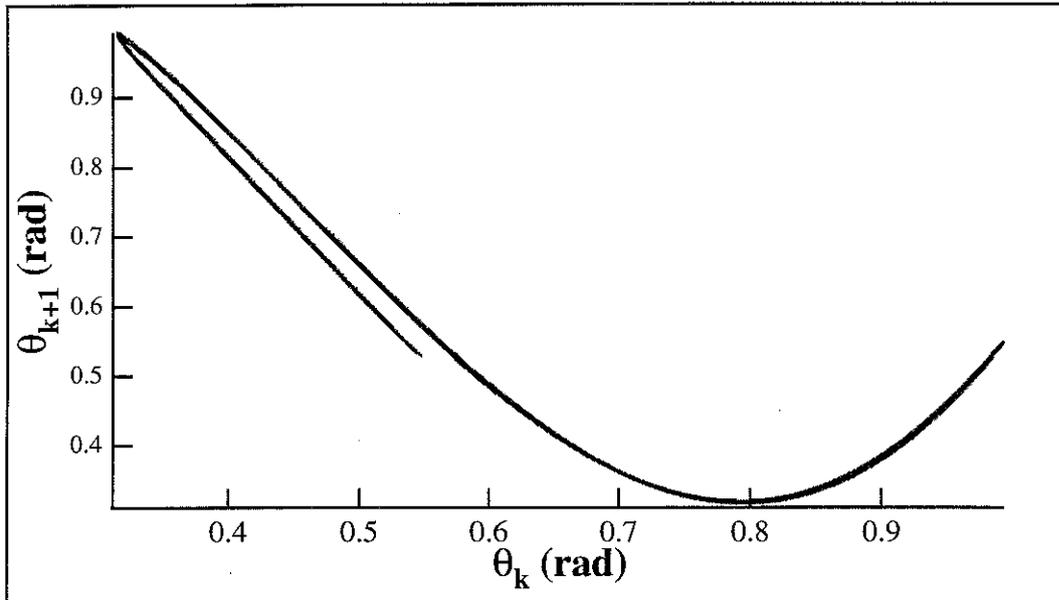


Fig. III.33

Carte de premier retour de la section de Poincaré représentée sur la figure III.31

Néanmoins cette courbe ne définit pas une fonction ce qui veut dire que rigoureusement on ne peut déjà plus, pour cette valeur du paramètre de contrôle, modéliser la dynamique des deux boussoles par une application à une dimension. Ceci était attendu puisque notre section de Poincaré s'étalait très légèrement sur les deux dimensions de la coupe.

Cependant, bien qu'approximatif, le résultat de cette carte de premier retour met tout de même en évidence le déterminisme caché d'un mouvement chaotique dissipatif, puisque contrairement à ce que l'on pouvait penser en regardant la suite des itérés sur la section de Poincaré de l'attracteur, ceux-ci suivent une certaine loi d'évolution, ce qui montre une nouvelle fois qu'il y a de l'ordre dans le chaos.

A partir du chaos d'oscillations, si l'on augmente encore l'amplitude du champ, on observe expérimentalement que le système est entraîné dans des régimes de rotations. Par contre, les résultats de simulation numérique (figure III.30) montrent un résultat différent. En effet on voit qu'après ces régimes chaotiques d'oscillations, le

système retourne dans des régimes d'oscillations régulières par un mécanisme peu courant que l'on pourrait appeler "cascade miroir". Nous avons pris soin de nous assurer de la stabilité d'un tel scénario numérique en laissant par exemple évoluer divers régimes dynamiques sur des temps très longs. Nous avons également diminué de plusieurs décades le pas de champ pour construire ce diagramme de bifurcations qui restait alors identique à lui-même. Pour notre système de deux boussoles, nous avons trouvé des séquences identiques à ces dernières en augmentant légèrement l'écart entre la fréquence d'excitation et la fréquence propre du mode d'oscillation des deux boussoles en phase. En effet la séquence obtenue était 1,2,4,8,16,8,4,2,1 sans phase chaotique. Sur cette dernière séquence, comme sur celle montrée sur la figure III.30, après des régimes réguliers d'oscillations, des régimes réguliers de rotation avec le champ sont observés.

Cet effet miroir dans la route vers le chaos a été observé dans des oscillateurs électroniques forcés [Van. 85]. Les jonctions  $p-n$  ont notamment montré des séquences de bifurcations 1,2,4,8,...*chaos*...8,4,2,1 qui sont strictement identiques au diagramme montré sur la figure III.30. Des séquences du type 1,2,4,8,4,2,1 sans phase chaotique ont également été trouvées pour ces oscillateurs électroniques.

Le retour à des régimes périodiques d'oscillations après la phase chaotique reste donc le seul phénomène non observé expérimentalement puisque dans ce cas le système est entraîné dans des rotations tout de suite après la phase de chaos d'oscillations. Il est pourtant évident que nous ne pouvons conclure sur ce désaccord entre expérience et simulation. Nous devons revenir à cette notion d'adiabaticité des variations du paramètre de contrôle qui marque la différence essentielle entre les procédures expérimentales et numériques. En effet, une variation expérimentale de l'amplitude du champ crée une perturbation non négligeable sur ces régimes de chaos d'oscillations. Nous ne pouvons donc pas affirmer que les régimes de rotation sont obtenus tout de suite après cette phase chaotique. Il est alors envisageable qu'avec des variations de champ adiabatiques, le système, comme en simulation, retrouve des régimes réguliers d'oscillations par le biais de bifurcations inverses (effet miroir) avant de trouver finalement des régimes de rotation avec le champ.

#### *ii - Fréquence d'excitation fixée à 4 Hz*

Nous nous plaçons ici à une fréquence d'excitation très proche de la fréquence du mode propre d'oscillations  $X(t)$ . Une fois de plus, nous allons voir que c'est dans cette gamme de fréquence que les réponses du système sont les plus riches. Dans le cas

faibles frottements nous y avons observé des régimes quasipériodiques dont l'une des fréquences dans sa variation avec l'amplitude du champ, dessinait un escalier du diable. Dans le cas de frottements élevés et pour une fréquence d'excitation loin de la résonance (vers 6 Hz) nous avons noté l'existence de régimes chaotiques qui restaient confinés dans des oscillations. A plus fort champ, des rotations régulières étaient observées.

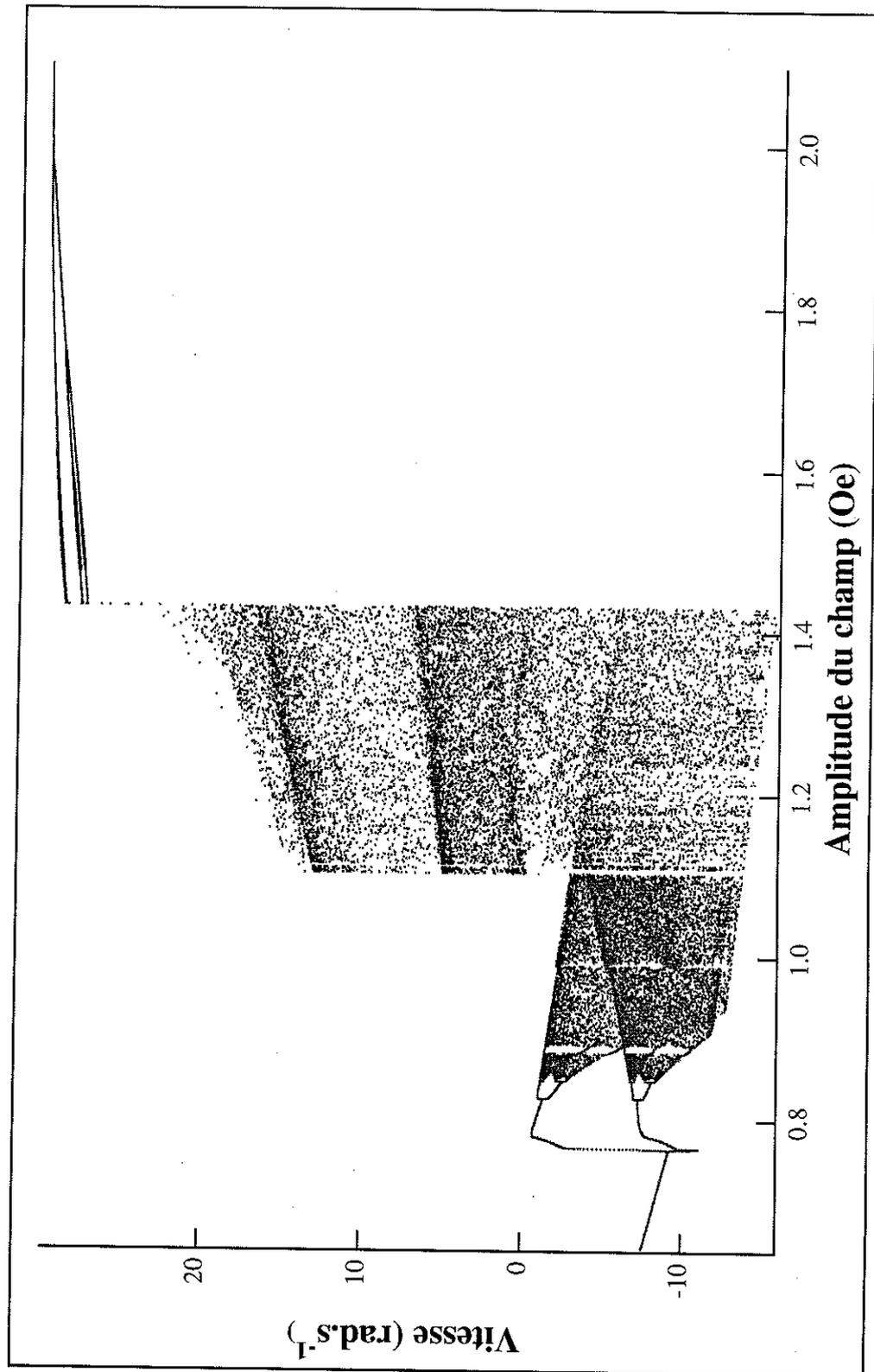
Pour apporter un contrepoids à ces régimes de rotation, il suffit d'augmenter l'importance des régimes d'oscillations ce qui aura pour effet de permettre au système de développer des phases chaotiques de plus grande ampleur. On s'attend donc en excitant le système près de sa fréquence propre d'oscillations (vers 4 Hz) à voir de telles phases chaotiques.

Expérimentalement, le début du scénario de déstabilisation des régimes périodiques reste qualitativement identique à celui observé loin de la résonance (vers 6 Hz). Nous observons des cascades de doublements de période. Ces cascades sont suivies par une cascade inverse durant laquelle toutes les sous-harmoniques de périodicité  $2^n T$  ( $T$  étant la périodicité du champ) vont disparaître une à une, dans l'ordre inverse de leur apparition, laissant place à du bruit qui devient de plus en plus important au fur et à mesure que l'on augmente le paramètre de contrôle.

Lorsque l'on continue à augmenter le paramètre de contrôle, le système ne reste alors plus confiné dans ce chaos d'oscillations. Des mouvements qui sont des combinaisons d'oscillations et de rotations commencent à apparaître. Comme cela était attendu, le système semble explorer une plus grande région de l'espace des phases au sein d'un attracteur qui doit y apparaître moins confiné. Néanmoins le champ tournant garde une emprise très forte sur le système. En effet ces régimes chaotiques restent globalement des rotations avec le champ, sur lesquelles se superposent des oscillations. De temps en temps, le système arrête sa rotation puis inverse son sens, tout en continuant à entretenir des oscillations. Mais ces inversions de sens de rotation ne durent pas très longtemps et le système tourne globalement dans le sens de rotation du champ

Cette phase chaotique de plus grande ampleur persiste dans une gamme assez restreinte du paramètre de contrôle et finit par laisser place à des régimes de rotations régulières avec le champ tournant.

L'intégralité de ces observations expérimentales est confirmée par la simulation numérique comme le montre le diagramme de bifurcations présenté sur la figure III.34.

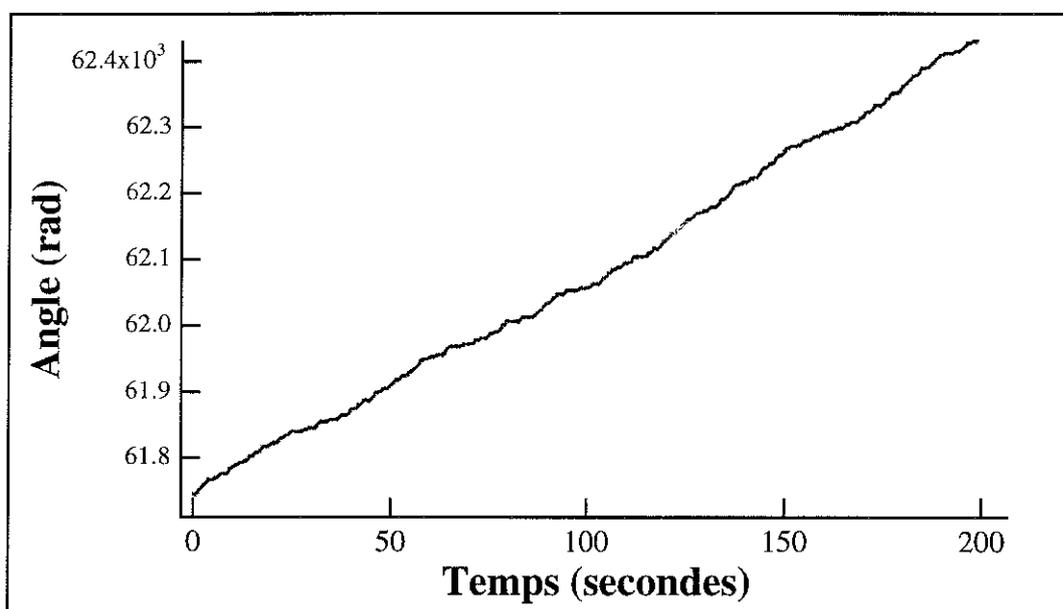


**Fig. III.34:**

*Diagramme de bifurcations pour une fréquence d'excitation de 4 Hz et des frottements élevés.  
(simulation numérique sous champ tournant)*

On y reconnaît les diverses phases observées expérimentalement à savoir des oscillations périodiques qui se déstabilisent par cascades de doublements de période, suivies de cascades inverses et d'une phase de chaos d'oscillations. Celle-ci laisse ensuite place à une phase chaotique de plus grande ampleur dans l'espace des phases. Puis pour des amplitudes de champ plus grandes, le système retourne dans des régimes de rotation.

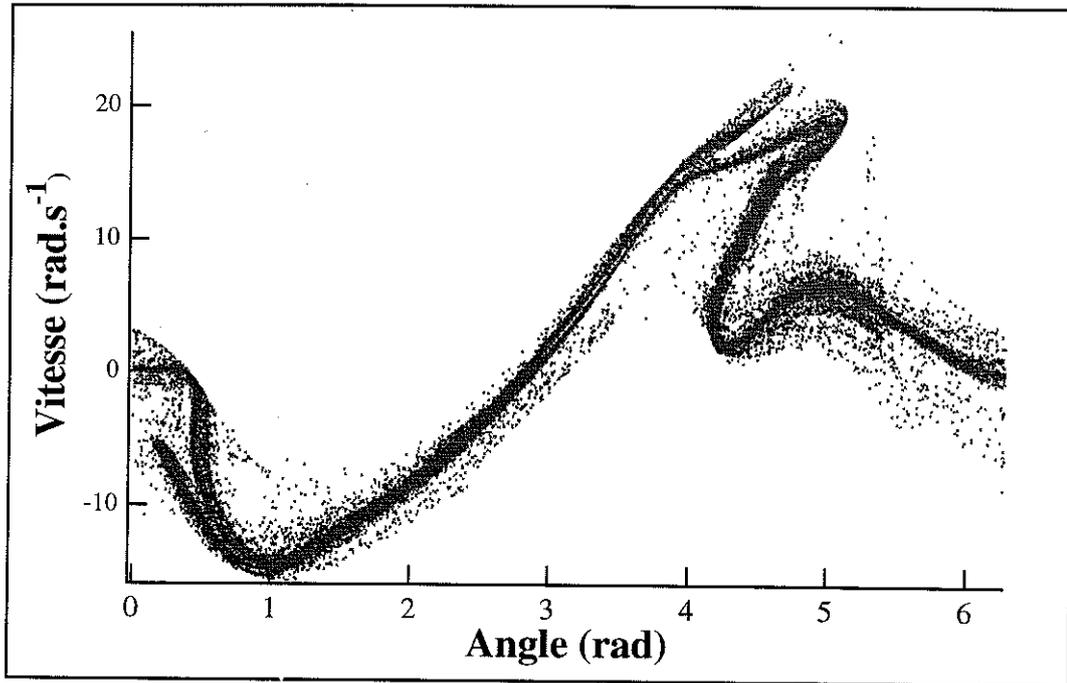
L'évolution d'une boussole au cours du temps est représentée sur la figure III.35. La dérive de celle-ci avec le champ tournant y est apparente et on décèle les irrégularités dans cette rotation, qui correspondent à une évolution chaotique.



**Fig. III.35:**

*Evolution temporelle de l'angle d'une des deux boussoles pour une fréquence d'excitation de 4 Hz et une amplitude de champ de 1.20 Oe.  
(simulation numérique sous champ tournant)*

La figure III.36 présente la section de Poincaré de l'attracteur qui décrit la dynamique des boussoles présentée sur la figure III.35 pour un champ d'amplitude  $H = 1.2 \text{ oe}$ .



*Fig. III.36:*

*Section de Poincaré de l'attracteur à 4 Hz pour une amplitude de champ de 1.2 Oe  
(simulation numérique sous champ tournant)*

On note que la section de Poincaré présente une extension transversale plus grande qu'à 6.25 Hz. En dilatant les échelles, on y décèlerait une structure en feuillets caractéristique d'un attracteur étrange.

Le premier régime de rotation trouvé numériquement correspond au cas où une boussole tourne avec le champ tandis que l'autre oscille autour d'une direction fixe. Ces deux mouvements, après la phase chaotique, se stabilisent d'abord chacun sur un quadruplement de période, puis laissent place à des mouvements ayant huit fois la périodicité du champ, avant de revenir successivement à des mouvements ayant des périodicités quatre, puis deux, puis un. Finalement, pour des champs un peu plus forts, les deux boussoles se mettent à tourner régulièrement avec le champ. Notons qu'expérimentalement le système trouve également ce régime où une oscille pendant que l'autre tourne avant de laisser place à des rotations des deux boussoles.

Si l'on regarde en détail la phase de chaos d'oscillations du diagramme de bifurcations présenté sur la figure III.34, on y décèle plusieurs phénomènes intéressants décrits dans la littérature. L'agrandissement de cette zone est montré sur la figure III.37.

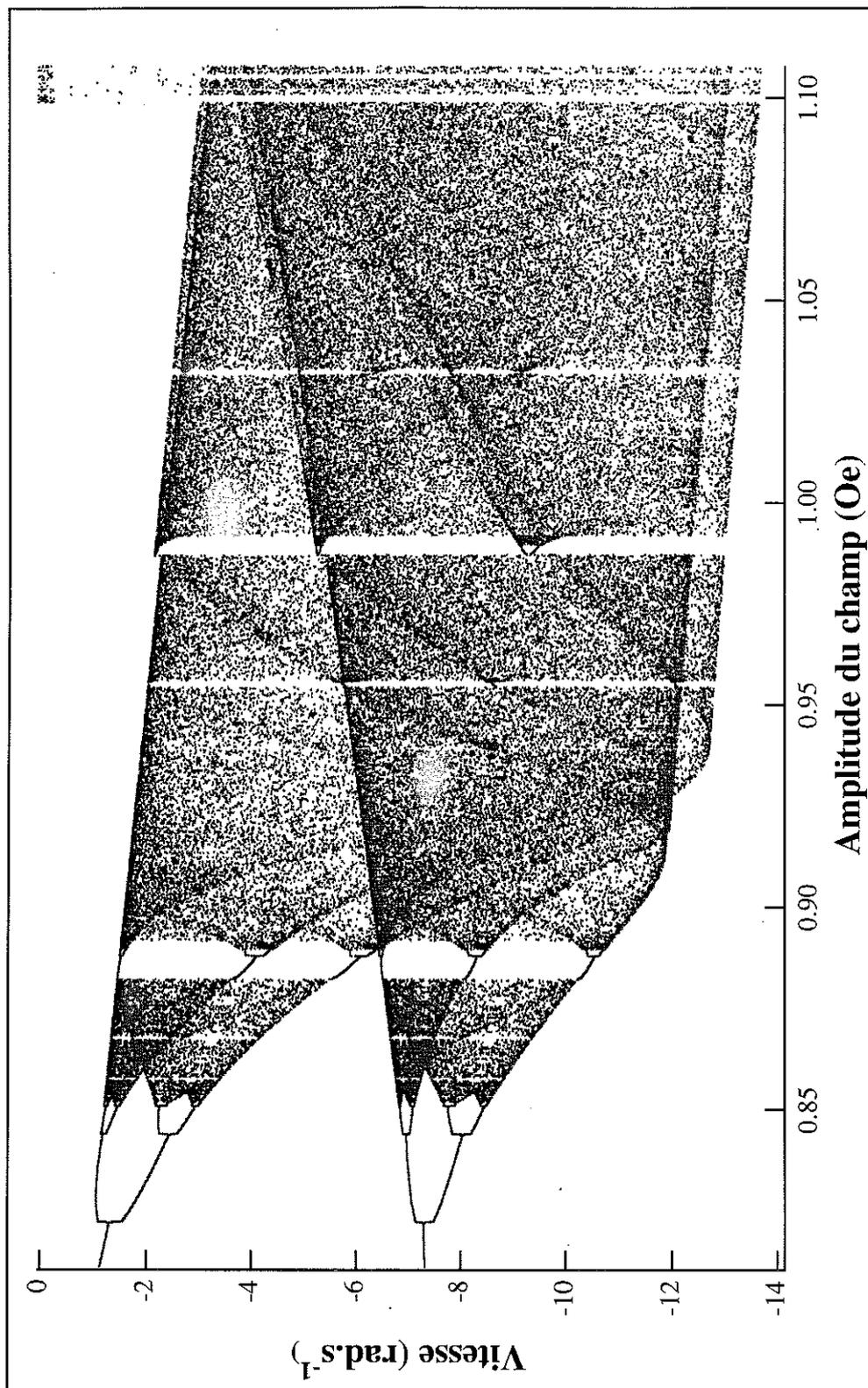


Fig. III.37

Diagramme de bifurcations pour une fréquence d'excitation de 4 Hz et des frottements élevés. Cette figure est un agrandissement de la figure III.34. (simulation numérique sous champ tournant)

Le premier d'entre eux, concerne la succession de phases régulières et chaotiques dans la phase de chaos d'oscillations. Sur la figure III.37 on observe une séquence très nette de phases périodiques après la cascade  $2^n T$  qui est:  $6T$ ,  $5T$ ,  $3T$ ,  $6T$ ,  $5T$ . Cette succession de phases périodiques qui apparaît juste après la cascade inverse revêt elle aussi un caractère universel. Découverte par Metropolis, Stein et Stein ([Met. 73]), la séquence U (U pour universelle) prévoit l'apparition de phases périodiques de période  $KT$ , pour tous les entiers  $K$ ; chacune de ces phases de périodicité  $KT$ , se déstabilise par cascade de doublements de période ( $2^n KT$ ). L'ordre d'apparition de ces séquences périodiques est déduit de cette théorie (voir par exemple [Swi. 83]).

Le deuxième phénomène intéressant est le passage d'une phase chaotique à une phase régulière par le phénomène dit d'intermittence, c'est-à-dire qu'à paramètre de contrôle fixé (au dessus d'un certain seuil appelé seuil d'intermittence), une phase régulière du système est entrecoupée de bouffées de désordre qui déstabilisent celle-ci. Le système redevient donc régulier après la disparition de chaque bouffée chaotique. Ici encore on peut définir une loi d'échelle: la durée moyenne des phases régulières doit diverger comme  $|s - s_i|^{-1/2}$  lorsque l'on se rapproche du seuil ( $s$  est le paramètre de contrôle et  $s_i$  le seuil d'intermittence). Trois types d'intermittence ont été introduits par Pomeau et Manneville [Pom. 80] qui ont décrit ces phénomènes à l'aide d'itérations d'une fonction à une variable.

Le troisième phénomène intervient juste après la cascade inverse associée à chaque périodicité  $KT$  de la séquence universelle. On peut en effet apercevoir très nettement sur le diagramme de bifurcations de la figure III.37, que chaque cascade inverse est suivie d'une ligne verticale décrivant l'apparition soudaine de mouvements chaotiques de plus grande ampleur. Une section de Poincaré montrerait alors le passage de  $K$  zones distinctes (chaos à  $K$  bandes) à une seule zone définissant l'attracteur (chaos à une bande). Cette ligne verticale traduit, tout comme celle qui apparaît au passage de phases chaotiques à des phases régulières, un phénomène d'intermittence. Ce dernier est interprété par Grebogi et al. ([Gre. 83b]) comme résultant d'une collision entre un cycle limite instable (de périodicité  $KT$  si l'on s'intéresse à la cascade  $2^n KT$ ) et la région chaotique qui suit cette même cascade. Le système passe donc de manière intermittente de l'ancien attracteur au nouveau. Le temps moyen de séjour dans l'ancien suit la loi  $|s - s_{ic}|^{-1/2}$  où  $s_{ic}$  est le seuil de paramètre de contrôle où apparaît cette collision. Ce phénomène est appelé "interior crisis".

On peut noter enfin que pour une valeur de l'amplitude du champ proche de  $1.4 \text{ Oe}$  (cf. fig. III.34) le système est le siège d'une collision entre le régime périodique instable de période  $T$  (périodicité du champ) et l'attracteur chaotique qui existe au delà de  $1.1 \text{ Oe}$ . Cette "boundary crisis" (cf. § III.4.3.1.a) a donc pour conséquence l'existence de régimes chaotiques transitoires et l'apparition de solutions régulières.

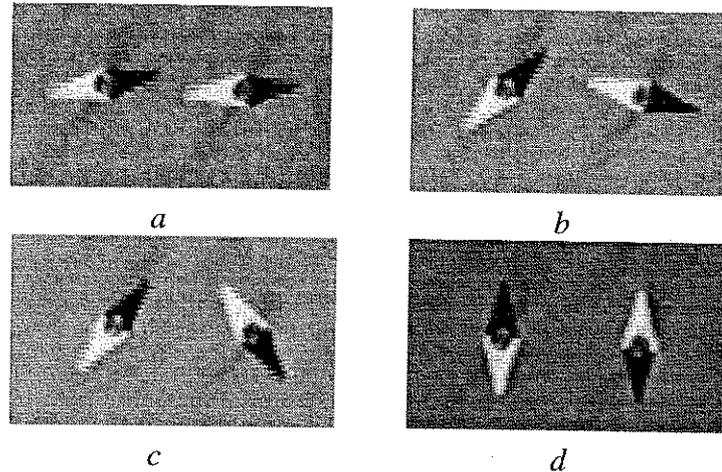
### **III.4.3.2 - Etude sous champ alternatif perpendiculaire**

Nous avons réalisé quelques expériences sous champ alternatif perpendiculaire à  $\vec{r}_{A,B}$ , afin de les comparer aux résultats trouvés lorsque l'excitation est un champ tournant. Nous nous sommes limités au cas où les frottements sont importants.

Les équations pour les modes propres, en conservant les premiers termes non linéaires ont été déjà écrites (cf. équations (III.41) et (III.42)). Nous avons alors signalé que les équations des modes propres ne différaient de celles obtenues sous champ tournant que par l'absence du terme paramétrique.

Nous allons, dans le contexte des routes vers le chaos, nous attacher essentiellement à deux points qui marquent la différence des comportements dynamiques de ce système de deux boussoles en interaction soumises à un champ alternatif perpendiculaire à  $\vec{r}_{A,B}$ , par rapport à un champ tournant.

Les observations expérimentales montrent que le système commence par osciller à la fréquence du champ autour de la direction définie par  $\vec{r}_{A,B}$  (figure III.38a). En augmentant l'amplitude du champ, les deux boussoles continuent à osciller en phase entre elles mais autour d'une position moyenne  $\theta_m$  qui croît lentement avec le champ. Jusqu'ici, les résultats sont analogues à ce qui est observé sous un champ tournant. Puis, au fur et à mesure que l'amplitude du champ croît, les positions moyennes autour desquelles chacune oscille s'écartent l'une de l'autre (figure III.38b). Ensuite, la figure III.38c montre que les boussoles oscillent autour de deux directions qui sont devenues symétriques. Finalement, à partir d'un certain seuil, on obtient un état peu commun tout à fait analogue au "pendule inversé" (figure III.38d).



**Fig. III.38:**

*Images expérimentales (champ alternatif) enregistrées lors d'une stroboscopie au maximum du champ à la fréquence du champ (4 Hz).*

*Les amplitudes de champ sont*

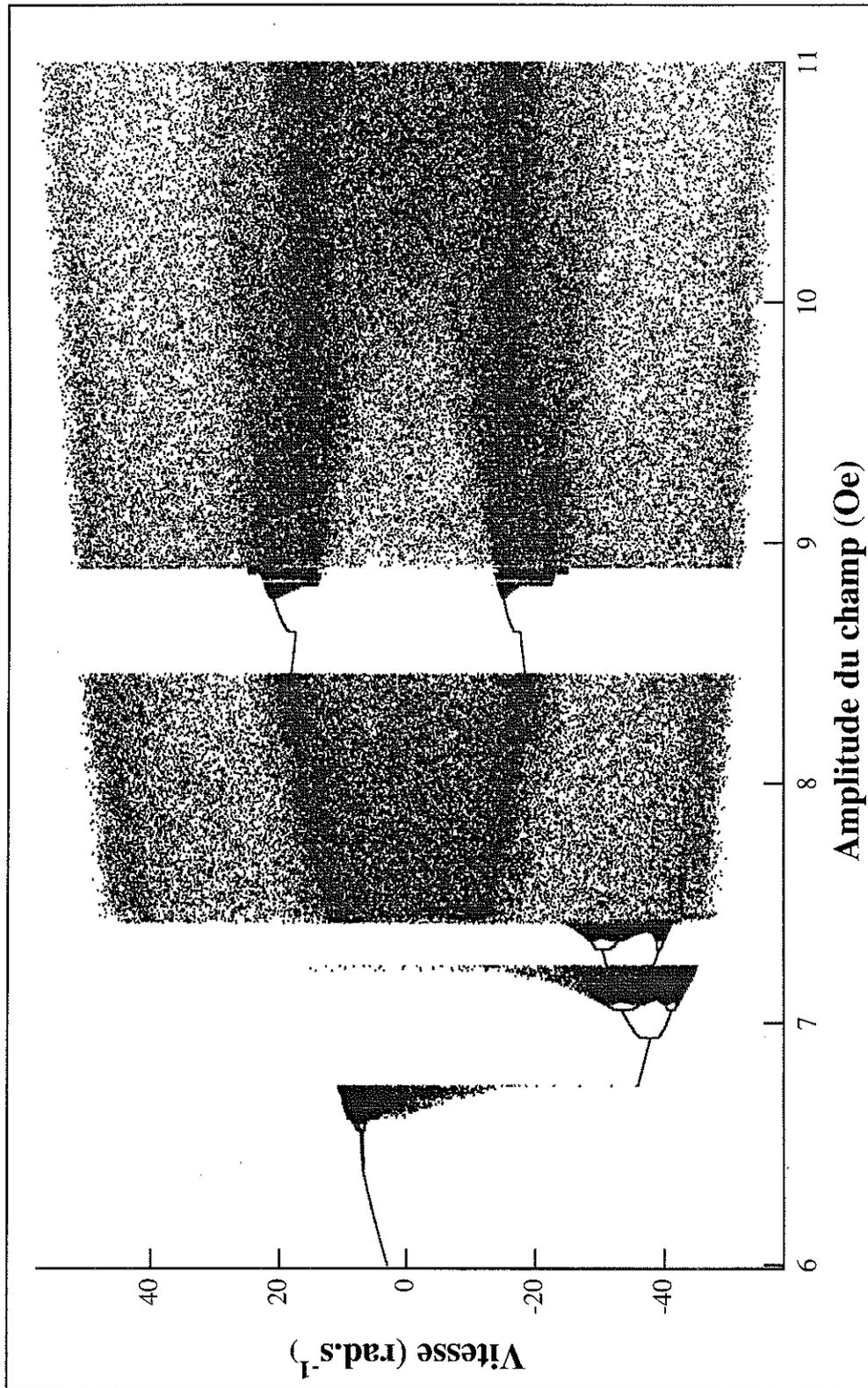
*a:  $H=0.77$  Oe, b:  $H=1.68$  Oe, c:  $H=1.82$  Oe, d:  $H=2.8$  Oe.*

Le pendule inversé décrit l'état d'équilibre instable du pendule qui est dirigé sur la verticale mais vers le haut. Il est pourtant possible de stabiliser de manière dynamique cet état instable statiquement (voir par exemple [Bla. 92]). L'état représenté sur la figure III.38d est un état où les boussoles sont immobiles. A partir d'un seuil d'apparition et dans toute la gamme de champ supérieure qui nous est accessible expérimentalement, cet état du "pendule inversé" est obtenu.

Une fois encore, la simulation numérique reproduit intégralement toutes ces observations expérimentales.

Nous avons, dans le cas du champ tournant, montré l'emprise de ce dernier sur les états dynamiques chaotiques des deux boussoles. Ces états étaient de faible extension dans l'espace des phases; nous observions soit du chaos d'oscillations, soit des rotations chaotiques mais qui dérivait globalement avec le champ tournant. Nous allons maintenant voir la deuxième différence (après le "pendule inversé") qu'introduit le champ alternatif par rapport au champ tournant à savoir la possibilité de régimes chaotiques de plus grande ampleur dans l'espace des phases.

Nous allons pour cela nous baser uniquement sur des résultats de simulation numérique puisque de tels régimes prennent place pour des amplitudes de champ qui ne nous sont pas accessibles expérimentalement. Le diagramme de bifurcations est présenté sur la figure III.39.

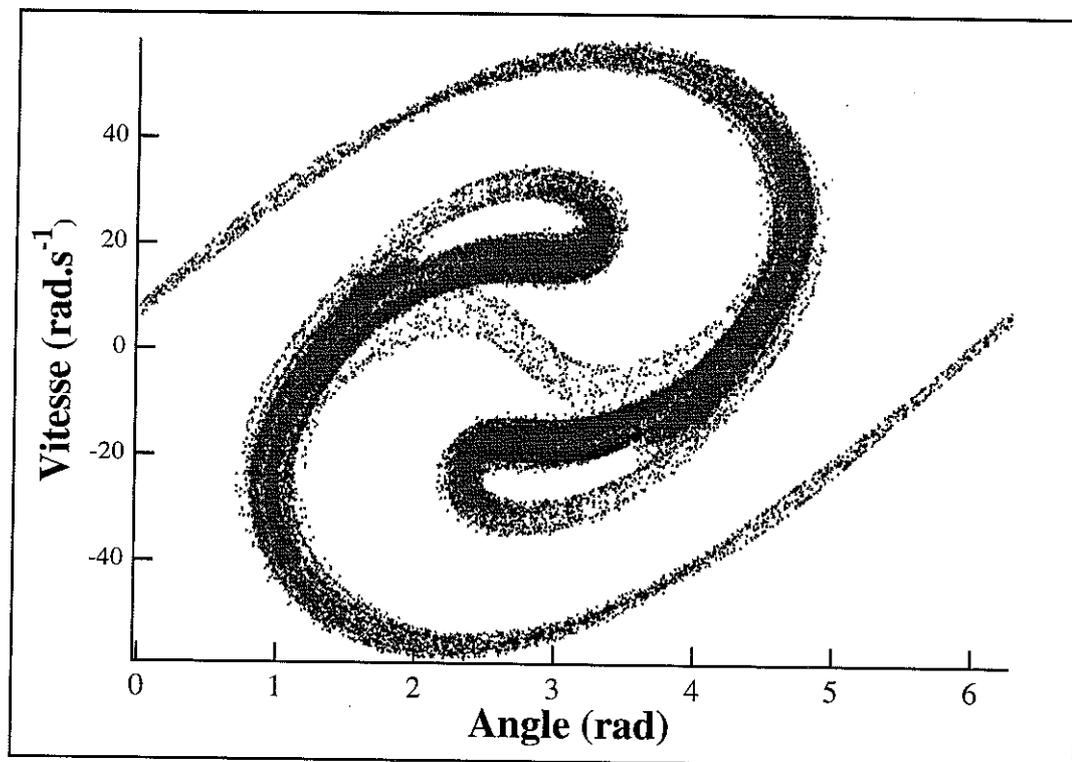


**Fig. III.39:**

*Diagramme de bifurcations pour une fréquence d'excitation de 4 Hz et des frottements élevés.  
(simulation numérique sous champ alternatif)*

Après le régime du “pendule inversé” (qui a lieu juste avant 6 Oe), nous observons la succession de trois séquences identiques. Chaque séquence est constituée des régimes et des bifurcations suivants: rotation régulière, cascade de doublements de période, cascade inverse. A la fin de cette troisième séquence, une phase chaotique de grande ampleur se développe. Puis, le système se restabilise dans un régime régulier, qui subit à son tour une nouvelle cascade de bifurcations sous-harmoniques et une cascade inverse. Le système retourne alors dans cette phase chaotique de grande extension.

Cette dernière se visualise aisément au moyen d'une section de Poincaré que l'on a représentée sur la figure III.40



**Fig. III.40:**

*Section de Poincaré de l'attracteur à 4 Hz pour une amplitude de champ de 10 Oe  
(simulation numérique sous champ alternatif)*

Cette section contraste avec celle obtenue en champ tournant. Elle semble d'une part topologiquement très différente. D'autre part, elle remplit une région plus grande de l'espace des phases (noter l'échelle des vitesses). On peut remarquer la ressemblance de cet attracteur avec celui trouvé pour un pendule forcé paramétriquement (cf. [Lev. 85]) que l'on a représenté sur la figure III.41.

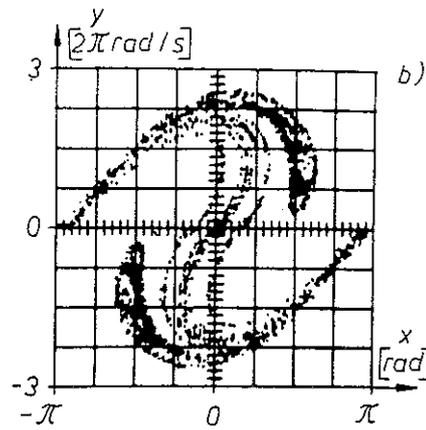


Fig. III.41

Section de Poincaré pour le pendule paramétrique (tiré de [Lev 85])

On peut souligner que cette ressemblance est surprenante puisqu'aucune composante paramétrique n'existe avec le champ alternatif. Par contre, l'attracteur que nous avons observé avec le champ tournant qui lui crée une excitation paramétrique ne ressemble pas à celui du pendule paramétrique.

On peut enfin comparer l'évolution d'une boussole, représentée sur la figure III.42, à celle que l'on obtenait avec le champ tournant (cf. figure III.35)

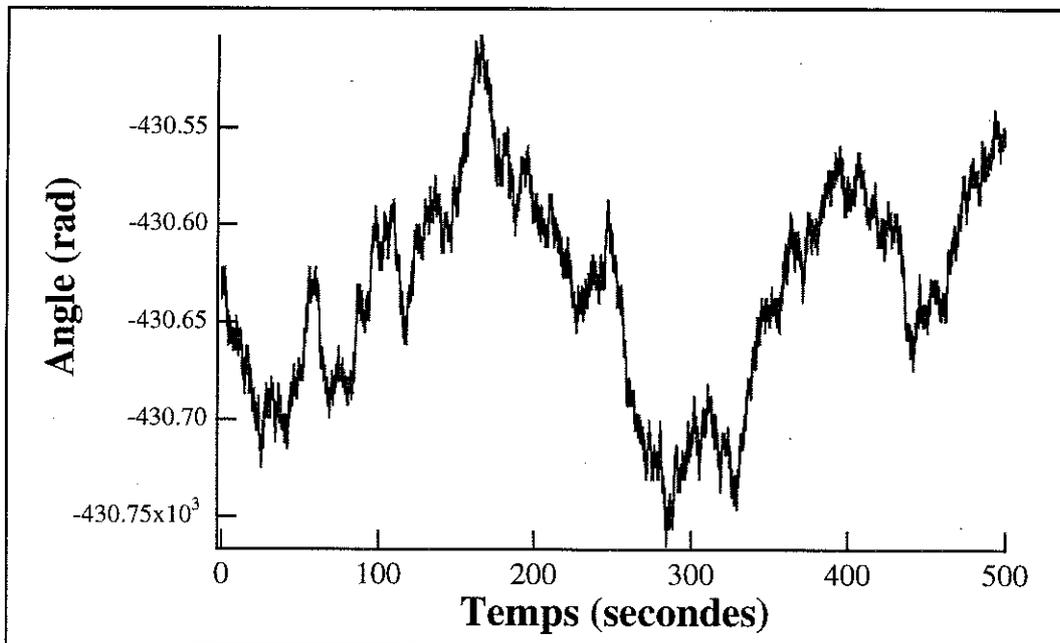


Fig. III.42:

Evolution temporelle de l'angle d'une des deux boussoles pour une fréquence d'excitation de 4 Hz et une amplitude de champ de 10 Oe.  
(simulation numérique sous champ alternatif)

### III.5 • Dynamique d'une ligne de dix boussoles en interaction

Les diverses observations des comportements thermiques et dynamiques des réseaux de boussoles montrent le rôle privilégié joué par les lignes. C'est en effet une caractéristique essentielle de l'interaction dipolaire que de chercher la formation de celles-ci. Il est donc naturel dans l'optique d'une étude des propriétés dynamiques des réseaux de boussoles de s'attacher aux comportements d'une ligne puisque ceux-ci devraient régir la dynamique des réseaux.

La ligne n'est cependant pas qu'une étape vers l'étude des réseaux; elle constitue également en soi un système expérimental unidimensionnel original. En effet, outre l'aspect temporel, elle comporte une dimension spatiale qui s'intègre alors dans le cadre plus général de chaos spatio-temporel. Nous allons effectivement voir que la ligne peut être le siège de propagations d'ondes.

Cependant notre dispositif expérimental actuel n'est pas adapté pour une telle étude compte tenu du faible nombre de boussoles que l'on peut placer dans une zone de champ homogène. Nous nous sommes donc limités à quelques expériences ne prenant en compte que la dimension temporelle. Nous n'avons pu, compte tenu des durées nécessaires à chaque expérience, que nous restreindre à des observations qualitatives et quelques mesures quantitatives.

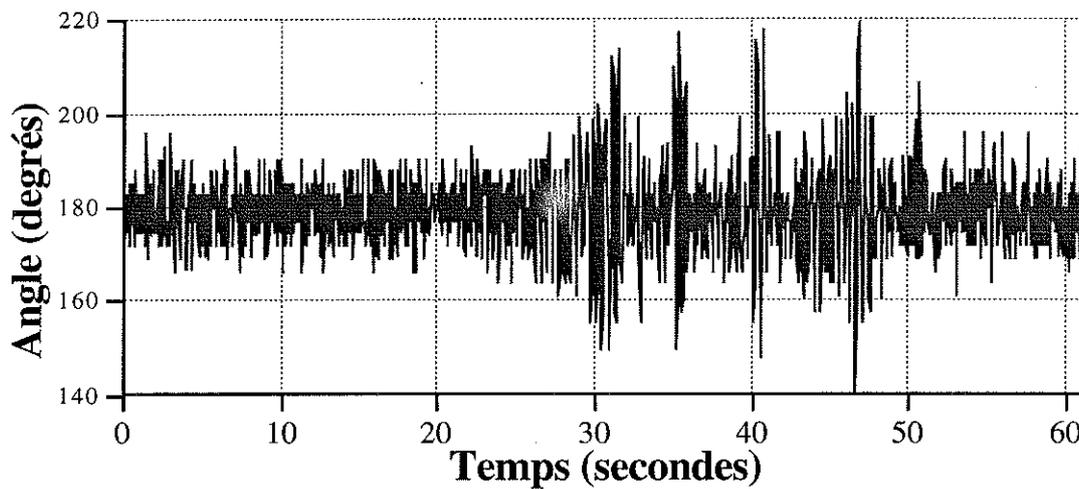
Ces observations concernent une ligne de dix boussoles en interaction soumise à un champ alternatif (perpendiculaire ou longitudinal) ou tournant. Nous resterons dans le cas de faibles frottements (mêmes pivots que pour l'étude des deux boussoles faiblement dissipatives).

### III.5.1- Comportements sous champ tournant

Le système est excité par un champ tournant de fréquence 5.4 Hz. De manière générale, on observe que les deux bords ont une amplitude d'oscillations plus faible que les autres boussoles.

En dessous d'une certaine valeur de l'amplitude du champ, les dix boussoles oscillent en phase entre elles, autour de la direction définie par la ligne, à la fréquence du champ appliqué.

A partir d'un certain seuil, à amplitude de champ fixée, ces oscillations régulières sont de temps en temps interrompues par des oscillations de plus grande amplitude (cf. figure III.43).



*Fig. III.43:*

*Evolution au cours du temps de l'angle d'une boussole au centre de la ligne  
 Champ tournant d'amplitude  $H=0.17$  Oe et de fréquence  $f=5.40$ Hz.  
 Enregistrement du signal: 1024 images échantillonnées à  $f_{ech}=16.67$  Hz.*

Ces grandes fluctuations semblent naître au centre de la ligne et se propager ensuite sur les bords, où elles se réfléchissent pour retourner au centre, etc..., jusqu'à ce qu'une oscillation régulière des boussoles finisse par se stabiliser. C'est au centre de la ligne que l'amplitude de cette grande fluctuation est maximale. Son amplitude et sa durée changent peu d'une fluctuation à l'autre et dépendent peu du paramètre de contrôle.

Au fur et à mesure que l'on augmente l'amplitude du champ, ces bouffées de désordre sont de plus en plus fréquentes et les phases régulières finissent par disparaître à amplitude de champ élevée pour laisser place à un régime chaotique.

Ces observations expérimentales décrivent le phénomène que l'on appelle *intermittence*. Lors de la transition de phases intermittentes à des phases régulières, c'est la fréquence moyenne des bouffées chaotiques qui tend vers zéro et non leur amplitude et leur durée. Trois types d'intermittence ont été introduits par Pomeau et Manneville [Pom. 80] qui ont décrit ces phénomènes à l'aide d'itérations d'une fonction à une variable. Ces différents types, qui ne seront pas détaillés ici, ont les mêmes caractéristiques qualitatives (phases régulières entrecoupées de bouffées chaotiques). On définit de plus une loi d'échelle: la durée moyenne des phases régulières diverge comme  $|s - s_i|^{-1/2}$  lorsque l'on se rapproche du seuil ( $s$  est le paramètre de contrôle et  $s_i$  le seuil d'intermittence). Diverses caractéristiques permettent néanmoins de distinguer ces trois types d'intermittence: distribution statistique des durées des phases régulières, cartes de premier retour, croissance d'oscillations sous-harmoniques pendant les phases régulières, ... (voir par exemple [Ber. 84]).

Pour connaître le type et le seuil exact d'intermittence qui prend place dans cette ligne de boussoles, il faudrait notamment étudier la statistique de la durée des phases régulières pour chaque valeur de champ. Les valeurs moyennes permettent de trouver le seuil d'intermittence et de vérifier la loi d'échelle tandis que la forme de la distribution des durées des phases régulières à champ donné renseigne sur le type d'intermittence.

Dans les deux cas la statistique doit être suffisante ce qui implique des expériences coûteuses en temps. D'autre part, les durées les plus facilement mesurables sont celles proches du seuil d'intermittence puisque les phases régulières y sont clairement identifiables. Cependant, la loi d'échelle montre que ces durées décroissent très rapidement dès que l'on s'éloigne du seuil. Compte tenu de notre sensibilité expérimentale dans les variations de champ, un nombre très restreint de mesures peut être effectué limitant ainsi la vérification expérimentale de la loi d'échelle.

Nous allons néanmoins, uniquement à partir de l'enregistrement de l'oscillation présenté sur la figure III.43, proposer un type d'intermittence pour la déstabilisation de la ligne de dix boussoles.

En effet, si on réalise des spectres de Fourier sur une fenêtre de temps "glissante" de 30 secondes, on note la croissance de la sous-harmonique 1/2 à l'approche de la bouffée chaotique. La figure III.44a est le spectre de Fourier de la partie régulière du signal. Les boussoles oscillent alors en phase entre elles à la fréquence du champ ( $f = 5.4 \text{ Hz}$ ). La figure III.44b est le spectre de Fourier des 30 premières secondes du signal (présenté sur la figure III.43), qui inclue donc le début de la bouffée de désordre. On remarque alors l'apparition d'un pic à la fréquence moitié de l'excitation. Enfin la figure III.44c est le spectre de Fourier de la partie du signal comprise entre 24 et 54 secondes. On remarque alors que l'amplitude de cette sous-harmonique est devenue plus grande que celle du fondamental.

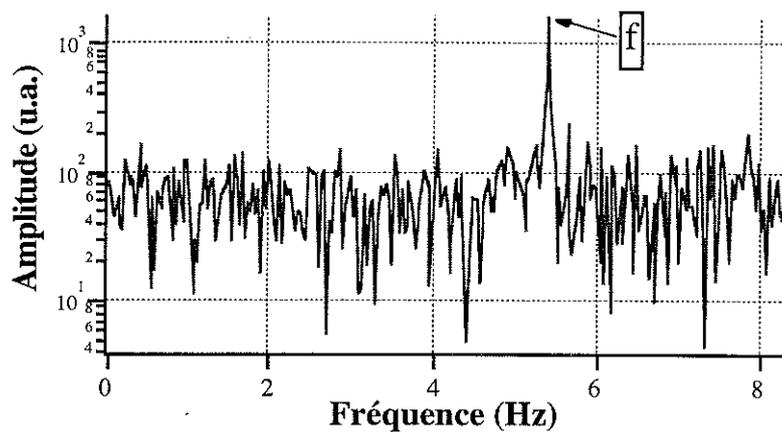


Fig. III.44a:

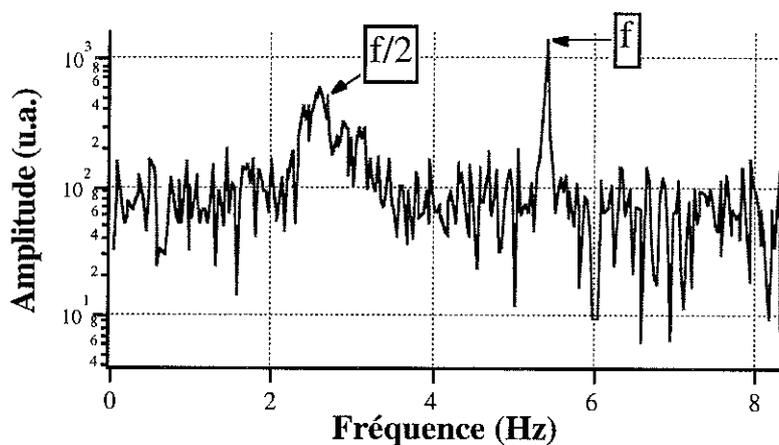


Fig. III.44b:

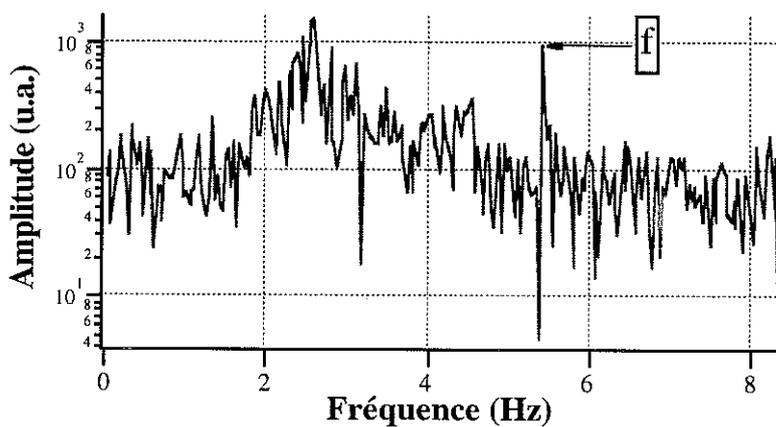


Fig. III.44c:

Fig. III.44 a, b et c:

Spectres de Fourier de régimes montrant l'apparition de la sous-harmonique  $1/2$  à l'approche de la bouffée chaotique.

Champ tournant d'amplitude  $H=0.17$  Oe et de fréquence  $f=5.40$  Hz.  
Spectres faits à partir de 512 images échantillonnées à  $f_{ech}=16.67$  Hz.

On note bien évidemment l'apparition simultanée d'un bruit caractéristique du comportement chaotique de la bouffée de désordre.

Il semblerait donc, compte tenu de ces spectres de Fourier, que l'on soit en présence d'une intermittence de type III qui possède comme caractéristique cette croissance d'une sous-harmonique entre deux bouffées chaotiques (cf. [Ber. 84]).

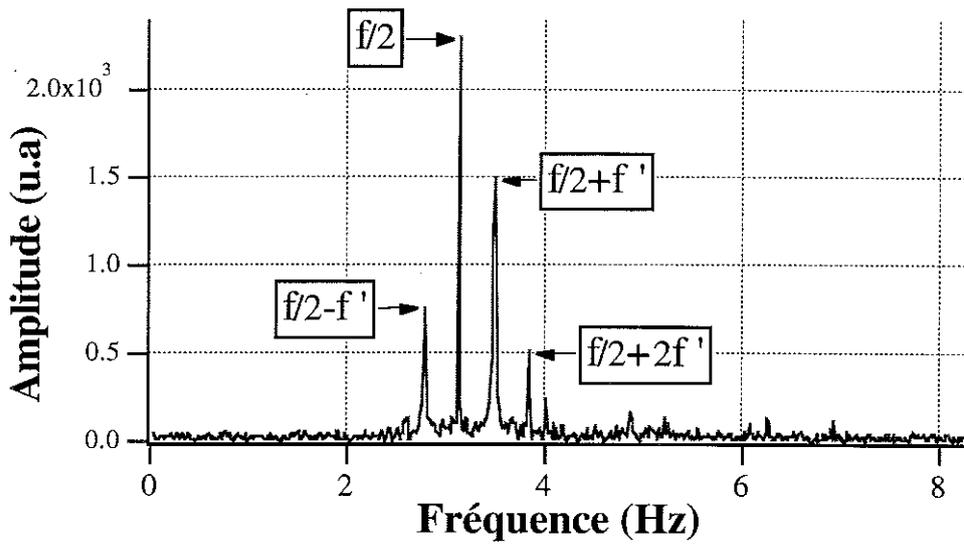
Cependant, nous devons considérer cet argument comme un indice et non comme une preuve. Pour confirmer le type d'intermittence, d'autres arguments sont nécessaires (carte de deuxième retour et forme de la distribution des durées moyennes des phases régulières).

### ***III.5.2- Comportements sous champ alternatif longitudinal et perpendiculaire***

Afin d'améliorer la compréhension des comportements dynamiques de la ligne, nous avons effectué quelques expériences "isolées" en champ alternatif longitudinal et perpendiculaire. Néanmoins nous n'avons pu faire une étude assez complète des comportements en fonction de la fréquence et de l'amplitude de l'excitation. Nous nous sommes limités à une fréquence d'excitation de l'ordre de  $6\text{ Hz}$ . Nous ne pouvons donc ici, compte tenu du faible nombre d'expériences réalisées, conclure sur les scénarios de routes vers le chaos. Nous allons donc nous contenter de décrire les quelques régimes dynamiques observés.

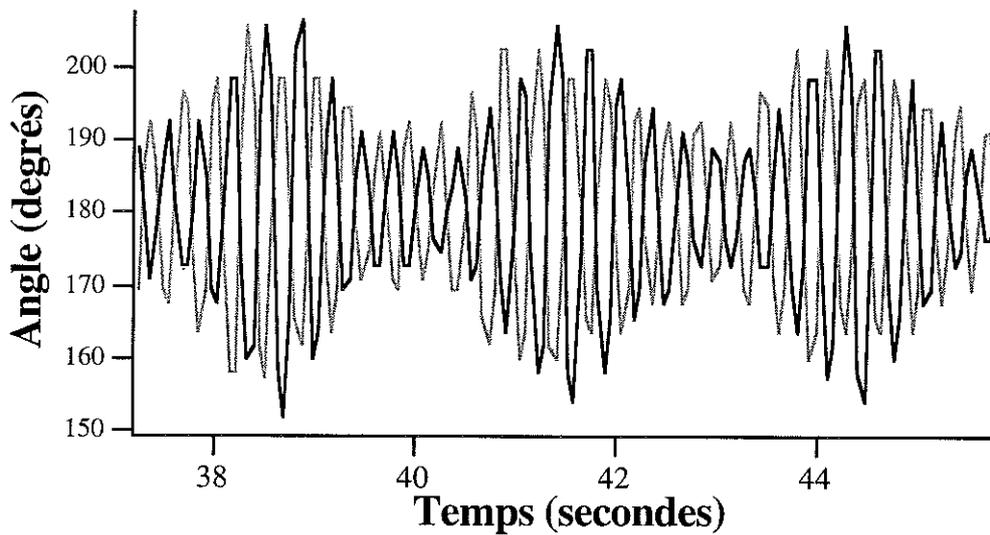
Les amplitudes d'oscillations sont maximales au centre de la ligne et décroissent au fur et à mesure que l'on se rapproche des bords. On observe donc, ici encore, des oscillations très symétriques par rapport au centre de la ligne.

Pour l'excitation longitudinale (excitation paramétrique) à  $f = 6.25\text{ Hz}$ , nous avons observé des régimes d'oscillations quasipériodiques à deux fréquences (cf. figure III.45). Ces mouvements correspondent à une oscillation, à la fréquence moitié du champ, dont l'amplitude est modulée. Deux boussoles consécutives sont déphasées de  $\pi$  (cf. figure III.46). On excite ainsi de manière paramétrique le mode en opposition de phase dont la fréquence propre doit donc être proche de  $f/2 = 3.125\text{ Hz}$ .



**Fig. III.45**

Spectres de Fourier montrant un régime quasipériodique à deux fréquences.  
 Champ alternatif longitudinal d'amplitude  $H=0.28$  Oe et de fréquence  $f=6.25$  Hz.  
 Spectre fait à partir de 1024 images échantillonnées à  $f_{éch}=16.67$  Hz.



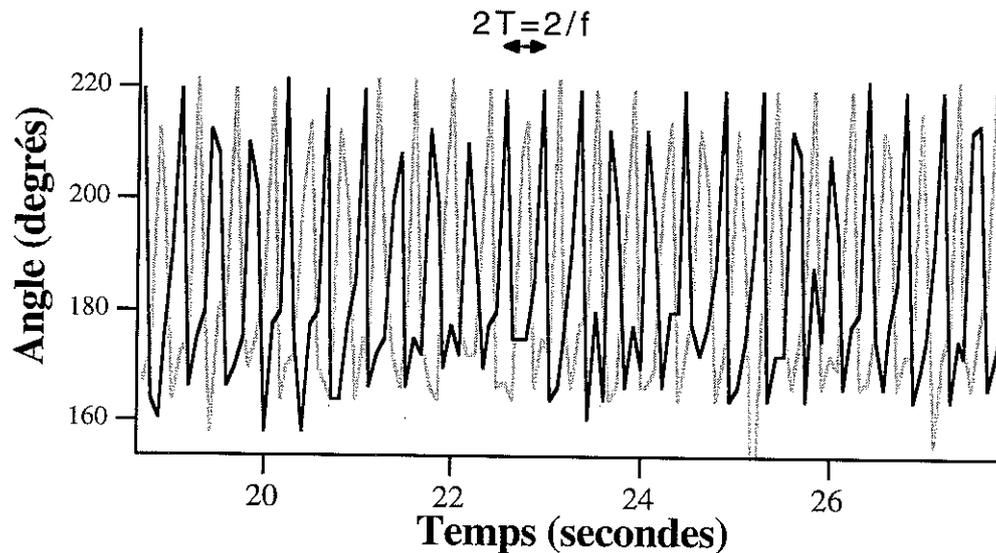
**Fig. III.46**

Evolution des angles de deux boussoles consécutives montrant leur déphasage de  $\pi$  et la modulation d'amplitude d'oscillation.

Champ alternatif longitudinal d'amplitude  $H=0.28$  Oe et de fréquence  $f=6.25$  Hz.  
 Signal échantillonné à  $f_{éch}=16.67$  Hz.

Il semble donc, tout comme dans le cas de deux boussoles, que cette quasipériodicité observée soit le résultat d'un couplage entre un mode propre et l'excitation. Dans le cas des deux boussoles soumises à un champ tournant ou alternatif perpendiculaire, la fréquence d'excitation était proche de la fréquence propre du mode en phase. Dans le cas de la ligne excitée paramétriquement, la fréquence d'excitation doit être proche du double de la fréquence propre du mode en opposition de phase. Rappelons que dans les deux cas la dissipation est faible. Par comparaison avec les deux boussoles, il serait intéressant d'étudier une éventuelle variation de la deuxième fréquence avec l'amplitude de champ.

Pour l'excitation perpendiculaire, à basse amplitude de champ, on obtient des oscillations en phase des boussoles. Puis à partir d'un certain seuil, nous observons une bifurcation qui mène à un doublement de période des oscillations. Les oscillations entre boussoles consécutives sont déphasées (cf. figure III.47). Pour une fréquence de  $5.2 \text{ Hz}$ , seules les fréquences  $f$  et  $f/2$  sont présentes dans les spectres de Fourier de chacune des dix boussoles. Vers  $6 \text{ Hz}$ , d'autres fréquences apparaissent en plus dans les spectres. Compte tenu du peu d'expériences réalisées, nous ne pouvons éclaircir l'origine de ces fréquences. En particulier, une étude plus poussée permettrait de savoir si le doublement de période est le début d'une cascade ou simplement issu d'un couplage entre modes.



**Fig. III.47**  
 Evolution des angles de deux boussoles consécutives montrant le doublement de période.  
 Champ alternatif perpendiculaire d'amplitude  $H=0.32 \text{ Oe}$  et de fréquence  $f=5.2 \text{ Hz}$ .  
 Signal échantillonné à  $f_{\text{éch}}=12.5 \text{ Hz}$ .

### III.6 ● Conclusion sur la dynamique des boussoles

L'observation des comportements du réseau carré de boussoles soumis à un champ tournant, laisse clairement entrevoir le passage d'une phase régulière à une phase chaotique à des valeurs critiques de l'amplitude et de la fréquence du champ. L'étude de ces comportements dynamiques, et notamment lors de la coexistence de ces deux phases, ouvre des perspectives intéressantes et intrigantes sur l'apparition et l'évolution du chaos dans ses dimensions spatiales et temporelles.

Afin d'approcher de manière plus simple cette étude, nous avons entamé l'analyse des comportements dynamiques de quelques boussoles en interaction. Néanmoins, comme nous avons pu le constater au cours de ce chapitre, le passage à seulement quelques boussoles ne réduit pas la complexité, intrinsèque aux phénomènes dynamiques. Pourtant, les lois déterministes de la mécanique classique constituaient il y a encore peu, une science achevée et synonyme de certitudes. La découverte de mouvements chaotiques déterministes a remis en question ces idées en introduisant notamment des notions d'imprédictibilité (divergence de trajectoires initialement voisines) pour des systèmes à faible nombre de degrés de liberté. Les comportements de deux boussoles en interaction en sont un exemple. La simplification qu'apporte ce système par rapport au réseau se réfère uniquement à la possibilité de le caractériser par des grandeurs simples qui sont les deux modes propres.

Ces derniers ont été mesurés entre autres en s'appuyant sur des résultats de résonance non linéaire déduits de méthodes analytiques d'approximations. Ces mesures nous ont amenés à prendre en compte les termes multipolaires.

L'existence de plusieurs états dynamiques possibles pour un jeu de paramètres  $(H, \omega)$  donné est un élément de cette complexité qui rend difficile l'établissement d'un diagramme de phases. Néanmoins les nombreux comportements dynamiques observés sur deux boussoles faiblement dissipatives soumises à un champ tournant ont été regroupés en trois catégories: oscillations périodiques, quasipériodiques et régimes stochastiques transitoires suivis de rotation avec le champ. Les oscillations périodiques peuvent être simplement des réponses à la fréquence du champ ou à des sous-harmoniques, mais également des régimes plus complexes issus de couplages entre les

modes propres du système et le champ. Un cas particulier de couplage entre un mode propre et le champ génère des réponses quasipériodiques lorsque l'on excite le système près des deux résonances. Une analyse de ces régimes a permis de montrer que le rapport des deux fréquences caractérisant ces oscillations dessinait un "escalier du diable" par une variation en racine carrée de l'amplitude du champ tournant ou perpendiculaire.

Nous avons trouvé expérimentalement les deux premiers doublements de période de la cascade qui caractérise la déstabilisation des régimes périodiques vers les régimes stochastiques transitoires.

Ces résultats sur deux boussoles faiblement dissipatives sont en bon accord avec les résultats expérimentaux et numériques sur une boussole soumise à un champ tournant et à un champ fixe ([Cro. 81] et [Cro. 82]). On voit ainsi que le rôle du champ fixe est joué dans notre système de deux boussoles par le champ dipolaire. Cependant une différence importante entre ces deux systèmes réside dans la possibilité de couplages entre les deux modes propres pouvant induire des régimes dynamiques plus complexes.

Lorsque l'on introduit plus de frottements, on peut s'intéresser plus spécifiquement et de manière plus détaillée aux routes vers le chaos et au chaos lui-même. Un outil alors indispensable et complémentaire de l'expérience est la simulation numérique puisque notre dispositif expérimental, qui n'était pas à l'origine dédié à ce type d'étude, possède des limitations contraignantes. Ainsi, la simulation nous permet d'étudier en détail, par des diagrammes de bifurcations, les étapes successives menant au chaos, par des variations plus contrôlées du champ (variations adiabatiques). Elle autorise également la mesure de vitesses qui permettent d'établir des sections de Poincaré des attracteurs étranges caractérisant les régimes chaotiques.

L'étude a couvert des excitations perpendiculaires et en champ tournant, proche et loin de la résonance du mode en phase. Un très bon accord entre expérience et simulation a été observé sur la nature des régimes et leur déstabilisation. Ici encore, les scénarios observés sont des cascades de doublement de période.

Nous avons enfin débuté une étude sur une ligne de dix boussoles en interaction.

Les quelques résultats obtenus avec un champ alternatif longitudinal (excitation paramétrique), montrent des régimes quasipériodiques, probablement issus d'un couplage entre le champ et le mode en opposition de phase.

Par contre, sous un champ tournant, la ligne montre un comportement nouveau, l'intermittence, qui décrit l'apparition de bouffées chaotiques au sein de phases

d'oscillations régulières. L'apparition d'une sous-harmonique  $1/2$  à l'approche d'une bouffée de désordre semble indiquer une intermittence de type III.

Ce système d'une ligne de boussoles est un système riche qui introduit des difficultés supplémentaires par rapport au système de deux boussoles (couplages entre modes, aspect spatial introduit par des propagations d'ondes). Il peut néanmoins montrer des comportements analogues à ceux observés pour deux boussoles (quasipériodicité). Nous avons signalé qu'une étude très intéressante sur l'aspect spatio-temporel (propagation d'ondes) serait à faire. Il conviendrait également de s'attarder sur plusieurs points. Il serait en premier lieu intéressant de voir l'effet de la parité du nombre de boussoles dans la ligne. Il faudrait ensuite étudier les effets de bords sur les comportements dynamiques de cette ligne de boussoles. Nous avons signalé que l'amplitude d'oscillations des boussoles de bord est faible par rapport à celle des autres boussoles. D'autre part les bouffées chaotiques intermittentes semblent naître au centre de la ligne. Bien que peu importants lors de cette apparition, les bords semblent jouer un rôle dans la dynamique observée puisqu'ils réfléchissent les ondes qui se propagent. Une étude sur une ligne formée par un nombre plus important de boussoles, ou avec des conditions de bords fixes, permettrait de clarifier leur rôle.

Rappelons enfin, qu'au delà de l'intérêt propre d'une analyse de ce système unidimensionnel, la compréhension de la dynamique des lignes est indispensable à une étude du chaos dans les réseaux de boussoles puisqu'elles en régissent les comportements.



## CONCLUSION

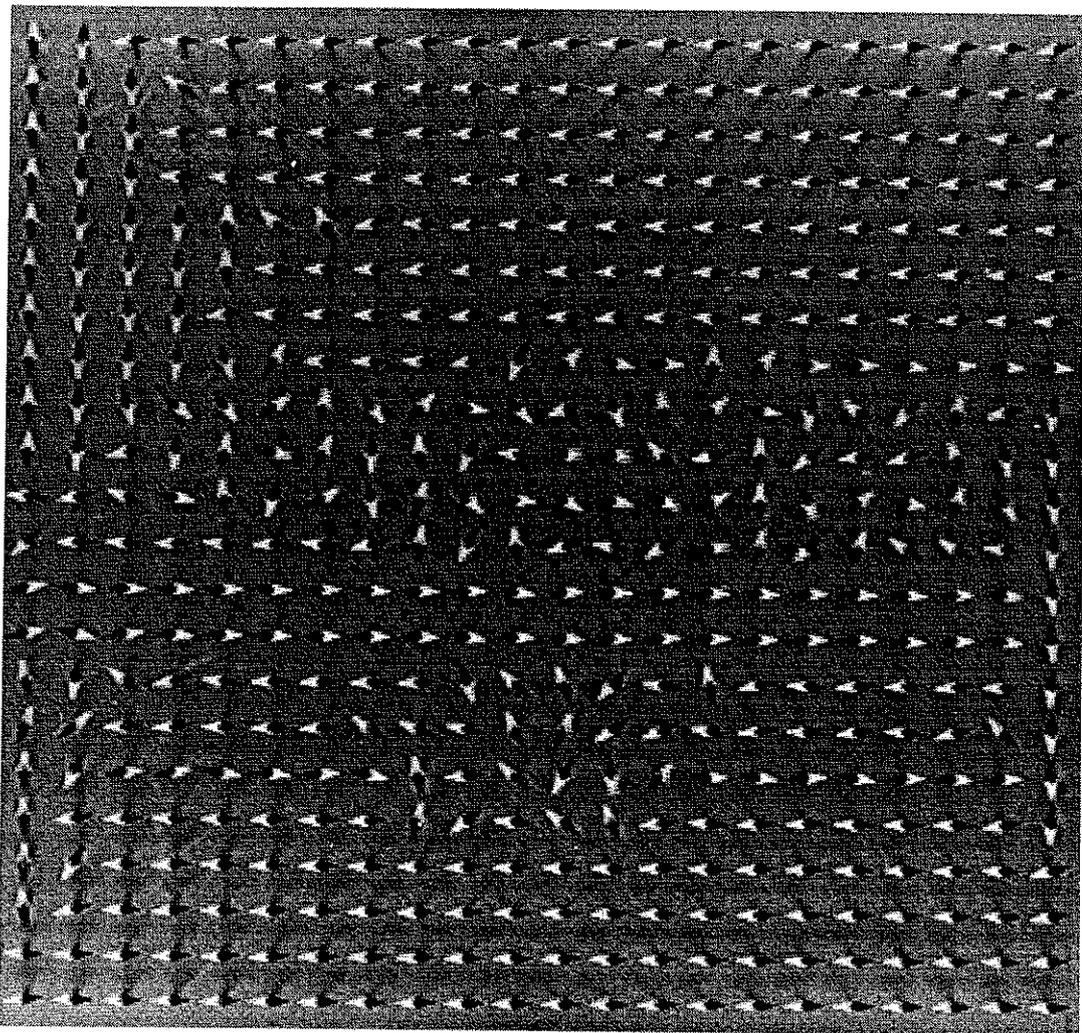
**N**ous avons, au travers de ces deux études, analysé en détail les comportements de systèmes de boussoles. Elles sont des exemples de la grande richesse qu'ils contiennent. Le traitement d'images comme outil de mesure rend cette richesse exploitable simultanément à l'échelle du réseau et à celle d'une boussole au sein de ce réseau. Cette double échelle d'analyse ouvre des perspectives intéressantes notamment pour une étude du chaos spatio-temporel.

Dans l'étude thermodynamique, nous avons analysé les comportements à l'échelle du réseau c'est-à-dire avec des quantités globales telles que *nombre de défauts*, *longueur de lignes* et *directeur*. On peut s'interroger sur la pertinence de telles quantités dans une étude de la dynamique des réseaux. Si le réseau est excité par un champ tournant ayant une fréquence de l'ordre de  $5 \text{ Hz}$ , il semble que la dynamique du réseau soit pilotée par la dynamique de lignes. En effet, partant d'une configuration initiale en lignes parallèles, l'application du champ tournant donne naissance à des ondes qui se propagent au sein des lignes et dont les amplitudes croissent avec l'amplitude du champ. Puis on observe que des lignes se forment dans la direction perpendiculaire. Le réseau carré est alors décrit par des lignes dans les quatre directions qui sont le siège d'ondes qui se propagent. On voit ainsi que la notion de lignes doit rester dans ce contexte une composante essentielle de la dynamique. Il serait ainsi intéressant de comparer cette dynamique à celle observée avec une ligne isolée. De même dans de telles structures, on peut s'interroger sur le rôle des défauts qui marquent les interruptions entre les lignes. Nous avons observé par exemple, lors d'un phénomène d'intermittence sur une ligne isolée soumise à un champ tournant, un retour

à des oscillations régulières de demi lignes séparées par un défaut créé par la bouffée chaotique. Le phénomène d'intermittence n'était alors plus observé.

Ces observations permettent donc d'envisager une description de la dynamique en termes de lignes et de défauts, et dans ce cadre l'étude dynamique que nous avons effectuée sur deux et dix boussoles représente une base solide pour commencer ces études sur la dynamique des réseaux.

Nous avons également évoqué d'autres comportements dynamiques possibles du réseau, tels que la coexistence entre des phases ordonnées et des phases désordonnées, pour des fréquences d'excitation du champ tournant plus basses (de l'ordre de  $2\text{ Hz}$ ). Sur la figure ci-dessous est représentée une image à basse amplitude de champ où l'on observe une telle coexistence de phases.



Les phases ordonnées semblent caractérisées par des lignes statiques ou oscillantes avec le champ ou qui sont le siège de propagations d'ondes qui ne déstabilisent pas la ligne. Les régions désordonnées semblent caractérisées par des fluctuations chaotiques des boussoles qui tournent dans un sens, puis inversent leur

rotation, puis participent quelques instants à la formation d'une ligne dont les oscillations non périodiques rendent leur durée de vie éphémère, etc... En augmentant l'amplitude du champ, la phase désordonnée prend de l'ampleur dans le réseau. Il semblerait que l'on puisse définir une taille caractéristique de cette phase pour une amplitude de champ donnée, cette taille augmentant avec l'amplitude du champ. L'analyse à l'échelle d'une boussole est nécessaire pour caractériser le mouvement chaotique des boussoles (spectres de Fourier, attracteurs étranges) et d'autre part pour suivre l'évolution dynamique de l'interface entre les zones ordonnées et désordonnées. L'analyse à l'échelle du réseau reste délicate en raison de la complexité intrinsèque aux lois de la dynamique (chaos déterministe) et de la présence d'un grand nombre de degrés de liberté. Néanmoins, le travail présenté dans ce mémoire et les notions développées, donnent des pistes prometteuses pour l'étude de la dynamique dans ce système.



## REFERENCES

- [Als. 86]: Alström P., Christiansen B., Hyldgaard P., Levinsen M. T., Rasmussen R.  
*Scaling relations at the critical line and the period-doubling route for the sine map and the driven damped pendulum*  
Phys. Rev. A **34**, 2220 (1986).
- [Arn. 83]: Arnéodo A., Coulet P., Tresser C., Libchaber A., Maurer J., d'Humières D.  
*On the observation of an uncompleted cascade in a Rayleigh-Bénard experiment*  
Physica **6D**, 385 (1983).
- [Arn. 63]: Arnold V. I.  
*Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the invariance of periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian*  
Russ. Math. Surveys, **18**, 9 (1963).
- [Bel. 84]: Belobrov P. I., Gekht R. S., Ignatchenko V. A.  
*Ground state in systems with dipole interaction*  
Sov. Phys. JETP **57**, 636 (1983).
- [Ber. 84]: Bergé P., Pomeau Y., Vidal C.  
dans *L'ordre dans le chaos*  
Hermann, Paris (1984).
- [Bin. 76]: Binder K.  
*Monte Carlo investigations of phase transitions and critical phenomena*  
dans *Phase transitions and critical phenomena*, **5B**  
Domb and Green, Acad. Press (1976).
- [Bla. 92]: Blackburn J. A., Smith H. J. T., Gronbech-Jensen N.  
*Stability and Hopf bifurcations in an inverted pendulum*  
Am. J. Phys. **60**, 903 (1992).

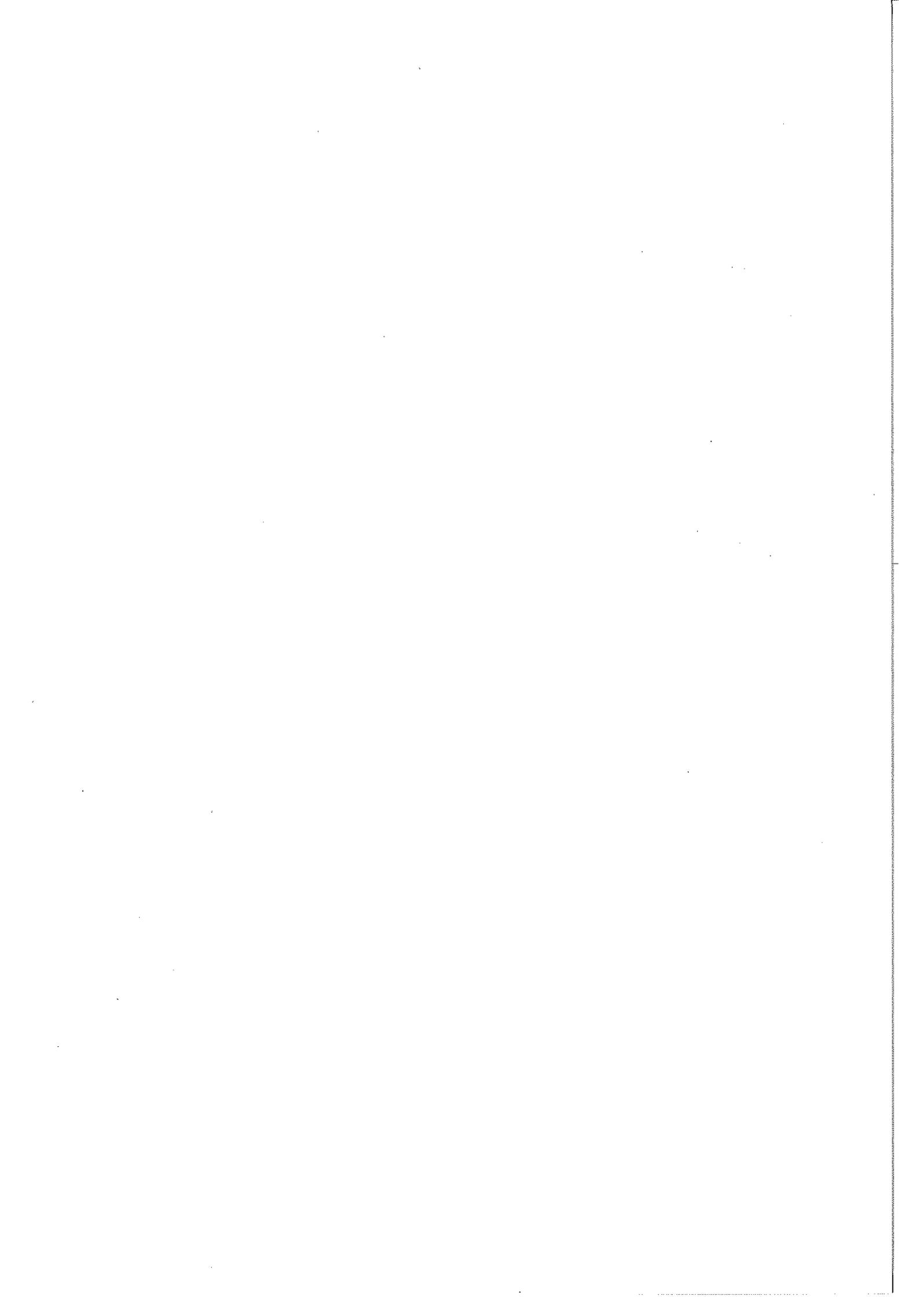
- [Chi. 79]: Chirikov B. V.  
*A universal instability of many-dimensional oscillator systems*  
Phys. Rep. **52**, 265 (1979).
- [Cou. 78a]: Couillet P., Tresser C.  
*Itérations d'endomorphismes et groupe de renormalisation*  
Journal de Physique, Coll. C5 25 (1978).
- [Cou. 78b]: Couillet P., Tresser C.  
*Itérations d'endomorphismes et groupe de renormalisation*  
Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, **A287**, 577 (1978).
- [Cou. 80]: Couillet P., Tresser C.  
*Critical transition to stochasticity for some dynamical systems*  
Journal de Physique Lettres, **41**, L-255 (1980).
- [Cro. 81]: Croquette V., Poitou C.  
*Cascades de dédoublements de période et stochasticité à grande échelle des mouvements d'une boussole*  
Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, **C292**, 1353 (1981).
- [Cro. 82]: Croquette V.  
*Déterminisme et chaos*  
Pour la Science, **62**, 62 (1982).
- [Cvi. 85]: Cvitanovic P., Jensen M. H., Kadanoff L. P., Procaccia I.,  
*Renormalization, unstable manifolds, and the fractal structure of mode locking*  
Phys. Rev. Lett. **55**, 343 (1985).
- [Erb. 67]: Erber T., Latal H. G.  
*A state-area principle for (magnetic) condensation processes*  
Bull. Acad. Roy. Belg. Cl. Sc., **53**, 1019 (1967).
- [Fei. 78]: Feigenbaum M. J.  
*Quantitative universality for a class of non linear transformations*  
J.Stat.Phys. **19**, 25 (1978).
- [Fei. 79]: Feigenbaum M. J.  
*The universal metric properties of non linear transformation*  
J.Stat.Phys. **21**, 669 (1979).
- [Fis. 72]: Fisher M. E., Barber M. N.  
*Scaling theory for finite-size effects in the critical region*  
Phys. Rev. Lett. **28**, 1516 (1972).
- [Gre. 83a]: Greenspan B. D., Holmes P. J.  
*Nonlinear Dynamics and Turbulence*  
G. Barenblatt, G. Iooss and D. D. Joseph, eds.  
Pitman, London (1983).
- [Gre. 83b]: Grebogi C., Ott E., Yorke J. A.  
*Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos*  
Physica **7D**, 181 (1983).
- [Guc. 83]: Guckenheimer J., Holmes P. J.  
*Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*  
Appl. Math. Sciences **42**  
Springer, Berlin (1983).

- [Hau. 87]: Haucke H., Ecke R.  
*Mode-locking and chaos in Rayleigh-Bénard convection*  
Physica **25D**, 307 (1987).
- [Hén. 76]: Hénon M.  
*A two-dimensional map with a strange attractor*,  
Commun. Math. Phys. **50**, 69 (1976).
- [Hol. 81]: Holmes P. J., Marsden J. E.  
Arch. Rat. Mech. Anal. **76**, 135 (1981).
- [Hol. 82]: Holmes P. J., Marsden J. E.  
*Horseshoes in perturbations of hamiltonian systems with two degrees of freedom*,  
Commun. Math. Phys. **82**, 523 (1982).
- [Jor. 77]: Jordan D. W., Smith P.  
*Nonlinear ordinary differential equations*  
Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series  
Clarendon Press, Oxford (1977).
- [Kau. 58]: Kauderer  
*Nichtlineare Mechanik*  
Springer, Berlin (1958).
- [Koc. 85]: Koch B. P., Leven R. W.  
*Subharmonic and homoclinic bifurcations in a parametrically forced pendulum*  
Physica **16D**, 1 (1985).
- [Kly. 90]: Klymenko V. E., Kukhtin V. V., Ogenko V. M., Rozenbaum V. M.  
*Steady configurations of a square dipole lattice in an external field*  
Phys. Lett. A **150**, 213 (1990).
- [Kly. 93]: Klymenko V. E., Rozenbaum V. M., Kukhtin V. V., Shramko O. V.  
*Stabilization of the long-range order within a square dipole lattice by the quadrupole interaction*  
Solid State Commun. **88**, 373 (1993).
- [Kna. 79]: Knak Jensen S. J., Mouritsen O. G.  
*Is the phase transition of the three-state Potts model continuous in three dimensions ?*  
Phys. Rev. Lett. **43**, 1736 (1979).
- [Kol. 54]: Kolmogorov A. N.  
*Preservation of conditionally periodic movements with small change in the Hamilton function*  
Akad. Nayk. SSSR Dokl. **98**, 527 (1954).
- [Kos. 73]: Kosterlitz J. M., Thouless D.J.  
*Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems*  
J. Phys. **C6**, 1181 (1973).
- [Lan. 76]: Landau D. P.  
*Finite-size behavior of the Ising square lattice*  
Phys. Rev. B **13**, 2997 (1976).

- [Lan. 67]: Landau L., Lifchitz E.  
dans *Physique statistique*  
Editions MİR, Moscou (1967).
- [Lev. 85]: Leven R. W., Pompe B., Wilke C., Koch B. P.  
*Experiments on periodic and chaotic motions of a parametrically forced pendulum*  
Physica **16D**, 371 (1985).
- [Lib. 80]: Libchaber A., Maurer J.  
*Une expérience de Rayleigh-Bénard de géométrie réduite: multiplication, accrochage et démultiplication de fréquences*  
Journal de Physique, Coll. C3 **41**, 51 (1980).
- [Lib. 83]: Libchaber A., Fauve S., Laroche C.  
*Two-parameter study of the routes to chaos*  
Physica **7D**, 73 (1983).
- [Lor. 63]: Lorenz E. N.  
*Deterministic non-periodic flows*  
J. Atmos. Sci. **20**, 130 (1963).
- [Lut. 46]: Luttinger J. M., Tisza L.  
*Theory of dipole interaction in crystals*  
Phys. Rev. **70**, 954, (1946).
- [Mal. 91]: Malozovsky Y. M., Rozenbaum V. M.  
*orientational ordering in two-dimensional systems with long-range interaction*  
Physica A **175**, 127 (1991).
- [Mar. 94]: Martinet O.  
*Analyse de réseaux d'aiguilles aimantées par traitements d'images*  
Rapport de stage DESS Ingénierie Mathématique (1994).
- [Mel. 63]: Melnikov V. K, Tr. Moskovsk.  
Ob-va **12**, 3 (1963).
- [Mer. 66]: Mermin N. D., Wagner H.  
*Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one- or two-dimensional isotropic Heisenberg models*  
Phys. Rev. Lett. **17**, 1133 (1966).
- [Met. 73]: Metropolis N., Stein M. L., Stein P. R.  
*On finite limit sets for transformations on the unit interval*  
J. Comb. Theory A **15**, 25 (1973).
- [Mic. 81]: Mickens R. E.  
*An introduction to nonlinear oscillations*  
Cambridge University Press (1981).
- [Mos. 62]: Moser J.  
*On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus*  
Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl., **2**, 1 (1962).
- [Moo. 80]: Moon F. C  
*Experiments on chaotic motions of a forced nonlinear oscillator: strange attractors*  
J. Appl. Mech. **47**, 638 (1980).

- [Moo. 87a]: Moon F. C, Cusumano J. and Holmes P. J.  
*Evidence for homoclinic orbits as a precursor to chaos in a magnetic pendulum*  
Physica **24D**, 383 (1987).
- [Moo. 87b]: Moon F. C  
dans *Chaotic vibrations*  
Wiley-interscience publication, John Wiley & Sons, New York (1987).
- [NIH 94]: Rasband W.  
Logiciel de traitement d'images: "NIH - Image"  
vs. 1.55 à 1.59 - Macintosh - 1994  
ftp anonymous: zippy.nimh.nih.gov (pub/nih-image/nih-image155.hqx).
- [Par. 89]: Parker T. S., Chua L. O.  
*Practical numerical algorithms for chaotic systems*  
Springer-Verlag, New York (1989).
- [Pok. 79]: Pokrovsky V. L.  
*Properties of ordered, continuously degenerate systems*  
Adv. Phys., **28**, 595 (1979).
- [Pom. 80]: Pomeau Y., Manneville P.  
*Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems*  
Commun. Math. Phys. **74**, 189 (1980).
- [Por. 95]: Portes de Albuquerque M.  
*Analyse par traitement d'images de domaines magnétiques*  
Thèse de l'Institut National Polytechnique de Grenoble (1995).
- [Pra. 90]: Prakash S., Henley C. L.  
*Ordering due to disorder in dipolar magnets on two-dimensional lattices*  
Phys. Rev. B **42**, 6574 (1990).
- [Pre. 86]: Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A., Vetterling W. T.,  
*Numerical Recipes*  
Cambridge University Press, Cambridge (1986).
- [Pri. 74]: Priestley E. B., Wojtowicz P. J., Sheng P.  
*Introduction to liquid crystals*,  
édité par Priestley E. B., Wojtowicz P. J., Sheng P., Plenum Press (1974).
- [Rom. 87]: Romano S.  
*Computer simulation study of a two-dimensional dipolar lattice*  
Nuovo Cim. D **9**, 409 (1987).
- [Rom. 94]: Romano S.  
*Computer simulation study of a two-dimensional lattice spin model with interactions of dipolar type*  
Phys. Scripta, **50**, 326 (1994).
- [Ros. 58]: Rosenberg  
Quart. Appl. Math. **15**, 341 (1958).
- [Roz. 84]: Rozenbaum V. M., Ogenko V. M.  
*Phase transitions in two-dimensional dipole systems undergoing rotational reorientations*  
Sov. Phys. Solid State **26**, 877 (1984).

- [Roz. 88]: Rozenbaum V. M., Artamonova E. V., Ogenko V. M.  
Ukr. Fiz. Zh. **33**, 625 (1988).
- [Roz. 91]: Rozenbaum V. M., Ogenko V. M., Chuiko A. A.  
*Vibrational and orientational states of surface atomic groups*  
Sov. Phys. Usp **34**, 883 (1991).
- [Sta. 66]: Stanley H. E., Kaplan T. A.  
*Possibility of a phase transition for the two-dimensional Heisenberg model*  
Phys. Rev. Lett. **17**, 913 (1966).
- [Str. 88]: Strandburg K. J.  
*Two-dimensional melting*  
Rev. Mod. Phys. **60**, 161 (1988).
- [Swi. 83]: Swinney H. L.  
*Observations of order and chaos in nonlinear systems*  
Physica **7D**, 3 (1983).
- [Van. 85]: Van Buskirk R., Jeffries C.  
*Observation of chaotic dynamics of coupled nonlinear oscillators*  
Phys. Rev. A **31**, 3332, (1985).
- [Vil. 80]: Villain J., Bidaux R., Carton J. P., Conte R.  
*Order as an effect of disorder,*  
J. Phys. (Paris) **41**, 1263 (1980).
- [Zan. 79]: Zannoni C.  
*Distribution functions and order parameters*  
chapitre 3 dans *The molecular physics of liquid crystals*  
édité par Luckhurst G. R. et Gray G. W., Academic Press (1979).





## Résumé

Dans le cadre d'étude de systèmes 2D où les interactions dipolaires jouent un rôle important, nous avons construit des réseaux de boussoles sur lesquels les premières observations ont montré la grande richesse d'études possibles. Les divers comportements observés montrent en effet de nombreuses analogies avec des systèmes physiques réels. Deux études différentes ont été menées sur ces systèmes, expérimentalement et en simulation numérique parallèlement.

Dans la première, on s'intéresse aux comportements du réseau carré soumis à des effets de température, qui sont analysés par un modèle simple dans le cadre de la thermodynamique à l'équilibre. Les effets d'anisotropie, résultant des termes multipolaires, conduisent aux notions de *défauts* et de *longueur de lignes*. Ces quantités permettent de mettre en évidence la transition entre une phase ordonnée et une phase désordonnée. Une description détaillée de cette transition permet de définir l'apparition d'une direction privilégiée (*directeur*) au passage de la température critique. On définit alors un paramètre d'ordre qui est une mesure du "peuplement" du directeur.

La seconde partie de ce travail s'attache à la dynamique individuelle de quelques boussoles en interaction. Le diagramme de phase des régimes dynamiques observés expérimentalement est établi pour deux boussoles avec de faibles frottements soumises à un champ tournant. Pour une dissipation plus élevée, une étude de la déstabilisation des régimes périodiques vers des régimes chaotiques est menée. Les *routes vers le chaos* sont alors identifiées (cascades de doublements de période) par des *diagrammes de bifurcations*, et le chaos est mis en évidence numériquement par des *sections de Poincaré* des *attracteurs étranges*. Cette étude de la dynamique des boussoles se termine par quelques comportements observés et mesurés pour une ligne de dix boussoles en interaction. Un scénario nouveau se dessine alors: *l'intermittence*. Les perspectives d'une étude plus détaillée sur la dynamique des réseaux sont alors tracées.

## Mots clés

Magnétisme  
Interaction dipolaire  
Boussoles  
Thermodynamique  
Transition de phase  
Dynamique chaotique  
Oscillateurs

