

SÉRIE A, N° 2785

N° D'ORDRE :

1918

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

NOËL J. FELICI

**1<sup>re</sup> THÈSE.** — DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT DES SUPRA-  
CONDUCTEURS.

**2<sup>e</sup> THÈSE.** — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le **1940** devant la Commission d'examen.

MM. T. BLOCH..... *Président.*

BRUHAT..... } *Examineurs*  
L. DE BROGLIE..... }

PARIS

MASSON ET C<sup>ie</sup>, EDITEURS

LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, BOULEVARD SAINT GERMAIN

1939

# FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen honoraire ..... M. MOLLIARD.  
Doyen ..... C. MAURAIN, Professeur, Physique du Globe.

Professeurs honoraires.	}	H. LEBESGUE.	LESPIEAU.	ABRAHAM.
		Émile PICARD.	MARCHIS.	Ch. FARRY.
		Léon BRILLOUIN.	VESSIOT.	Léon BERTRAND.
		PÉCHARD.	PORTIER.	WINTREBERT.
		FREUNDLER.	MOLLIARD.	DUBOSCO.
		AUGER.	LAPICQUE.	BOHN.
		DANGEARD.	G. BERTRAND.	RABAUD.

## PROFESSEURS

M. CAULLERY.....	T Zoologie (Évolution des êtres organisés).	FOCH.....	T Mécanique expérimentale des fluides.
Émile BOREL.....	T Calcul des probabilités et Physique mathématique.	PAUTHENIER.....	Physique (P. C. B.).
Jean PERRIN.....	T Chimie physique.	De BROGLIE.....	T Théories physiques.
E. CARTAN.....	T Géométrie supérieure.	CHRÉTIEN.....	Optique appliquée.
A. COTTON.....	T Recherches physiques.	P. JOB.....	Chimie générale.
J. DRACH.....	T Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	LABROUSTE.....	Physique du Globe.
Charles PÉREZ.....	T Zoologie.	PRENANT.....	T Anatomie et Histologi comparées.
M. GUICHARD.....	T Analyse et mesures chimiques.	VILLEY.....	Mécanique physique et expérimentale.
Paul MONTEL.....	T Théorie des fonctions et Théorie des transformations.	COMBES.....	T Physiologie végétale.
L. BLARINGHEM..	T Botanique.	GARNIER.....	T Mathématiques générales.
G. JULIA.....	T Mécanique analytique et Mécanique céleste.	PÉRÈS.....	Mécan. théor. des fluides.
C. MAUGUIN.....	T Minéralogie.	HACKSPILL.....	T Chimie minérale.
A. MICHEL-LÉVY.	T Pétrographie.	LAUGIER.....	T Physiologie générale.
A. DENJOY.....	T Application de l'analyse à la Géométrie.	TOUSSAINT.....	Technique Aéronautique.
L. LUTAUD.....	T Géographie physique et géologie dynamique.	M. CURIE.....	Physique (P. C. B.).
Eugène BLOCH....	T Physique.	G. RIBAUD.....	T Hautes températures.
G. BRUHAT.....	T Physique théorique et physique céleste.	CHAZY.....	T Mécanique rationnelle.
E. DARMOIS.....	T Enseignement de Physique.	GAULT.....	Chimie (P. C. B.).
A. DEBIERNE.....	T Physique Générale et Radioactivité.	CROZE.....	Recherches physiques.
A. DUFOUR.....	T Physique. (P. C. B.).	DUPONT.....	T Théories chimiques.
L. DUNOYER.....	Optique appliquée.	LANQUINE.....	T Géologie structurale et géologie appliquée.
A. GUILLIERMOND.	T Botanique.	VALIRON.....	Mathématiques générales.
M. JAVILLIER.....	T Chimie biologique.	BARRABÉ.....	Géologie structurale et géologie appliquée.
ROBERT-LÉVY....	T Physiologie comparée.	MILLOT.....	Biologie animale (P.C.B.)
Henri VILLAT.....	T Mécanique des fluides et applications.	F. PERRIN.....	Théories physiques.
Ch. JACOB.....	T Géologie.	VAVON.....	Chimie organique.
P. PASCAL.....	T Chimie générale.	G. DARMOIS.....	Calcul des Probabilités et Physique-Mathématique
M. FRÉCHET.....	T Calcul différentiel et Calcul intégral.	CHATTON.....	T Biologie maritime.
E. ESCLANGON....	T Astronomie.	AUBEL.....	Chimie biologique.
M <sup>me</sup> RAMART-LUCAS	T Chimie organique.	Jacques BOURCART.	Géographie physique et géologie dynamique.
H. BÉGHIN.....	T Mécanique physique et expérimentale.	M <sup>me</sup> JOLIOU-CURIE.	Physique générale et Radioactivité.
		PLANTEFOL.....	Biologie végétale (P.C.B.)
		CABANNES.....	Enseignement de Physique.
		GRASSÉ.....	Biologie animale (P. C. B.).
		PRÉVOST.....	Chimie (P. C. B.).
		BOULIGAND.....	Mathématiques.
		G. CHAUDRON....	Chimie (P. C. B.).

Secrétaire..... A. PACAUD.

# DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT DES SUPRACONDUCTEURS

Par N. FELICI

## INTRODUCTION

Dans cette étude, nous ne nous proposons pas d'ajouter une nouvelle théorie à celles déjà nombreuses qui voudraient rendre compte de la supraconductibilité. Nous prenons comme base le principe suggéré par l'expérience que le champ magnétique est nul dans le domaine occupé par un supraconducteur. Meissner et Ochsenfeld qui ont les premiers observé le refoulement du champ magnétique par le métal supraconducteur s'expriment en effet de la manière suivante :

« Das Kraftlinienbild in der Umgebung von massiven, reinen Supraleitern ist nach Eintritt der Supra leitfähigkeit so, wie es für den Wert Null der permeabilität des Supraleiters nach der Maxwell'schen Theorie zu erwarten ist. »

Ce fait peut s'interpréter en disant simplement que la perméabilité  $\mu$  du supraconducteur est nulle. Mais London dans sa Thèse a montré que cette explication ne peut rendre compte des propriétés des supraconducteurs multiplément connexes, qui peuvent contenir des flux différents de zéro quand ils sont éloignés de tout aimant. Il est manifeste que l'hypothèse  $\mu = 0$  est insuffisante pour rendre compte de ces phénomènes. Nous prendrons donc comme principe fondamental le principe suivant :

A l'intérieur du métal supraconducteur le champ magnétique, produit par les causes extérieures et par les courants électriques circulant dans le métal, est nul. Ce principe est identique à celui adopté par London, à ceci près que nous négligeons complètement l'épaisseur de la couche superficielle de courant.

Dans notre travail, nous nous proposons simplement de démontrer que ce principe a une conséquence admirable et fondamentale qui est que toutes les propriétés des supraconducteurs en équilibre sont corrélatives de celles des conducteurs électrisés ordinaires telles qu'on les énonce en électrostatique. Cet énoncé à lui seul résume entièrement nos résultats car, à chaque proposition de l'électrostatique, nous ferons correspondre suivant une loi évidente une proposition sur les supraconducteurs. Il ne saurait s'agir de coïncidences car les deux ordres de conséquences restent liés de façon invariable si loin qu'on pousse les déductions. Avant d'expliquer plus en détail cette corrélation, résumons rapidement les résultats de l'électrostatique, la partie la plus simple de l'électricité qui nous sert de modèle dans toute notre exposition.

Dans cette théorie on déduit toutes les propriétés des conducteurs électrisés en équilibre du seul principe que le champ électrique est nul dans le métal. On montre l'unicité de l'équilibre quand les charges ou les potentiels des conducteurs sont donnés. Si les conducteurs subissent des mouvements réversibles, il est possible, par le principe supplémentaire de la conservation de la charge, de prévoir les transformations d'énergie auxquelles donnent lieu ces mouvements et de calculer les forces subies par les conducteurs. Ceci conduit aux machines électrostatiques, transformant réversiblement le travail mécanique en énergie potentielle électrique, et inversement. La simplicité de tous ces phénomènes tient à ce qu'il n'y a aucune énergie dans la matière et qu'on n'étudie que des états d'équilibre et des transforma-

tions réversibles. Enfin, si les conducteurs électrisés, au lieu d'être dans le vide, sont plongés dans un diélectrique parfait infini, l'effet de la polarisation de ce diélectrique est particulièrement simple, un facteur caractéristique du diélectrique s'introduisant simplement dans certaines relations. Cela tient encore au fait que les conducteurs sont en équilibre. Bien que le champ magnétique présentât avec le champ électrique de grandes analogies, c'était une opinion répandue qu'il n'y avait pas dans le magnétisme de phénomènes analogues à ceux qu'étudie l'électrostatique. En effet on étudiait surtout les aimants qui ne présentent aucun caractère d'équilibre ; et il est même impossible de concevoir des phénomènes magnétiques corrélatifs de ceux de l'électrostatique si on prend comme notion fondamentale celle de masse magnétique. En réalité, la notion fondamentale est celle de circuit électrique fermé. Néanmoins, dans l'étude des courants ordinaires, il n'y a rien qui puisse rappeler l'électrostatique, car quand un courant circule il dissipe de l'énergie sous forme de chaleur, il ne peut être comparé à des masses électriques en repos qui persistent indéfiniment dans cet état sans nécessiter aucune énergie. Mais si l'on considère des supraconducteurs, on sait que des courants y circulent sans dépense d'énergie à l'état permanent et notre principe fondamental est l'absence de champ magnétique dans le métal, corrélatif du principe fondamental de l'électrostatique. Dans la corrélation qui en résulte, ce qui remplace la charge électrique est le flux magnétique ; et ce flux se conserve quand on déplace ou déforme réversiblement les conducteurs, ce n'est là que la loi de l'induction. L'équilibre d'un système de conducteurs est déterminé de façon unique quand les flux et les courants relatifs aux différents trous du métal sont donnés. De même que l'on crée des charges électriques et qu'on transforme le travail en énergie électrique par les machines électrostatiques, de même la théorie que nous développons permet de concevoir des machines magnétostatiques, corrélatives des

machines électrostatiques, transformant réversiblement le travail mécanique en énergie potentielle magnétique, et inversement. Par de telles machines, on pourrait établir des champs magnétiques en ne dépensant que le travail correspondant à l'énergie localisée dans le champ  $\iint \int \frac{H^2}{8\pi} dv$ , c'est-à-dire une énergie infime par rapport à celle que nécessitent les électro-aimants ordinaires, excités par des circuits non supraconducteurs. Enfin si les supraconducteurs sont plongés dans un milieu magnétique parfait et infini, comme ils sont en équilibre l'effet du milieu se manifeste très simplement par l'introduction de l'inverse de la perméabilité dans certains résultats. Rien de tel ne peut être obtenu si on considère des aimants comme les anciens auteurs, car ils ne sont pas en équilibre.

Notre travail atteint donc deux résultats. Le premier, purement théorique, est de montrer qu'il existe une catégorie de phénomènes magnétiques corrélatifs des phénomènes électrostatiques moyennant les hypothèses faites.

Le second consiste en ce que le principe que nous avons adopté fait apparaître l'état supraconducteur comme un état particulièrement simple où les propriétés du métal n'influent plus sur le mouvement des électrons (l'épaisseur de la couche superficielle de courant négligée) où tous les états sont d'équilibre et les transformations réversibles, ce qui est un éminent caractère de simplicité.

Si l'expérience confirmait ces conséquences, il conviendrait donc de considérer l'état supraconducteur comme infiniment plus simple que l'état ordinaire des métaux, et par suite au lieu de ranger la supraconductibilité parmi les phénomènes étranges ou aberrants, de chercher dans une théorie électronique à l'expliquer avant les phénomènes usuels des métaux. Cette manière de voir est étayée par le fait que certains phénomènes comme l'effet Hall, dont l'explication électronique paraît fort difficile, disparaissent dans les supraconducteurs.

La corrélation que nous avons annoncée est d'ordre purement mathématique, elle se poursuit entre deux suites de déductions tirées de principes corrélatifs. Mais on verra que cela va plus loin. En effet dans diverses expériences idéales déduites de notre théorie, nous verrons que la suppression de la supraconductibilité par le champ magnétique se trouve corrélative de la déperdition de charge par excès de champ électrique. Dans les expériences réelles d'électrostatique, en effet, la réversibilité ne subsiste pas indéfiniment, si le champ augmente trop, des pertes irréversibles d'énergie se produisent dues au fait simple qui explique toute l'électrostatique que le champ électrique est le moteur des charges mobiles. Si l'on veut concevoir des expériences corrélatives sur les supraconducteurs on trouve que là aussi une perte irréversible d'énergie finit par se produire due à la suppression de la supraconductibilité par excès de champ magnétique. Ceci montre que la corrélation se poursuit au delà de conséquences mathématiques, que cette action du champ magnétique sur l'état supraconducteur se trouve comme à point nommé, pour poursuivre plus profondément l'analogie avec l'électrostatique.

Le champ magnétique a donc avec le supracourant une relation aussi fondamentale que le champ électrique avec les charges, relation qui doit intervenir en première ligne dans toute explication moléculaire.

Dans une seconde partie de notre travail nous généralisons notre théorie aux supraconducteurs en mouvement par le point de vue de la relativité. Alors toutes les propriétés des supraconducteurs en mouvement apparaissent corrélatives de celles trouvées dans le cas statique. On obtient ainsi la théorie la plus générale des supraconducteurs, qui renferme comme cas particuliers l'électrostatique et la théorie magnétostatique déjà envisagée. La décomposition de la théorie générale en deux théories particulières quand il n'y a pas de mouvements rapides correspond à la séparation qui

se produit alors pratiquement entre l'espace et le temps.

Nous adopterons dans notre exposition un point de vue purement théorique, sans se préoccuper de la difficulté de réaliser tel phénomène prévu. Nous signalerons les différents phénomènes connus (effet Meissner, unicité de l'équilibre d'une sphère, production de flux par influence, absence d'effet Hall), que notre théorie explique simplement, mais nous nous attacherons avant tout à mettre en lumière cette remarquable corrélation avec l'électrostatique.

## PREMIÈRE PARTIE

### De l'équilibre des supraconducteurs.

Faisons d'abord une remarque sur le champ d'une couche plane uniforme indéfinie de courant, de densité  $i$ . Le champ élémentaire est :

$$\begin{aligned} d\mathbf{H} &= -(\text{grad}(1/r)) \times i d\sigma; \\ \mathbf{n} \times d\mathbf{H} &= +(\mathbf{n} \cdot \text{grad}(1/r)) i d\sigma \end{aligned}$$

car  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{i} = 0$ ,  $\mathbf{n}$  normale unitaire au plan.

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = i \int \mathbf{n} \cdot \text{grad}(1/r) d\sigma = 2\pi i$$

on en déduit :

$$\mathbf{H} = 2\pi i \times \mathbf{n},$$

résultat corrélatif de celui de l'électrostatique  $\mathbf{E} = 2\pi\sigma\mathbf{n}$ , champ d'un plan couvert d'une couche uniforme d'électricité.

Évaluons le champ d'un cylindre circulaire infini recouvert d'une densité  $i$  uniforme. On voit aisément que le champ n'a pas de composante radiale. Appliquons le théorème d'Ampère  $\int \mathbf{H} dM = 4\pi i$  à un cercle de même axe que le cylindre. Si le rayon  $r$  du cercle est inférieur à celui du cylindre  $i = 0$ , on a donc  $\int \mathbf{H} dM = 2\pi H r = 0$ ;  $H = 0$ . Si ce rayon est supérieur on a  $2\pi H r = 4\pi i$ ;  $H = \frac{2i}{r}$ . Le champ est le même que si tout le courant était concentré selon l'axe. Ces

résultats sont corrélatifs de ceux sur le champ d'une sphère ou d'un cylindre circulaire recouverts uniformément d'électricité.

#### 1. Premières propriétés des conducteurs en équilibre. —

1° Le courant est purement superficiel. En effet dans le conducteur  $\mathbf{H} = 0$ , d'après le théorème d'Ampère le courant qui traverse une courbe fermée quelconque tracée dans le métal est nul, ce qui entraîne que la densité de courant dans le métal soit nulle. Cette propriété est corrélatrice de celle des conducteurs électrisés pour lesquels la charge est purement superficielle.

2° Si nous considérons diverses courbes tracées dans ou sur le métal, réductibles les unes aux autres par déformation continue, le flux qui les traverse est le même. C'est évident puisque le flux magnétique est tout entier en dehors du métal. Nous voyons apparaître l'importance de la connexion des conducteurs, si le conducteur est simplement connexe, toutes les courbes sont traversées par un flux nul, autrement il existe plusieurs classes de courbes irréductibles les unes aux autres, qui sont traversées par des flux différents. *Exemple* : tore. Cette propriété est corrélatrice de celle des conducteurs électrisés en équilibre : dans toute la masse du conducteur le potentiel est constant. Ici c'est la circulation du potentiel-vecteur qui est la même le long de diverses courbes tracées dans le conducteur.

3° Champ au voisinage d'un conducteur. Considérons un point M infiniment voisin de la surface du conducteur. Nous pouvons diviser la surface du conducteur en deux parties : un élément E entourant M, qui peut être considéré comme plan et d'intensité uniforme, et le reste de la surface.

Il n'y a que l'élément E dont le champ soit discontinu quand on traverse la surface, comme le champ d'un côté de la surface est nul, il est de l'autre côté égal à deux fois celui de l'élément E, c'est-à-dire  $\mathbf{H} = 4\pi \mathbf{i} \times \mathbf{n}$ . On peut donc

dire : le champ en un point infiniment voisin d'un conducteur en équilibre est tangent à la surface, normal aux lignes de courant en ce point, et égal à  $4\pi \mathbf{i}$ . Cette proposition est corrélatrice du théorème de Coulomb sur le champ en un point infiniment voisin de la surface d'un conducteur ( $\mathbf{n}$  normale extérieure) chargé  $\mathbf{E} = 4\pi \sigma \mathbf{n}$ .

4° Pression magnétostatique. Quand les courants sont en équilibre sur le conducteur, chaque élément de courant est soumis au champ de tous les autres. Cherchons quelle est la force exercée sur un élément E, où la densité est  $\mathbf{i}$ . Tout le reste des courants produit un champ  $\mathbf{H} = 2\pi \mathbf{i} \times \mathbf{n}$ , la force qu'il exerce sur E est  $\mathbf{F} = \mathbf{i} d\sigma \times \mathbf{H} = -2\pi i^2 n d\sigma$ . La force est donc une pression dirigée vers l'intérieur du conducteur, et égale à  $2\pi i^2$ . Cette pression est l'analogie de la pression électrostatique  $2\pi \sigma^2$ .

#### 2. Equilibre d'un système de conducteurs fixes. —

Il convient de chercher, pour un système de conducteurs donné, toutes les répartitions de courants qui produisent un champ magnétique nul dans le métal.

1° Nous allons montrer comment dans une infinité de cas on peut trouver une solution, en appliquant un principe corrélatif du principe des images électriques, qu'on peut énoncer comme suit :

Si une surface fermée S à deux côtés peut être considérée comme tube de force d'un champ magnétique conservatif  $\mathbf{H}$ , tel que  $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ , et si ayant choisi un côté positif et un côté négatif sur cette surface, on place sur elle des courants de densité  $\mathbf{i} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{n} \times \mathbf{H})$  ( $\mathbf{n}$  normale positive), le champ magnétique produit par ces courants est nul dans la région négative, identique au champ donné dans la région positive.

En général, on pourra considérer au lieu d'un tube de force unique, divers tubes de force formant des surfaces distinctes, et on aura ainsi la solution du problème de l'équi-

libre pour des systèmes de conducteurs n'ayant pas de points communs.

Pour établir ce principe, nous allons commencer par démontrer une formule qui joue ici un rôle analogue à celle de Green en électrostatique :

Soit  $\mathbf{H}$  un champ, tel que  $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ , si on se place en un point de l'espace, et appelle  $r$  la distance de ce point fixe à l'élément de volume  $dv$ , on a :

$$\int \int_S \frac{1}{r} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) d\sigma = \int \int \int_V \left( \text{grad } \frac{1}{r} \right) \times \mathbf{H} dv$$

$S$  étant une surface fermée limitant le volume  $V$  dans lequel le champ  $\mathbf{H}$  est régulier, et  $\mathbf{v}$  la normale extérieure à  $V$ .

On a en effet :

$$\begin{aligned} \text{rot} \left( \frac{1}{r} \mathbf{H} \right) &= \frac{1}{r} \text{rot } \mathbf{H} + \left( \text{grad } \frac{1}{r} \right) \times \mathbf{H} = \left( \text{grad } \frac{1}{r} \right) \\ &\times \mathbf{H} \text{ et } \int \int \int_V \text{rot} \left( \frac{1}{r} \mathbf{H} \right) dv = \int \int \int_V \frac{1}{r} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) d\sigma. \end{aligned}$$

Cette formule étant établie, considérons un tube de force  $S$  fermé d'un champ magnétique, et distribuons sur  $S$  les cou-

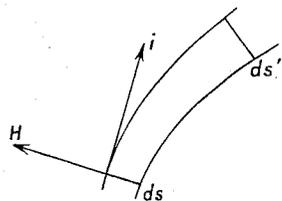


Fig. 1.

rants de densité  $\vec{i} = 1/4\pi (\vec{n} \times \vec{H})$ . Nous allons d'abord montrer que ces courants dérivent d'une fonction de courant, c'est-à-dire que le courant sera bien conservatif, condition essentielle pour un courant réel. Les lignes de courant sont

les traces sur  $S$  des surfaces équipotentiellles du champ magnétique, par suite :

$$4\pi i ds = 4\pi i' ds'; \quad i ds = i' ds' \text{ (fig. 1),}$$

le courant est donc bien conservatif.

Appliquons alors notre formule au volume positif, situé du côté positif de  $S$  en plaçant le point fixe  $M$  dans la même région. Appelant  $\mathbf{v}$  la normale extérieure à ce volume, il vient :

$$\int \int_S \frac{1}{r} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) d\sigma = \int \int \int_V \left( \text{grad } \frac{1}{r} \right) \times \mathbf{H} dv.$$

Considérons maintenant le potentiel-vecteur  $\mathbf{F}$  créé, dans le domaine qui nous occupe par les courants que nous avons mis sur  $S$ . C'est :

$$\mathbf{F} = \int \int \int_V \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) d\sigma = - \frac{1}{4\pi} \int \int \int_V \left( \text{grad } \frac{1}{r} \right) \times \mathbf{H} dv:$$

$\mathbf{n}$  normale positive à  $S$ ,  $\mathbf{v}$  normale extérieure à  $V$ ;  $\mathbf{n} = -\mathbf{v}$ .

Par suite :

$$\mathbf{F} = - \frac{1}{4\pi} \int \int \int_V \left( \text{grad } \frac{1}{r} \right) \times \mathbf{H} dv.$$

Pour voir ce que signifie l'intégrale triple, il suffit de remarquer qu'elle représente le champ en  $M$  d'un système de courants en volume de densité cubique  $\mathbf{H}/4\pi$ , et nous avons le droit de considérer de tels courants car, dans le domaine qui nous occupe,  $\mathbf{H}$  est conservatif. Ceci montre de suite d'après une propriété connue, que :

$$\text{rot } \mathbf{F} = 4\pi \cdot \mathbf{H}/4\pi = \mathbf{H}.$$

Ce qui montre que du côté positif de  $S$ , le champ créé par les courants distribués sur  $S$  et de densité :

$$\mathbf{i} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{n} \times \mathbf{H})$$

est identique au champ dont  $S$  est tube de force.

Considérons toujours comme volume d'intégration le volume  $V$  positif, et plaçons le point  $M$  du côté négatif de  $S$ . Nous obtenons comme expression du potentiel-vecteur en  $M$  :

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi} \int \int \frac{1}{r} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) d\sigma = - \frac{1}{4\pi} \int \int \int \left( \text{grad } \frac{1}{r} \right) \times \mathbf{H} dv$$

ce potentiel-vecteur est encore le champ de courants  $\mathbf{H}$ , mais comme  $M$  est en dehors de ces courants, on a :

$$\text{rot } \mathbf{F} = 0.$$

Le champ des courants répartis sur  $S$  est bien nul du côté négatif. En appliquant au potentiel-vecteur  $\mathbf{F}$  le théorème d'Ampère pour une courbe tracée dans le domaine négatif de  $S$ , il vient :

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{M} = 4\pi (\text{flux de } \mathbf{H}/4\pi) = \text{flux de } \mathbf{H}.$$

Nous retrouvons que les différentes courbes tracées à l'intérieur du métal embrassent le même flux.

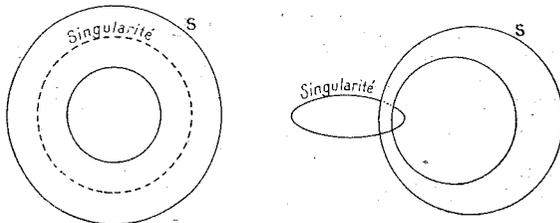


Fig. 2.

Faisons maintenant quelques applications.

Evaluons le courant total porté par un conducteur considéré comme tube de force d'un courant  $I$ . Le conducteur et le courant  $I$  donnent le même champ dans la région positive

$\frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}$  le long d'une courbe  $C$  tracée sur le conducteur représente le courant total porté par le conducteur tra-

versant la courbe. Si la courbe boucle le courant  $I$ , les deux courants sont égaux. Si elle ne boucle pas  $I$ , le courant total du conducteur est nul

Considérons par exemple le champ d'un courant circulaire (fig. 2). Nous pouvons considérer un tube de force en forme de tore tel que le courant soit à l'intérieur. Si nous prenons comme côté positif le côté extérieur du tube nous obtenons l'équilibre de cette surface isolée portant un courant total égal au courant circulaire. Si nous prenons comme côté positif l'autre côté, nous obtenons l'équilibre d'une

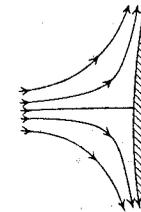


Fig. 3.

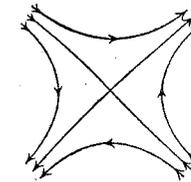


Fig. 4.

cavité doublement connexe contenant un courant circulaire. Il est évident que les courants  $i$  dans ces deux cas sont égaux et de sens contraires. Mais nous pouvons également considérer un tube en forme de tore tel que le courant soit à l'extérieur. Si nous prenons comme côté positif l'intérieur du tube, nous obtenons l'équilibre d'une cavité doublement connexe vide. Sur les parois de cette cavité circulent des courants, quoiqu'elle soit vide. Nous voyons donc que sur une surface multiplement connexe, il est possible de trouver des courants produisant un champ nul d'un côté ou de l'autre. Ceci montre qu'il n'est pas possible par des propriétés particulières de distinguer l'intérieur et l'extérieur d'une surface fermée, qui peuvent jouer exactement le même rôle.

Toutes les propriétés que nous venons d'énoncer sont

corrélatives de ce qu'on sait sur les images électriques en électrostatique. Il y a certaines différences dans les conséquences pratiques, ici par exemple on pourra avoir des couches de courant produisant un champ nul à l'extérieur, ce qui n'existe pas en électrostatique. Cela tient à ce que la connexion d'une surface a une importance fondamentale, à cause du flux qui traverse les trous. Rien de tel en électrostatique, car comme nous le verrons plus loin, l'homologue du flux magnétique est la charge électrique et par suite les trous d'une surface ne sauraient avoir l'importance qu'ils ont nécessairement ici.

Dans certains cas, il y a dans le champ des lignes de force singulières qui présentent un point d'arrêt sur le conducteur (fig. 3). En ce point le champ et le courant sont nuls, et de part et d'autre ils sont de sens contraires. Ces lignes peuvent former une surface dont la trace sur le conducteur sépare deux nappes de courants de sens inverses (voir figure équilibre d'un tore influencé par un aimant), ou bien être isolées. Ce cas se rencontre dans les conducteurs simplement connexes. Pour pouvoir trouver ces cas d'équilibre par la méthode des images, il suffit de considérer des champs magnétiques où  $H$  s'annule en certains points de l'espace. On voit aisément qu'en un tel point se croisent deux ou plusieurs lignes de force singulières et que les autres le contournent (fig. 4). Si le champ est cylindrique, les deux lignes singulières se coupent à angle droit. C'est le genre de singularités qu'on appelle un col. On prendra alors comme tube de force, pour appliquer la méthode des images, un tube contenant diverses lignes singulières. Donnons quelques exemples :

Exemple 1. Cylindre circulaire plongé dans un champ uniforme :

Considérons deux fils parallèles rectilignes, de distance infiniment petite  $\varepsilon$ , portant deux courants égaux, de sens inverses, et de valeur  $i$ . L'angle solide sous lequel on voit ce circuit d'un point  $M$  est  $2d\omega$  (fig. 5), le plan de figure étant

le plan mené par  $M$  perpendiculairement aux fils. Le potentiel scalaire créé sera  $2id\omega = 2i \frac{\varepsilon \cos \theta}{r} = \frac{U \cos \theta}{r}$  ( $2i\varepsilon = U$ ).

Le champ radial sera  $H_r = \frac{U \cos \theta}{r^2}$ , le champ perpendiculaire  $H_t = \frac{U \sin \theta}{r^2}$  (en valeur absolue, fig. 6). Plaçons-nous sur un cylindre ayant pour axe les fils et de rayon  $a$ , et superposons au champ précédent un champ uniforme  $H_0$ , de direction  $Ox$  normale au plan des deux courants. Si  $\frac{U}{a^2} = H_0$ ,

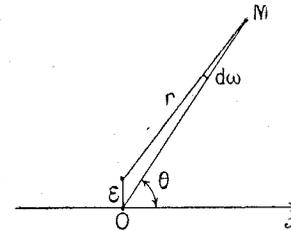


Fig. 5.

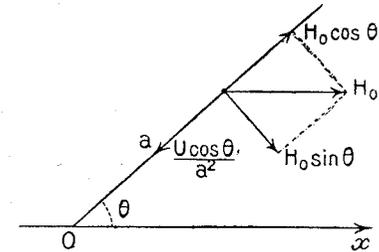


Fig. 6.

on voit que le champ radial reste toujours nul, et que par suite le cylindre envisagé est un tube de force. Appliquons le principe des images, nous obtenons l'équilibre d'un cylindre circulaire plongé dans un champ uniforme normal aux génératrices (fig. 7). Le courant total porté par le cylindre est nul. Le long de deux génératrices opposées le courant est nul, ce sont des points d'arrêt de lignes de force. Le champ total sur le cylindre est  $2H_0 \sin \theta$ , la densité est donc  $i = \frac{H}{4\pi} = \frac{H_0}{2\pi} \sin \theta$ .

Le potentiel est  $V = -H_0 x - U \frac{x}{r^2} = -H_0 x \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)$ . Nous

pouvons superposer au champ précédent celui d'un fil portant un courant  $j$ , et coïncidant avec l'axe du cylindre. Le cylindre reste tube de force du nouveau champ. Nous avons l'équilibre d'un cylindre circulaire plongé dans un champ

uniforme, portant un courant total  $j$ . La densité portée par le cylindre est  $i = \frac{H_0}{2\pi} \sin \theta + \frac{j}{2\pi a}$ . Elle s'annule et on a des

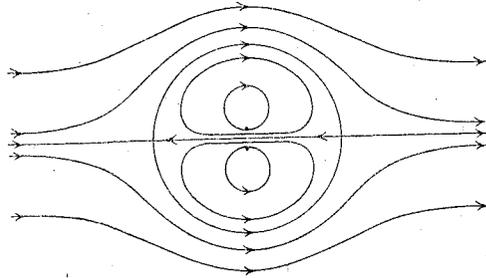


Fig. 7.

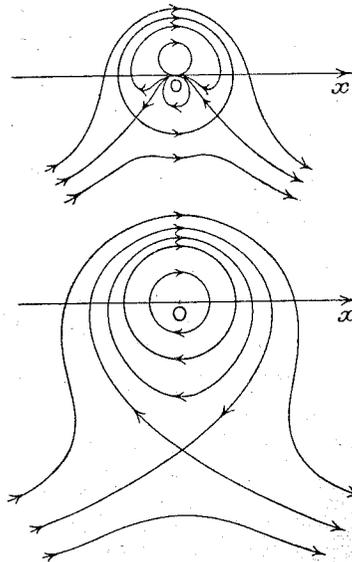


Fig. 8.

lignes à points d'arrêt si  $j < H_0 a$ , elle ne s'annule pas si  $j > H_0 a$ . On a alors une ligne de force faisant une boucle et ayant un point double où le champ s'annule (fig. 8).

Exemple 2. Sphère plongée dans un champ uniforme :

La solution est analogue ; on considère le champ résultant de la superposition de celui d'un doublet de moment  $\partial\mathcal{N}$  et d'un champ uniforme  $H_0$  parallèle à  $\partial\mathcal{N}$  et de sens contraire. On voit aussitôt que si l'on considère une sphère de centre  $O$  et de rayon  $a$  tel que  $\frac{2\partial\mathcal{N}}{a^3} = H_0$  elle est tube de force. Nous obtenons donc la solution de l'équilibre d'une sphère plongée dans un champ uniforme. Les lignes de courant sont des

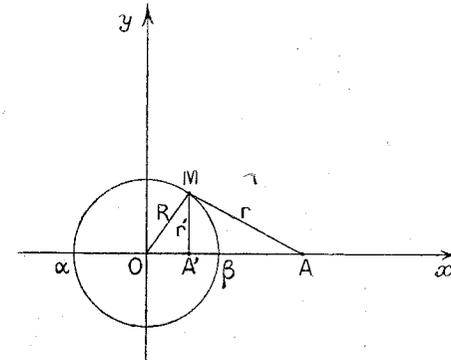


Fig. 9.

cercles coaxiaux dont l'axe est parallèle à  $H_0$ . La densité est  $i = \frac{1}{4\pi} \left[ H_0 \sin \theta + \frac{\partial\mathcal{N} \sin \theta}{a^3} \right] = \frac{3H_0}{8\pi} \sin \theta$ . Le potentiel est  $V = -H_0 x - \frac{\partial\mathcal{N} x}{r^3} = -H_0 x \left( 1 + \frac{a^3}{2r^3} \right)$ .

Le champ s'annule en deux points diamétralement opposés qui sont les points d'arrêt de la seule ligne de force rigoureusement rectiligne du champ. On voit qu'une courbe quelconque tracée sur la sphère est traversée par un courant nul, car la circulation du champ le long d'une telle courbe est nulle. En effet la circulation du champ  $H$  est nulle, et celle du champ du doublet aussi, celui-ci étant équivalent à une bou-

de courant infiniment petite. Le champ résultant a donc aussi une circulation nulle. Ce fait est caractéristique des conducteurs simplement connexes. La force à laquelle la sphère est soumise est nulle, elle ne tend à prendre aucun mouvement.

Exemple 3. Sphère influencée par un petit aimant (fig. 9) :

Considérons le champ produit par deux doublets A et A' de moment  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{M}'$  parallèles à AA' et de sens opposés. En deux points  $\alpha$  et  $\beta$  de la droite AA' conjugués harmoniques par rapport à A et A' le champ est nul. Plaçons-nous sur la sphère de diamètre  $\alpha\beta$  et centre O. Posons  $OA = a$ ,  $OA' = a'$ ,  $OM = R$ , on a  $a \cdot a' = R^2$ . Prenons dans un plan passant par AA' deux axes  $Oxy$ ,  $Ox$  coïncidant avec AA'. On trouve pour le champ :

$$\begin{aligned} -H_x &= \frac{3\mathfrak{M}}{r^3} \left[ \frac{(x-a')^2}{r'^2} - \frac{(x-a)^2}{r^2} \right] \\ -H_y &= \frac{3\mathfrak{M}y}{r^3} \left[ \frac{x-a'}{r'^2} - \frac{x-a}{r^2} \right] \quad xH_x + yH_y = 0. \end{aligned}$$

Le champ est tangent à la sphère qui est donc un tube de force. Nous avons donc résolu le problème de l'équilibre de cette sphère influencée par le petit aimant A. Les lignes de courant sont des cercles d'axe AA'. Le champ tangent à la sphère est :

$$H = \frac{3\mathfrak{M}y(a^2 - R^2)(a^2 + R^2 - 2ax)}{Rr^7}$$

On peut déduire de cela l'équilibre d'une sphère plongée dans un champ uniforme. Il suffit d'éloigner A indéfiniment en maintenant  $\frac{2\mathfrak{M}}{r^3} = H_0$  constant. On a sensiblement :

$$a^2 - R^2 = a^2 = r^2 \quad a^2 + R^2 - 2ax = r^2.$$

D'où :  $H = \frac{3H_0}{2} \frac{y}{R}$  ce qui est le résultat obtenu.

Par ailleurs on peut calculer la force F avec laquelle l'ai-

mant repousse la sphère. Cette force est égale à celle avec laquelle les deux doublets A et A' se repoussent. Si H est le champ créé par un des aimants, soit A, la force avec laquelle il repousse l'autre est  $\mathfrak{M}' \frac{\partial H}{\partial x}$ . On a donc :  $F = \frac{6\mathfrak{M}\mathfrak{M}'}{(a'-a)^3}$  comme :

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \mathfrak{M}'} = \frac{r^3}{r'^3} = \left( \frac{R-a}{a'-R} \right)^3 = \frac{a^3}{R^3} \quad F = \frac{6\mathfrak{M}^2 R^3 a}{(a^2 - R^2)^3}$$

si  $a$  est grand on a sensiblement  $F = 6\mathfrak{M}^2 R^3 / a^7$ ; elle décroît extrêmement vite quand  $a$  croît, puisque si  $a$  double elle est divisée par  $2^7 = 128$ . Par ailleurs on a là un moyen théorique de mesurer directement le moment magnétique  $\mathfrak{M}$  d'un aimant de façon absolue.

Remarque : dans les exemples précédents, on peut supposer que c'est l'espace extérieur à la sphère ou au cylindre qui est plein de métal. On obtient ainsi l'équilibre d'une cavité sphérique contenant un aimant, etc.

Le problème de l'équilibre des conducteurs présente une analogie remarquable avec celui du mouvement irrotationnel permanent d'un fluide incompressible. En effet dans ce problème, on doit trouver un champ de vitesses  $\mathbf{H}$  conservatif, dérivant d'un potentiel  $V(\Delta_2 V = 0)$  et tangent à des obstacles donnés en tout point de leur surface. Supposons qu'on ait trouvé un tel champ  $\mathbf{H}$  et étudions l'équilibre magnétique des obstacles, supposés conducteurs. Répartissons sur eux les courants  $i$  donnés par la relation  $i = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{n} \times \mathbf{H})$  (1). Ces courants  $i$  sont une solution. En effet  $\mathbf{H}$  dérivant d'un potentiel,  $i$  est conservatif, d'après ce qu'on a vu. Appelant  $\mathbf{F}$  le potentiel-vecteur créé par les courants  $i$  dans l'espace où le fluide circule et appliquant le raisonnement déjà employé, on montre que le champ produit par ces courants est nul dans l'espace où le fluide ne circule pas, identique à  $\mathbf{H}$  dans l'espace

(1)  $\mathbf{n}$  normale du côté du fluide.

où il circule. Toute solution du problème hydrodynamique est donc solution du problème magnétique. La réciproque est évidente. Cette identité donne un sens remarquable à la notion de flux magnétique, que depuis longtemps on a plus ou moins vaguement comparé au flux hydraulique. Cette analogie qui reste vague, si on considère comme autrefois uniquement le champ produit par des aimants, prend une valeur considérable si on considère des conducteurs. Autour d'eux le flux magnétique conservatif se comporte exactement comme un flux liquide incompressible autour d'obstacles donnés. Cette identité des deux problèmes permet d'appliquer à l'étude de l'équilibre des conducteurs les résultats connus de l'hydrodynamique sur les écoulements irrotationnels permanents. On retrouvera ainsi l'équilibre de la sphère plongée dans un champ uniforme, celui du cylindre circulaire, etc. Il y a également identité, comme on le voit facilement, entre le problème de l'équilibre magnétique et celui de la répartition du courant électrique dans un milieu conducteur contenant des obstacles isolants remplaçant les supraconducteurs. Cette identité se borne d'ailleurs à celle des potentiels et des champs, car les deux phénomènes sont profondément différents, les supraconducteurs étant en équilibre et les obstacles isolants ne l'étant pas. En particulier ces obstacles isolants portent des charges statiques qui n'ont pas de rapport avec les courants portés par les supraconducteurs. Dans le cas particulier de l'équilibre de corps cylindriques infinis, on a à faire à des champs magnétiques plans. Si on considère les réseaux des équipotentiels et des lignes de force, ce sont deux réseaux orthogonaux. Le premier étant isotherme ( $\Delta_2 V = 0$ ), le second l'est aussi. Inversement on voit qu'étant donnés deux réseaux isothermes conjugués ils peuvent être considérés comme réseaux d'équipotentiels et de lignes de force d'un champ. C'est le résultat connu de l'hydrodynamique. On peut faire de cela diverses applications. On obtiendra des réseaux isothermes conjugués en

considérant une fonction analytique  $Z = f(z) = X + iY$ , et en prenant les lignes  $X = C$ ,  $Y = C'$  (Ou mod  $Z = C$ ,  $\arg Z = C'$ ).

Exemple : soit  $f(z) = H_0 \left( z + \frac{a^2}{z} \right)$ . Les lignes de force seront données par l'équation  $y \left( 1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right) = C$  si  $C = 0$ , on a un cercle de rayon  $a$ . Le potentiel est :

$$V = -H_0 x \left( 1 + \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right).$$

Nous retrouvons la solution de l'équilibre d'un cylindre circulaire plongé dans un champ uniforme perpendiculaire à son axe, le courant total porté par le cylindre étant nul.

En prenant comme fonction :

$$f(z) = H_0 \left( z + \frac{a^2}{z} \right) - 2\sqrt{-1}i \log \frac{z}{a},$$

on a encore comme ligne de force particulière le cercle de rayon  $a$ , mais la circulation du champ autour du cercle vaut  $4\pi i$ . On obtient ainsi l'équilibre du cylindre circulaire dans un champ uniforme, mais le courant total étant égal à  $i$ . Soit  $f(z) = Az^n$ . On a alors une solution de l'équilibre d'un driadre conducteur ayant un angle de  $\pi/n$ , saillant ou rentrant selon que  $n$  est inférieur ou supérieur à 1. On constate aisément que le champ sur l'arête est infini ou nul selon qu'elle est saillante ou rentrante.

Soit  $f(z) = (z - e_1)^{i_1} (z - e_2)^{i_2} \dots (z - e_n)^{i_n} e_1 \dots e_n$  étant différents points du plan. Soit  $r_1 \dots r_n$  et  $\theta_1 \dots \theta_n$  les modules et arguments de  $z - e_1 \dots z - e_n$ . On a mod  $f(z) = r_1^{i_1} r_2^{i_2} \dots r_n^{i_n}$  et  $\arg f(z) = i_1 \theta_1 + \dots + i_n \theta_n$ . Les deux réseaux de courbes  $r_1^{i_1} \dots r_n^{i_n} = C$ ,  $i_1 \theta_1 + \dots + i_n \theta_n = C'$  sont donc deux réseaux isothermes conjugués. Il est facile de voir à quel champ magnétique cela correspond. Considérons des fils rectilignes perpendiculaires au plan  $z$  le perçant aux points  $e_1 \dots e_n$  et portant des courants  $i_1 \dots i_n$ . Le potentiel

scalaire magnétique créé par ces fils est  $2(i_1\theta_1 + \dots + i_n\theta_n)$ . Les lignes de force ont donc pour équation  $r_1^{i_1} \dots r_n^{i_n} = C$ . Si on considère des cylindres ayant une de ces lignes comme section droite, et qu'on répartisse sur lui le courant  $i = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{n} \times \mathbf{H})$ , on obtient un champ nul à l'intérieur et les autres lignes comme lignes de force à l'extérieur. En particulier si on a deux points et si  $i_1 = -i_2$  il vient  $r_1/r_2 = C$ , les lignes de force forment un faisceau de cercles, les équipotentiels formant le faisceau conjugué. On a ainsi la solution de l'équilibre de deux cylindres circulaires parallèles portant des courants totaux égaux et de sens inverses. Si  $i_1 = i_2$  on a  $r_1 r_2 = C$ , les lignes de force sont des cassinoïdes et les équipotentiels des hyperboles équilatères. On a la solution de l'équilibre de cylindres cassinoïdaux.

Si on transforme de façon conforme deux réseaux isothermes conjugués, on obtient deux autres réseaux isothermes conjugués. C'est-à-dire qu'une telle transformation transforme les lignes de force et les équipotentiels d'un champ en les lignes de force et les équipotentiels d'un autre champ magnétique et la circulation du champ le long d'une ligne est égale à celle le long de sa transformée, c'est-à-dire que le courant total porté par un cylindre est conservé dans la transformation.

Soit par exemple un faisceau de cercles concentriques et leurs rayons lignes de force et équipotentiels d'un cylindre circulaire isolé. Appliquons la transformation conforme  $\zeta = \frac{1}{2} \left( z + \frac{a^2}{z} \right)$ . Les cercles de rayon plus grand que  $a$  deviennent des ellipses homofocales, et les rayons des hyperboles homofocales à ces ellipses. On a donc deux réseaux isothermes conjugués et par suite la solution de l'équilibre d'un cylindre elliptique isolé. Une ligne de force  $L$  étant la section droite de ce cylindre, la densité  $i$  est inversement proportionnelle à la distance de  $L$  à une ligne infiniment

voisine  $L'$ .  $L$  et  $L'$  étant deux ellipses homofocales, la densité  $i$  est proportionnelle à  $1/\sqrt{\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}}$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  étant les axes de l'ellipse. Si le rayon  $F$  du cercle transformé est égal à  $a$ , l'ellipse se réduit à son segment focal de longueur  $2a$ . Le cylindre se réduit à une bande portant une densité  $1/\sqrt{a^2 - x^2}$  dont le champ a pour lignes de force les ellipses précédentes. La même transformation appliquée à un cylindre circulaire plongé dans un champ uniforme donne l'équilibre d'un cylindre elliptique plongé dans un tel champ.

Éléments correspondants : comme on l'a déjà vu ce qui correspond aux surfaces équipotentiels de l'électrostatique

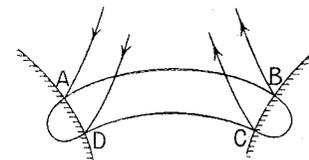


Fig. 10.

ce sont dans notre théorie les tubes de force du champ magnétique. Inversement les surfaces équipotentiels du champ magnétique sont corrélatives des tubes de force du champ électrique. C'est ce que montre le théorème des éléments correspondants, corrélatif de celui de l'électrostatique.

Considérons deux surfaces équipotentiels du champ magnétique, qui découpent sur deux conducteurs différents deux nappes de courant (On sait que la trace de ces surfaces équipotentiels sur les conducteurs sont des lignes de courant). Formons un circuit fermé par les lignes  $AB$  et  $CD$  (fig. 10) contenues dans les surfaces équipotentiels et les lignes  $BC$  et  $DA$  tracées dans le métal. La circulation du champ le long de ce circuit est nulle, puisqu'il est nul dans

le métal et perpendiculaire aux surfaces équipotentielles à l'extérieur. Les deux nappes renferment donc deux courants de même intensité et de sens inverses.

La corrélation entre tubes de force et surfaces équipotentielles prend un sens plus précis dans le cas de champs cylindriques. Considérons le champ magnétique d'un fil rectiligne infini parcouru par un courant, et le champ électrique du même fil chargé d'une densité uniforme. Ces deux champs sont en tout point orthogonaux et proportionnels entre eux. Soit donc un cylindre infini en équilibre électrostatique et portant une densité donnant un champ nul à l'intérieur. Si nous distribuons maintenant sur le même cylindre des courants superficiels parallèles aux génératrices on voit aussitôt qu'en tout point de l'espace les champs électriques et magnétiques produits par ces deux densités sont proportionnels et perpendiculaires. Les courants que nous avons distribués sur le cylindre sont donc solution du problème de son équilibre, puisque produisant un champ nul à l'intérieur, et à l'extérieur les surfaces équipotentielles du champ électrique sont des tubes de force du champ magnétique et inversement.

Considérons par exemple le problème de l'équilibre magnétique de deux cylindres circulaires parallèles. Connaissant la solution du problème corrélatif de l'électrostatique on vérifie aussitôt que ces cylindres peuvent être considérés comme tubes de force du champ de courants rectilignes parallèles de sens inverses, et que par suite les lignes de force de leur champ quand ils sont en équilibre forment un faisceau de cercles. Les surfaces équipotentielles sont des portions de cylindres circulaires, dont les sections droites forment le faisceau conjugué du précédent.

On sait également que si l'on considère un cylindre elliptique électrisé, les surfaces équipotentielles sont des cylindres homofocaux au cylindre donné et les lignes de force des hyperboles de même foyer que la section droite. Dans l'équi-

libre magnétique de ce cylindre, les lignes de force seront des ellipses homofocales à la section droite et les surfaces équipotentielles des portions de cylindres hyperboliques perpendiculaires à ces ellipses. Nous retrouvons un résultat déjà démontré.

Admettons maintenant qu'il existe une solution non nulle du problème de l'équilibre dans le cas général. Nous allons montrer que cette solution est unique si on se donne, pour chaque trou du système de conducteurs, le courant total  $i_k$  qui l'entoure ou le flux  $\varphi_k$  qui le traverse.

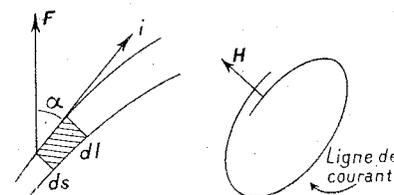


Fig. 11.

Etablissons pour cela une formule :

$$\iiint H^2 dv = 4\pi \sum i_k \varphi_k ;$$

en effet  $H^2 = \text{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{H})$  :

$$\begin{aligned} \iiint H^2 dv &= \int \int_s \mathbf{n} \mathbf{H} \mathbf{F} d\sigma = 4\pi \int \int \mathbf{i} \cdot \mathbf{F} ds dl \cdot \\ &= 4\pi \int di \int \mathbf{F} \cos \alpha ds = 4\pi i \varphi \text{ (fig. 11).} \end{aligned}$$

Pour établir cette formule, il faut supposer que les lignes de courant sont fermées ou approximativement fermées, c'est-à-dire repassent aussi près qu'on veut d'elles-mêmes après suffisamment de trajet. D'ailleurs, ces lignes de courant étant les traces sur les conducteurs des surfaces équipotentielles du champ magnétique, on voit qu'il est nécessaire qu'elles se ferment, mais ceci n'est pas une

démonstration rigoureuse. En effet, si elles ne se fermaient pas exactement on aurait ce que représente la figure 11, et le champ ne pourrait manifestement pas avoir le sens qu'il a.

Cette formule établie, nous voyons que si nous nous donnons pour chaque trou, soit le flux nul, soit le courant total nul, il vient :

$$\iint H^2 dv = 4\pi \sum i_k \varphi_k = 0,$$

ce qui entraîne que  $H$  est nul partout, c'est-à-dire que la solution du problème de l'équilibre est identiquement nulle. C'est en particulier le cas d'un système de conducteurs simplement connexes : pour tous le flux est nul, il n'y a aucune autre solution pour leur équilibre que zéro identiquement. Si maintenant on se donne pour chaque trou, le flux ou le courant, la solution est unique. En effet, s'il y avait deux solutions, la différence de ces solutions serait manifestement une solution qui correspondrait à des flux ou à des courants nuls, c'est à-dire identiquement nulle. Par suite, la solution est unique.

Ces conclusions sont corrélatives de ce qu'on sait en électrostatique sur l'unicité de la solution, quand on se donne la charge ou le potentiel pour chaque conducteur. Un système de conducteurs simplement connexes est homologue d'un système de conducteurs dont toutes les charges seraient nulles et on sait bien qu'il n'y a pas d'autre solution que zéro.

**3. Influence magnétique. Ecrans magnétiques.** — Quand un conducteur est placé dans un champ magnétique, il s'établit des courants de façon que le champ soit nul à l'intérieur. Le déplacement du conducteur produit une variation de ces courants de façon que le champ reste toujours nul (Influence magnétique).

Il y a un cas extrêmement remarquable d'influence, c'est

celui d'un système de conducteurs simplement connexes approché d'un aimant. Il n'y a alors qu'une solution. En effet la répartition des courants doit donner dans le conducteur un champ égal et opposé à celui de l'aimant. S'il existait deux telles répartitions, leur différence serait une répartition donnant un champ nul à l'intérieur, et on sait que dans le cas d'un système de conducteurs simplement connexes, il n'y a pas à cela d'autre solution que zéro. Par suite :

Un système de conducteurs simplement connexes étant plongé dans un champ magnétique donné, la répartition qui se produit sur lui est unique et par suite indépendante du chemin suivi par le système. En particulier la répartition est la même que le système devienne supraconducteur dans le champ, ou y soit apporté, déjà refroidi. Ainsi se trouve expliqué ce phénomène fondamental que l'état d'une sphère supraconductrice plongée dans un champ ne dépend pas du chemin qu'elle a suivi, si du moins la masse supraconductrice est vraiment simplement connexe <sup>(1)</sup>.

Si le conducteur influencé n'est plus simplement connexe, la solution de son équilibre quand il est plongé dans un champ dépend du chemin suivi, et nous en verrons l'application aux machines magnétostatiques, c'est-à-dire à la production de flux par influence.

On peut ajouter à une solution particulière du problème la solution générale de l'équilibre de ce conducteur isolé dans l'espace, et on obtient ainsi toutes les solutions du problème posé.

Soit par exemple un tore étroit par rapport à son diamètre. La solution de son équilibre quand il est éloigné de tout champ et de tout conducteur est approximativement une densité de courant uniforme dans toute sa section. Approchons de ce tore un pôle nord d'aimant et supposons que le

<sup>(1)</sup> London, Thèse.

flux total qui traverse le tore soit nul. Nous aurons une solution unique qu'on peut trouver qualitativement. En effet, pour que le flux soit nul, il faut que dans le trou, le champ créé par le courant du tore soit de sens inverse du champ de l'aimant. Au centre du trou, où le champ du tore est le plus faible, le champ de l'aimant l'emportera, ce sera le contraire près du conducteur. Le courant qui circulera sur le tore aura un sens bien déterminé, et on voit que pour que le champ soit nul à l'intérieur du métal, il faut que la densité de courant soit maximum dans les régions les plus

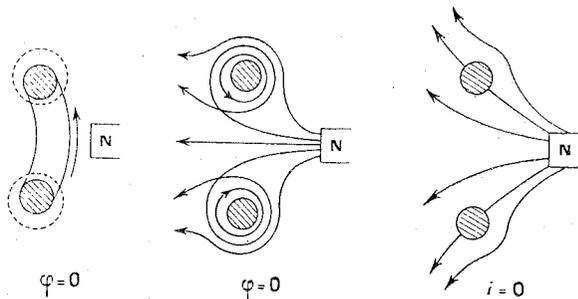


Fig. 12.

externes de la surface. A cette solution particulière, on peut ajouter la solution générale de l'équilibre du tore isolé, et on obtient des résultats divers : cas où il y a une ligne neutre et deux nappes de courants de sens inverses, etc. Différents cas possibles sont résumés par la figure 12.

*Ecrans magnétiques.* — Soit un conducteur dans lequel est creusée une cavité. Examinons la manière dont les phénomènes magnétiques intérieurs et extérieurs à la cavité peuvent réagir les uns sur les autres. Considérons donc un conducteur limité par une surface  $S$  ayant une cavité limitée par une surface  $S'$ . La superposition de deux états d'équilibre est un état d'équilibre. Considérons donc l'équilibre intérieur à  $S'$ , supposée creusée dans un métal infini. Cet

équilibre donne un champ nul en tout point du métal. De même l'équilibre extérieur à  $S$  supposée pleine donne un champ nul dans tout l'intérieur. Superposons ces deux états. Nous obtenons un champ nul dans tout le métal, et nous voyons que  $S$  n'influe pas ce qui se produit dans  $S'$ , y produisant un champ nul, et que de même  $S'$  n'influe pas ce qui se produit à l'extérieur de  $S$ , y produisant un champ nul. Nous voyons donc qu'il existe des états d'équilibre dans lesquels les phénomènes extérieurs à  $S$  n'influent pas sur ceux de la cavité et inversement. Montrons qu'il en est ainsi pour tout état. Les phénomènes intérieurs à  $S'$  dépendent de  $n'$  variables (flux et courants), ceux extérieurs à  $S$  (supposée pleine) dépendent de  $n$  autres. Dans le cas de  $S$  creusée de  $S'$  ils dépendent de  $n + n'$  variables, par suite chacune des variables étant donnée on pourra considérer l'équilibre unique intérieur à  $S'$ , donnant un champ nul à l'extérieur de  $S'$ , l'équilibre unique extérieur à  $S$  donnant un champ nul à l'intérieur. La superposition de ces deux équilibres est l'unique solution de l'équilibre de  $S$  creusée de  $S'$  puisque toutes les variables sont fixées. Donc dans tout état d'équilibre, les phénomènes extérieurs à  $S$  ne produisent aucun champ dans la cavité et inversement. Si donc les phénomènes de la cavité varient d'une façon quelconque (en restant en équilibre) ceux extérieurs à  $S$  n'en sont pas affectés et inversement. Cependant, si cette variation des phénomènes de la cavité entraînait une modification des variables définissant l'état du système, il en résulterait une modification corrélative des phénomènes extérieurs. Donnons quelques exemples. Supposons que  $S$  soit simplement connexe. Si une répartition de courants sur  $S$  produit un champ nul à l'intérieur, elle est identiquement nulle. Par suite, quels que soient les phénomènes magnétiques introduits dans  $S'$ ,  $S$  reste toujours neutre et aucun champ ne peut exister à l'extérieur. Inversement si  $S'$  est simplement connexe pour qu'elle produise un champ nul à son extérieur, il faut qu'elle

ne porte aucun courant. Par suite quels que soient les phénomènes magnétiques introduits dans l'espace extérieur à S, S' restera toujours neutre et aucun champ n'existera à l'intérieur. Donc si un espace est limité par une surface simplement connexe, pour cet espace il y a effet d'écran. Il y a effet d'écran dans les deux sens, si S et S' sont simplement connexes toutes deux. On voit comme il était facile de le prévoir que contrairement à ce qui se passe en électrostatique, les notions d'intérieur et d'extérieur d'une surface ne jouent plus aucun rôle, mais seulement la connexion. Ce qui

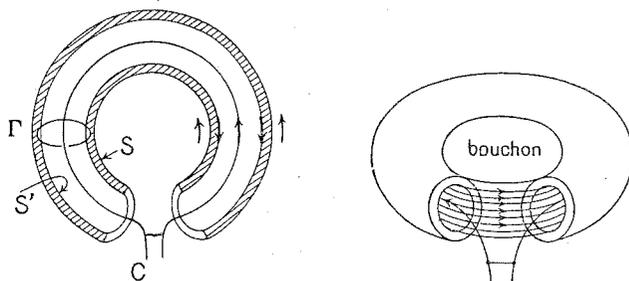


Fig. 13.

est corrélatif de la mise à la terre, c'est la connexion simple, S et S' jouant exactement le même rôle. Dans le cas où S ou S' ne seraient plus simplement connexes, il n'y a plus forcément effet d'écran. On s'en rendra compte par les exemples suivants :

Soit un circuit filiforme C, dans lequel on peut envoyer (avec une machine magnétique, par exemple) un courant I, ce circuit étant presque entièrement enfermé par un tube conducteur (fig. 13). Appliquons le théorème d'Ampère à une courbe  $\Gamma$  tracée dans le métal. On a dans le métal  $\mathbf{H} = 0$ , d'où :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{M} = 0,$$

ce qui entraîne que la face interne du tube porte une nappe de courant égale et de sens contraire au courant parcourant C. Cette nappe se referme par l'extérieur qui porte donc un courant égal à celui du fil. Si le tube se ferme entourant complètement le circuit C, la face externe du tube porte un courant égal à I et crée un champ à l'extérieur. Il n'y a donc pas d'effet d'écran. Si maintenant on bouche avec un bouchon conducteur le trou présenté par la surface externe du solide enfermant C, cette surface devenant simplement connexe, le flux traversant le trou bouché et le courant

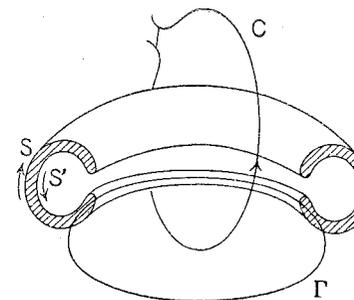


Fig. 14.

externe disparaissent et l'effet d'écran se produit. Il y a alors un phénomène irréversible corrélatif de celui qui se produit quand on met à la terre un cylindre de Faraday isolé et contenant une charge. Quand on met le bouchon, le flux à travers le trou est d'abord constant, puis étant de plus en plus resserré le champ croît tellement que le métal cesse d'être supraconducteur, du flux disparaît et quand le bouchon est mis, tout flux et tout courant ont disparu et le champ à l'extérieur est nul. Au contraire, si le bouchon est mis avant d'envoyer le courant dans C, rien d'irréversible ne se produit. On voit aisément en effet que les courants qui circulent sur la face interne se ferment en suivant le plus

court chemin au lieu d'être obligés de faire le tour comme précédemment. Si le tube se ferme tous les courants sont enfermés et aucun champ ne règne à l'extérieur. Ceci est corrélatif de ce qui se produit quand on introduit une charge dans un cylindre de Faraday déjà réuni à la terre.

L'exemple suivant montre le même phénomène dans le cas où ce serait la surface de la cavité qui ne serait plus simplement connexe et ne protégerait plus son intérieur contre les influences extérieures. Considérons une gouttière circulaire presque fermée entourant un circuit C dans lequel on peut envoyer un courant avec une machine (fig. 14). Ce courant étant envoyé considérons un contour  $\Gamma$  tracé dans le métal et appliquons le théorème d'Ampère :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{M} = 4\pi i = 0.$$

Il existe donc sur la face externe de la gouttière une nappe de courant d'intensité totale égale à celle du circuit C. Ces courants se referment par l'intérieur. Si la gouttière se ferme la face interne du tube fermé porte une nappe de courant d'intensité totale I et un champ persiste dans la cavité doublement connexe du métal. Il n'y a donc pas d'effet d'écran. Si maintenant on bouche avec un bouchon conducteur la cavité afin de la rendre simplement connexe, le courant et le champ internes disparaissent et il a effet d'écran. Si avant d'envoyer le courant dans C le bouchon est mis, la répartition des courants est modifiée, ils ne se ferment plus par l'intérieur, mais en suivant le bouchon (fig. 15). Par suite, quand la gouttière se ferme, aucun courant ni champ ne persistent à l'intérieur.

Ces deux exemples montrent qu'il est nécessaire et suffisant pour qu'il y ait effet d'écran que la surface limitant le domaine qu'on veut abriter du champ magnétique soit simplement connexe. Ils montrent également qu'il est impossible comme toujours de distinguer la cavité et l'extérieur qui

peuvent jouer tous deux le même rôle. L'intérieur et l'extérieur ne se distinguent pas comme en électrostatique. On peut remarquer que les deux exemples que nous avons donnés sont corrélatifs. En effet, dans chacun d'eux la surface qui limite l'écran conducteur a la forme d'un tube de force du champ créé par le circuit C. Tube de Faraday : dans les exemples précédents la surface S du conducteur portait un courant total égal au courant I du circuit C. Le circuit C et la nappe S' qui lui fait vis-à-vis ne produisant aucun champ sur S, la répartition du courant sur S ne dépend pas de la forme et de la position de C dans la cavité. Ces conclusions sont peu

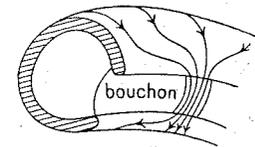


Fig. 15.

modifiées si la cavité n'est pas parfaitement fermée. On a par suite un moyen de mesurer le courant I du circuit C ayant déterminé préalablement par exemple le champ produit par la surface S quand elle porte un courant I.

Ces effets d'écran sont tout à fait analogues à ceux de l'électrostatique. Il y a cependant des différences dues à l'importance de la connexion des surfaces. Par exemple, on sait qu'il n'y a pas d'électricité sur les parois d'une cavité vide tracée dans un conducteur. Dans le cas qui nous occupe, on voit que ceci n'est vrai que si la cavité est simplement connexe. Autrement il peut très bien exister du courant sur les parois de la cavité, car on a vu que dans le cas d'une surface multiplement connexe, il existe des distributions de

courants produisant un champ nul à l'extérieur (extérieur entendu au sens habituel).

4. **Self-induction et induction mutuelle. Energie.** — Considérons un système de conducteurs fixes. Les flux sont proportionnels aux courants comme on le voit d'après le principe de la superposition des états d'équilibre, sachant que la solution est unique quand on se donne tous les courants. On a donc entre les flux et les courants des relations de la forme :

$$\varphi_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2 + \dots + L_{1n}i_n.$$

Les coefficients à double indice seront appelés coefficients de self-induction d'un conducteur mis en présence des autres, les autres seront appelés coefficients d'induction. Si un conducteur est simplement connexe le flux qui le traverse est toujours nul, par suite tous les coefficients de sa ligne disparaissent.

Nous allons montrer que le tableau de ces coefficients jouit de propriétés analogues à celles des capacités et des coefficients d'influence en électrostatique, c'est-à-dire qu'il est symétrique. Pour cela, il suffit d'appliquer la formule :

$$\begin{aligned} (\text{si } \text{div } \mathbf{p} = \text{div } \mathbf{q} = 0) \int \int \int_V (\mathbf{p} \Delta_2 \mathbf{q} - \mathbf{q} \Delta_2 \mathbf{p}) dv \\ = \int \int_S (\mathbf{p} \times \text{rot } \mathbf{q} - \mathbf{q} \times \text{rot } \mathbf{p}) nd\sigma \end{aligned}$$

à deux états du système, dont  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  sont les potentiels vecteurs, en prenant comme valeur d'intégration tout le volume  $V$  extérieur aux conducteurs. On a :

$$\Delta_2 \mathbf{p} = \Delta_2 \mathbf{q} = 0,$$

d'où :

$$\int \int (\mathbf{p} \times \text{rot } \mathbf{q} - \mathbf{q} \times \text{rot } \mathbf{p}) nd\sigma = 0,$$

d'où :

$$\int \int (\mathbf{p} \times \text{rot } \mathbf{q}) nd\sigma = \int \int (\mathbf{q} \times \text{rot } \mathbf{p}) nd\sigma$$

et on obtient en employant un raisonnement déjà utilisé :

$$\sum i_k \varphi_k = \sum i_k \varphi_k$$

identité analogue à celle de Gauss, qui montre aussitôt que  $L_{nk} = L_{kn}$ .

Nous voyons maintenant que dans un système de conducteurs simplement connexes, ces conducteurs n'introduisent aucun coefficient dans le tableau  $L_{nk}$  qui est toujours carré. Ce tableau correspond à un déterminant non nul, car on peut résoudre de façon unique le problème de la connaissance des courants, les flux étant donnés.

Pour évaluer l'énergie totale d'un système de conducteurs en équilibre, donnons-nous l'état de ce système par les flux et les courants. Considérons un état intermédiaire où les courants seraient  $\alpha i_1, \alpha i_2 \dots$  et les flux  $\alpha \varphi_1, \alpha \varphi_2 \dots$ . Si  $\alpha$  varie de  $d\alpha$ , les flux varient de  $\varphi_1 d\alpha \dots$  et la variation de l'énergie sera :

$$\sum \alpha i_k \varphi_k d\alpha.$$

En intégrant de 0 à 1 il vient :

$$W = \sum i_k \varphi_k \int_0^1 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \sum i_k \varphi_k = \frac{1}{8\pi} \int \int \int_V H^2 dv.$$

On retrouve bien que l'énergie totale du système est :

$$\int \int \int_V \frac{H^2}{8\pi} dv,$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace où règne le champ magnétique. Tous ces résultats sont évidemment corrélatifs des résultats de l'électrostatique sur l'énergie des systèmes de conducteurs électrisés. On peut également comme en

électrostatique, retrouver par la considération de l'énergie l'identité de Gauss.

**5. Transformation de l'énergie.** — Nous avons jusqu'ici considéré des systèmes de conducteurs fixes et nous avons décrit leur équilibre en nous appuyant sur le principe fondamental que  $H = 0$  dans le métal. Il convient de se demander ce qui se passe quand on déplace ou déforme réversiblement des conducteurs parcourus par des courants, et en particulier de se demander les transformations d'énergie qui s'accomplissent lors de telles modifications. Ce problème ne peut se résoudre dans le cas général, à partir des hypothèses déjà faites, sauf dans le cas de conducteurs simplement connexes, dont nous savons que l'état d'équilibre est déterminé de façon unique. Dans le cas général, il faut faire une hypothèse supplémentaire, qui est le principe de la conservation du flux, corrélatif du principe de la conservation de l'électricité introduit en électrostatique. et qu'on peut énoncer comme suit :

Si un système de conducteurs subit des modifications, le flux qui traverse un trou quelconque est constant. Ou bien : chaque fois que le flux qui traverse un circuit quelconque tend à varier, il se produit un courant qui neutralise exactement la variation de flux qui lui donne naissance.

En particulier si un conducteur est amené neutre de l'infini dans un champ, le flux qui le traverse est toujours nul. Le courant provoqué par le champ disparaît quand on écarte le conducteur du champ. Si le conducteur n'est pas initialement neutre, le flux reste simplement constant.

Avec cette hypothèse supplémentaire de la conservation du flux on peut calculer et prévoir entièrement les transformations d'énergie dans un système, en développant des calculs tout à fait analogues à ceux de l'électrostatique. Par exemple, on peut calculer les forces auxquelles sont soumis les conducteurs en fonction de leur énergie  $W$ . Si on consi-

dère une modification infiniment petite  $dx$  du conducteur, et s'il n'y a aucune relation électrique entre les conducteurs et le milieu extérieur, la variation  $dW$  de l'énergie est égale et opposée au travail mécanique  $Fdx$ , d'où :

$$Fdx = -dW \quad F = -dW/dx.$$

Mais si ce sont les courants qui restent constants pendant la déformation infiniment petite, il faut tenir compte de l'énergie mise en jeu pour assurer cette constance. On a alors :

$$dW = \frac{1}{2} d(i\varphi) = \frac{1}{2} id\varphi \quad id\varphi = \frac{1}{2} id\varphi + Fdx.$$

D'où :

$$F = +dW/dx.$$

Faisons une application de ces propriétés pour retrouver la pression magnétostatique. Dilatons infiniment peu un conducteur à courants constants et supposons que la deuxième figure du conducteur soit un tube de force du champ créé par la première. Le courant étant constant, le champ créé par le conducteur ne varie pas malgré sa déformation, et la variation  $dW$  de l'énergie s'obtient en considérant qu'un volume contenant un champ  $H$  est maintenant vide de champ, d'où :

$$dW = \int \int \int \frac{H^2}{8\pi} dv.$$

On voit tout de suite que cette variation, d'après la formule  $Fdx = dW$  puisque les courants sont constants, peut se représenter comme le travail de forces de pression normales, dirigées vers l'intérieur du conducteur, et égales à  $2\pi i^2 = H^2/8\pi$ . Nous retrouvons bien la pression magnétostatique calculée précédemment.

On peut tirer diverses autres conséquences de ces considérations énergétiques, et en particulier imaginer des mécanismes transformant l'énergie mécanique en énergie magné-

tique. Soit par exemple un circuit conducteur filiforme, de self  $L$ , traversé par un flux  $\varphi$ . Si on déforme ce circuit, la self varie le flux restant constant, par suite comme l'énergie  $W$  tend à être minimum, et que  $W = i/2\varphi^2/L$ , on voit que le circuit se déforme spontanément de façon que sa self soit maximum. Dans le cas de circuits filiformes, on voit que la self augmente quand l'aire embrassée par le circuit augmente, par suite cette aire tend à croître indéfiniment. Pour faire varier réversiblement cette aire il faudra engager un travail mécanique qui représentera la variation d'énergie

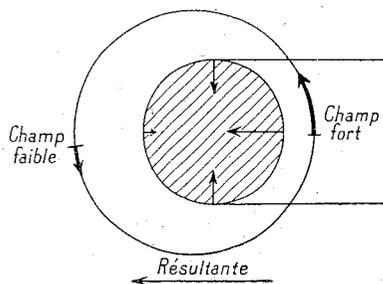


Fig. 16.

magnétique du circuit. Il y aura eu transformation réversible de l'énergie magnétique en énergie mécanique. On peut expliquer autrement la tendance qu'a le circuit à augmenter d'aire en considérant les forces magnétostatiques qui s'exercent sur sa surface. Dans le cas d'un fil assez fin on voit que ce fil peut être considéré comme tube de force d'un champ magnétique créé par un fil de diamètre nul, et on voit facilement que la densité de courant est maxima aux points où les courbures de la surface du fil sont opposées, ce qui montre que les forces de pression magnétostatiques tendront à augmenter l'aire (fig. 16).

6. Machines magnétostatiques à influence. Forces développées. — 1° Attractions et répulsions magnétostatiques. —

Quand on approche un corps électrisé d'un conducteur ordinaire, les charges qui s'y développent par influence sont soumises à des forces, de même lorsqu'on approche un aimant d'un supraconducteur, celui-ci se trouve soumis à des forces.

Prenons le cas simple d'un conducteur simplement connexe auquel on présente un pôle d'aimant. Il est facile de voir que le champ magnétique au voisinage du conducteur est plus grand dans les zones les plus proches de l'aimant, et par suite la pression magnétostatique y étant plus forte, l'aimant exercera une répulsion sur le conducteur. Cet effet peut se retrouver en considérant que le conducteur est analogue à un corps infiniment diamagnétique de perméabilité nulle, qui doit par suite être repoussé par les aimants. D'une façon générale les supraconducteurs sont repoussés par les champs magnétiques de même que les conducteurs sont attirés par les champs électriques. Il se produit des phénomènes plus compliqués si les conducteurs ont des trous. Par exemple un anneau approché d'un pôle d'aimant sera énergiquement repoussé, car afin que le flux à travers le trou reste nul, il se développe un courant total non nul sur l'anneau qui fait apparaître un pôle de même nature que le pôle présenté en face de lui et est par suite repoussé. La répulsion est beaucoup plus faible, si l'anneau a été préalablement coupé, puisque le courant total est nul, elle est négligeable, si l'anneau est suffisamment filiforme. Si l'anneau est fermé devant le pôle, il se trouvera attiré par lui dès qu'on tentera de l'en éloigner, car il s'y développera un courant pour maintenir le flux constant qui transformera l'anneau en un aimant attiré par le pôle. Ces attractions et répulsions sont analogues aux attractions et répulsions électriques subies par des conducteurs reliés ou non à la terre. Mais il y a lieu de remarquer quelques différences : par exemple il pourra exister des positions d'équilibre stables pour un anneau présenté à un aimant, alors qu'il n'y en aurait pas pour une sphère conductrice présentée à une charge.

2° *Création de flux par influence.* — Considérons un anneau coupé, la coupure étant très étroite. Si cet anneau est placé dans le champ d'un aimant, il est parcouru par des courants de façon que le champ à l'intérieur soit nul. Comme la coupure est très étroite, on voit facilement que la solution de l'équilibre de cet anneau (qui est unique, l'anneau coupé étant simplement connexe) est très voisine de la solution de l'équilibre de l'anneau non coupé, le courant total traversant une section de l'anneau étant nul. Ce courant total nul induit

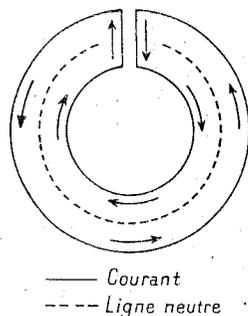


Fig. 17.

un flux négligeable dans le trou de l'anneau, qui est par suite traversé par le flux qu'y envoie l'aimant. Si les deux lèvres de la coupure se rapprochent indéfiniment et se touchent, l'état d'équilibre de l'anneau est infiniment peu modifié et on a un anneau fermé traversé par un flux non nul. Il convient de remarquer que les courants qui circulent sur les lèvres de la coupure sont de sens inverses et ils ne produisent par suite qu'un champ négligeable dans le métal (fig. 17). L'anneau peut être éloigné de l'aimant, il enferme toujours le même flux et finalement on a un anneau isolé enfermant un flux. Par suite en partant d'un anneau vide de flux, on peut faire en sorte qu'il contienne un flux, en le coupant, l'approchant d'un aimant en cet état, le fer-

mant, et l'éloignant de l'aimant. Cette suite d'opérations, qui crée un flux par influence est corrélative de celle qu'on fait pour charger un conducteur d'électricité par influence. On l'approche relié à la terre d'une charge statique, on l'isole de la terre, puis on l'éloigne et il reste chargé.

La fermeture et l'ouverture de l'anneau peuvent être réalisées en prenant un anneau coupé d'un métal A et en soudant les deux lèvres de la coupure avec un métal B qui perd sa supraconductibilité plus tôt que A par échauffement. En chauffant ou refroidissant légèrement l'anneau maintenu au voisinage du point de transition de B on réalise son ouverture ou sa fermeture. On peut également obtenir un anneau traversé par un flux en refroidissant un anneau homogène en présence d'un aimant. Quand l'anneau devient supraconducteur, le flux qui le traverse reste différent de zéro. Ce résultat ne saurait être déduit de nos hypothèses, mais on doit remarquer qu'il en découle si on fait la supposition que la supraconductibilité de l'anneau ne s'établit pas en tous les points au même moment. En tout cas ce fait est prouvé par l'expérience, en particulier par la persistance du flux magnétique dans la masse d'un conducteur, persistance qu'on a reconnue due à la présence d'anneaux supraconducteurs multiples dans une masse non supraconductrice.

Les procédés que nous venons de décrire permettent donc de créer du flux magnétique par influence.

3° *Machines magnétostatiques.* — Une machine magnétostatique se composera de trois parties fondamentales comme les machines électrostatiques :

- a) Un producteur, qui sera par exemple un aimant produisant un champ rigide ;
- b) Un transporteur, formé de circuits mobiles dans lesquels le producteur produit du flux par influence ;
- c) Un collecteur, circuit fixe dans lequel le flux apporté par le transporteur s'accumule. Enfin un système de distribution analogue à celui des pompes, automatique ou non,

permet de réaliser le refoulement du flux dans le collecteur au moment favorable et l'empêche de s'échapper pendant le reste du temps. Naturellement, les machines seront réversibles et si le collecteur est chargé de flux, si on admet par une distribution convenable ce flux dans le transporteur, il se mettra à se mouvoir en sens inverse du sens générateur, sous l'influence des forces magnétiques.

La figure 18 représente une machine où le transporteur

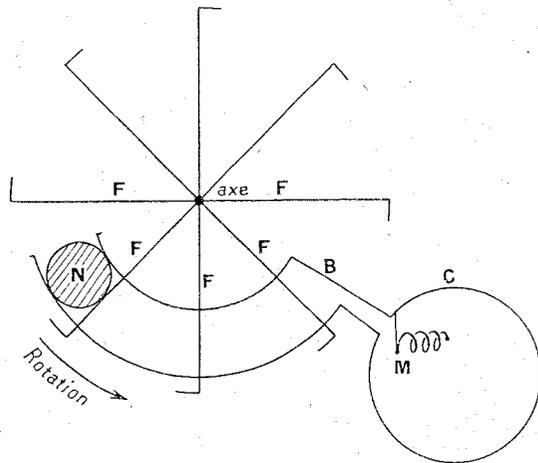


Fig. 18.

est constitué par des fils glissant sur deux rails circulaires, et formant avec eux des circuits fermés. Ces circuits se ferment devant le pôle d'aimant N, et emportent un flux. Quand ils se sont éloignés de N, leur aire est contractée dès qu'un des fils qui les limitent dépasse la barre limite B. Alors les forces auxquelles est soumis le conducteur mobile M croissent, et finissent par surpasser celles dues au courant circulant dans le collecteur C. Alors le conducteur mobile se soulève et le flux passe réversiblement dans le collecteur. Le conducteur mobile M joue le rôle d'une soupape automatique,

et la machine est analogue à une pompe comprimant un fluide dans un récipient. Comme dans toutes les machines l'énergie potentielle magnétique accumulée dans le collecteur vient de la transformation du travail mécanique nécessaire pour faire marcher la machine. En effet, il faut vaincre l'attraction de l'aimant sur les circuits qui s'éloignent de lui, et la répulsion du collecteur sur ces circuits. Quand on réduit l'aire d'un circuit pour refouler son flux dans le collecteur, il faut vaincre les forces magnétostatiques qui tendent à augmenter l'aire. Comme dans les machines

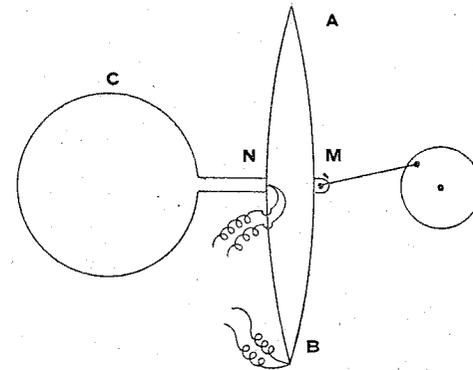


Fig. 19.

électrostatiques, la quantité de flux qu'on peut refouler dans le collecteur est limitée, car quand le champ magnétique au voisinage du métal dépasse une certaine valeur, celui-ci cesse d'être supraconducteur, et du flux est perdu, de même que dans les machines électrostatiques, l'augmentation du champ électrique produit des fuites qui limitent la charge atteinte par le collecteur.

La machine peut être transformée en machine motrice, en remplaçant la soupape automatique par une soupape commandée par un mécanisme convenable pouvant quand un fil F vient de dépasser B. La soupape doit rester ouverte le

temps juste nécessaire pour admettre dans le circuit mobile un flux tel que lorsque le circuit mobile s'ouvrira devant l'aimant, il ne soit traversé par aucun courant, de telle sorte qu'aucune énergie ne sera perdue. La machine est alors analogue à un moteur à gaz comprimé.

On peut également concevoir une machine où il n'y ait pas de contact glissant, et par suite plus réalisable (fig. 19). Dans cette machine le circuit conducteur déformable est formé de deux arcs AB' soudés en A et B. Le milieu N de l'un des arcs est fixe, et celui de l'autre peut exécuter un mouvement alternatif par un système de bielle et de manivelle. La surface du circuit déformable peut donc varier périodiquement. Ce circuit qui est le transporteur est muni en B d'une soupape d'aspiration du flux, qui peut être une résistance chauffante interrompant à volonté la supraconductivité du métal. Derrière ce circuit est un pôle d'aimant, le producteur. Enfin de part et d'autre de N sont soudés deux conducteurs aboutissant au collecteur C. En N, le circuit AMNB peut être ouvert ou fermé par une soupape de refoulement du flux. On comprend aisément le fonctionnement : quand l'aire du circuit augmente la soupape d'aspiration est ouverte et celle de refoulement fermée, et le flux du producteur est aspiré à l'intérieur. Quand l'aire diminue, la soupape se ferme, et le flux est emprisonné et comprimé. Quand la compression est telle que le courant circulant dans le circuit AMNB égale celui du collecteur C, la soupape de refoulement s'ouvre et le flux est refoulé dans le collecteur. Le fonctionnement des soupapes peut être réalisé par des résistances chauffantes, le courant étant envoyé dans ces résistances par des contacts manœuvrés par l'arbre manivelle.

7. Equilibre d'un système de conducteurs plongés dans un milieu magnétique infini. — De même qu'en électrostatique on est amené à étudier l'équilibre de conducteurs plongés

dans un milieu diélectrique, de même nous allons étudier l'équilibre de supraconducteurs plongés dans un milieu autre que le vide. Pour cela il faut une hypothèse supplémentaire sur la façon dont le champ magnétique développe dans le milieu des courants qui le modifieront.

Dans le cas le plus général, le milieu devient le siège de courants particuliers qui équivalent à une aimantation  $\mathbf{I}$ . Le potentiel-vecteur créé par cette aimantation est :

$$d\mathbf{F} = -\text{grad} (1/r) \times \mathbf{I} dv.$$

L'induction magnétique  $\mathbf{H}$  sera  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{F}$ , comme :

$$\mathbf{F} = \iiint -\text{grad} (1/r) \times \mathbf{I} dv,$$

et qu'on a :

$$\begin{aligned} \text{rot} \left( \frac{1}{r} \mathbf{I} \right) &= \frac{1}{r} \text{rot } \mathbf{I} + \left( \text{grad} \frac{1}{r} \right) \times \mathbf{I}. \\ \mathbf{F} &= \iiint -\text{rot} \left( \frac{1}{r} \mathbf{I} \right) dv + \iiint \frac{1}{r} \text{rot } \mathbf{I} dv \\ &= \iint \frac{1}{r} (-\mathbf{n} \times \mathbf{I}) d\sigma + \iiint \frac{1}{r} \text{rot } \mathbf{I} dv. \end{aligned}$$

Par suite  $\mathbf{F}$  sera le potentiel de courants en volume de densité  $\text{rot } \mathbf{I}$ , et superficiels de densité  $-\mathbf{n} \times \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{n}$  étant la normale extérieure au volume  $V$  d'intégration. Le rotationnel de l'induction  $\mathbf{H}$  qui est nul dans le vide est ici différent de zéro et égal à  $4\pi \text{rot } \mathbf{I}$ , de même que les diélectriques  $\text{div } \mathbf{E} = -4\pi \text{div } \mathbf{P}$ ,  $\mathbf{P}$  étant la polarisation corrélative de  $\mathbf{I}$ . On voit qu'on est amené à introduire le vecteur  $\mathbf{A} = \mathbf{H} - 4\pi\mathbf{I}$ , corrélatif de l'induction électrostatique tel que  $\text{rot } \mathbf{A} = 0$ . Ce vecteur  $\mathbf{A}$  est appelé ordinairement champ magnétique.

Si le milieu magnétique est parfait, ce qui est le cas de tous les milieux sauf les corps ferromagnétiques, nous pourrions supposer que l'aimantation est proportionnelle à l'induction  $\mathbf{I} = k\mathbf{H}$ ,  $k$  étant une constante du milieu.  $\mathbf{A}$  sera

aussi proportionnel à  $\mathbf{H}$  et on aura  $\mathbf{A} = \rho \mathbf{H}$  ( $\rho = \frac{1}{\mu} = 1 - 4\pi k$ ). Nous appellerons la constante pouvoir inducteur magnétique, corrélatif du pouvoir inducteur spécifique de l'électrostatique.

Étudions maintenant l'équilibre d'un système de conducteurs plongés dans un milieu magnétique infini de perméabilité  $\mu = \frac{1}{\rho}$ .

Dans nos hypothèses, les courants en volume  $\mathbf{I}$  sont nuls, puisque  $\mathbf{l}$  est proportionnel à  $\mathbf{A}$  et  $\text{rot } \mathbf{A} = 0$ . Par suite, il n'y aura lieu de tenir compte que des courants superficiels de densité  $-\mathbf{v} \times \mathbf{l}$ ,  $\mathbf{v}$  étant la normale extérieure au volume magnétique. Le champ au voisinage du conducteur sera produit par la somme des deux courants  $\mathbf{i}$ , circulant sur le conducteur, et  $\mathbf{i}'$  produit par l'aimantation d'où  $\mathbf{H} = 4\pi(\mathbf{i} + \mathbf{i}') \times \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}$  normale extérieure au conducteur.

$$\mathbf{H} = 4\pi \mathbf{i} \times \mathbf{n} + 4\pi \mathbf{i}' \times \mathbf{n}$$

comme :

$$\mathbf{i}' = -\mathbf{v} \times \mathbf{l} = \mathbf{n} \times \mathbf{l}; \quad \mathbf{i}' \times \mathbf{n} = (\mathbf{n} \times \mathbf{l}) \times \mathbf{n} = \mathbf{l},$$

d'où :

$$\mathbf{H} = 4\pi \mathbf{i} \times \mathbf{n} + 4\pi \mathbf{l}$$

ou :

$$\mathbf{A} = \mathbf{H} - 4\pi \mathbf{l} = 4\pi \mathbf{i} \times \mathbf{n}.$$

On a par suite  $\mathbf{i} + \mathbf{i}' = \mathbf{i}/\rho$ , c'est-à-dire qu'on peut énoncer l'effet du milieu magnétique comme suit :

L'équilibre du système de conducteurs est le même que dans le vide mais si les mêmes courants circulent sur les conducteurs, l'induction est  $\rho$  fois plus petite que dans le vide.

Par suite les flux seront divisés par  $\rho$ , de même les coefficients de self-induction et d'induction mutuelle.

Énergie : l'énergie est toujours  $W = \frac{1}{2} \Sigma i\phi$ ,  $i$  étant le cou-

rant circulant sur le conducteur autour du trou traversé par le flux  $\phi$  de l'induction  $\mathbf{H}$ . Comme ici  $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ , puisque  $\mathbf{H}$  est proportionnel à  $\mathbf{A}$ , on a :

$$\text{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H}^2,$$

et :

$$\iiint \mathbf{H}^2 dv = \iiint \text{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{H}) dv = \iint \mathbf{n} \mathbf{F} \mathbf{H} d\sigma.$$

On a toujours  $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{M} = \phi$  mais  $\mathbf{H} = \frac{4\pi}{\rho} \mathbf{i} \times \mathbf{n}$  ce qui fait :

$$\iiint \mathbf{H}^2 dv = \frac{4\pi}{\rho} \Sigma i\phi.$$

On a donc :

$$W = \frac{1}{2} \Sigma i\phi = \iiint \frac{\rho}{8\pi} \mathbf{H}^2 dv.$$

On doit remarquer la corrélation entre ces résultats et ceux sur les conducteurs électrisés plongés dans un diélectrique parfait (potentiels  $K$  fois plus petits, à charges égales, énergie :

$$W = \iiint \frac{1}{8\pi} \mathbf{K} \mathbf{E}^2 dv,$$

$\mathbf{K}$  étant le pouvoir inducteur spécifique). Il faut remarquer que le théorème d'Ampère et les théorèmes qui s'y rattachent (champ au voisinage d'un conducteur) s'appliquent ici à  $\mathbf{A}$  et non  $\mathbf{H}$ , de même qu'en électrostatique le théorème de Gauss s'applique à l'induction et non au champ. On a au contraire :

$$\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} = 4\pi i/\rho; \quad \mathbf{H} = \frac{4\pi}{\rho} \mathbf{i} \times \mathbf{n}.$$

Enfin on voit par les formules telles que  $\mathbf{F} = -dW/dx$ , donnant les forces auxquelles sont soumis les conducteurs, que les forces sont  $\rho$  fois plus petites que dans le vide. Cette proposition n'est évidemment vraie que pour les conducteurs

en équilibre, et est fautive pour des aimants, par exemple, qui ne le sont pas. Les forces sont particulièrement grandes dans le cas de milieux ferromagnétiques, pour lesquels  $\rho$  est très petit. Les conducteurs étant imperméables aux flux sont caractérisés par  $\rho = \infty$  de même qu'en électrostatique ils le sont par  $K = \infty$ .

Nos hypothèses permettent donc de décrire entièrement l'équilibre des supraconducteurs, et montrent son analogie remarquable avec l'équilibre électrostatique. Même si les supraconducteurs réels ne montraient pas tous les phénomènes que nous avons prévus, il n'en reste pas moins que ces hypothèses correspondent au cas le plus simple de champ magnétique, celui où les systèmes sont en équilibre, où toutes les transformations sont réversibles et où il n'y a aucune énergie contenue dans la matière. Nous avons vu quelle remarquable corrélation il y a entre les propriétés de ce champ magnétique statique et du champ électrique statique, corrélation conforme à la symétrie fondamentale de ces deux champs dans le vide, telle que la résumant les équations de Maxwell.

## DEUXIÈME PARTIE

### Du mouvement des supraconducteurs.

Nous avons vu qu'on peut décrire entièrement l'équilibre et les mouvements réversibles des conducteurs (supraconducteurs) à partir de l'hypothèse que  $H = 0$  dans le métal, en y ajoutant dans certains cas le principe de la conservation du flux, qui n'est autre qu'une expression de la loi de l'induction.

Il convient de se demander comment on pourra décrire le mouvement le plus général d'un système de conducteurs, à partir d'hypothèses généralisant celles faites dans le cas statique. Afin d'écrire des équations intrinsèques, et de ramener ce problème de mouvement à un problème de géométrie pure, nous adopterons le point de vue de la relativité restreinte. Dans ces conditions l'hypothèse qui généralise celle que nous avons faite dans le cas statique est que le tenseur  $H$  qui décrit le champ électromagnétique est nul dans le métal, c'est-à-dire en tout point de l'espace temps où se trouve le métal. Dans ces conditions, l'hypervolume occupé par le métal, c'est-à-dire la suite des positions du métal dans l'espace et le temps, étant donné, on peut développer ce problème à quatre dimensions d'une façon corrélatrice de celle dont on développe le problème de l'équilibre électrique ou magnétique, et il y a un parfait parallélisme entre les propriétés des conducteurs en mouvement, c'est-à-dire en régime variable, et les propriétés de ces conducteurs en état statique, à condition d'adopter notre manière de voir.

Les propriétés que nous serons amenés à prévoir pour les

supraconducteurs sont dans beaucoup de cas très analogues aux propriétés des conducteurs ordinaires, quand le champ a des variations très rapides. Ceci ne doit pas nous amener à penser que leurs comportements puissent être considérés comme identiques. Ils sont assurément identiques, quand il s'agira de la réflexion d'ondes planes électromagnétiques, mais si nous diminuons indéfiniment la résistance d'un conducteur et cherchons l'état limite d'après les lois ordinaires de la conductibilité, on verra qu'elle dépend du chemin suivi.

Nous ferons quelques applications de nos résultats à quelques phénomènes élémentaires dans les supraconducteurs, où le champ électrique et le champ magnétique sont réunis.

Nous allons d'abord établir quelques résultats utiles pour la suite :

1. **Expressions du potentiel et du champ.** — Suivant le point de vue de la relativité restreinte, et prenant par suite des coordonnées euclidiennes ( $g_{\mu\nu} = 0$  si  $\mu \neq \nu$ ,  $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ ,  $g_{44} = 1$ ), nous appellerons selon l'usage potentiel le vecteur  $F$  dont les trois composantes d'espace changées de signe sont celles du potentiel-vecteur magnétique, et celle de temps celle du potentiel scalaire électrique. On sait que le tenseur champ électromagnétique est le rotationnel de ce vecteur,  $H_{\mu\nu} = \text{rot } F_\nu$  ou  $H_{\mu\nu} = \frac{\partial F_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial F_\nu}{\partial x^\mu}$ . Le courant sera le vecteur dont les trois composantes d'espace sont la densité de courant usuelle, et la composante de temps la densité de charge. On sait qu'on a  $\text{div } i^\mu = 0$ , c'est-à-dire :  $\frac{\partial i^\mu}{\partial x^\mu} = 0$  et  $\text{div } F^\mu = 0$ .

Proposons nous maintenant de mettre le potentiel sous une forme corrélatrice de celle usuelle en électricité pour le potentiel vecteur magnétique :

$$\mathbf{F} = \iiint \frac{i dv}{r}$$

Nous allons essayer une expression de forme :

$$F^\mu = \iiint \frac{i^\mu d\omega}{r^2}$$

$d\omega$  désignant l'élément d'espace-temps, et :

$$r^2 = -(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 + (x^4)^2 \quad x^4 = ct \quad t \text{ temps.}$$

Remarquons d'abord que dans cette formule, où le temps joue le même rôle que les longueurs, il ne saurait être question d'intégrer le temps réel, car on arriverait à faire

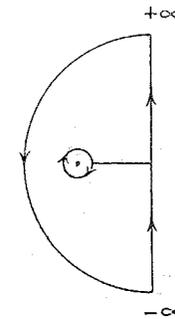


Fig. 20.

dépendre le potentiel actuel de causes postérieures, ce qui ne saurait s'admettre. D'ailleurs on sait que le temps n'est pas équivalent à une longueur réelle, mais à une longueur imaginaire. Nous intégrerons donc le long de l'axe imaginaire. Cherchons maintenant le potentiel créé à l'instant  $O$ , au point origine des coordonnées, par une quelconque distribution d'électricité. Nous avons à évaluer l'intégrale :

$$F^\mu = \iiint \frac{i^\mu (x^1 x^2 x^3 x^4) dx^1 dx^2 dx^3 dx^4}{r^2}$$

Comme les limites d'intégration du temps ( $-\sqrt{-1}\infty$ ;  $+\sqrt{-1}\infty$ ) sont fixes, on a :

$$F^\mu = \iiint dx^1 dx^2 dx^3 \int_{-\sqrt{-1}\infty}^{+\sqrt{-1}\infty} \frac{i^\mu (x^1 x^2 x^3 dx^4)}{r^2}$$

Nous avons donc à évaluer :

$$\int_{-\sqrt{-1}\infty}^{+\sqrt{-1}\infty} \frac{i^\mu (x^1 x^2 x^3 dx^4)}{(x^1)^2 - d^2} d^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

On emploie le contour figuré (fig. 20), on voit que le pôle étant  $x^4 = -d$  l'intégrale est  $\frac{\pi i^\mu}{\sqrt{-1}}$ , car le résidu est  $-\frac{i^\mu}{2d}$ .

Par suite l'intégrale donnant le potentiel sera :

$$F^\mu = \iiint \frac{\pi}{\sqrt{-1}} \frac{i^\mu (x^1, x^2, x^3, -d)}{d} dx^1 dx^2 dx^3;$$

comme  $x^4 = -d$ , on a en employant le temps  $t$  :

$$t = -\frac{d}{c} F^\mu = \frac{\pi}{\sqrt{-1}} \iiint \frac{i^\mu [x^1, x^2, x^3, -d/c] dx^1 dx^2 dx^3}{d}$$

Par suite en prenant :

$$F^\mu = \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \iiint \frac{i^\mu d\omega}{r^2}$$

on retrouve le potentiel retardé de Lorenz :

$$\mathbf{F} = \iiint \frac{\mathbf{i} \left( x, y, z, -\frac{d}{c} \right)}{d}$$

et le potentiel  $F$  peut bien être mis sous la forme :

$$F^\mu = \iiint \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \frac{i^\mu d\omega}{r^2}$$

qui est la forme que nous cherchions. Par suite  $F$  satisfait dans le vide à l'équation :

$$-\frac{\partial^2 F^\mu}{(\partial x^1)^2} - \frac{\partial^2 F^\mu}{(\partial x^2)^2} - \frac{\partial^2 F^\mu}{(\partial x^3)^2} + \frac{\partial^2 F^\mu}{(\partial x^4)^2} = 0 \quad \text{ou} \quad g^{\rho\sigma} \frac{\partial^2 F^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} = 0$$

car :

$$g^{\rho\sigma} \frac{\partial^2}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} = 0$$

nous retrouvons bien la propagation des potentiels retardés.

Le tenseur champ  $H_{\mu\nu} = \text{rot } F_\mu$ , pourra se mettre sous la forme généralisant la loi de Laplace :

$$H_{\mu\nu} = \frac{\partial F_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial F_\nu}{\partial x^\mu} = i_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - i_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Calculons maintenant  $\text{div } H^{\mu\nu} = \frac{\partial H^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}$ . On a :

$$H^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} H_{\alpha\beta} \quad H^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \left[ \frac{\partial F_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial F_\beta}{\partial x^\alpha} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{div } H^{\mu\nu} &= g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \left[ \frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\beta} - \frac{\partial^2 F_\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} \right] \\ &= g^{\nu\beta} \frac{\partial^2 F^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\beta} - g^{\mu\alpha} \frac{\partial^2 F^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} \end{aligned}$$

$$\text{div } H^{\mu\nu} = g^{\nu\beta} \frac{\partial^2 F^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\beta} - g^{\mu\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial F^\nu}{\partial x^\nu} \right);$$

comme  $\frac{\partial F^\nu}{\partial x^\nu} = \text{div } F^\nu = 0$  :

$$\text{div } H^{\mu\nu} = g^{\nu\beta} \frac{\partial^2 F^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\beta};$$

par suite on a :  $\frac{\partial H^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = g^{\nu\beta} \frac{\partial^2 F^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\beta}$  ce qu'on pourra écrire

$\text{div } H^{\mu\nu} = \square F^\nu$ , équation manifestement corrélatrice de celle à laquelle satisfait le potentiel magnétique dans le cas statique :  $\Delta_2 \mathbf{F} = -\text{rot } \mathbf{H}$ .

Il nous reste à calculer  $\text{div } H^{\mu\nu}$ . Si on se trouve en dehors de tout courant, le potentiel  $F$  satisfait comme on l'a vu à  $g^{\nu\beta} \frac{\partial^2 F^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\beta} = \square F^\mu = 0$ , par suite  $\text{div } H^{\mu\nu} = 0$ . Si on se trouve dans une zone contenant un courant  $i \neq 0$ , on ne peut plus dériver sans précaution sous le signe  $\int$ . Divisons alors l'espace temps d'intégration en deux parties, une sphère infiniment petite de volume  $\omega$ , et le reste. Ce reste produit un champ dont la divergence est nulle, nous n'aurons pas à nous en occuper. En ce qui concerne le champ produit par les courants intérieurs à la sphère, nous aurons :

$$\int \int \int \text{div } H^{\mu\nu} d\omega = \int \int \int n_\nu H^{\mu\nu} dv,$$

$d\omega$  étant l'élément de volume de la sphère (hypersphère) et  $dv$  son élément de surface.

Pour calculer l'intégrale  $\int \int \int n_\nu H^{\mu\nu} dv$  commençons par considérer le cas d'un courant  $I$  localisé au centre de la sphère.

Nous aurons :

$$\begin{aligned} \int \int \int \text{div } H^{\mu\nu} d\omega &= \int \int \int g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} H_{\alpha\beta} n_\nu dv \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \int \int \int g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \left[ I_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{1}{r^2} - I_\beta \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{1}{r^2} \right] n_\nu dv \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \int \int \int I^\mu n^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{1}{r^2} dv - \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \int \int \int g^{\mu\alpha} I^\nu n_\nu \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{1}{r^2} dv. \end{aligned}$$

Nous pouvons supposer que l'origine est au centre de la sphère. On voit alors que la 2<sup>e</sup> intégrale est nulle par sa symétrie et il reste seulement :

$$\int \int \int I^\mu n^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{1}{r^2} dv = \int \int \int I^\mu n^\beta \left( -\frac{2}{r^3} \right) g_{\alpha\beta} x^\alpha dv,$$

comme  $n^\beta = \frac{x^\beta}{r}$ , il vient :

$$\int \int \int -\frac{2}{r^3} g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta I^\mu dv = \int \int \int -\frac{2}{r^2} I^\mu dv = I^\mu \int \int \int -\frac{2dv}{r^3}.$$

Avant d'évaluer il faut remarquer que  $x^4$  est imaginaire pur. Pour opérer avec des quantités réelles posons  $x^4 = \sqrt{-1}\theta$ , avec les coordonnées  $x^1 x^2 x^3 \theta$ , nous aurons un élément  $dv$  tel que  $dx^1 dx^2 dx^3$  soit équivalent à  $n'_4 dv'$  :

$$n'_4 = g_{44} \frac{x^4}{r} = \frac{\sqrt{-1}\theta}{\sqrt{-1} \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + \theta^2}} = \frac{\theta}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + \theta^2}}$$

et  $r^3 = [\sqrt{-1}]^3 [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + \theta^2]$ , comme  $dv'$  est réel

$$\int \frac{dv}{r^3} = \frac{2\pi^2}{-\sqrt{-1}}$$

car la surface de l'hypersphère  $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + \theta^2 = 1$  est  $2\pi^2$ .

Par suite :

$$\int \int \int \text{div } H^{\mu\nu} d\omega = \frac{\sqrt{-1}}{\pi} (-2) \frac{2\pi^2}{-\sqrt{-1}} I^\mu = 4\pi I^\mu;$$

remarquons que ce résultat ne dépend pas du point de l'intérieur de la sphère où est localisé le courant  $I$ , puisque le flux étant conservatif en dehors de courants, le flux à travers la sphère est le même, quelle que soit la position du courant  $I$  à l'intérieur de la sphère. Si maintenant il y a à l'intérieur de la sphère des courants  $i$  répartis dans un volume  $\Omega$  on aura :

$$\int \int \int \text{div } H^{\mu\nu} d\omega = \int \int \int n_\nu H^{\mu\nu} dv = \int \int \int \int 4\pi i^\mu d\omega,$$

$i^\mu$  étant maintenant la densité de courant. Revenant au problème qui nous occupe, nous voyons que si la sphère est

assez petite, dans son intérieur la densité de courant est constante. Nous aurons :

$$\iiint \operatorname{div} H^{\mu\nu} d\omega = \iiint 4\pi i^\mu d\omega$$

les deux intégrales étant étendues au volume de la sphère. Comme dans son intérieur puisqu'elle est assez petite  $\operatorname{div} H^{\mu\nu}$  et  $4\pi i^\mu$  sont constants, on a :  $\operatorname{div} H^{\mu\nu} = 4\pi i^\mu$ .

Nous obtenons finalement :

$$\boxed{\operatorname{div} H^{\mu\nu} = 4\pi i^\nu}$$

ce qui est une équation bien connue. Par suite, on a également :  $\square F^\nu = \operatorname{div} H^{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} \frac{\partial^2 F^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} = 4\pi i^\mu$ , équation qui exprime la propagation des potentiels retardés dans une région où il y a du courant.

Terminons en calculant de façon corrélatrice à ce que nous avons vu dans l'équilibre des conducteurs, le champ créé par un hyperplan recouvert d'une couche de courant uniforme, c'est-à-dire par un plan ordinaire en translation rectiligne uniforme, uniformément couvert de charge et de courant :

$$H_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \iiint \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} i_\nu - \frac{\partial}{\partial x^\nu} i_\mu \right) dv$$

( $i^\mu$  densité superficielle)

$$\begin{aligned} n^\nu H_{\mu\nu} &= \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \iiint \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} n^\nu i_\nu - \frac{\partial}{\partial x^\nu} n^\nu i_\mu \right) dv \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \iiint -\frac{\partial}{\partial x^\nu} n^\nu i_\mu dv = \frac{\sqrt{-1}}{\pi} i_\mu \iiint -\frac{\partial}{\partial x^\nu} n^\nu dv \end{aligned}$$

( $n^\nu$  normale,  $n^\nu i_\nu = 0$ ).

Pour calculer :

$$\iiint -\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{1}{r^2} n^\nu dv$$

remarquons que puisque :

$$\square \frac{1}{r^2} = g^{\rho\sigma} \frac{\partial^2}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \frac{1}{r^2} = 0 \quad \operatorname{div} \left( \operatorname{grad} \frac{1}{r^2} \right) = \square \frac{1}{r^2} = 0$$

le flux de  $\operatorname{grad} \frac{1}{r^2}$  est conservatif. On peut remplacer pour le calcul de :

$$\iiint -\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{1}{r^2} n^\nu dv$$

l'hyperplan par une hypersphère centrée sur le point où on calcule le champ. On aura alors à calculer :

$$\begin{aligned} \iiint \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{1}{r^2} n^\nu dv \quad (n^\nu \text{ normale à la sphère}) \\ = \iiint -\frac{2}{r^3} dv = \frac{2\pi^2}{+\sqrt{-1}} \end{aligned}$$

car la moitié seulement de l'hypersphère intervient. Donc :

$$n^\nu H_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \frac{2\pi^2}{\sqrt{-1}} = 2\pi i^\mu.$$

Pour avoir une autre expression de H évaluons l'intégrale :

$$\iiint \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{1}{r^2} dv,$$

cette intégrale représente un vecteur  $u_\mu$ . Pour trouver ce vecteur supposons que le pied de la perpendiculaire abaissée

du point fixe sur le plan soit l'origine et soit  $\xi^\mu$  un vecteur du plan :

$$u_\mu \xi^\mu = \int \int \int \xi^\mu \frac{\lambda}{r^3} dv = \int \int \int \xi^\mu \text{grad} \frac{1}{r^2} dv,$$

cette intégrale est évidemment nulle à cause de sa symétrie et on a  $u_\mu \xi^\mu = 0$  ce qui montre que  $u = \lambda n$ ,  $\lambda$  constante et  $H_{\mu\nu} = \lambda(i_\mu n^\nu - i_\nu n^\mu)$ , le résultat précédent  $n^\nu H_{\mu\nu} = 2\pi i_\mu$  montre  $\lambda = 2\pi$ .

Nous obtenons finalement le résultat suivant, évidemment corrélatif de celui du cas statique :

$$H_{\mu\nu} = 2\pi(i_\mu n_\nu - i_\nu n_\mu) \quad n_\nu H^{\mu\nu} = 2\pi i^\mu,$$

$n_\nu$  normale unitaire dirigée à l'opposé de l'observateur.

## 2. Premières propriétés des conducteurs en mouvement. —

1° Le courant et la charge sont purement superficiels. En effet si on considère un hypervolume infiniment petit tracé dans le métal et si on lui applique le théorème de la divergence, il vient :

$$\begin{aligned} \int \int \int \int \text{div} H^{\mu\nu} d\omega &= \int \int \int \int 4\pi i d\omega \\ &= \int \int \int n_\nu H^{\mu\nu} dv = 0 \text{ car } H^{\mu\nu} = 0. \end{aligned}$$

Par suite le courant  $i^\times$  est nul dans tout l'hypervolume considéré. Il n'y a donc pas de courant dans tout l'hypervolume occupé par le métal, c'est-à-dire aux différents points de l'espace temps où se trouve le métal. Le courant est donc purement superficiel, c'est-à-dire que le courant et la charge reste localisés sur la surface (au sens usuel) du métal pendant tout le mouvement. Cette propriété généralise ce qu'on sait dans le cas statique sur la charge et le courant superficiels.

2° Si nous considérons diverses courbes d'univers fermées, réductibles les unes aux autres par déformation continue, et tracées dans ou sur l'hypervolume qu'occupe le métal, la circulation du potentiel est la même le long de ces diverses courbes. On a en effet :

$$\int_C F_\rho dx^\rho = \int \int H_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = C^{\text{te}}$$

si la courbe C se déforme sans sortir du métal puisque  $H = 0$  dans le métal.

La circulation de F est la même le long des diverses courbes que nous avons considérées, et il dérive dans l'hypervolume occupé par le métal, d'un scalaire U par la relation  $F_\times = \text{grad} U$ .

On peut interpréter notre résultat en disant que le flux de H à travers diverses courbes réductibles est le même, en appelant maintenant flux l'intégrale :

$$\varphi = \int \int H_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

étendue à une multiplicité à deux dimensions passant par la courbe.

On peut écrire le résultat autrement en explicitant le potentiel vecteur F et le potentiel scalaire V ordinaires :

$$-F_x dx - F_y dy - F_z dz + \frac{1}{c} V dt = dU$$

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}(xyzt) \dots \quad V = c \frac{\partial U}{\partial t}(xyzt).$$

S'il s'agit d'une courbe assez petite, la circulation du potentiel est nulle. Toutes ces relations expriment en somme la loi de l'induction dans le cas qui nous occupe.

3° Champ au voisinage du conducteur. Considérons l'hypersurface limitant l'hypervolume occupé par le métal, et plaçons-nous en un point M de l'espace-temps infiniment

voisin de l'hypersurface, et situé en dehors du métal. Nous pouvons diviser l'hypersurface en un élément E entourant le point M où on étudie le champ, et le reste de l'hypersurface. Il n'y a que le champ de E qui soit discontinu quand on traverse l'hypersurface, et comme le champ dans le métal est nul, le champ total en M est égal à deux fois celui de l'élément E, qui peut être considéré comme hyperplan et couvert d'une densité uniforme. Par suite le champ au voisinage de l'hypersurface sera :

$$H_{\mu\nu} = 4\pi(i_\mu n_\nu - i_\nu n_\mu) \quad (n_\nu \text{ normale intérieure}).$$

Exprimons maintenant ce résultat en langage ordinaire. Dire que le point M de l'espace-temps est infiniment voisin de l'hypersurface, veut dire qu'il en est infiniment voisin dans l'espace et dans le temps, c'est-à-dire que non seulement la projection de M doit être infiniment voisine de la zone de l'espace balayée par le conducteur, mais encore il faut qu'il y ait simultanéité entre l'appréciation du champ et la présence du métal.

On peut simplifier le résultat en prenant comme système de coordonnées un système galiléen particulier, qui aurait un mouvement tangent au mouvement d'un élément de la surface du métal. Dans ce système, l'équation de l'hyperplan E se réduira à  $n_1 x^1 + n_2 x^2 + n_3 x^3 = C^te$  ce qui montre que la composante de temps de  $n$  sera nulle, et on voit de suite qu'un observateur lié à ce système trouvera un champ magnétique tangent à la surface et un champ électrique normal, de grandeurs  $4\pi i$  et  $4\pi\sigma$ . Ceci n'est évidemment vrai que dans ce système de coordonnées particulier. En un autre système galiléen, le champ électromagnétique sera donné par notre formule générale. On voit donc que c'est seulement pour un observateur au repos par rapport au métal que le champ est identique au champ statique, ce à quoi on pouvait s'attendre.

4° Pression électromagnétique. Evaluons la force à

laquelle est soumis un élément de l'hypersurface limitant l'hypervolume occupé par le métal. Un champ  $H_{\mu\nu}$  agissant sur un courant  $i^\nu$  exerce sur lui la force  $\Phi_\mu = H_{\mu\nu} i^\nu$ . Le champ produit par tous les courants à l'exception de ceux portés par E est  $2\pi[i_\mu n_\nu - i_\nu n_\mu]$ , par suite la force exercée est :

$$\Phi_\mu = 2\pi[i_\mu n_\nu - i_\nu n_\mu] i^\nu = 2\pi i_\mu n_\nu i^\nu - 2\pi n_\mu i^\nu i_\nu = -2\pi n_\mu [i^\nu i_\nu].$$

On a affaire à une force de pression dont la grandeur est  $2\pi[i^\nu i_\nu]$ .

Pour un observateur dont le mouvement est tangent au mouvement du métal, on peut exprimer le résultat sous forme particulièrement simple, car on voit que l'on observe alors une force de pression appliquée normalement à la surface (au sens usuel) du métal, et qui est :

$$P = -2\pi[-i^2 + \sigma^2] = +2\pi i^2 - 2\pi\sigma^2.$$

Dans ce système, la pression électromagnétique apparaît comme la somme d'une pression électrostatique et d'une pression magnétostatique.

3. Mouvement général d'un système de conducteurs. — Rappelons quelques propriétés. Etant donnée une multiplicité plane à deux dimensions, d'équations  $A_\mu x^\mu = 0$ ,  $B_\mu x^\mu = 0$ , nous appellerons tenseur de la multiplicité le tenseur  $T_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu - A_\nu B_\mu$ . Ce tenseur dépend de trois arbitraires mod A, mod B et angle de A et B. S'il s'agit d'une multiplicité courbe à deux dimensions, nous appellerons tenseur tangent  $T_{\mu\nu}$ , si  $A_\mu x^\mu = 0$  et  $B_\mu x^\mu = 0$  sont les équations de la multiplicité plane à deux dimensions tangentes. Ce tenseur vérifie  $T_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0$ ,  $dx^\mu dx^\nu$  projection d'un

élément  $d\sigma$  de la multiplicité. Il suffit à définir la multiplicité (en direction), en effet les équations de la multiplicité :

$$\begin{cases} A_1 x^1 + A_2 x^2 = -A_3 x^3 - A_4 x^4 \\ B_1 x^1 + B_2 x^2 = -B_3 x^3 - B_4 x^4 \end{cases}$$

se résolvent en :

$$\begin{cases} x^1 = \frac{T_{23}}{T_{12}} x^3 + \frac{T_{24}}{T_{12}} x^4 \\ x^2 = \frac{T_{31}}{T_{12}} x^3 + \frac{T_{41}}{T_{12}} x^4 \end{cases}$$

Si  $x$  est un vecteur de la multiplicité définie par  $T_{\mu\nu}$  on a  $T_{\mu\nu} x^\nu = 0$ ; en effet ceci s'écrit  $A_\mu(B_\nu x^\nu) - B_\mu(A_\nu x^\nu) = 0$  ce qui est vérifié si  $x^\nu$  est de la multiplicité d'équations  $A_\mu x^\mu = 0, B_\mu x^\mu = 0$ . Nous dirons que si  $T_{\mu\nu} x^\nu = 0, T_{\mu\nu}$  contient  $x^\nu$ .

Nous appellerons tenseur normal à une multiplicité à deux dimensions contenant les vecteurs C et D le tenseur  $N_{\mu\nu} = C_\mu D_\nu - C_\nu D_\mu$ . Ce tenseur contient tout vecteur perpendiculaire à la multiplicité considérée; en effet si un vecteur  $x^\nu$  est normal à cette multiplicité on a  $C_\nu x^\nu = 0, D_\nu x^\nu = 0$  d'où  $N_{\mu\nu} x^\nu = C_\mu(D_\nu x^\nu) - D_\mu(C_\nu x^\nu) = 0$ . On peut prendre pour vecteurs C et D les vecteurs  $T_{23}, T_{31}, T_{42}, 0; T_{24}, T_{41}, 0, T_{12}$  obtenus en faisant  $x^3 = 1, x^4 = 0$  et  $x^3 = 0, x^4 = 1$  dans les équations de la multiplicité et on trouve :  $N^{12} = T_{34}, N^{23} = T_{14}, N^{34} = T_{12}, N^{13} = T_{42}, N^{24} = T_{31}, N^{14} = T_{23}$ ; il y a réciprocity entre N et T, on passe de l'un à l'autre par permutation d'indices, comme pour les composantes de deux vecteurs rectangulaires dans le plan.

Etant donné un tenseur  $T^{\mu\nu}$  et un vecteur  $\xi_\nu$  non contenu par  $T^{\mu\nu}$  la translation  $\xi_\nu$  de la multiplicité définie par  $T^{\mu\nu}$  engendre un hyperplan de normale  $n_\mu$ . On a  $n^\mu = T^{\mu\nu} \xi_\nu$ . En effet les équations de la multiplicité définie par  $T^{\mu\nu}$  sont

$A_\mu x^\mu = 0$  et  $B_\mu x^\mu = 0$  si  $T^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu - A^\nu B^\mu$ . L'hyperplan passant par la multiplicité et contenant  $\xi_\nu$  a pour équation :

$$\left[ A^\mu - \frac{A^\nu \xi_\nu}{B^\nu \xi_\nu} B^\mu \right] x_\mu = 0;$$

par suite :

$$n^\mu = A^\mu [B^\nu \xi_\nu] - B^\mu [A^\nu \xi_\nu] = T^{\mu\nu} \xi_\nu.$$

Si maintenant  $t^{\mu\nu}$  et  $x_\nu$  sont unitaires ( $t^{\mu\nu} t_{\mu\nu} = 1, x^\nu x_\nu = 1$ ) et  $n^\mu$  également on a  $n^\mu dv = t^{\mu\nu} x_\nu ds d\sigma$ ,  $ds$  élément porté par  $x_\nu$ ,  $d\sigma$  élément d'aire porté par  $t^{\mu\nu}$ ,  $dv$  élément d'hyper-surface engendré par la translation  $x_\nu ds$  de  $d\sigma$ . Si nous nous plaçons dans l'hyperplan portant  $dv$ , il n'y a qu'une normale  $z$  à  $d\sigma$  située dans cet hyperplan et on a  $dv = ds d\sigma \cos(z, x)$ . Evaluons ce cosinus. Pour l'hyperplan nous prendrons  $Ox^1 x^2 x^3 (x^4 = 0)$ , le tenseur le plus général  $t^{\mu\nu}$  a trois composantes différentes de zéro,  $t^{14}, t^{24}, t^{34}$  et  $t^{12} = t^{23} = t^{31} = 0$ .

Nous devons chercher la normale à  $d\sigma$  qui est dans l'hyperplan. Pour cela il suffit de prendre l'intersection du tenseur  $n$  normal à  $d\sigma$  avec l'hyperplan.  $n$  a trois composantes différentes de zéro,  $n_{23} = t^{14}, n_{31} = t^{24}, n_{12} = t^{34}$ , si  $z^\nu$  est la normale cherchée  $n_{\mu\nu} z^\nu = 0$  ou  $n_{12} z^2 + n_{13} z^3 = 0$ , etc., ou  $t^{34} z^2 - t^{24} z^3 = 0$ , etc., ou comme  $t$  est unitaire,  $z$  est unitaire :

$$\frac{z^1}{t^{14}} = \frac{z^2}{t^{24}} = \frac{z^3}{t^{34}} \quad z^4 = 0$$

et on a :

$$\begin{aligned} dv &= ds d\sigma \cos(z, x) = ds d\sigma (z^1 x_1 + z^2 x_2 + z^3 x_3) \\ &= ds d\sigma z^\nu x_\nu = ds d\sigma t^{\mu\nu} x_\nu, \end{aligned}$$

comme  $n^1 = n^2 = n^3 = 0$ ,  $n^4 = 1$ , on a bien  $n^\mu$  étant la normale unitaire à l'hyperplan :

$$n^\nu dv = t^{\nu\sigma} x_\sigma ds d\sigma.$$

Nous appellerons flux d'un tenseur  $H$  à travers une multiplicité à deux dimensions l'intégrale  $\int \int H^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$ , étendue à cette multiplicité. Si  $H$  est le rotationnel d'un vecteur, le flux ne dépend que du contour, il est nul à travers une multiplicité fermée (sauf singularités).

Nous appellerons maintenant hypersurface d'onde d'un champ  $H$  une hypersurface telle qu'en chaque point  $H$  soit tangent à une des multiplicités à deux dimensions de l'hypersurface passant par ce point. On voit comment cela généralise la notion de tube de force : tube tel qu'en tout point le champ soit tangent à l'une des courbes passant par ce point.

Le flux de  $H$  à travers toute multiplicité à deux dimensions portée par l'hypersurface d'onde est nul. Prenons comme  $Ox^1x^2x^3(x^4=0)$  l'hyperplan tangent à l'hypersurface. Un tenseur  $H$  d'une multiplicité portée par cet hyperplan a des composantes  $H_{13}H_{24}H_{34}$  différentes de zéro et  $H_{12} = H_{23} = H_{31} = 0$ . Si nous considérons un élément  $ds$  d'une multiplicité à deux dimensions portée elle aussi par l'hyperplan  $x^4=0$  il a des projections  $dx^1dx^2$ ,  $dx^2dx^3$ ,  $dx^3dx^1$  différentes de zéro, les autres étant forcément nulles puisque  $dx^4=0$ . Donc  $H_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0$  dans tous les cas ce qui établit la proposition, vraie localement et par suite pour une multiplicité quelconque portée par l'hypersurface d'onde. Nous pouvons donc dire : une hypersurface d'onde est une hypersurface telle que le flux de  $H_{\mu\nu}$  à travers toute multiplicité à deux dimensions portée par l'hypersurface soit nul. Ceci ne signifie pas que le flux de  $H_{\mu\nu}$  à travers toute courbe tracée sur l'hypersurface soit nul. En effet à une

courbe fermée tracée sur l'hypersurface peut correspondre une multiplicité à deux dimensions qui ne le soit pas. On doit donc dire seulement que si on considère diverses courbes fermées tracées sur l'hypersurface d'onde, réductibles les unes aux autres par déformation continue, elles enferment le même flux de  $H_{\mu\nu}$ . Ce flux n'est nul que si les courbes sont réductibles à un point. Cette notion d'hypersurface d'onde généralise les notions corrélatives de surface équipotentielle et de tube de force introduites en électricité et en magnétisme. Il y a lieu de remarquer que l'hypersurface qui limite l'hypervolume occupé par le métal est une hypersurface d'onde.

Ces définitions posées, on peut trouver dans une infinité de cas les courants répandus sur les conducteurs qui annulent le champ à l'intérieur en appliquant un principe généralisant ceux des images électriques et des images magnétiques, et qu'on peut énoncer comme suit :

Si une hypersurface fermée  $S$  à deux côtés peut être considérée comme hypersurface d'onde d'un champ électromagnétique conservatif ( $\text{div } H^{\mu\nu} = 0$ ) et si ayant choisi un côté positif et un côté négatif sur cette hypersurface, on place sur elle des courants de densité  $i^\mu = \frac{1}{4\pi} n_\nu H^{\mu\nu}$  ( $n$  normale négative) le champ électromagnétique produit par ces courants est identique à  $H$  dans la région positive, nul dans la région négative.

On peut remarquer que la condition que  $H$  soit tangent à une multiplicité à deux dimensions de l'hypersurface généralise les conditions  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0$  et  $\mathbf{E} = \lambda \mathbf{n}$  du cas statique. En effet soit  $n_\mu x^\mu = 0$  l'hyperplan tangent à l'hypersurface d'onde et  $n_\mu x^\mu = 0$ ,  $B_\mu x^\mu = 0$  les équations d'une multiplicité à deux dimensions de l'hyperplan qui soit définie par  $H$ , on doit avoir si  $n_\mu$  et  $B_\mu$  sont bien choisis  $H_{\mu\nu} = n_\mu B_\nu - n_\nu B_\mu$ .

ou en appelant LMN et XYZ les composantes des champs magnétique et électrique :

$$N = H_{21} = n_2 B_1 - n_1 B_2 \quad X = H_{41} = n_4 B_1 - n_1 B_4$$

si l'observateur a un mouvement tangent.

$$\begin{aligned} M &= H_{32} = n_3 B_2 - n_2 B_3 & n_4 &= 0 & X &= -n_1 B_4 \\ Y &= -n_2 B_4 & Z &= -n_3 B_4 & N &= H_{13} = n_1 B_3 - n_3 B_1. \end{aligned}$$

D'où :

$$n_1 L + n_2 M + n_3 N = 0 \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = \lambda \mathbf{n}$$

le courant que nous avons répandu sur S est bien tangent à S, car on a  $n_\mu i^\mu = \frac{1}{4\pi} n_\mu n_\nu H^{\mu\nu}$  comme  $H_{\mu\nu}$  est symétrique gauche, les termes de la sommation se détruisent deux à deux et on a bien  $n_\mu i^\mu = 0$ .

Il faut maintenant montrer que le courant  $i$  répandu sur l'hypersurface est bien conservatif. Pour cela rappelons que dans le vide existent les antipotentiel : potentiel scalaire magnétique et potentiel vecteur électrique. Autrement dit, les composantes de H peuvent s'écrire :

$$H^{\mu\nu} = \frac{\partial \Phi_\rho}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x^\rho}$$

$\Phi$  étant un antipotentiel vecteur. Ou bien le tenseur :

$$U_{\rho\sigma} = H^{\mu\nu}$$

dérive d'un potentiel vecteur. Pour que ceci soit possible, il faut qu'on ait :

$$\frac{\partial U_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial U_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial U_{31}}{\partial x^2} = 0$$

et les analogues. Mais ceci s'écrit :

$$\frac{\partial H^{34}}{\partial x^3} + \frac{\partial H^{14}}{\partial x^1} + \frac{\partial H^{24}}{\partial x^2} = 0$$

ou :

$$\frac{\partial H^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0$$

ce qui est vérifié dans le vide. U et H sont deux tenseurs orthogonaux. Considérons maintenant une hypersurface d'onde sur laquelle nous avons répandu un courant :

$$i^\mu = \frac{1}{4\pi} n_\nu H^{\mu\nu}.$$

La direction de  $i$  est l'intersection de U avec le plan tangent à l'hypersurface d'onde. En effet l'équation :

$$4\pi i^\mu = n_\nu H^{\mu\nu}$$

montre que  $i$  est la normale au plan défini par  $n$  et H.  $i$  est donc en particulier normal à H, il est donc contenu par le tenseur perpendiculaire à H, c'est-à-dire U.  $i$  est donc l'intersection de U avec le plan tangent à l'hypersurface d'onde. Ce théorème généralise celui du cas statique : la ligne de courant est l'intersection de la surface équipotentielle du champ magnétique avec le tube de force.

Revenons maintenant au courant  $i$ , il y a une multiplicité à deux dimensions de l'hyperplan tangent à l'hypersurface d'onde et une seule qui soit normale à  $i$ , elle est évidemment définie par H. Soit  $d\sigma$  l'élément de cette multiplicité ; si  $i$  est le module de  $i^\mu$ , le flux de courant qui traverse cet élément est  $i d\sigma$ . Pour calculer  $i d\sigma$  prenons comme hyperplan tangent à l'hypersurface d'onde  $x^4 = 0$ . Nous aurons comme toujours :

$$H_{12} = H_{23} = H_{31} = 0$$

et :

$$4\pi i_1 = H_{14} \quad 4\pi i_2 = H_{24} \quad 4\pi i_3 = H_{34}.$$

L'élément  $d\sigma$  a des projections  $dx^1 dx^2$ ,  $dx^2 dx^3$ ,  $dx^3 dx^1$ .

Comme  $i$  est la normale à  $d\sigma$  située dans le plan  $Ox^1x^2x^3$  on a :

$$d\sigma = dx^1 dx^2 \cos(i, x^3) + \dots$$

ou :

$$id\sigma = i_3 dx^1 dx^2 + \dots \quad 4\pi id\sigma = 4\pi i_3 dx^1 dx^2 + \dots$$

mais :

$$4\pi i_3 = H_{34} = U^{12}, \text{ etc.},$$

d'où :

$$4\pi id\sigma = U_{12} dx^1 dx^2 + \dots = \text{flux de } U \text{ à travers } d\sigma.$$

Ceci montre également que  $\text{mod } H = \text{mod } U = 4\pi \text{ mod } i$ .

Si on considère les lignes de courant s'appuyant sur le contour de l'élément  $d\sigma$ , elles engendrent une multiplicité à deux dimensions de l'hypersurface d'onde qui est un tube de courant de cette hypersurface. Il faut montrer que l'on a :

$$id\sigma = i' d\sigma',$$

$d\sigma$  et  $d\sigma'$  étant les aires de deux sections du tube faites perpendiculairement à  $i$  par deux multiplicités à deux dimensions de l'hypersurface d'onde. Remarquons qu'on peut considérer le tube de courant comme l'intersection d'une hypersurface d'onde de  $U$  avec l'hypersurface d'onde de  $H$ . En effet, l'intersection de ces deux hypersurfaces est une multiplicité à deux dimensions. On obtient une ligne de cette multiplicité par l'intersection d'une multiplicité à deux dimensions de l'hypersurface de  $U$  avec l'hypersurface d'onde  $H$ . Si nous prenons pour multiplicité une multiplicité constamment tangente à  $U$  nous obtenons une ligne de courant. L'intersection des deux hypersurfaces peut donc être considérée comme engendrée par des lignes de courant, c'est donc un tube de courant. Ce résultat est corrélatif de celui du cas statique : les lignes de courant sont l'intersection du tube de force du champ magnétique et des surfaces équipoten-

tentielles de ce champ. Dans le cas de l'électrostatique il correspond au théorème des éléments correspondants : un tube de force découpe sur deux surfaces équipotentiels deux aires portant des charges égales. On voit comment notre point de vue généralise ces résultats et donne une parfaite symétrie aux potentiels et antipotentels.

Vu que le tube de courant est une multiplicité à deux dimensions portée par une hypersurface d'onde de  $U$ , le flux de  $U$  à travers cette multiplicité est nul, d'après un résultat démontré. Formons donc une multiplicité à deux dimensions fermée avec le tube et deux cloisons normales à  $i$  et d'aires  $d\sigma$  et  $d\sigma'$ . Le flux de  $U$  à travers cette multiplicité fermée est nul, puisque  $U$  dérive d'un potentiel vecteur. Donc les flux à travers les deux cloisons sont les mêmes au signe près. On a donc :

$$id\sigma = i'd\sigma',$$

le courant répandu sur l'hypersurface est donc bien conservatif.

Etablissons maintenant une formule qui joue ici le même rôle que celle de Green en électrostatique. On a :

$$\text{div} \left( \frac{1}{r^2} H^{\mu\nu} \right) = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{1}{r^2} H^{\mu\nu} = \frac{1}{r^3} \frac{\partial H^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + H^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{1}{r^2} = H^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{1}{r^2}$$

car  $\frac{\partial H^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0$  dans le vide :

$$\begin{aligned} \iiint \text{div} \left( \frac{1}{r^2} H^{\mu\nu} \right) d\omega &= \iiint \frac{1}{r^3} n_\nu H^{\mu\nu} d\omega \\ &= \iiint \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{1}{r^2} H^{\mu\nu} d\omega. \end{aligned}$$

Par suite le potentiel vecteur créé par les courants que nous avons répandus sur  $S$  pourra se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} F^\mu &= \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \int \int \int_s \frac{1}{r^2} i^\mu dv = \frac{\sqrt{-1}}{4\pi^2} \int \int \int_s \frac{1}{r^2} n_\nu H^{\mu\nu} dv \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{4\pi^2} \int \int \int \int \frac{1}{\partial x^\nu} H^{\mu\nu} d\omega. \end{aligned}$$

Pour trouver le rotationnel du vecteur :

$$\int \int \int \int \frac{1}{\partial x^\nu} H^{\mu\nu} d\omega,$$

nous allons suivre la marche suivante : considérons une multiplicité à deux dimensions fermée, et considérons un tenseur  $H^{\mu\nu}$ , de grandeur  $H^2 = H^{\mu\nu} H_{\mu\nu}$  constante, tangent en chaque point à la multiplicité considérée, ce qui entraîne que son flux à travers toute partie de cette multiplicité est nul. Considérons maintenant le vecteur :

$$\Phi^\mu = \int \int \frac{1}{\partial x^\nu} H^{\mu\nu} d\sigma \quad (d\sigma \text{ élément de la multiplicité})$$

et formons l'élément de la circulation de ce vecteur  $\Phi^\nu dx_\nu$  nous voyons qu'on peut transformer cet élément :

$$\begin{aligned} \Phi^\mu dx_\mu &= \int \int \frac{1}{\partial x^\nu} H^{\mu\nu} dx_\mu d\sigma \\ &= H \int \int \frac{1}{\partial x^\nu} t^{\mu\nu} dx_\mu d\sigma \quad (t^{\mu\nu} \text{ tenseur unitaire}) \end{aligned}$$

$t^{\mu\nu} dx_\mu = n^\nu ds$ ,  $n^\nu$  normale à la multiplicité engendrée par le déplacement  $dx_\mu$  de la multiplicité plane tangente à la

$$\text{multiplicité à deux dimensions } \Phi^\mu dx_\mu = H \int \int \frac{1}{\partial x^\nu} n^\nu dv,$$

$dv$  élément de multiplicité à trois dimensions engendrée par le déplacement  $dx_\mu$  de celle à deux.

Si on appelle  $U$  l'intégrale  $\int \int \int \frac{1}{\partial x^\nu} n^\nu dv$  étendue à une hypersurface passant par notre multiplicité à deux dimensions fermée, on aura  $\Phi^\mu dx_\mu = H \cdot dU$ ,  $U$  généralise la notion d'angle solide. L'intégrale  $\int \Phi^\nu dx_\nu$  le long d'une courbe fermée sera égale à  $H$  (variation de  $U$ ). On voit que

cette variation est égale à l'intégrale  $\int \int \int \frac{1}{\partial x^\nu} n^\nu dv$  étendue à une hypersphère entourant le point  $O$ . On sait qu'elle est égale à  $\frac{4\pi^2}{\sqrt{-1}}$ .

Nous obtenons finalement, pour la circulation du vecteur  $\Phi^\mu$  le long d'une courbe fermée bouclant la multiplicité à laquelle est tangent  $H$  :

$$\int \Phi^\mu dx_\mu = \frac{4\pi^2}{\sqrt{-1}} H.$$

Dans le cas où on aurait affaire à une intégrale de la forme :  $\int \int \int \int \frac{1}{\partial x^\nu} H^{\mu\nu} d\omega$  étendue à un hypervolume dont la surface soit hypersurface d'onde pour le tenseur  $H$ , on pourra décomposer cet hypervolume en hypervolumes élémentaires tels que le flux de  $H$  ne sorte pas non plus de ces hypervolumes. Dans ces conditions on pourra appliquer notre résultat à chacun de ces hypervolumes élémentaires, et on aura finalement :

$$\begin{aligned} \int_C \Phi^\mu dx_\mu &= \frac{4\pi^2}{\sqrt{-1}} \int \int dH \\ &= \frac{4\pi^2}{\sqrt{-1}} \int \int H^{\mu\nu} \bar{d}x_\mu dx_\nu = \frac{4\pi^2}{\sqrt{-1}} [\text{flux de } H \text{ à travers } C]. \end{aligned}$$

Dans le cas où la courbe d'intégration est dans un domaine où le tenseur  $H$  n'est pas égal à zéro, on aura :

$$\int_c \Phi^\mu dx_\mu = \frac{4\pi^2}{\sqrt{-1}} \int \int H^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu.$$

Par suite, en appliquant la formule de Stokes :

$$\begin{aligned} \int_c \Phi^\mu dx_\mu &= \int_c \Phi_\mu dx^\mu \\ &= \int \int (\text{rot } \Phi_\mu) dx^\mu dx^\nu = \frac{4\pi^2}{\sqrt{-1}} \int \int H_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\text{rot } \Phi_\mu = \frac{4\pi^2}{\sqrt{-1}} H_{\mu\nu}.$$

Ce qui montre immédiatement que le potentiel vecteur des courants que nous avons répandus étant :

$$F^\mu = \frac{\sqrt{-1}}{4\pi^2} \int \int \int \int \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{1}{r^2} H^{\mu\nu} d\omega$$

et considérant comme domaine d'intégration la région positive, que : en un point de la région positive :

$$\text{rot } F_\mu = \frac{4\pi^2}{\sqrt{-1}} \frac{\sqrt{-1}}{4\pi^2} H_{\mu\nu} = H_{\mu\nu};$$

en un point de la région négative <sup>(1)</sup> :

$$\text{rot } F_\mu = 0.$$

Nous avons bien le résultat annoncé, le champ des cou-

<sup>(1)</sup> En un point de la région négative  $\text{rot } F_\mu = 0$  et  $\int F_\mu dx^\mu$  ne dépend pas du chemin suivi (si cependant les chemins sont réductibles les uns aux autres). Si le chemin est fermé et entoure un trou :  $\int_c F_\mu dx^\mu = \text{flux de } H_{\mu\nu} \text{ à travers le trou.}$

rants répandus est bien nul à l'intérieur, identique au champ  $H^{\mu\nu}$  à l'extérieur.

Ce résultat généralise ce qu'on sait sur les images magnétiques et électriques. Il exprime sous une forme générale le principe d'Huyghens.

On peut remplacer, pour trouver le champ électromagnétique, les sources par des sources fictives distribuées sur une surface d'onde. On considère ordinairement des surfaces d'onde fixes, qui correspondent à des hypersurfaces d'onde cylindriques parallèles à l'axe des temps. Ceci n'est d'ailleurs possible que si le régime est permanent, ce qui est le cas dans les phénomènes usuels de l'optique. Notre énoncé est tout à fait général, ne suppose ni le régime permanent ni la surface portant les sources fixe, il a surtout l'avantage de montrer comment le principe bien connu d'Huyghens se rattache simplement à nos hypothèses sur les propriétés des supraconducteurs.

Il y a lieu de remarquer que les hypersurfaces d'onde sont bien plus générales que les hypersurfaces engendrées dans le temps par les surfaces d'onde (au sens usuel).

**4. Action d'un système en mouvement. Multiplicité des solutions.** — Dans l'étude de l'équilibre statique d'un système de conducteurs fixes, on est amené, pour étudier le nombre des solutions possibles, à introduire l'énergie localisée dans tout l'espace vide  $\int \int \int \frac{E^2}{8\pi} dv$ , énergie qui doit être stationnaire dans tout état d'équilibre du système. Dans le cas du mouvement général d'un système de conducteurs, il faudra faire intervenir au lieu de l'énergie du système, l'intégrale de l'action du champ électromagnétique étendue à tout l'espace-temps vide de métal. Cette action doit être stationnaire pour tout mouvement possible. Comme d'habitude, nous entendons par mouvement l'histoire des états électromagnétiques du système, l'espace-temps qu'il occupe étant donné.

On sait que l'action élémentaire du champ électromagnétique est :

$$\frac{1}{16\pi} H_{\mu\nu} H^{\mu\nu} d\omega.$$

On peut transformer l'élément d'action de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{On a } \operatorname{div} (F_{\mu} H^{\mu\nu}) &= \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (F_{\mu} H^{\mu\nu}) = F_{\mu} \frac{\partial H^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} + H^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu}}{\partial x^{\nu}} \\ &= H^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu}}{\partial x^{\nu}} \text{ puisque } \operatorname{div} H^{\mu\nu} = 0 \text{ dans le vide. Les termes} \\ &H^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu}}{\partial x^{\nu}} \text{ peuvent être groupés par 2, tenant compte du fait} \end{aligned}$$

que  $H^{\mu\nu}$  est symétrique gauche, il vient  $\sum H^{\mu\nu} \left( \frac{\partial F_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial F_{\nu}}{\partial x^{\mu}} \right)$ .

On a par suite  $\operatorname{div} (F_{\mu} H^{\mu\nu}) = \frac{1}{2} H^{\mu\nu} H_{\mu\nu}$ . Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{16\pi} \iiint H^{\mu\nu} H_{\mu\nu} d\omega &= \frac{1}{8\pi} \iiint \operatorname{div} (F_{\mu} H^{\mu\nu}) d\omega \\ &= \frac{1}{8\pi} \iint n_{\nu} F_{\mu} H^{\mu\nu} dv, \end{aligned}$$

intégrale étendue à l'hypersurface limitant le métal. Il vient finalement, pour l'action :

$$A = \frac{1}{8\pi} \iint n_{\nu} F_{\mu} H^{\mu\nu} dv$$

comme  $n_{\nu} H^{\mu\nu} = 4\pi i^{\mu}$  :

$$A = \frac{1}{2} \iint F_{\mu} i^{\mu} dv.$$

On obtient finalement, pour l'expression de l'action totale du champ électromagnétique :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \iint F_{\mu} i^{\mu} dv = \frac{1}{2} \iint F i \cos(F, i) ds d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \iint id\sigma \int F \cos(F, i) ds = \frac{1}{2} \sum i_k \varphi_k. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que si on se donne les courants totaux  $i_k$  qui entourent les trous  $k$  de l'hypervolume occupé par le métal, les flux  $\varphi_k$  qui traversent ces trous sont donnés. En effet supposons qu'il y ait deux solutions pour les flux, les courants étant donnés. Il existerait un mouvement du système où les flux seraient différents de zéro, tous les courants étant nuls. Mais considérons l'action totale et écrivons qu'elle est stationnaire :

$$A = \frac{1}{2} \sum i_k \varphi_k$$

$$\delta A = \frac{1}{2} \sum i_k \delta \varphi_k + \varphi_k \delta i_k = \frac{1}{2} \sum \varphi_k \delta i_k = 0 \quad \text{donc : } \varphi_k = 0.$$

On a donc  $\varphi_k = 0$ . Par suite si tous les courants sont nuls, tous les flux sont nuls. Si maintenant les courants sont donnés, les flux sont par suite déterminés de façon unique. Dans ces conditions, puisque la superposition de deux mouvements possibles est évidemment un mouvement possible, les flux sont fonction linéaire des courants :

$$\begin{cases} \varphi_1 = C_{11} i_1 + C_{12} i_2 + \dots + C_{1n} i_n \\ \dots \\ \varphi_n = C_{n1} i_1 + C_{n2} i_2 + \dots + C_{nn} i_n \end{cases}$$

Dans toutes ces formules, nous appelons flux  $\varphi_k$  le flux de  $H^{\mu\nu}$  à travers un trou quelconque  $k$  de l'hypervolume occupé par le métal. Cette notion a un sens, car nous avons vu que la circulation du potentiel est la même le long de diverses courbes réductibles les unes aux autres par déformation continue, ce qui montre que le flux à travers les différentes courbes entourant un même trou est le même, ce qui fait qu'on a le droit de parler du flux traversant un trou de l'hypervolume.

Quant au courant  $i_k$ , c'est le courant total qui entoure le trou  $k$  de l'hypervolume, et cette notion a un sens, car on sait que le courant est conservatif.

On voit donc que si on s'en tient au point de vue des cou-

rants et des flux, la solution du problème du mouvement apparaît comme unique, si on se donne pour chaque trou  $k$  de l'hypervolume, le courant qui l'entoure ou le flux qui le traverse. Mais cette analogie fondamentale avec le cas statique ne se poursuit pas si on considère le champ dans l'espace-temps extérieur au métal. En effet, on sait dans le cas statique que si les courants ou les flux (au sens usuel) sont nuls, la solution est identiquement nulle. En effet, si dans un domaine il n'y a pas d'énergie, on a  $o = \int \int \int \frac{E^2}{8\pi} dv$  ce qui entraîne nécessairement que  $E$  soit nul en tous les points de ce domaine. Rien de tel dans le cas qui nous occupe. En effet si l'action est nulle dans un domaine de l'espace-temps, cela entraîne :

$$\frac{1}{16\pi} \int \int \int \int H_{\mu\nu} H^{\mu\nu} d\omega = \frac{1}{8\pi} \int \int \int (E^2 - H^2) d\omega$$

( $E$ , champ électrique;  $H$ , champ magnétique).

On voit donc qu'il n'est pas du tout nécessaire pour que l'action soit nulle, que le champ soit nul en tous les points du domaine. Il suffit par exemple qu'on ait en tous les points  $E = H$ , c'est-à-dire que ce domaine soit occupé par un rayonnement électromagnétique éloigné de sa source. On voit donc que si on suppose que l'action dans un mouvement d'un système soit nulle, cela n'entraîne pas que le champ électromagnétique soit nul. On pourra avoir au contraire une infinité de solutions, correspondant par exemple à des rayonnements venant de l'infini et frappant le système. C'est particulièrement évident dans le cas où l'hypervolume occupé par le métal est simplement connexe, par exemple une sphère métallique fixe, à laquelle correspond dans l'espace-temps un cylindre infini. Nous pouvons supposer que le courant porté par le cylindre soit nul, c'est-à-dire que la sphère ne porte aucune charge, ceci ne saurait exclure que la sphère, au cours du temps, soit frappée par un rayonnement quel-

conque. On voit donc que le champ électromagnétique n'est pas déterminé quand par les flux ou les courants, on a donné l'action totale du champ électromagnétique, parce qu'il existe des champs électromagnétiques non identiquement nuls et d'action nulle.

Si on considère maintenant un système de conducteurs fixes (c'est-à-dire fixes par rapport à un système galiléen particulier), on voit que l'hypervolume occupé par le métal est formé de cylindres. Il est évident que lorsqu'un courant est réparti sur un cylindre pour annuler le champ dans le métal, le courant est le même tout le long d'une génératrice. Les génératrices des cylindres étant ici parallèles au temps, il en résulte qu'il n'y a de solutions possibles autres que celle d'un cas statique. On ne peut pas avoir autre chose que des courants permanents ou des charges immobiles. Evidemment, ceci suppose qu'aucune onde venue de l'infini ne vient frapper les conducteurs. Si cependant un train d'onde vient frapper les conducteurs, on sait que le courant porté par les cylindres de l'espace-temps est conservatif, ce qui entraîne qu'après le passage des ondes, l'état du système est le même qu'avant. Par suite :

Si on considère un système de conducteurs fixes, ce système ne peut admettre pour solution de son mouvement que les solutions de ces statiques s'il n'est frappé par aucun rayonnement, et s'il est frappé par un rayonnement venu de l'infini, son état n'est modifié que pendant le passage du rayonnement et revient à l'état initial après. On comprend aisément ce fait qu'il n'y a en somme que la solution du cas statique qui soit valable dans le cas général, en pensant que s'il n'en était pas ainsi, le système rayonnerait et finirait par aboutir à un état statique. Comme le système est infini dans le temps, on ne peut fixer un commencement ou une fin à son évolution, et par suite on ne peut retenir comme solution que les solutions qui persistent indéfiniment.

Considérons maintenant un système de conducteurs, et

supposons que partant d'une configuration donnée, on déplace les conducteurs de façon arbitraire, en s'arrangeant cependant de façon que ce mouvement engendre un hypervolume analogue à des tuyaux, ce qui est par exemple le cas d'une sphère tournant autour d'un axe, ou d'un tore tournant aussi autour d'un axe. Dans ce cas, en remarquant que le courant répandu sur l'hypersurface est conservatif, on voit aussitôt que si après un déplacement plus ou moins long le système revient à son état initial, les courants et les charges (au sens usuel) reviendront aussi à l'état initial. C'est dans l'espace-temps, l'analogue dans l'espace usuel et le cas statique d'un tuyau qui serait rectiligne et cylindrique sur tout son parcours, sauf en une zone où il serait plus ou moins contourné, sans cependant pour cela que les cavités de son intérieur viennent pour cela à disparaître. Ce tuyau étant par exemple parcouru par des courants permanents, ces courants seront sensiblement uniformes dans toute la partie rectiligne, se modifieront plus ou moins dans la partie contournée, puis reprendront exactement la même figure uniforme dans la nouvelle partie rectiligne. D'une façon très générale, si nous considérons un système de conducteurs dont les mouvements sont lents par rapport à la vitesse de la lumière, on voit que leur mouvement engendre un hypervolume analogue à des tuyaux dont la courbure serait faible par rapport aux dimensions transversales. Par suite le courant sur ces tuyaux sera à très peu près de densité uniforme, ce qui montre que l'état du système de conducteurs, si on suppose que leurs déplacements et leurs dimensions sont petits par rapport à la vitesse de la lumière, pourra se prévoir approximativement à chaque instant en assimilant l'état à un état d'équilibre. C'est ce que nous avons fait quand nous avons étudié les déplacements infiniment lents d'un système de conducteurs.

Si les mouvements ou les dimensions ne sont plus négligeables par rapport à la vitesse de la lumière, l'état du

système n'est plus celui du cas statique et il rayonne de l'énergie. Néanmoins il revient à l'état initial si les déplacements cessent et s'il reprend sa figure initiale.

*Éléments correspondants.* — Nous savons que les tubes de courant sont les intersections des hypersurfaces d'onde de  $U$  avec l'hypersurface du métal. Si nous considérons deux tubes de courant différents, intersections de la même hypersurface  $S$  de  $U$  avec l'hypersurface du métal, ils formeront deux éléments correspondants. Ces éléments portent des courants égaux et de sens inverse. En effet, il est possible de former avec l'hypersurface d'onde  $S$  de  $U$  et deux hypersurfaces situées dans le métal une hypersurface fermée.

Le flux de  $H$  à travers cette hypersurface  $\int \int \int n_\mu H^{\mu\nu} dv$  est égal à  $4\pi$  fois le courant total qu'elle enferme. Or, le tenseur  $U$  ayant  $S$  comme hypersurface d'onde est normal à la normale  $n$  à cette hypersurface. Cette normale  $n$  est donc contenue dans le tenseur normal à  $U$  soit  $H$ . On a donc en tout point de  $S$   $n_\mu H^{\mu\nu} = 0$  et par suite  $\int \int \int n_\mu H^{\mu\nu} = 0$  pour l'hypersurface fermée puisque  $H$  est nul dans le métal. Le courant total enfermé est donc nul, ce qui établit la proposition.

Pour terminer, montrons que le tableau des coefficients  $C_{hk}$  jouit de propriétés analogues à celles des capacités et coefficients d'influence de l'électrostatique, c'est-à-dire qu'il est symétrique. Pour cela établissons la formule suivante, qui généralise celle de Green :

Si  $p_\mu$  et  $q_\mu$  sont 2 vecteurs,  $P_{\mu\nu}$  et  $Q_{\mu\nu}$  leurs rotationnels et si  $\text{div } p^\mu = \text{div } q^\mu = 0$  :

$$\begin{aligned} \int \int \int \int (p_\mu \square q^\mu - q_\mu \square p^\mu) d\omega \\ = \int \int \int (p_\mu Q^{\mu\nu} - q_\mu P^{\mu\nu}) n_\nu dv, \end{aligned}$$

en effet, on a :

$$\operatorname{div} (p_\mu Q^{\mu\nu}) = p_\mu \operatorname{div} Q^{\mu\nu} + Q^{\mu\nu} \frac{\partial p_\mu}{\partial x^\nu} = p_\mu \square q^\mu + \frac{1}{2} Q^{\mu\nu} P_{\mu\nu},$$

car  $Q^{\mu\nu}$  est symétrique gauche :

$$\operatorname{div} (q_\mu P^{\mu\nu}) = q_\mu \square p^\mu + \frac{1}{2} P^{\mu\nu} Q_{\mu\nu},$$

d'où :

$$\operatorname{div} (p^\mu Q^{\mu\nu} - q_\mu P^{\mu\nu}) = p_\mu \square q^\mu - q_\mu \square p^\mu.$$

En intégrant on a la formule. Appliquons la formule à deux mouvements du système, tenons compte de ce que :

$$\square p_\mu = \square q_\mu = 0,$$

$p_\mu$  et  $q_\mu$  étant les potentiels vecteurs, il vient :

$$\sum i_k q'_k = \sum i'_k q_k, \text{ ce qui donne } C_{hk} = C_{kh}.$$

5. Impulsion-énergie. Ecrans électromagnétiques. — On sait qu'il existe un tenseur  $E$  dont les variations compensent les variations du tenseur matériel, c'est-à-dire les variations de l'impulsion et de l'énergie. Ce tenseur est :

$$E_\mu^\nu = \frac{1}{4\pi} \left[ -H_{\mu\alpha} H^{\nu\alpha} + \frac{1}{4} g_\mu^\nu H_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta} \right] \text{ et } \operatorname{div} E_\mu^\nu = H_{\mu\alpha} i^\alpha.$$

On va voir que le flux d'impulsion-énergie émis par les conducteurs en mouvement a pour origine les pressions électromagnétiques. En effet, on a :

Dans le vide,  $\operatorname{div} E_\mu^\nu = 0$ , par suite en intégrant dans un hypervolume  $\Omega$  limité par l'hypersurface  $V$  du métal et une hypersurface  $V'$  qui l'entoure on a :

$$\int \int \int_\Omega \operatorname{div} E_\mu^\nu d\omega = \int \int \int_{V+V'} n^\nu E_\mu^\nu dv = 0$$

( $dv$ , élément d'hypersurface).

D'où

$$\begin{aligned} \int \int \int_V n_\nu E_\mu^\nu dv &= \int \int \int_V n_\nu E_\mu^\nu dv \\ &= \int \int \int_V \frac{1}{4\pi} \left[ -H_{\mu\alpha} H^{\nu\alpha} n_\nu + \frac{1}{4} g_\mu^\nu n_\nu H_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta} \right] dv \\ &= \int \int \int_V \frac{1}{4\pi} \left[ -4\pi i^\alpha H_{\mu\alpha} - 8\pi^2 n_\mu (i^\alpha i_\alpha) \right] dv \\ &= \int \int \int_V \frac{1}{4\pi} \left[ 16\pi^2 (i^\alpha i_\alpha) n_\mu - 8\pi^2 (i^\alpha i_\alpha) n_\mu \right] dv \\ &= \int \int \int_V 2\pi n_\mu [i^\alpha i_\alpha] dv = \int \int \int_V p n_\mu dv \end{aligned}$$

( $p$ , pression électromagnétique).

Cette propriété de la pression électromagnétique généralise ce qu'on sait de la pression électrostatique, dont on sait qu'elle représente, à un facteur près le travail mis en jeu dans une déformation infiniment petite du conducteur, car on a :

( $dv$ , élément de volume)

$$\int \int \int_V \frac{E^2}{8\pi} dv = \int \int \int_V (2\pi\sigma^2) dv = \int \int \int_V p dv$$

( $E$ , champ électrique ;  $\sigma$ , densité).

Si nous considérons maintenant un conducteur creux, on voit que les phénomènes électromagnétiques dans sa cavité ne dépendent pas des phénomènes extérieurs qui doivent produire un champ nul à l'intérieur. D'une façon générale les phénomènes extérieurs et les phénomènes intérieurs sont indépendants, chacun produisant un champ nul là où est l'autre. Dans une cavité vide et simplement connexe, il ne faudrait pas croire qu'il n'y a rien : il y a un état d'action nulle, c'est-à-dire un rayonnement indéfiniment persistant comme ceux qu'on considère dans les enceintes parfaitement réfléchissantes de la théorie du rayonnement noir.

**6. Analogies et différences des conducteurs et des supraconducteurs.** — Nous avons décrit entièrement le mouvement c'est-à-dire l'histoire d'un système de supraconducteurs à partir de la seule hypothèse  $H = 0$ . Nous avons vu que dans ce cas, le plus général qu'on puisse considérer, on a toujours une corrélation parfaite entre les résultats classiques de l'électrostatique et les propriétés prévues pour les supraconducteurs.

Dans bien des cas, ces propriétés sont très voisines de celles connues pour les conducteurs usuels quand la rapidité de variation du champ est assez grande (une fréquence de 10 000 par exemple). On sait qu'alors, dans un conducteur usuel, la charge et le courant sont purement superficiels, qu'il est presque parfaitement réfléchissant, c'est-à-dire ne se laisse pénétrer par aucune impulsion ou énergie qui s'arrête à leur surface en donnant la pression de radiation, qui n'est autre que notre pression électromagnétique. Un conducteur usuel est un écran pour les vibrations électromagnétiques dont la fréquence est suffisante. On pourra imaginer une infinité d'expériences, où la différence de comportement entre conducteur et supraconducteur sera aussi petite que l'on voudra. Un anneau de cuivre étant plongé dans un champ magnétique alternatif de fréquence 6000 de longueur d'onde 50 km., se comporte à très peu près comme un anneau supraconducteur, le champ étant négligeable à  $1/10$  de millimètre de la surface. Comme la longueur d'onde du mouvement est très grande par rapport aux dimensions usuelles des anneaux, on pourra trouver le mouvement en supposant qu'à chaque instant l'état est l'état statique commandé par le champ actuel, d'après une proposition établie. On voit par suite qu'en diminuant indéfiniment la résistance de l'anneau soumis à un champ de période de plus en plus longue, l'anneau tend vers un anneau supraconducteur. Mais cette conclusion est en défaut si au lieu de champ alternatif, on a un champ variable de moyenne non nulle.

Même si on suppose la vitesse de variation suffisante pour que les courants induits n'aient pas le temps de s'éteindre on voit aisément que les courants s'opposent à la partie variable du champ mais se laissent traverser par sa partie constante, ce qui fait que si on fait tendre la résistance vers zéro, le conducteur s'oppose bien à ce que le champ qui le traverse varie, mais il reste un champ « congelé » pour parler comme les auteurs qui croyaient que ce phénomène était la règle dans le cas de la supraconductivité. L'état limite d'un conducteur ordinaire dépend donc du chemin suivi, et quelque grandes que soient leurs analogies dans le cas de la haute fréquence, le supraconducteur a de toute évidence des propriétés que ne possèdent pas les conducteurs ordinaires, propriétés d'ailleurs grandement simplificatrices des phénomènes.

**7. Quelques phénomènes particuliers.** — Induction unipolaire : on sait qu'on appelle dispositif d'induction unipolaire un dispositif analogue à la roue de Barlow, où il n'y a qu'un simple contact glissant. On voit de suite que si on considère un tel dispositif qui soit de révolution, et plus particulièrement une roue de Barlow, dont le métal soit supraconducteur, il ne se produira aucune force lors du passage du courant les forces magnétostatiques étant toutes perpendiculaires au mouvement possible. Inversement si on fait tourner la roue par un moyen extérieur, elle ne produira aucune force électro-motrice.

Condensateurs supraconducteurs : l'état d'équilibre d'un système de supraconducteurs étant la superposition d'un état magnétique statique et d'un état électrique statique, on voit que les propriétés électrostatiques des supraconducteurs sont absolument identiques à celles des autres conducteurs. Il n'y a en particulier aucune variation de la capacité d'un condensateur lors de l'établissement de l'état supraconducteur de ses armatures, puisque les phénomènes électrostatiques

ques et magnétostatiques sont parfaitement séparés et indépendants.

Effet Hall : quand un supraconducteur est dans un état permanent, son état est la superposition d'un état électrostatique et d'un état magnétostatique indépendants. Par suite, dans un état permanent, le potentiel électrique est le même en tous les points du supraconducteur, et le fait qu'il y circule des courants plongés dans des champs magnétiques n'y change rien. Il n'y a donc aucun effet Hall pour les supraconducteurs, ce qui est connu.

« C'est pour moi un devoir, à la fin de ce modeste travail, d'exprimer ma très profonde reconnaissance à M. Louis de Broglie.

Lorsque j'en eus terminé la première partie, j'étais à bon droit hésitant et perplexe, ne sachant quelle valeur accorder à de tels résultats. M. Louis de Broglie voulut bien les examiner avec la plus grande bienveillance, me faisant le plus grand honneur et me donnant le meilleur des encouragements.

C'est ensuite grâce à ses conseils éclairés que le travail du début a pu être complété, amélioré, et finalement mené à bien.

Je remercie également MM. Léopold Vigneron et Raymond Marrot, mes camarades de promotion à l'E. N. S. qui, au début de mes recherches, m'ont encouragé à continuer malgré les difficultés et les erreurs, et m'ont même donné les avis les plus utiles sur certains points, me témoignant ainsi la plus sincère amitié ».

# DEUXIÈME THÈSE

---

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Vérifications expérimentales  
de la théorie de la relativité en astronomie.

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 1<sup>er</sup> juin 1939.

*Le Doyen de la Faculté des Sciences,*

CH. MAURAIN.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

*Le Recteur de l'Académie de Paris.*

G. ROUSSY.