

T0105
1979/DS

1979.3
(043) D.F

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE
ET L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE
DE GRENOBLE

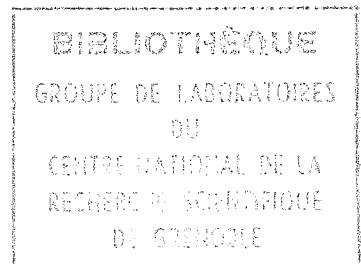
pour obtenir le grade

DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

par

Henry ETTINGER

SUJET



UN MODÈLE MACROSCOPIQUE DE LA
RÉSISTANCE DE KAPITZA.

ANALYSE D'UN MODÈLE D'ÉCHOS DE POLARISATION
POUR UNE POUDRE PIÉZOÉLECTRIQUE.

Soutenue le 27 juin 1979 devant la commission d'Examen :

Président :

A. LACAZE

Examineurs :

D. CHEEKE
J. LAJZEROVICZ
J.P. MANEVAL
M. RENARD
E. VAROQUAUX

Monsieur Gabriel CAU : Président

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE l'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. AMELARD Pierre
AMBROISE-THOMAS Pierre
ARNAUD Paul
ARVIEU Robert
AUBERT Guy
AYANT Yves

Mme BARBIER Marie-Jeanne
MM. BARBIER Jean-Claude
BARBIER Reynold
BARJON Robert
BARNAUD Fernand
BARRA Jean-René
BARRIE Joseph
BEAUDOING André

BELORIZKY Elie
BENZAKEN Claude
BERNARD Alain

Mme BERTRANDIAS Françoise
MM. BERTRANDIAS Jean-Paul

BEZES Henri
BILLET Jean

BLAMBERT Maurice
BONNET Jean-Louis

BONNET-EYMARD Joseph
Mme BONNIER Jeanne-Marie

MM. BOUCHERLE André
BOUCHEZ Robert

BOUTET DE MONVEL Louis
BRAVARD Yves
CABANEL Guy

Clinique de dermatologie
Parasitologie
Chimie
I.S.N.
Physique
Physique approfondie
Electrochimie
Physique Expérimentale
Géologie appliquée
Physique nucléaire
Biosynthèse de la cellulose
Statistiques
Clinique chirurgicale A
Clinique de Pédiatrie et Puériculture
Physique
Mathématiques appliquées
Mathématiques Pures
Mathématiques Pures
Mathématiques Pures
Clinique chirurgicale et Traumatologie
Géographie
Mathématiques Pures
Clinique Ophtalmologique
Clinique Hépato-gastro-entérologique
Chimie générale
Chimie et Toxicologie
Physique nucléaire
Mathématiques Pures
Géographie
Clinique rhumatologique et hydrologique

....

MM. CALAS François

CARLIER Georges

CARRAZ Gilbert

CAU Gabriel

CAUQUIS Georges

CHARACHON Robert

CHATEAU Robert

CHIBON Pierre

COEUR André

COUDERC Pierre

CRABBÉ Pierre

DERELMAS Jacques

DEGRANGE Charles

DELORMAS Pierre

DEPORTES Charles

DESRE Pierre

DODU Jacques

DOLIQUE Jean-Michel

DREYFUS Bernard

DUCROS Pierre

FONTAINE Jean-Marc

GAGNAIRE Didier

GALVANI Octave

GASTINEL Noël

GAVEND Michel

GEINDRE Michel

GERBER Robert

GERMAIN Jean-Pierre

GIRAUD Pierre

JANIN Bernard

JOLY Jean-René

KAHANE André

KLEIN Joseph

KOSZUL Jean-Louis

KRAVTCHEKO Julien

LACAZE Albert

LACHARME Jean

Mme LAJZEROWICZ Janine

MM. LAJZEROWICZ Joseph

LATREILLE René

Anatomie
Biologie végétale
Biologie animale et pharmacodynamie
Médecine légale et toxicologie
Chimie organique
Clinique Oto-rhino-laryngologique
Clinique de neurologie
Biologie animale
Pharmacie chimique et chimie analytique
Anatomie pathologique
C.E.R.M.O.
Géologie générale
Zoologie
Pneumophysiologie
Chimie minérale
Métallurgie
Mécanique appliquée (IUT I)
Physique des plasmas
Thermodynamique
Cristallographie
Maths Pures
Chimie Physique
Mathématiques pures
Analyse numérique
Pharmacologie
Electroradiologie
Mathématiques pures
Mécanique
Géologie
Géographie
Mathématiques pures
Physique générale
Mathématiques pures
Mathématiques pures
Mécanique
Thermodynamique
Biologie végétale
Physique
Physique
Chirurgie générale

MM. LATURAZ Jean	Biochimie Pharmaceutique
LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques appliquées
LE ROY Philippe	Mécanique (IUT I)
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire - I.S.N.
LOUP Jean	Géographie
Mie LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM. MALINAS Yves	Clinique obstétricale
MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
MAYNARD Roger	Physique du solide
MAZARE Yves	Clinique Médicale A
MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
MICOUX Max	Clinique Maladies Infectieuses
MOURIQUAND Claude	Histologie
MOUSSA André	Chimie nucléaire
NEGRE Robert	Mécanique
NOZIERES Philippe	Spectrométrie Physique
OZENDA Paul	Botanique
PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
PERAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
PERRET Jean	Sémiologie Médicale (Neurologie)
RACHAÏL Michel	Clinique Médicale B
RASSAT André	Chimie systématique
RENARD Michel	Thermodynamique
REVOL Michel	Urologie
Mme RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM. DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-Chirurgie
SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
SENGEL Philippe	Zoologie
SIBILLE Robert	Construction mécanique (IUT I)
SOUTIF Michel	Physique générale
TANCHE Maurice	Physiologie
VAILLANT François	Zoologie
VALENTIN Jacques	Physique Nucléaire
VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées
VAUQUOIS Bernard	Mathématiques appliquées
Mme VERAIN Alice	Pharmacie galénique

MM. VERAIN André	Biophysique
VEYRET Paul	Géographie
VICINAI Pierre	Biochimie médicale
<u>PROFESSEURS ASSOCIES</u>	
MM. GREENE Richard	Basses Températures
ROTH Walter	Cristallographie
SZYMSKI Zdzislaw	Institut des Sciences Nucléaires
<u>PROFESSEURS SANS CHAÎNE</u>	
MIEAGNIUS-DELOD Claudine	Physique pharmaceutique
ALARY Josette	Chimie analytique
MM. ARMAND Gilbert	Géographie
BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
BILLET Jean	Géographie
BOUCHET Yves	Anatomie
BRUGEL Lucien	Energétique (IUT I)
BUISSON Roger	Physique (IUT I)
BUTEL Jean	Orthopédie
CHARDON Michel	Géographie
COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
COLOMB Maurice	Biochimie médicale
CONTE René	Physique (IUT I)
DELOBEL Claude	M.I.A.G.
DEPASSEL Roger	Mécanique des Fluides
GAUTRON René	Chimie
GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
GLENET René	Chimie organique
GROULADE Joseph	Biochimie médicale
HAQUES Gérard	Calcul numérique
HOLLARD Daniel	Hématologie
HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
IDELMAN Simon	Physiologie animale
JALBERT Pierre	Histologie
JUENEN Pierre	Mathématiques appliquées

Mme KAHANE Josette
MM. KRAKOWIAK Sacha
KUHNS Gérard
LUI DUC Cuong
MACHE Régis
MARECHAL Jean
MIC-HOULIER Jean
Mme MINIER Colette
MM. PELMONT Jean
PERRIAUX Jean-Jacques
PFISTER Jean-Claude
Mlle PIERY Yvette
MM. RAYNAUD Hervé
REBECQ Jacques
REYMOND Jean-Charles
RICHARD Lucien
SARROT-REYNAUD Jean
SIROT Louis
Mme SOUTIF Jeanne
MM. STIEGLITZ Paul
VIALON Pierre

Physique
Mathématiques appliquées
Physique (IUT I)
Chimie organique - Pharmacie
Physiologie végétale
Mécanique (IUT)
Physique (IUT I)
Physique (IUT I)
Biochimie
Géologie et Minéralogie
Physique du solide
Physiologie Animale
M.I.A.G.
Biologie (CUS)
Chirurgie générale
Biologie végétale
Géologie
Chirurgie générale
Physique générale
Anesthésiologie
Géologie

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGRÉES

MM. ARMAND Yves
AURIAULT Jean-Louis
BACHELOT Yvan
BARGE Michel
BEGUIN Claude
BENABID Alim-Louis
Mme BÉRIEL Hélène
MM. BOITET Christian
BOST Michel
BOUCHARLAT Jacques
Mme BOUCHE Liane
MM. BERNARD Pierre
CHAMBAZ Edmond
CHAMPETIER Jean

Chimie (IUT I)
Mécanique (IUT I)
Endocrinologie
Neuro-chirurgie
Chimie organique
Médecine et chirurgie expérimentales
Pharmacodynamie
Mathématiques appliquées
Pédiatrie
Psychiatrie adultes
Mathématiques (CUS)
Gynécologie
Biochimie médicale
Anatomie et organogénèse

MM. CHERADAME Hervé
CHIAVERINA Jean
COHEN Henri
COLIN DE VERDIÈRE Yves
CONTANIN Charles
CORDONNIER Daniel
COULOMB Max
CROUZET Guy
CYROT Michel
DENIS Bernard
DOUCE Roland
DUSSAUD René
Mme ETERRADOSSI Jacqueline
MM. FAURE Jacques
FAURE Gilbert
FLOYRAC Roger
FOURNET Jacques
GAUTIER Robert
GIDON Maurice
GROS Yves
GUIDICELLI Henri
GUIGNIER Michel
GUITTON Jacques
HICHTER Pierre
JALBERT Pierre
JUNIER-LAVILLAVROY Claude
KOLODIE Lucien
LE NOC Pierre
MAGNIN Robert
MALLON Jean-Michel
MARTIN-BOUYER Michel
MASSOT Christian
NEMOZ Alain
NOUGARET Marcel
OUDET Bruno
PARAMELLE Bernard
PEFFEN René
PERRAUD Robert
PERRIER Guy

Chimie papetière (EFP)
Biologie appliquées (EFP)
Mathématiques pures
Maths pures
Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
Néphrologie
Radiologie
Radiologie
Physique du solide
Cardiologie
Physiologie végétale
Mathématiques (CUS)
Physiologie
Médecine légale
Urologie
Biophysique
Hépatogastro-entérologie
Chirurgie générale
Géologie
Physique (IUT I)
Chirurgie générale
Thérapeutique
Chimie
Chimie
Histologie
O.R.L.
Hématologie
Bactériologie-virologie
Hygiène et médecine préventive
Médecine du travail
Chimie (CUS)
Médecine interne
Thermodynamique
Automatique (IUT I)
M.I.A.G.
Pneumologie
Métallurgie (IUT I)
Chimie (IUT I)
Géophysique-Glaciologie

MM. PHELIP Xavier
RACINET Claude
RAMBAUD Pierre
RAPHAEL Bernard
Mme RENAUDET Jacqueline
MM. ROBERT Jean-Bernard
SAKAROVITCH Michel
SCHARRER René
Mme SEIGLE-MURANDI Française
MM. STOEHNER Pierre
STUTZ Pierre
VROUSOS Constantin

MAITRE DE CONFERENCE ASSOCIE

M. SIDNEY Stuart

MAITRE DE CONFERENCE DELIEUE

M. ROCHAT Jacques

PERSONNALITES HABILITEES PAR LE CONSEIL SCIENTIFIQUE DE L'U.S.M.G. A ETRE

DIRECTEURS DE THESE :

MM. BELANOVSKY Michel
BIAREZ Jean-Pierre
BOEHNER Jean-Pierre
BOIS Philippe
BOLLIER Louis
BOURRET Alain
BRODEAU François
CHAMBEROD André
CHAMBERON William
CHAPPERT Jacques
Mme CHATELIN Française
MM. COURT Jean
DELAZE Jean-Marc

MM. DESCLAUX Jean-Paul
DOMINGO Luna
DUC-JACQUET Marc
DUPRESNOY Alain
GIRLOUD Jean-Pierre
HERVE Alain
HILLAIRET Jacques
JORDAND Philippe
KLEITZ Michel
Mme LEJEUNE-JALABERT Monique
MM. LEMOINE Marcel
LETOURNEUR Jean
LIGEON Emile
MAISONNEUVE Bernard
MONDARON Paul
MOSER Pierre
PECCOUD François
PERETTO Pierre
PIERRE Jean-Louis
PHAM DINH Tuan
POGGI André
RIMAUDO Jean
ROBERT Raoul
ROMIER Guy
ROSSAT-MIGNOD Jean
ROUAULT Jacques
SAXOD Raymond
SOUQUET Jean-Louis
SUSCILLON Michel
TANE Michel
TEOULE Robert
VAILLON Michel
VILLAIN J.
VIVIAN Robert
Mme ZOLL

CENG/DRF/Chimie physique nucléaire
Maths pures
M.C.USS Maths appliquées
Maths pures
M.A. Mécanique
CENG/DRF/R.M.N.
CENG/DRF/Physique solide
M.R. CNRS Maths appliquées
Maître rech. CNRS ENSEIC
Maths pures
Géologie Alpine LA 69
Prof. Hon. Ecole mines Saint Etienne (Maître)
CENG/DRF/Physique solide
M.C.USS Maths appliquées
M.A. Zoologie
CENG/DRF/Physique solide
M.C. USS Maths appliquées
M.A. Chimie
Attaché rech. MATHS appliquées
Ingénieur CNRS Géophysique
M.A. Chimie générale
Maths appliquées
Prof. USS Maths appliquées
CENG/DRF/Diffraction neutronique
M.C. USS Maths appliquées
M.A. Zoologie
M.A. Chimie ENSEIC
CENG/DRF/Hématologie
Chimie
CENG/Radiobiologie
M.A. Géophysique
CENG/DRF/Diffraction neutronique
M.A. Géographie
Pharmacie DIJON (matière médicale)

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Président : M. Philippe TRAYNARD
Vice-Présidents : M. Georges LESPINARD
M. René PAUTHENET

Année Universitaire
1978-1979

PROFESSEURS TITULAIRES

MM BENOIT Jean
BESSON Jean
BLOCH Daniel
BOHNETAIN Lucien
BOHNETIER Etienne
*BOUDOURIS Georges
BRISSONNEAU Pierre
DUYLE-BODIN Maurice
COUHES André
DURAND Francis
FELICI Noël
FOULARD Claude
LAUCIA Roland
LONGEGNEUR Jean-Pierre
LESPINARD Georges
MOREAU René
PARIAUD Jean-Charles
PAUTHENET René
PERRET René
POLOUJADOFF Michel
TRAYNARD Philippe
VEILLON Gérard
*en congé pour études.

Electronique - Automatique
Chimie Minérale
Physique du Solide - Cristallographie
Génie Chimique
Métallurgie
Electronique - Automatique
Physique du Solide - Cristallographie
Electronique - Automatique
Electronique - Automatique
Métallurgie
Electronique - Automatique
Electronique - Automatique
Electronique - Automatique
Physique Nucléaire Corpusculaire
Mécanique
Mécanique
Chimie-Physique
Electronique - Automatique
Electronique - Automatique
Electronique - Automatique
Chimie - Physique
Informatique fondamentale et appliquée

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM BLINAN Samuël
BOUVARD Maurice
COHEN Joseph
GUYOT Pierre
JOURNET Jean-Claude
LACOURNE Jean-Louis
ROBERT André
ROBERT François
SABONNADIERE Jean-Claude
ZADKORNYI François

Génie Mécanique
Electronique - Automatique
Métallurgie Physique
Physique du Solide - Cristallographie
Electronique - Automatique
Chimie Appliquée et des Matériaux
Analyse numérique
Electronique - Automatique
Electronique - Automatique

MAITRES DE CONFERENCES

MM ANCEAU François
CHARTIER Germain
Mme CHERUY Arlette
CHIAVERINA Jean
IVANES Marcel
LESIEUR Marcel
MORET Roger
PIAU Jean-Michel
PIERRARD Jean-Marie
Mme SAUCIER Gabrielle
SOHM Jean-Claude

Informatique fondamentale et appliquée
Electronique - Automatique
Automatique
Biologie, biochimie, agronomie
Electronique - Automatique
Mécanique
Physique nucléaire - corpusculaire
Mécanique
Informatique fondamentale et appliquée
Chimie Physique

.../...

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maîtres de Recherche)
M FRUCHART Robert

MM ANSARA Ibrahim
BRONDEL Guy
CARRE René
DAVID René
DRIOT Jean
KLEITZ Michel
LANDAU Ioan-Doré
MERNET Jean
MUNIER Jacques

Maître de Recherche
Maître de Recherche
Maître de Recherche
Maître de Recherche
Maître de Recherche
Maître de Recherche
Maître de Recherche

Personnalités habilitées à diriger des travaux de recherche (Décision du Conseil Scientifique)
E.N.S.E.E.G.

MM BISCONDI Michel

BOOS Jean-Yves
DRIVER Julian
KOBYSANSKI André
LE COZE Jean
LESIGAT Pierre
RIEU Jean
SAINTFORT
SOULET Jean-Louis
CAILLET Marcel
COULON Michel
GUILHOT Bernard
LALAUZE René
LANCELOT Francis
SARRAZIN Pierre
SOUSTELLE Michel
THEVENOT François
THOMAS Gérard
TOUZAIN Philippe
TRAN MINH Canh
E.N.S.E.E.G.
BOREL Joseph
KAMARINOS Georges
E.N.S.E.E.G.P.

Ecole des Mines ST ETIENNE (dépt. Métallurgie)
Ecole des Mines ST ETIENNE (Métallurgie)
Ecole des Mines ST ETIENNE (Métallurgie)
Ecole des Mines ST ETIENNE (Métallurgie)
Ecole des Mines ST ETIENNE (Métallurgie)
Ecole des Mines ST ETIENNE (Métallurgie)
Ecole des Mines ST ETIENNE (Métallurgie)
C.E.N.Grenoble (Métallurgie)
U.S.M.G.
E.N.S.E.E.G. (Chimie Minérale Physique)
E.N.S.E.E.G. (Chimie Minérale Physique)
Ecole des Mines ST ETIENNE (Chim.Min.Ph)
Ecole des Mines ST ETIENNE (Chim.Min.Ph)
Ecole des Mines ST ETIENNE (Chim.Min.Ph)
E.N.S.E.E.G. (Chimie Minérale Physique)
Ecole des Mines ST ETIENNE (Chim.Min.Ph)
Ecole des Mines ST ETIENNE (Chim.Min.Ph)
Ecole des Mines ST ETIENNE (Chim.Min.Ph)
E.N.S.E.E.G. (Chimie Minérale Physique)
Ecole des Mines ST ETIENNE (Chim.Min.Ph)

Centre d'Etudes Nucléaires de GRENOBLE
Centre National Recherche Scientifique

Centre National Recherche Scientifique
Centre National Recherche Scientifique
Centre National Recherche Scientifique

Université des Sciences Sociales
Institut National Polytechnique GRENOBLE
Université Scientifique et Médicale GRENOBLE

*
*
*

R E M E R C I E M E N T S

Le travail exposé dans cette thèse a été effectué, pour une grande part, dans le laboratoire du Centre de Recherches sur les Très Basses Températures, qui a été dirigé successivement par Messieurs A. LACAZE et R. TOURNIER, que je remercie pour leurs encouragements et leurs conseils, et tout particulièrement Monsieur A. LACAZE pour me faire l'honneur de présider le Jury. J'exprime ma reconnaissance à Messieurs J. LAJZEROWICZ, J.P. MANEVAL, M. RENARD et E. VAROQUAUX pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail, m'aidant ainsi à le mener à son terme. J'ai été heureux de travailler sous la direction de D. CHEEKE, qui n'a cessé de me prodiguer conseils et encouragements. La collaboration aimable que j'ai rencontrée dans son laboratoire de l'Université de Sherbrooke mérite d'être notée ici, et Monsieur A. LAKHANI m'a été d'un grand secours pour l'élaboration de la deuxième partie de ce travail.

L'équipe du Centre de Calcul de l'ISN m'a été d'un précieux secours pour la mise au point des programmes en Fortran qui m'ont permis d'effectuer les nombreux calculs numériques nécessaires à ce travail.

Je ne peux oublier les nombreuses discussions avec Monsieur B. HEBRAL, qui ont souvent permis de préciser les objectifs recherchés. Qu'il en soit remercié ici.

Je remercie les secrétaires, et tout particulièrement Françoise MAHIEUX, qui ont assuré la frappe de ce document.

T A B L E D E S M A T I E R E S

PARTIE I : UN MODELE MACROSCOPIQUE DE LA RESISTANCE DE KAPITZA

	Pages
Tableau des symboles	1
 I - INTRODUCTION	 2
A) de 1950 à 1970	3
B) depuis 1970	3
II - FAITS EXPERIMENTAUX A EXPLIQUER	6
III - LE MODELE ACOUSTIQUE MACROSCOPIQUE	
A) Interface solide/liquide. Modèle de Khalatnikov	7
B) Couches d'hélium absorbées	12
C) Calcul des paramètres des couches	14
D) Principe du calcul de R_K	16
E) Couches absorbantes	18
F) Calcul de R_K dans le modèle de couches absorbantes	
1) à partir des phonons incidents du côté liquide	19
2) énergie incidente du côté solide	23
IV - ORIGINE MICROSCOPIQUE DE L'ATTENUATION DANS LES COUCHES	23
A) Hélium solide massif	24
B) Inhomogénéité des couches ; état amorphe	24
C) Modèles théoriques récents	26
D) Etude expérimentale du spectre d'excitation de films ultraminces : interactions phonons-rotons	26
Références partie I	29
APPENDICE I : Etude du vecteur de Poynting	31
APPENDICE II : Modes de surface	36
APPENDICE III : Résolution du système d'équations aux limites	43

	Pages
PUBLICATIONS includes :	
- Analysis of heat transfer between solids at low temperature, Can. J. Phys. <u>54</u> , pages 1749 à 1771 (1976)	46
- Macroscopic calculations of the Kapitza resistance between solids and liquid ⁴ He, Phys. Rev. Letters <u>37</u> , pages 1615 à 1628 (1976)	69
- The Kapitza resistance and phonon reflectivity between solids and liquid helium, à publier dans J. Low Temp. Phys., Juillet 1979	73

PARTIE II : ANALYSE D'UN MODELE D'ÉCHOS DE POLARISATION POUR UNE POUDRE PIEZOELECTRIQUE

Introduction	105
PUBLICATIONS includes :	
- Orientation dependance of the memory echo in piezoelectric powders, Solid State Comm. <u>25</u> , pages 289-291 (1978)	109
- Aspects théoriques des échos de polarisation pour une poudre piézo- électrique, Can. J. Phys. <u>56</u> , pages 865 à 871 (1978)	112

P A R T I E I

UN MODELE MACROSCOPIQUE DE LA RESISTANCE DE KAPITZA

SYMBOLES LES PLUS FREQUEMMENT UTILISES

- R_K, h_K : résistance et conductivité de Kapitza. $h_K = \frac{1}{R_K}$.
- v : vitesse.
- c, b : respectivement, vitesses de propagation des phonons longitudinaux et transverses.
- ρ : masse spécifique.
- $Z, \mathcal{Z}$: impédance acoustique.
- α, β : coefficients de transmission d'énergie (sans dimension).
- ω : pulsation.
- $\Pi, \vec{\Psi}$: potentiels (scalaire et vecteur) de vitesses.
- $\vec{k}, \vec{\chi}$: vecteurs d'ondes de phonons longitudinaux et transverses, respectivement.
- $\theta, \emptyset$: angles que font $\vec{k}$ et $\vec{\chi}$ avec la normale à la surface de séparation.
- ν : coefficient d'absorption.
- σ_{ik} : tenseur des contraintes.
- $\vec{P}$: vecteur de Poynting acoustique.
- $h, \hbar$: constantes de Planck.
- k_B : constante de Boltzmann.
- T : température absolue.

En dehors de $h, \hbar$ et k_B , ces symboles sont définis dans le texte, α, β et σ sont utilisés, en appendice, avec d'autres significations.

I - INTRODUCTION

Nous appelons, conformément à l'usage, résistance de Kapitza la résistivité thermique de contact entre un solide et l'hélium liquide. Quand un flux de chaleur $\dot{Q}$ traverse une surface S qui limite deux milieux, il apparaît de part et d'autre de cette interface une différence de température ΔT , et R_K est définie par :

$$R_K = \frac{S \cdot \Delta T}{\dot{Q}} \quad (1)$$

Par extension, nous donnons le même nom à la résistivité thermique de contact entre deux solides, en nous limitant aux basses températures, en général celles de l'hélium liquide, parfois jusqu'à celles de l'azote liquide. En ce qui concerne la résistance de Kapitza proprement dite, notre étude porte essentiellement sur l'intervalle de température de 1 à 2 K.

Comme son nom l'indique, l'effet étudié a été découvert par le physicien russe, en 1941, aux cours d'expériences sur la conductivité thermique de l'hélium superfluide. Le premier modèle théorique proposé, qui sert encore de référence, est celui de Khalatnikov, en 1952. Il expliquait l'existence du phénomène en considérant la transmission partielle des phonons thermiques à l'interface, et en la calculant à partir des paramètres mécaniques et acoustiques (masse spécifique et vitesse du son) des deux milieux. Pour des températures de 1 à 2 K, les prédictions aussi bien qualitatives (dépendance de R_K en T) que quantitatives (ordre de grandeur de R_K) ne sont pas confirmées par l'expérience.

De nombreux travaux tant expérimentaux que théoriques, ont traité de la résistance de Kapitza, et nous allons donner les points essentiels qui nous paraissent nécessaires à l'introduction de notre modèle.

A) De 1950 à 1970.

R_K est mesuré directement, pour de nombreuses substances, essentiellement entre 1 et 2 K. Au-dessus du point lambda de l'hélium, celui-ci devient un très mauvais conducteur thermique, ce qui rend les mesures presque impossibles. Les conclusions suivantes ont pu être dégagées :

- vers 2 K, la résistance mesurée est de 10 à 500 fois plus faible que celle prévue par le modèle de Khalatnikov, et cela correspond à un facteur de transmission des phonons incidents, du côté du solide, de 10 à 50 %, au lieu de moins de 1 %.
- les mesures sont peu reproductibles, en particulier d'un appareil à l'autre et des rapports de 3 ou 4 entre résultats sont monnaie courante.
- compte tenu du point précédent, l'état physique de la surface, en particulier le nombre de dislocations ne semble pas jouer un rôle prépondérant (aux plus basses températures, vers 0,1 K, l'état de surface joue un plus grand rôle).
- si le solide est un métal, ses électrons libres ne contribuent pas notablement au transfert de chaleur - trop "facile" - constaté : R_K varie peu quand le métal passe de l'état normal à l'état supraconducteur.
- les forces de Van der Waals, induisent, au voisinage de l'interface, une couche d'hélium comprimé et donc plus dense, éventuellement solide, de 5 à 10 Å, et qui peut servir d'adaptateur acoustique. En introduisant l'influence de cette couche dans le modèle de Khalatnikov, on prédit un gain de conductivité d'un facteur 3 à 4, vers 2 K.
- pour le contact solide/solide, et ce jusque vers 50 ou 100 K, le modèle théorique et acoustique de Little, qui est une extension naturelle de Khalatnikov, donne d'excellentes prédictions.

B) Depuis 1970.

1) Les techniques de mesure se diversifient et donnent des résultats plus détaillés :

On étudie la réflectivité des impulsions de chaleur dans un cristal diélectrique, et sa variation en fonction de la quantité d'hélium (ou éventuellement d'un autre corps) absorbé à la surface. On

constate alors que la réflectivité passe de 1 (pour le vide) à quelques dixièmes pour quelques monocouches d'hélium absorbées. De plus, les réflectivités anormalement faibles par rapport au modèle acoustique usuel sont caractéristiques des systèmes "quantiques", hélium ou hydrogène (0,8 à 0,3 au lieu de plus de 0,99).

En utilisant des jonctions tunnel, on peut observer et émettre des phonons presque monochromatiques. Des expériences récentes montrent que pour un cristal clivé dans l'hélium, la transmission diminue beaucoup (donc devient moins anormale) tout en restant très supérieure à celle prévue par Khalatnikov, pour des fréquences de l'ordre de 100 GHz.

Un spectromètre spin-phonon permet de mesurer un coefficient de transmission moyen (par rapport à l'angle d'incidence) $\bar{\alpha}$ pour des fréquences variant de 20 à 250 GHz. $\bar{\alpha}$ varie rapidement, en croissant notablement, entre 30 et 100 GHz.

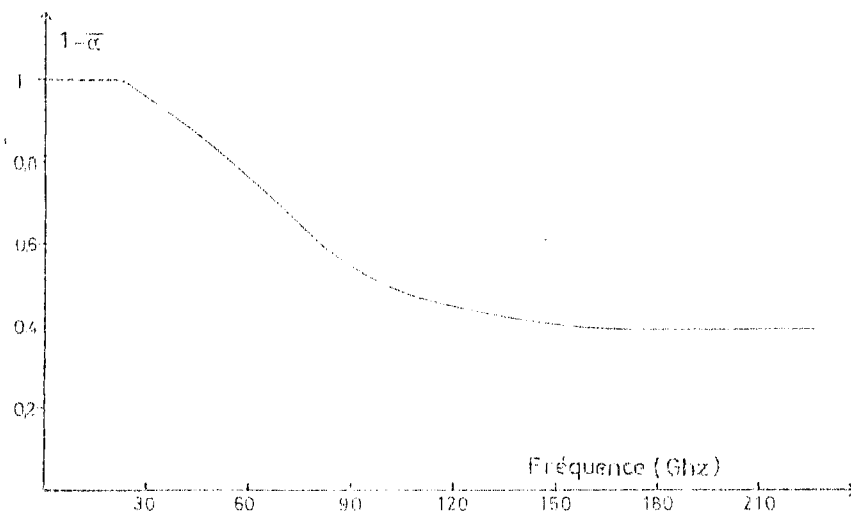


FIGURE 1

Coefficient de réflexion, $1 - \bar{\alpha}$, pour des phonons à l'interface SrF_2/He liquide. Tiré de E.S. Sabisky et C.H. Anderson.

L'étude de la répartition angulaire des phonons émis du solide dans l'hélium liquide donne à penser qu'il existe deux processus de transmission, l'un respectant les lois de Descartes de la diffraction, l'autre donnant une émission hors du cône critique (de faible ouverture) et dominant le transfert de chaleur entre 1 et 2 K. De plus, la transmission semble dissymétrique, selon que les phonons aillent du solide au liquide ou l'inverse.

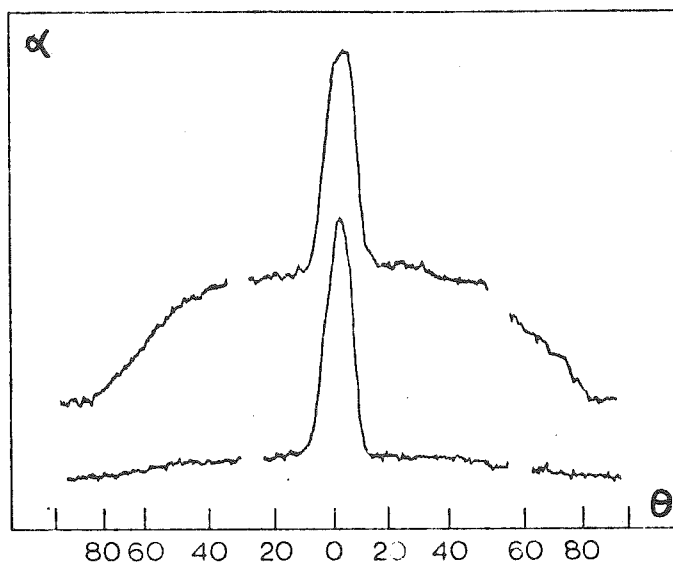


FIGURE 2

Coefficient de transmission pour des phonons thermiques ($\sim 1,5$ K) à travers l'interface NaF/ 4 He. Courbe supérieure : solide au liquide. Courbe inférieure : liquide au solide. Les unités de α sont arbitraires. D'après Wyatt, Page et Sherlock.

De manière générale, l'état physique de la surface, si celle-ci n'est pas volontairement endommagée, joue, expérimentalement, un rôle beaucoup moins déterminant que sa propriété chimique. Des mesures récentes, qui atteignent une reproductibilité de quelques pour cent, montrent que les dislocations ont une influence notable (un facteur 2 ou 3 vers 2 K) mais leur présence ne fait qu'abaisser les valeurs de R_K par rapport à celles obtenues pour des échantillons très soignés mécaniquement. Cela n'infirme pas l'importance essentielle de la contamination chimique éventuelle, et nous pensons que celle-ci est la cause majeure de la non-reproductibilité des mesures de R_K , en général.

2) De nombreux modèles théoriques sont proposés et peuvent être classés en deux catégories : macroscopiques et microscopiques.

Pour la première catégorie, citons :

- Haug, Weiss, Peterson et Anderson ont modifié le modèle de Khalatnikov en introduisant de l'absorption dans le solide, due aux dislocations au voisinage de la surface.
- Opsal et Pollak ont perfectionné le modèle précédent en tenant compte de la couche dense d'hélium prévue par Challis, Dransfeld et Wilks.
- Cheeke et Ettinger considèrent que la couche précitée est notablement absorbante, et ce modèle est l'objet d'une partie importante de cette thèse. Il sera donc détaillé et justifié ultérieurement.

De nombreux modèles microscopiques ont été présentés et nous ne pourrions les citer tous. Les principaux processus de transfert de chaleur étudiés ont été : les défauts localisés résonnants (Vuorio), les atomes d'hélium absorbés (Sheard et Toombs), les micro-défauts (Khater), l'effet tunnel d'atomes d'hélium (Nakayama). Ces modèles, soit, ne prévoient pas le bon ordre de grandeur, soit, ont des paramètres indéterminés. Récemment, un calcul plus complet de Maris, qui résout l'équation de Schrödinger pour un atome d'hélium à l'interface, dans le potentiel des phonons incidents du solide, donne des résultats qui peuvent le relier à notre modèle.

II - FAITS EXPERIMENTAUX A EXPLIQUER

La liste qui suit n'a pas la prétention d'être exhaustive, mais elle contient les éléments qui, à notre avis, caractérisent le problème.

- le phénomène est analogue pour l'hélium 3 et l'hélium 4 (malgré des propriétés physiques macroscopiques et quantiques très différentes) ;
- l'écart avec la théorie acoustique de Khalatnikov est important pour l'hélium et l'hydrogène (ou le deuterium) mais pas pour d'autres milieux ;

- l'accord avec le modèle acoustique est meilleur aux plus basses températures et, ce qui est relié, les phonons d'une fréquence supérieure à 20 ou 30 GHz* passent mieux du solide au liquide ;
- les phonons "thermiques" émergent dans le liquide dans toutes les directions ;
- les phonons transverses transfèrent (aussi efficacement que les autres) de l'énergie au liquide, même à incidence normale ; **
- pour une surface très propre, que ce soit physiquement (si on élimine les dislocations) ou chimiquement (cristal clivé), R_K est plus grand, mais reste très inférieur à la valeur prévue par Khalatnikov.

* Phonons majoritaires vers 0,5 K.

** Alors que, pour un modèle acoustique usuel, ils ne sont pas couplés au liquide.

III - LE MODELE ACOUSTIQUE MACROSCOPIQUE

A) Interface solide/liquide. Modèle de Khalatnikov.

Le modèle que nous avons développé est acoustique, en ce sens qu'il traite les phonons comme des ondes sonores se propageant dans des milieux continus et homogènes - et isotropes aussi, pour la relative simplicité des calculs, mais ce n'est pas intrinsèque au modèle. Pour dégager les idées principales, nous allons rappeler brièvement en quoi consiste le calcul de Khalatnikov, qui, comme nous l'avons dit, sert de référence à tous les modèles macroscopiques. Considérons que de l'hélium liquide remplit le demi espace $z < 0$, et un solide le demi espace $z > 0$. Nous appellerons c_1 , ρ_1 , c_2 , b_2 , ρ_2 respectivement la vitesse du son dans l'hélium, la masse spécifique de l'hélium, les vitesses des modes longitudinaux et transverses dans le solide et sa masse spécifique. Etudions une onde, sonore plane, incidente dans le liquide, de vecteur d'onde $\vec{k}_1$, de pulsation ω . Nous savons que l'interface donne lieu à une réflexion et à des réfractions, et que les vitesses dans chaque milieu, peuvent être écrites sous la forme :

$$\vec{v}_1 = \vec{\nabla} \cdot \Pi_1 \quad (2)$$

$$\vec{v}_2 = \vec{\nabla} \cdot \Pi_2 + \vec{\nabla} \cdot \vec{\psi}_2$$

Π_1 , Π_2 et $\vec{\psi}_2$ sont des potentiels de vitesses (de déplacement) associés respectivement aux modes longitudinal dans l'hélium, longitudinal dans le solide et transverse dans le solide. Ce dernier mode est celui que nous appelons t_1 , les déplacements ayant lieu dans le plan d'incidence, par opposition au mode transverse t_2 ou les déplacements sont normaux à ce plan, et donc parallèles à l'interface. Ce dernier mode n'est pas excité par une onde plane incidente du liquide, et réciproquement, dans un modèle acoustique sans absorption, ne transmet pas d'énergie au liquide.

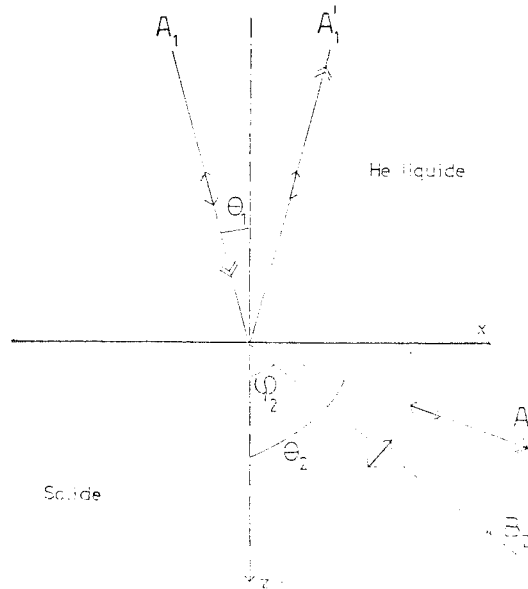


FIGURE 3

Schéma des divers modes correspondants à une onde plane incidente dans l'hélium liquide.

En prenant $\vec{k}_1$ dans le plan xoz , et en choisissant (ce qui est loisible), $\psi_{2x} = \psi_{2z} = 0$, $\psi_{2y} = \psi$, si θ_1 est l'angle d'incidence, on a :

$$\Pi_1 = [A_1 e^{ik_1(x \sin \theta_1 + z \cos \theta_1)} + A'_1 e^{ik_1(x \sin \theta_1 - z \cos \theta_1)}] e^{-i\omega t}$$

$$\Pi_2 = A_2 e^{ik_2(x \sin \theta_2 + z \cos \theta_2)} e^{-i\omega t}$$

$\psi = B_2 e^{i\chi_2(x \sin\phi_2 + z \cos\phi_2)} \cdot e^{-i\omega t}$
 $\vec{k}_2$ et $\vec{\chi}_2$ sont les vecteurs d'ondes associés aux modes transmis.
 avec $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$, $k_2 = \frac{\omega}{c_2}$, $\chi_2 = \frac{\omega}{b_2}$.

Ecrivons maintenant que, à l'interface, la vitesse normale et les composantes du tenseur des contraintes sont continues. Nous obtenons d'abord

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2} = \frac{\sin\phi_2}{b_2}$$

c'est-à-dire la loi de Snell-Descartes.

De plus :

$$(A_1 - A'_1)k_1 \cos\theta_1 = A_2 k_2 \cos\theta_2 + B_2 \chi_2 \sin\phi_2 \quad (5)$$

$$0 = A_2 k_2^2 \sin 2\theta_2 - B_2 \chi_2^2 \cos 2\phi_2$$

$$(A_1 + A'_1)\rho_1 = (A_2 \cos 2\theta_2 + B_2 \sin 2\phi_2)\rho_2$$

En résolvant ce système, on trouve :

$$\frac{A'_1}{A_1} = r = \frac{Z_2 \cos^2 2\phi_2 + \mathcal{Z}_2 \sin^2 2\phi_2 - Z_1}{\Delta} \quad (6)$$

$$\frac{A_2}{A_1} = t_\ell = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{2Z_2 \cos 2\phi_2}{\Delta}$$

$$\frac{B_2}{A_1} = t_t = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{2\mathcal{Z}_2 \sin 2\phi_2}{\Delta}$$

avec $\Delta = Z_1 + Z_2 \cos^2 2\phi_2 + \mathcal{Z}_2 \sin^2 2\phi_2$

et où $Z_1 = \frac{\rho_1 c_1}{\cos\theta_1}$, $Z_2 = \frac{\rho_2 c_2}{\cos\theta_2}$ et $\mathcal{Z}_2 = \frac{\rho_2 b_2}{\cos\phi_2}$

sont les impédances acoustiques associées aux diverses ondes.

Le coefficient de réflexion, en énergie, R, vaut $|r|^2$ et le coefficient de transmission, α , vaut $1-R$. Les phonons du liquide étant en équilibre thermique à la température T, et chaque phonon de pulsation ω possédant une énergie $\hbar\omega$, le flux d'énergie qui passe du

liquide au solide, par unité de surface :

$$\frac{W}{S} = \int N \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right) c_1 \cos\theta_1 \hbar\omega \alpha \cdot \frac{d^3\vec{k}_1}{(2\pi)^3} \quad (7)$$

k_B est la constante de Boltzmann et N la loi de distribution des phonons dans l'espace des vecteurs d'onde. Pour les températures considérées, nous prendrons la loi de Planck, sans fréquence de coupure, qui est le cas limite, pour les températures faibles par rapport à la température de Debye, de son modèle de spectre de phonons thermiques. Comme α dépend de θ_1 mais pas de ω , l'intégrale se scinde en deux :

$$\frac{W}{S} = \int_0^\infty N c_1 \hbar\omega \frac{2\pi\omega^2 d\omega}{c_1 (2\pi)^3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha(\theta_1) \cos\theta_1 d(\cos\theta_1) \quad (8)$$

D'après la forme de la fonction de Planck, la première intégrale est proportionnelle à T^4 . En tenant compte de ce que $\rho_1 \ll \rho_2$, $c_1 \ll b_2$ ou c_2 , on obtient finalement :

$$\frac{W}{S} = \frac{4\pi^5}{15} \frac{(k_B T)^4}{h^3} \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 b_2} f\left(\frac{c_2}{b_2}\right) \quad (9)$$

f étant une fonction d'une seule variable. Ce flux est équilibré par un autre, égal, en provenance du solide, à l'équilibre thermique entre les deux milieux. Si maintenant, le solide est à une température $T + \Delta T$, il émettra un flux supplémentaire $\dot{Q}$ tel que $\dot{Q} = \Delta W \approx \frac{dW}{dT} \cdot \Delta T$ si $\frac{\Delta T}{T}$ est assez petit et par suite

$$R_K T^3 = \frac{15h^3}{16\pi^5 k_B^4} \frac{\rho_2 b_2^3}{\rho_1 c_1} \cdot \frac{1}{f} \quad (10)$$

La fonction f sans dimension, reste de l'ordre de l'unité pour des valeurs physiquement réalisables du rapport $\frac{c_2}{b_2}$.

Il y a trois remarques essentielles sur ce modèle :

- comme α ne dépend pas de ω , R_K varie en T^{-3} .
- les déplacements de la surface du solide parallèlement à elle-même ne sont pas couplés au liquide. Par suite, le mode transverse t_2 , pour lequel le déplacement est normal au plan d'incidence, ne transmet pas d'énergie au liquide, pas davantage que le mode transverse étudié plus haut pour une incidence normale.
- les lois de Snell-Descartes nous indiquent que, pour $\theta_1 > \theta_0 = \arcsin\left(\frac{c_1}{b_2}\right)$, il y a réflexion totale, et donc que toute l'énergie incidente en dehors du cône de demi angle au sommet θ_0 , appelé cône critique,

est réfléchi. On constatera aisément que, dans ce cas, Z_1 est réel, mais Z_2 et Z_2 sont imaginaires purs, A_1 et A'_1 ont même module et R vaut 1. Pour des solides usuels, θ_0 est un angle petit ($\sim 6^\circ$ pour le cuivre). De plus, pour $\theta_1 < \theta_0$, Z_2 et Z_2 sont en général grands par rapport à Z_1 , et par la suite le module de r est très proche de 1. Ce modèle prévoit donc que seule une petite partie de l'énergie incidente à l'intérieur du cône critique est transmise au solide (typiquement 10^{-3}).

S'il existe un processus d'absorption dans le solide, au voisinage de la surface, cela augmentera l'énergie transmise, et diminuera donc R_K . Une manière simple d'introduire cette absorption dans le modèle est de considérer, de manière formelle, que les vecteurs d'onde sont complexes et, ce qui revient au même, que les vitesses du son sont complexes, de la forme $v' = \frac{v}{1 + i\nu}$, dans le solide. Le libre parcours d'un phonon est alors $\ell = \frac{\lambda}{2\pi\nu}$, si λ est sa longueur d'onde. Avec ces hypothèses, le cône critique disparaît. En effet, pour des angles d'incidences plus grands que θ_0 , il existe dans le solide non absorbant une onde évanescence, qui ne transmet pas d'énergie. Il s'agit juste d'un état vibratoire stationnaire localisé au voisinage immédiat de la surface. L'atténuation de ce mode, dans un solide absorbant, transférera donc de l'énergie du liquide au solide. Par suite, même si la transmission est plus faible, elle n'est pas nulle au-delà de θ_0 . θ_0 étant de quelques degrés, un tel processus peut augmenter notablement h_K . Comme un tel modèle ne contient toujours aucune longueur caractéristique, α reste indépendant de ω , et par suite $R_K T^3$ est constant. Des processus d'absorption dans le solide, au voisinage de la surface, existent sans nul doute, par exemple à cause des dislocations. Nous avons déjà indiqué que ce phénomène ne nous paraît pas fondamental, en nous basant sur les résultats expérimentaux.

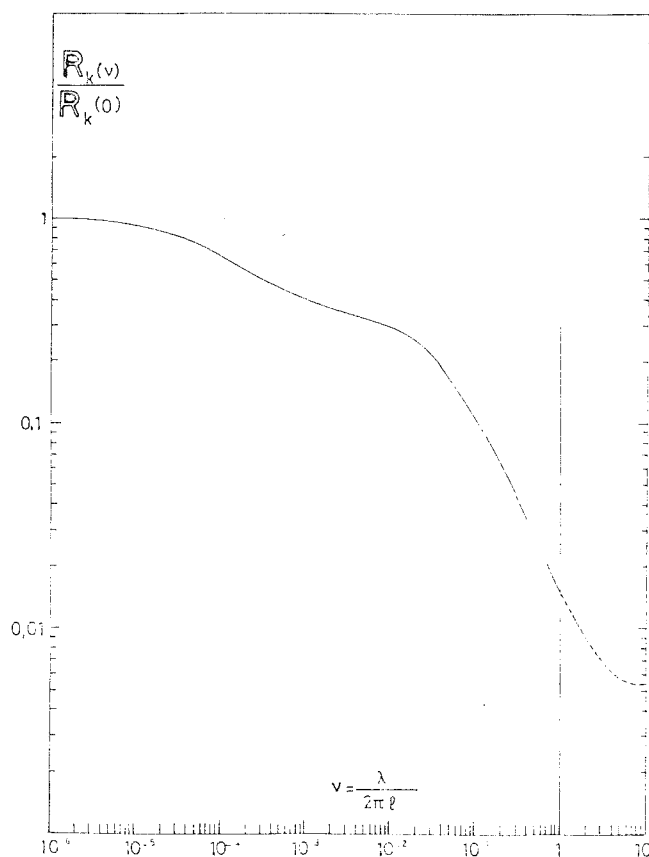


FIGURE 4

Contact He liquide/Cu absorbant. R_K fonction de v , coefficient d'absorption du cuivre; comme $v = 1$ correspond à un fluide visqueux, la portion $v > 1$ n'a aucun sens physique.

B) Couches d'hélium absorbées.

Au voisinage de l'interface, les forces de Van der Waals jouent un rôle prépondérant et donnent une attraction notable entre le solide et les premières couches monoatomiques de l'hélium. Ces forces sont dues aux interactions (attractives) entre les dipôles fluctuants spontanés et les dipôles induits par ces derniers. La théorie statistique et "continue" de ce phénomène, développée par

Lifchitz, nous servira de base. Ces forces correspondent, pour des distances de quelques Å entre deux milieux semi-infinis, à des pressions de quelques dizaines à quelques centaines d'atmosphères. Pour la plupart des solides ou des liquides, si l'on n'est pas au voisinage d'un point critique ou singulier, comprimer jusqu'à 100 ou 200 bars ne change pas les propriétés acoustiques (densité et vitesses du son) de plus de quelques pour cent. Cette variation ne peut avoir qu'une influence faible sur le phénomène étudié. Etant donné les incertitudes sur les vitesses du son et les approximations faites sur le spectre de phonons, il n'est jamais tenu compte de cet effet pour les calculs de résistance thermique de contact entre solides (autre que l'hélium et peut-être l'hydrogène). L'hélium liquide, par contre, vers 2 K et au-dessous, à cause de sa nature "quantique" (c'est-à-dire de l'importance relative de l'énergie de point zéro, par exemple) est très compressible, et surtout se solidifie aux environs de 30 bars. Il peut donc être important de tenir compte de cette couche plus dense, et même de une à deux monocouches atomiques qui sont soumises à une pression équivalente suffisante pour être "solides". Les vitesses du son étant 2 à 5 fois plus importantes, et la densité de 50 % à 2 fois plus grandes, pour le solide (selon sa pression) que pour le liquide, nous avons là un système susceptible d'adapter un peu mieux les impédances acoustiques des milieux extrêmes. De plus, il est évident que ces couches ne seront "vues" que par les phonons dont la longueur d'onde n'est pas trop grande par rapport à leur épaisseur. A suffisamment basse température, il est naturel que ces couches n'aient pas d'effet sensible sur la transmission des phonons thermiques. Il peut être utile de remarquer que la présence de ces couches adaptatrices, si elles ne sont pas supposées diffusantes ou absorbantes, n'influe pas sur l'existence du cône critique (ni sur la valeur de son ouverture) pour les phonons incidents du liquide. Elle ne fait qu'augmenter le coefficient de transmission pour les phonons incidents à l'intérieur de ce cône.

Pour évaluer les propriétés acoustiques de ces couches, plusieurs hypothèses sont faites. D'abord que nous pouvons traiter des épaisseurs de matériau de l'ordre de une couche atomique comme un continuum. D'autre part, que l'énergie potentielle d'interaction de Van der Waals, calculée d'après un modèle de Lifchitz, et qui lui aussi n'est en toute rigueur valable que pour des milieux continus, peut être extrapolée jusqu'à ces distances de l'interface.

Ces hypothèses, qui peuvent paraître grossières, sont souvent utilisées pour les calculs relatifs aux films minces d'hélium superfluide, et l'accord souvent très bon des résultats théoriques ainsi obtenus avec l'expérience, pour une grande variété de propriétés physique de ces couches, justifie amplement ces approximations.

C) Calcul de paramètres des couches.

Des expériences de résonance de phonons de quelques dizaines de gigahertz, sur des films minces d'hélium superfluide, d'épaisseur variant de dix à quelques centaines d'Angströms, ont permis de vérifier que le modèle de Lifchitz était parfaitement valide dans ce domaine (Sabisky et Anderson). On peut alors, pour des distances d à l'interface, inférieures à 20 ou 30 Å, évaluer le potentiel d'attraction de Van der Waals, pour un atome d'hélium, sous la forme :

$$V = - \frac{\gamma}{d^3}$$

En traitant alors l'hélium en milieu continu, on obtient :

$$\frac{\gamma}{md^3} = \int_{p(d=\infty)}^{p(d)} \frac{dp}{\rho(p)}$$

p est la pression équivalente à la distance d , ρ la masse spécifique à cette même distance (et qui est une fonction expérimentalement connue de la pression) et m la masse d'un atome d'hélium.

On peut résoudre, numériquement, cette équation et déterminer ainsi $p(d)$. Le paramètre γ , calculé théoriquement à partir de la structure de bande des électrons libres pour les métaux, et des potentiels d'ionisations pour les diélectriques, a été pris dans les articles publiés par Sabisky et Anderson. Pour la plupart des solides usuels, on trouve une pression de $p_0 = 30$ atmosphères pour une distance d_0 de 6 à 8 Å. Une monocouche d'hélium solide correspondant à 3,5 Å environ, on voit donc que l'on peut évaluer à environ 2 couches atomiques l'épaisseur de l'hélium très modifié par la présence du substrat solide.

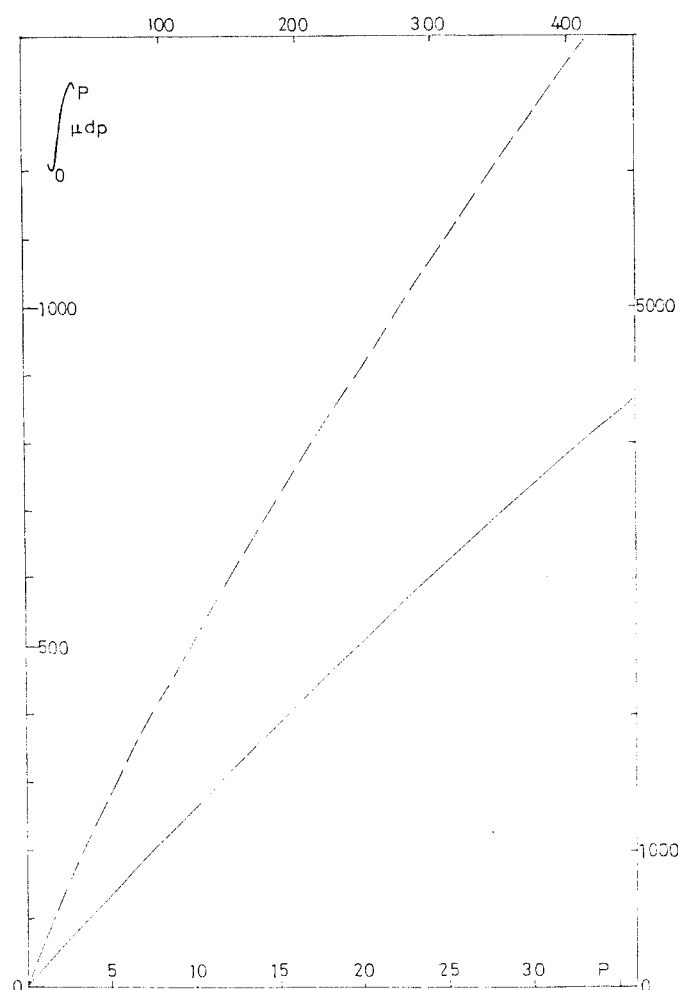


FIGURE 5

Courbe de $\int_0^P \mu dp$ en fonction de p . μ , volume molaire de l'hélium 4 est en cm^3 , p en atmosphère. La courbe en trait pointillé concerne les hautes pressions : abscisses en haut, ordonnées à droite de la figure.

Pour des distances inférieures à d_0 , on peut soit considérer que le "solide" est homogène, à la pression p_0 , soit continuer l'extrapolation et prendre un système de plusieurs couches solides. Dans notre étude, nous avons considéré parfois une, parfois deux couches.

Les valeurs de la masse spécifique $\rho(d)$ et des vitesses du son (c pour les modes longitudinaux, b pour les modes transverses, dans le solide) seront supposées égales à celles mesurées pour des volumes macroscopiques, à la même pression. En ce qui concerne b , étant

donné le peu de connaissance sur la structure "cristalline" de ces couches, et comme de plus c'est une moyenne pour les diverses directions (car si le modèle considère des solides isotropes, ce n'est pas le cas de l'hélium solide) nous avons pris, systématiquement $b = c/2$.

D) Principe du calcul de R_K .

Il faut calculer le flux de chaleur par unité de surface, $\frac{W}{S}$, qui passe du liquide au solide à l'équilibre thermique, et pour ce faire, il faut évaluer le coefficient de transmission $\alpha(\theta_1, \omega)$ de l'énergie d'un phonon incident, de pulsation ω et d'angle d'incidence θ_1 . On considère toutes les ondes planes engendrées par l'onde plane incidente. Il y a une onde réfléchie dans l'hélium, quatre pour chaque couche solide, et deux pour le substrat. Pour chaque surface de séparation, on écrit les conditions aux limites, c'est-à-dire la continuité de la vitesse (deux composantes) et de deux composantes du tenseur des contraintes pour un contact solide/solide, la continuité de la vitesse normale et de la pression et la nullité des contraintes tangentielles pour un contact solide/liquide. On obtient ainsi un système linéaire, que l'on peut résoudre numériquement, et déterminer ainsi les amplitudes des modes réfléchis et transmis.

Le calcul littéral serait très laborieux, même pour une seule couche solide. Il s'agirait de résoudre un système de 7 équations, en nombres complexes (à cause des déphasages dans la couche). De plus, les intégrales ne pourraient certainement pas être évaluées de manière formelle. Le calcul numérique est donc nécessaire. En fait, ce n'est pas W que nous cherchons à calculer, mais h_K , qui est proportionnel à $\frac{dW}{dT}$.

$$\frac{W}{S} = \frac{\hbar}{4\pi^2 c_1^2} \int_0^\infty \frac{\omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1} d\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha(\theta_1, \omega) \sin\theta_1 \cos\theta_1 d\theta_1 \quad (16)$$

$$h_K = \frac{d}{dT} \left(\frac{W}{S} \right) = \frac{\hbar^2}{4\pi^2 c_1^2 k_B T^2} \int_0^\infty \frac{\omega^4 d\omega}{\left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1 \right]^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha(\theta_1, \omega) \sin\theta_1 \cos\theta_1 d\theta_1$$

(17)

Prenons $u = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$ comme variable à la place de ω .

$$h_K = \frac{k_B^4 T^3}{4\hbar^3 \pi^2 c_l^2} \int_0^\infty \frac{u^4 du}{(e^u - 1)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha(\theta_1, \frac{k_B T u}{\hbar}) \sin\theta_1 \cos\theta_1 d\theta_1 \quad (18)$$

C'est cette expression qui sert au calcul numérique de h_K et de son inverse R_K . Cette forme montre bien que si α ne dépend pas (ou peu) de ω , $R_K T^3$ doit être constant. Pour le calcul effectif de α , nous ne résolvons pas un système dont la dimension est variable (dépendant du système de couches considéré) mais nous nous ramenons à un système de 3 équations, dont les variables sont les amplitudes du mode réfléchi dans l'hélium et des deux modes transmis dans le substrat. Quelques détails sur ce calcul sont donnés dans l'appendice III.

Pour regarder plus en détail comment se transmet l'énergie dans ce système, nous avons considéré le vecteur de Poynting acoustique qui représente le flux d'énergie par unité de surface. En notation tensorielles, celui est défini par :

$$P_i = - \sigma_{ij} v_j \quad (19)$$

σ_{ij} est le tenseur des contraintes et $\vec{v}$ la vitesse du déplacement.

Comme nous utilisons la représentation complexe des phénomènes sinusoïdaux (le terme $e^{-i\omega t}$ étant omis dans les formules), il faut utiliser la forme :

$$\tilde{P}_i = - \frac{1}{2} \text{ Réél} (\sigma_{ij} v_j^*) \quad (20)$$

v_j^* est le complexe conjugué de v_j .

$\tilde{P}$ doit être interprété comme un vecteur de Poynting efficace, c'est-à-dire la moyenne dans le temps du vecteur instantané. C'est cette valeur efficace qui nous concerne, évidemment. Comme il n'y a pas accumulation d'énergie aux interfaces, la composante normale de P doit être continue. Ceci est une conséquence immédiate de la continuité des composantes adéquates de σ et v , qui sont justement les conditions aux limites qui permettent de déterminer les amplitudes des ondes. A titre de vérification, nous avons contrôlé l'égalité des valeurs (numériques) de $\tilde{P}_N$ dans le liquide et le substrat.

E) Couches absorbantes.

Le modèle que nous proposons cherche à tenir compte des faits expérimentaux suivants :

- même pour les échantillons les mieux préparés, ceux pour lesquels il n'existe pas (ou peu) de processus susceptibles d'absorber de l'énergie au voisinage immédiat de l'interface, dans le solide, le modèle acoustique considéré jusqu'alors est en grand désaccord avec l'expérience.
- pour les premières couches atomiques de l'hélium, le libre parcours moyen des phonons est très court, de l'ordre de grandeur de leur longueur d'onde.
- les études de réflectivité montrent bien que le phénomène est inhérent à ces couches.

Nous considérons donc ces couches comme absorbantes, et allons voir en quoi cela augmente le transfert d'énergie du liquide au solide.

Pour les phonons incidents à l'intérieur du cône critique, c'est-à-dire presque normalement, le fait que les couches soient absorbantes change peu de chose. En effet, la longueur d'onde des phonons thermiques, pour les températures considérées, est toujours assez grande par rapport à l'épaisseur d'une couche, et la portion de l'énergie qui peut être absorbée dans la couche est faible pour une incidence paranormale. Les phonons majoritaires ont des longueurs d'ondes de 20 à 100 Å dans les couches. Par contre, les phonons incidents à l'extérieur du cône critique vont être guidés par ces couches. En effet, ils seront réfléchis totalement à la surface du substrat, et partiellement à la surface de l'hélium liquide. Comme les vitesses du son sont plus grandes pour l'hélium solide que pour l'hélium liquide, les directions de propagation feront un angle plus grand avec la normale dans les couches, et y parcourront donc un chemin long par rapport à l'épaisseur des dites couches avant d'en émerger. S'il y existe des processus d'atténuation, une partie notable de l'énergie incidente hors du cône critique, c'est-à-dire de presque toute l'énergie incidente, peut être "piégée". Cette énergie localisée ne s'accumule pas bien entendu, elle est réémise vers l'hélium liquide et le substrat solide (la température de ces 10 ou 15 Å d'hélium n'augmente pas indéfiniment !).

Comme les couches sont assez bien adaptées acoustiquement à l'hélium liquide, de 10 à 50 % de l'énergie incidente y pénètre. Ceci

est à comparer aux 1 % (pour du cuivre) ou moins qui arrivent, du liquide, à l'intérieur du cône critique. Par ailleurs, la proportion β de l'énergie "piégée" qui est réémise dans le substrat est plus importante que le coefficient α de transmission pour l'énergie incidente du liquide, dans le cône critique. En effet, cette énergie piégée se trouve dans l'hélium solide, qui est mieux accordé acoustiquement au substrat.

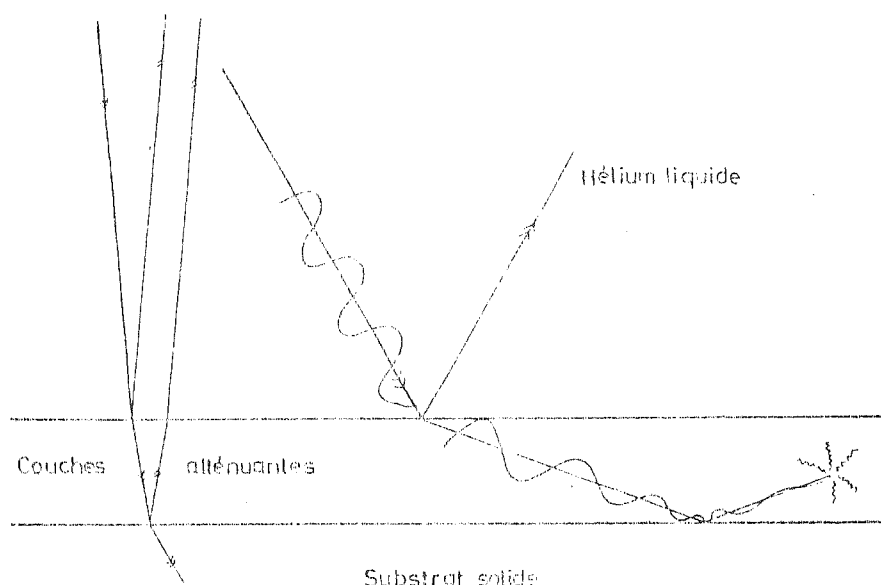


FIGURE 6

Un phonon presque normal parcourt un trajet réduit. Il sera peu atténué. Un phonon incident hors du cône critique est guidé dans les couches, et par suite a une grande probabilité d'y être absorbé.

F) Calcul de R_K dans le modèle de couches absorbantes.

1) A partir des phonons incidents du côté liquide :

Nous avons besoin de deux paramètres supplémentaires : le coefficient d'atténuation dans les couches, et β , c'est-à-dire la proportion de l'énergie absorbée qui est réémise dans le solide.

Les mesures d'interférométrie acoustique dans des films minces permettent d'évaluer le libre parcours moyen ℓ des phonons s'y propageant, pour diverses fréquences. Nous avons utilisé des vitesses

du son complexes, en prenant un coefficient $\nu = \frac{\lambda}{2\pi\ell}$ identique pour les divers modes et indépendant de la fréquence. Cette dernière approximation est assez grossière, car les mesures indiquent que ν est plus faible aux basses fréquences (en dessous de 20 GHz). Néanmoins, cela ne devrait pas entraîner d'erreur importante au-dessus de 1 K.

Pour déterminer β , nous considérons que l'énergie "piégée" est réémise, sous forme de phonons, et de manière plus ou moins isotrope, dans les couches. Ces phonons subissent des réflexions partielles multiples sur les diverses interfaces. Pour évaluer β rigoureusement, il faudrait calculer, pour chaque angle et chaque fréquence (et chaque mode émis) la solution du système d'équations associé. Comme nous l'explicitons plus loin, on ne peut pas séparer les flux d'énergie correspondant aux diverses ondes dans un milieu atténuant (appendice I). Il serait donc impossible de faire un bilan énergétique. Par suite, pour faire ce bilan, nous n'avons pas tenu compte du coefficient d'absorption dans les couches. Nous avons, de plus, négligé les phénomènes d'interférences dues aux réflexions multiples. C'est-à-dire que, au lieu d'ajouter les amplitudes (avec leurs phases) des diverses ondes se propageant dans le même sens, nous avons ajouté leurs intensités, qui sont proportionnelles aux énergies propagées. Cette simplification donnerait évidemment un résultat très grossier pour un mode, une fréquence et une direction donnés. Comme le but est d'obtenir une moyenne sur tous ces paramètres, et que de plus l'atténuation dans les couches, qui correspond à un libre parcours moyen ℓ pas trop grand par rapport à leur épaisseur d , "brouille" les phases, cette approximation paraît réaliste, et d'autant meilleure que ℓ/d est petit, c'est-à-dire que les largeurs d'onde des phonons majoritaires sont courtes, donc la température élevée.

Les coefficients de réflexion sur les interfaces ont été pris comme les moyennes de ceux-ci, en fonction de l'angle et des modes, pour une interface analogue entre deux milieux semi-infinis.

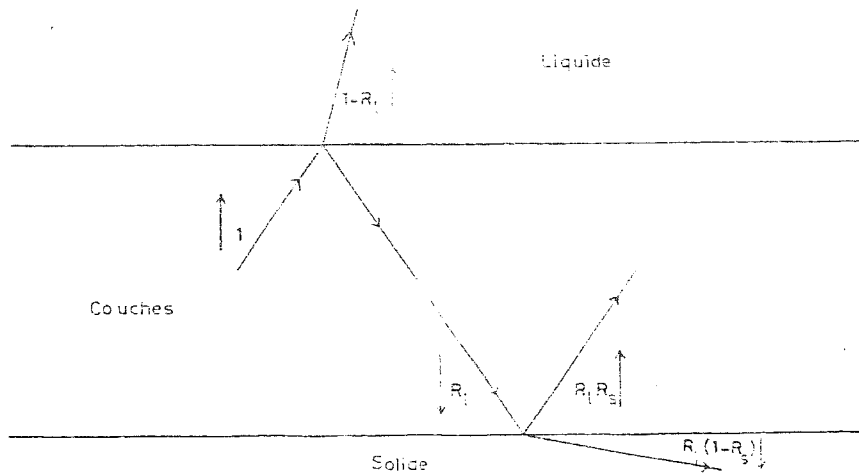


FIGURE 7

Schéma de propagation d'un phonon d'énergie E , réémis dans la couche. Si R_l et R sont les coefficients de réflexion en énergie, le phonon transfère au solide une énergie $E \cdot \frac{R_l(1-R_s)}{1-R_l R_s}$ dans le cas de la figure, $\frac{E \cdot (1-R_s)}{1-R_l R_s}$ s'il est émis vers le solide. En moyenne, il passera donc dans le solide une proportion $\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{(1-R_s)(1-R_l)}{1-R_l R_s} \right)$ de l'énergie piégée.

Le calcul de ces coefficients de réflexion "moyens" est relié à celui de la résistance thermique de contact entre les deux milieux, et se trouve détaillé dans la première des publications jointes.

Le calcul complet de $\alpha(\theta_1, \omega)$ se présente alors ainsi :

- par résolution du système d'équations associé aux conditions aux limites, on calcule les amplitudes des ondes réfléchies et transmises, et les flux d'énergie normaux à la surface de séparation, P_R et P_T ;
- comme de l'énergie a été absorbée dans la couche, la quantité $P_a = P_I - P_R - P_T$, est positive et correspond à ce flux absorbé, P_I est le flux d'énergie incident ;
- le flux total transmis au substrat solide est $P_{tot} = P_T + \beta P_a$.

Nous prenons donc :

$$\alpha = \frac{P_T + \beta(P_I - P_R - P_T)}{P_I}$$

Précisons que, dans notre méthode de calcul, β ne dépend ni de θ_1 ni de ω , et peut donc être évalué une fois pour toute (pour une structure de couches et une nature de substrat fixées), comme nous l'avons expliqué plus haut.

Nous avons dit que les flux ne peuvent pas être calculés dans un milieu absorbant. Plus précisément, si les composantes du vecteur de Poynting (en représentation complexe des ondes sinusoïdales) déterminent toujours des flux efficaces d'énergie, leur expression n'est plus dissociable en termes correspondant à chaque onde. En particulier pour la composante normale à l'interface, qui est la seule qui nous intéresse ici, il y a des termes qui sont les produits des amplitudes des ondes incidentes et réfléchies. Et par suite, un calcul acoustique de R_K avec un modèle analogue au nôtre, ne peut pas être effectué si le milieu incident est absorbant (ou qu'il s'agisse d'un liquide visqueux, ce qui se traite formellement de manière semblable).

Nous avons jusqu'ici, considéré le calcul de α et celui de R_K qui en résulte, toujours en prenant le liquide comme milieu où le phonon était incident. L'intérêt de cette méthode est qu'elle permet une interprétation physique assez simple, et en particulier montre bien comment, hors du cône critique, l'énergie peut quand même pénétrer dans le solide. De plus, elle permet de tenir compte de l'absorption dans le solide, même si ce terme, bien que parfois important pour la conductivité, ne nous paraît pas lié intrinsèquement à la résistance de Kapitza au sens propre du terme, c'est-à-dire pour de l'hélium. En effet, si les échantillons usuellement utilisés étaient très absorbants pour les phonons, avec des valeurs du libre parcours moyen au voisinage de la surface assez petits pour expliquer l'essentiel de la conductivité h_K , cela devrait aussi se noter sur la résistivité de contact entre le même matériau et un solide "usuel" mal accordé acoustiquement par exemple pour les couples Al_2O_3/In ou Cu/Ne , et ce n'est pas le cas.

2) Energie incidente du côté solide :

Sans préciser davantage le calcul, il est évident que β est petit par rapport à 1. En effet, la couche comprimée est bien mieux adaptée acoustiquement à l'hélium liquide qu'au solide, et de plus, les vitesses du son dans cette couche sont assez faibles pour qu'une partie très importante de l'énergie soit totalement réfléchie par le solide. Les valeurs de β que nous avons calculées, pour divers substrats, ne dépassent jamais 1 %. Si on calcule α à partir de l'énergie incidente du côté solide, il sera donc loisible de considérer que toute l'énergie "piégée" dans la couche est réémise vers le liquide. Ce procédé permet aussi de séparer les contributions des divers modes, dans le solide, et en particulier de mettre directement en évidence, que ce soit pour des mesures de réflectivité ou de R_K , l'importance du mode transverse t_2 (mouvements parallèles à la surface de séparation) ou du mode t_1 , pour une incidence presque normale.

IV - ORIGINE MICROSCOPIQUE DE L'ATTENUATION DANS LES COUCHES

Un des aspects essentiels de notre modèle est l'idée que les premières couches atomiques d'hélium, au voisinage de la surface d'un solide, sont très dispersives pour les phonons dont le libre parcours moyen est alors de l'ordre de la longueur d'onde (ce qui correspond à $v \sim 0,16$ dans le modèle développé). Du point de vue expérimental, ce genre de valeur nous paraît justifié par des mesures directes de largeur de résonance de phonons dans des films minces ($\sim 15 \text{ \AA}$) par Sabisky et Anderson. Nous allons maintenant présenter quelques explications plus microscopiques de l'existence, et éventuellement de la valeur élevée, de ce coefficient d'absorption.

A) Hélium solide massif (Wilks).

Le libre parcours moyen ℓ des phonons thermiques dans l'hélium solide peut être évalué aussi bien théoriquement qu'à partir des mesures de conductivité thermique K (en utilisant la formule usuelle $K = \frac{1}{3} C \cdot c \cdot \ell$, où C est la chaleur spécifique et c la vitesse du son), le processus essentiel de diffusion des phonons étant les processus Umklapp. Pour les libres parcours moyens les plus petits, une bonne formule approchée est $\ell = 2,2 e^{0,47\theta/T} \text{ \AA}$, θ étant la température de Debye du solide. Cette formule est valable pour ℓ compris entre 10^3 et $10^6 \text{ \AA}$. Le processus étant, par sa nature même, exponentiel en $\frac{1}{T}$, le libre parcours moyen croît très vite quand T diminue, et cet effet peut être totalement négligé, dans notre modèle, pour $T < 1 \text{ K}$. Dans tous les cas, le libre parcours moyen le plus court que l'on puisse ainsi mettre en évidence est de l'ordre de $1000 \text{ \AA}$, et ce vers 2 K et pour des pressions à peine supérieures à celle de solidification. Ceci correspond à des valeurs de v , pour les phonons thermiques, de l'ordre de 10^{-3} . Ce processus est donc insuffisant pour expliquer les valeurs utilisées, de l'ordre de $v = 0,1$.

B) Inhomogénéité des couches ; état amorphe.

Il est bien évident que les valeurs calculées en A) sont des limites inférieures, en ce qu'elles se rapportent à un solide homogène. Et ces deux premières monocouches forment un système très hautement inhomogène. Dans le sens normal à la surface, c'est évident puisque les propriétés "mécaniques" comme la densité ou les vitesses du son changent d'un facteur de l'ordre de 2 sur une distance de 3 à 4 $\text{\AA}$. Mais, même le long de la surface, il est vraisemblable que les propriétés soient très inhomogènes. En effet, les atomes d'hélium sont soumis, de la part de ceux du substrat, à des attractions (de Van der Waals) avec la périodicité du cristal du solide, et ces forces sont au moins aussi importantes que les forces d'interaction entre atomes, puisque les pressions équivalentes correspondent à d'importantes modifications des paramètres cristallins de l'hélium solide. Et les atomes d'hélium étant beaucoup plus "gros" que ceux du substrat, ils ne pourront pas adopter, dans le plan, une répartition ayant les caractères de symétrie de celle du substrat, ni d'ailleurs celle de l'hélium solide cristallin aux pressions équivalentes, puisque les forces de Van der Waals sont si

puissantes. C'est-à-dire que ce système sera pratiquement amorphe, surtout la première couche monoatomique. Par suite, nous devons considérer que ces couches adsorbées sont très inhomogènes dans toutes les directions, ce qui permettrait de penser que le libre parcours moyen des phonons est, pour toute direction, de quelques distances interatomiques. L'étude des matériaux amorphes massifs (Lasjaunias) montre bien que, pour des phonons d'énergie supérieure à $\sim 10 k_B$, le libre parcours moyen est de l'ordre de 10 à 20 Å. Bien que 10 K semble une température élevée pour notre problème, il est bon de se rappeler que les phonons thermiques majoritaires ont une énergie de $3 k_B T$, et que ceux qui interviennent surtout pour R_K ont une énergie de $4 k_B T$ environ, et même ceux de 8 à $10 k_B T$ jouent encore un rôle non négligeable dans l'intégrale qui donne h_K . Donc ceci nous donne bien une explication de valeurs du coefficient ν de l'ordre de grandeur recherché.

De même que pour l'hélium massif, le libre parcours moyen pour les phonons thermiques de plus basse température croît très vite (plusieurs ordres de grandeur pour un rapport 2 de fréquence), ce qui revient à dire que l'atténuation créée par ce genre de processus sera également négligeable pour des températures inférieures à 0,5 ou 0,3 K. L'affirmation que les deux premières couches atomiques sont assimilables à un milieu amorphe peut sembler en contradiction avec toutes mesures sur des films ultra-minces (d'une fraction de monocouche à 2 ou 3 monocouches) d'hélium, qui indiquent souvent, au contraire, l'existence de phases ordonnées bidimensionnelles. Nous reviendrons sur les films en D), mais indiquons tout de suite que ces phases ordonnées ne sont, justement, possibles que parce que les atomes ne sont pas soumis aux attractions des autres atomes d'hélium. Cela revient à affirmer que les atomes de la première monocouche (par exemple) sont plus solidement "collés" au substrat en l'absence de liquide qu'en sa présence.

C) Modèles théoriques récents.

L'idée que la première (ou les deux premières) couches atomiques absorbées sont amorphes est, d'ailleurs, un des points de départ d'un modèle microscopique récent de la résistance de Kapitza, celui de Nakayama, qui considère des transitions, par effet tunnel, d'atomes d'hélium d'un site à un autre, avec une répartition de double puits d'énergie analogue à celle des modèles courants des matériaux amorphes. Ce modèle contient malheureusement plusieurs paramètres qui ne peuvent être ajustés qu'à partir des résultats de R_K eux-mêmes, et non à partir de principes généraux ou d'autres expériences. Nous n'avons pas pu déduire des résultats de ce modèle une valeur de ν équivalente dans ces couches.

Maris a fait un calcul théorique, à partir de principes fondamentaux, de la transmission d'énergie des phonons du substrat à l'hélium liquide, en passant par des excitations dans ces couches comprimées ou dans un système mixte avec des molécules assez grosses de contaminant chimique (de la graisse, par exemple) et des atomes d'hélium qui les "enrobent". Sans pouvoir faire de comparaisons numériques bien précises, nous pensons que notre modèle se rapporte à des processus analogues.

D) Etude expérimentale du spectre d'excitation de films ultraminces ; interaction phonons-rotons.

Rutledge, Mc Millan et Washburn ont mesuré, récemment, la vitesse du troisième son dans des films d'hélium très minces. En fait, plutôt que de parler d'épaisseur du film, les auteurs parlent de masse par unité de surface, qui paraît effectivement plus appropriée quand celle-ci correspond à moins de 2 couches atomiques. Leurs mesures leur permettent de calculer les deux branches, de phonons et de rotons, des excitations élémentaires des modes dans cette couche. Le résultat essentiel, dans notre optique, est que l'énergie minimum de rotons, Δ_s , qui, dans l'hélium liquide est $\Delta \sim 8,6 k_B$, varie entre $3 k_B$ et $5 k_B$ environ quand la quantité d'hélium absorbé passe de 1,5 à 2 monocouches. Il est bien évident que ces rotons diffuseront de manière intense les

phonons qui se propagent dans ces couches dès que leur énergie deviendra comparable à $2\Delta_g$. A titre d'indication, dans l'hélium liquide, l'interaction phonon-roton est une des raisons principales de limitation du libre parcours des phonons, dans la gamme de température qui nous intéresse. Les rapports de ℓ/λ pour le liquide, vers 1 K, pour les phonons thermiques, correspondent à des valeurs de ν de quelques pour cent. Or le libre parcours moyen des phonons, dû à l'interaction phonon-roton, varie comme $e(\frac{2\Delta}{k_B T})$. Par suite, il est légitime de supposer que ces rotons diffusent intensément les phonons dans ces couches.

Ce résultat ne doit pas être compris comme l'explication de l'importante atténuation des phonons dans les dix premiers Angströms d'hélium d'un bain d'hélium liquide. En effet, les mesures précitées montrent que la courbe de dispersion des excitations de surface est analogue à celle du liquide "massif" dès que l'épaisseur du film dépasse 5 ou 6 monocouches. Mais, par contre, cela permet de comprendre pourquoi un film de 10 Å d'hélium (moins de 3 monocouches) donne des coefficients de réflexion de phonons balistiques incidents depuis le solide, analogues à ceux d'un film épais. Dans ce film très mince, le spectre d'excitations est tel qu'il diffuse peut-être encore plus facilement les phonons incidents. S'il n'y a pas de liquide (ou de gaz à pression notable) au-dessus du film, l'énergie du phonon doit réintégrer le substrat. Donc le coefficient de réflexion, en énergie, doit être globalement pratiquement égal à un. Mais cette réflexion sera très diffuse, et ce qui est mesuré, expérimentalement, c'est le coefficient de réflexion pour les phonons dont le trajet correspond à peu près à une réflexion spéculaire. Par suite, ces couches minces auront un effet analogue au liquide épais, pour des motifs peut-être un peu différents.

En conclusion de cette partie IV, tous les processus microscopiques évoqués permettent d'évaluer des valeurs de ν qui dépendent de ω (et, ou de T). La caractéristique générale est que ν doit devenir très petit quand T vaut quelques dixièmes de K. Nous n'avons pas tenu compte de cette tendance dans nos calculs, car, d'une part la dépendance en T (ou ω) est très incertaine, d'autre part la structure même de notre modèle fait que l'effet des couches considérées n'a pratiquement plus d'effets pour $T < 0,2$ ou $0,3$ K.

Par suite, nous pensons qu'introduire une dépendance en ω de v , ce qui reviendrait à introduire un paramètre nouveau dont la valeur ne pourrait guère être évaluée à partir d'expériences connues, ne ferait que compliquer et le modèle et le calcul, sans ajouter grand chose aux résultats.

LISTE ALPHABETIQUE DES REFERENCES

- L.J. CHALLIS, K. DRANSFELD et J. WILKS,
Proc. Roy. Soc. A260, pages 31 à 66, 1961.
- H. HAUG et K. WEISS,
Phys. Lett. A40, pages 19 à 21, 1972.
- P.L. KAPITZA,
J. Phys. (URSS) 4, pages 181 à 210, 1941.
- I.M. KHALATNIKOV,
Zh. Eksp. Teor. Fiz. 22, pages 687 à 704, 1952.
J.M. KHALATNIKOV,
An introduction to the theory of superfluidity, Benjamin Press,
pages 138 à 146, 1965.
- A.F. KHATER,
J. de Physique 8, C6.
- J.C. LASJAUNIAS et al.,
Proc. of LT 12, Kyoto, Sept. 1970.
- W.A. LITTLE,
Can. J. Phys. 37, pages 334a, 1959.
- H.J. MARIS,
Phys. Rev. B 19, pages 1443 à 1457 (1979).
- T. NAKAYAMA,
J. Phys. C 10, pages 3273 à 3286, 1977.
- J.L. OPSAL et G.L. POLLACK,
Phys. Rev. A 9, pages 2227 à 2235, 1974.
- R.E. PETERSON et A.C. ANDERSON,
J. Low Temp. Phys. 11, pages 639 à 665, 1973.
- J.E. RUTLEDGE, W.L. Mc MILLAN et T.E. WASHBURN,
Phys. Rev. B 18, pages 2155 à 2168, 1978.
- E.S. SABISKY et C.H. ANDERSON,
Phys. Rev. A 7, pages 790 à 806, 1973.
- F.M. SHEARD, R.M. BOWLEY et G.A. TOOMBS,
Phys. Rev. A 8, pages 3135 à 3145, 1973.
- M. VUORIO,
J. Phys. C 5, pages 1216 à 1221, 1972.
- J. WILKS,
The properties of solid and liquide helium, Clarendon Press, pages 610,
1967.

- A.F.G. WYATT, G.J. PAGE et R.A. SHERLOCK,
Phys. Rev. Letters, 36, pages 1184 à 1187, 1976.

PUBLICATIONS JOINTES :

- Analysis of heat transfer between solids at low temperatures,
J.D.N. CHEEKE, H. ETTINGER et B. HEBRAL,
Can. J. Phys. 17, pages 1749 à 1771, 1976.
- Macroscopic calculation of the Kapitza resistance between solids and
liquid ^4He ,
D. CHEEKE et H. ETTINGER,
Phys. Rev. Lett. 37, pages 1625 à 1628, 1976.
- The Kapitza resistance and phonon reflectivity between solids and
liquid helium,
D. CHEEKE et H. ETTINGER,
proposée à J. Low Temp. Phys. en décembre 1978.

APPENDICE I

ETUDE DU VECTEUR DE POYNTING

Soit un solide homogène et isotrope, de masse spécifique ρ , de vitesses des ondes sonores longitudinales et transverses c et b . Ce milieu est limité par deux plans parallèles. Prenons l'axe des z perpendiculaire à ceux-ci. Une onde plane de pulsation ω , incidente (depuis l'extérieur) sur un de ces plans, génère un système d'ondes dans le solide. Nous allons considérer, tout d'abord, le cas où l'onde incidente est un mode ℓ ou t_1 : déplacement et vecteur d'onde tous deux dans le plan d'incidence pris comme plan xoz .

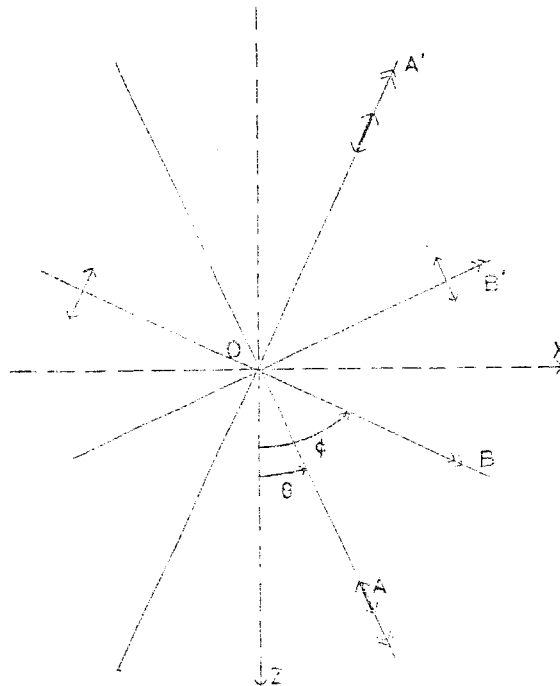


FIGURE 8

Schéma des ondes se propageant dans une lame à faces parallèles (au plan xoy) et créées par une onde incidente dans un milieu extérieur. A, A', B, B' sont les amplitudes des ondes, comme expliqué ci-après.

A) Modes ℓ et t_1 .

Dans ces conditions, il existe quatre ondes dans le solide, deux longitudinales et deux transverses, pour lesquelles les potentiels des vitesses Π et ψ peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}\Pi &= \left[A e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + A' e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r}} \right] e^{-i\omega t} \\ \psi_x &= \psi_z = 0 \\ \psi_y &= \left[B e^{i\vec{\chi} \cdot \vec{r}} + B' e^{i\vec{\chi}' \cdot \vec{r}} \right] e^{-i\omega t}\end{aligned}\quad \text{I.1}$$

Appelons respectivement $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{P}$, S_{ij} , σ_{ij} les vecteurs déplacement, vitesse et de Poynting, les tenseurs des déformations et des contraintes.

Les lois usuelles de l'élasticité s'écrivent alors en notation tensorielles :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} + \vec{\nabla} \psi \\ S_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ \sigma_{ij} &= 2\rho b^2 S_{ij} + \rho(c^2 - 2b^2) S_{kk} \delta_{ij} \\ P_i &= -\frac{1}{2} \operatorname{Rél} (v_j^* \sigma_{ij})\end{aligned}\quad \text{I.2}$$

Avec ces notations, P est le vecteur de Poynting efficace (en moyenne sur le temps).

Les vecteurs d'onde $\vec{k}$, $\vec{k}'$, $\vec{\chi}$, $\vec{\chi}'$ sont donnés par :

$$\begin{array}{c|c} \vec{k} & \begin{array}{c} \sigma \\ o \\ \alpha \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \vec{k}' & \begin{array}{c} \sigma \\ o \\ -\alpha \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \vec{\chi} & \begin{array}{c} \sigma \\ o \\ \beta \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \vec{\chi}' & \begin{array}{c} \sigma \\ o \\ -\beta \end{array} \end{array}\quad \text{I.3}$$

$$\begin{aligned}\sigma &= k \sin \theta = \chi \sin \phi & (\text{loi de Snell-Descartes}) \\ \alpha &= k \cos \theta \\ \beta &= \chi \cos \phi \\ k &= \frac{3}{b} \\ \chi &= \frac{3}{b}\end{aligned}$$

Les symboles α et β et σ sont utilisés avec une signification spécifique à cet appendice.

Pour la suite du calcul, nous nous plaçons à l'origine des coordonnées ($x = 0$) et omettons systématiquement le facteur $e^{-i\omega t}$.
Tenant compte de ce que $\vec{v} = -i\omega\vec{u}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}u_x &= -\frac{\sigma}{\omega} (A + A') + \frac{\beta}{\omega} (B - B') \\ u_z &= -\frac{\alpha}{\omega} (A - A') - \frac{\sigma}{\omega} (B + B') \\ S_{xx} &= -\frac{i\sigma^2}{\omega} (A + A') + \frac{i\sigma\beta}{\omega} (B - B') \\ S_{zz} &= -\frac{i\alpha^2}{\omega} (A + A') - \frac{i\sigma\beta}{\omega} (B - B') \\ S_{xz} &= -\frac{i\sigma\alpha}{\omega} (A - A') + i \frac{\beta^2 - \sigma^2}{\omega} (B + B') \\ S_{kk} &= S_{xx} + S_{zz} = -\frac{ik^2}{\omega} (A + A') \\ \sigma_{xz} &= -\frac{2i\rho b^2}{\omega} \left[\sigma\alpha(A - A') - \frac{\beta^2 - \sigma^2}{2} (B + B') \right] \\ \sigma_{zz} &= -\frac{2i\rho b^2}{\omega} \left[\alpha^2(A + A') + \sigma\beta(B - B') \right] \\ &= -\frac{i\rho(c^2 - 2b^2)}{\omega} k^2 (A + A') \\ &= -\frac{i\rho}{\omega} \left[(\omega^2 - 2b^2\sigma^2) (A + A') + 2b^2\sigma\beta (B - B') \right] \\ \sigma_{xx} &= -\frac{2i\rho b^2}{\omega} \left[\sigma^2(A + A') - \sigma\beta (B - B') \right] \\ &= -\frac{i\rho(c^2 - 2b^2)}{\omega} k^2 (A + A') \\ &= -\frac{i\rho}{\omega} \left[(\omega^2 - 2b^2\alpha^2) (A + A') - 2b^2\sigma\beta (B - B') \right]\end{aligned}$$

I.4

I.4(suite)

En utilisant maintenant la formule I.E pour P_z et les relations entre α , β , σ , ω , b et c , nous trouvons :

$$\begin{aligned} \frac{2P_z}{\rho\omega} = & (|A|^2 - |A'|^2) \cdot \left[R(\alpha) - \frac{4}{\omega^2} I(\sigma b^2) \cdot I(\sigma^* \alpha) \right] \\ & + (|B|^2 - |B'|^2) \cdot \left[R(\beta) - \frac{4}{\omega^2} I(\sigma b^2) \cdot I(\sigma^* \beta) \right] \\ & - 2I(AA'^*) \cdot \left[I(\alpha) + \frac{4}{\omega^2} I(\sigma b^2) \cdot R(\sigma^* \alpha) \right] \quad \text{I.5} \\ & - 2I(BB'^*) \cdot \left[I(\beta) + \frac{4}{\omega^2} I(\sigma b^2) \cdot R(\sigma^* \beta) \right] \\ & - R(AB^* + A'B'^* - AB'^* - A'B^*) \cdot \frac{4}{\omega^2} \cdot I(\sigma b^2) \cdot I(\alpha^* \beta) \\ & + I(AB^* + A'B'^* - AB'^* - A'B^*) \cdot \left\{ \frac{4}{\omega^2} I(\sigma b^2) \left[R(\alpha^* \beta) - |\sigma|^2 \right] - 2I(\sigma) \right\} \end{aligned}$$

R et I sont utilisés ici pour "partie réelle" et "partie imaginaire" du nombre complexe entre parenthèse qui suit.

Cette formule montre que, dans le cas général où b et c sont complexes, ce qui correspond à un milieu absorbant, le flux d'énergie ne se décompose pas en termes associés aux divers modes, ni même en deux termes correspondants aux ondes se propageant vers les $z > 0$ et vers les $z < 0$.

Pour que nous puissions associer un flux à chaque onde, il faut :

1) $I(\sigma) = 0$, soit σ réel, ce qui signifie que l'onde incidente n'est pas amortie.

2) $I(\sigma b^2) = 0$, donc $I(b^2) = 0$, c'est-à-dire b^2 réel, et, physiquement, cela signifie b et c réels. Donc milieu non absorbant.

3) $I(\alpha) = I(\beta) = 0$. Donc, non seulement k_x est réel, mais k_z et χ_z aussi. Par suite, nous éliminons les ondes évanescences. Si le milieu considéré est semi-infini, et que le système d'ondes est toujours généré à l'extérieur, il ne reste que deux modes, A' et B' . Dans ces conditions, les deux premières conditions suffisent, et donc, essentiellement, que le milieu ne soit pas absorbant. Nous notons bien que, même dans ce cas simple, il n'est pas possible de séparer les deux flux si b et c sont complexes, en effet, α et β le seront aussi et même si un des termes $R(A'B'^*)$ ou $I(A,B'^*)$ était nul (ceci découlant, par exemple, d'une condition aux limites), l'autre terme aurait un coefficient non nul. Dans le cas simple où toutes les quantités $b, c, \alpha, \sigma, \beta$ sont réelles, nous retrouvons la formule bien connue :

$$P_z = \frac{\rho\omega^2}{2} \left[(|A|^2 - |A'|^2) \frac{\cos\theta}{c} + (|B|^2 - |B'|^2) \frac{\cos\phi}{b} \right] \quad \text{I.6}$$

B) Mode t_2 .

En prenant un potentiel vecteur $\vec{\psi}$ tel que :

$$\psi_x = \psi_y = 0 \quad \psi_z = B e^{i(\vec{\chi} \cdot \vec{r} - \omega t)} + B' e^{i(\vec{\chi}' \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \text{I.7}$$

avec les mêmes définitions pour $\vec{\chi}, \vec{\chi}', \sigma, \beta$ que pour le paragraphe précédent, on trouve aisément :

$$\begin{aligned} v_y &= -i \sigma (B + B') \\ u_y &= \frac{\sigma^2}{\omega} (B + B') \end{aligned} \quad \text{I.8}$$

$$S_{xy} = \frac{i\sigma\beta}{2\omega} (B + B')$$

$$S_{yz} = \frac{i\sigma\beta}{2\omega} (B - B')$$

$$\sigma_{yz} = 2\rho b^2 \cdot S_{yz}$$

$$P_z = \frac{\rho}{2\omega} |\sigma|^2 \cdot \{ (|B|^2 - |B'|^2) \cdot R(B) - 4 I(B^* B') I(\beta) \} \quad \text{I.9}$$

Ceci qui nous montre, comme précédemment, que les deux flux ne sont séparés que si β est réel, donc le milieu non absorbant.

APPENDICE II

MODES DE SURFACE

Lemme mathématique :

$$\int_0^{\infty} \frac{u^p du}{e^u - 1} = p! \xi(p+1) \quad \text{avec} \quad \xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

$$\xi(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \xi(3) \sim 1,2, \quad \xi(4) = \frac{\pi^4}{90} \sim 1,08,$$

$$\xi(6) = \frac{\pi^6}{935} \sim 1,028$$

A) Densité d'énergie.

Considérons un solide isotrope et homogène, occupant le demi-espace $z > 0$, le reste étant vide.

A un phonon de surface nous associons un état vibratoire pour lequel les potentiels des vitesses, les vitesses et les déplacements, en notation complexes, sont de la forme $e^{-az} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$, a réel > 0 , $\vec{k}$ et $\vec{r}$ vecteurs réels du plan xy .

Par un calcul analogue à celui de la densité d'énergie en volume, et en supposant que la température est assez basse pour pouvoir prendre une répartition de Planck sans fréquence de coupure, nous trouvons une énergie par unité de surface à l'équilibre thermique :

$$\frac{E}{S} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\hbar \omega \, dk_x \, dk_y}{e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}} - 1} = \frac{\hbar}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 d\omega}{v_R^2 (e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}} - 1)} \quad \text{II.1}$$

v_R étant la vitesse de propagation de l'onde de surface (Raleygh), Si une couche d'un autre solide homogène et isotrope d'épaisseur D est collée au substrat précédent, il faut remplacer v_R par $v_s(\omega)$, fonction usuellement compliquée, ayant un grand nombre de branches, car, si ω est assez grand, il y a plusieurs modes possibles. Néanmoins, pour le cas qui nous intéresse, c'est-à-dire essentiellement des fréquences assez basses pour que la longueur d'onde dans la couche reste grande par rapport à son épaisseur, $v_s(\omega) \neq v_R$, et par suite la densité d'énergie à la surface, à l'équilibre thermique, est très

peu modifiée.

$$\frac{E}{S} \approx \frac{\hbar}{2\pi v_R} \left(\frac{k_B T}{\hbar}\right)^3 \xi \quad (3) \quad \text{II.2}$$

Par ailleurs, la présence de la couche fait apparaître une autre catégorie de modes de surface, ceux de Love (mouvements parallèles à la surface), qui se propagent pratiquement à la vitesse b_s des modes transverses dans le substrat.

La densité d'énergie vaut donc :

$$\frac{E}{S} = \frac{\hbar}{\pi} \left(\frac{k_B T}{\hbar}\right)^3 \xi(3) \cdot \left(\frac{1}{v_R^2} + \frac{1}{b_s^2}\right) \quad \text{II.2}$$

les deux termes étant du même ordre.

B) Couche absorbante et énergie piégée

Si les vitesses du son dans la couche sont prises complexes, ce qui correspond à un milieu absorbant, le vecteur d'onde du mode de surface aura une partie imaginaire et les modes auront un temps de vie τ . Supposons $\frac{1}{\tau} = \omega \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^p$, ω_0 étant une constante d'homogénéité.

Cela correspond à un libre parcours moyen $\ell = \tau v$, c'est-à-dire $\frac{\lambda}{\ell} \sim 2\pi \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^p$, λ est la longueur d'onde du phonon.

Nous supposons toujours que λ/ℓ est petit, ce qui signifie que la couche perturbe peu le mode de surface.

Dans ces conditions, la puissance "absorbée" par la couche, par unité de surface, vaut :

$$\frac{W_a}{S} = \frac{\hbar}{2\pi v^2} \int_0^\infty \omega \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^p \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \quad \text{pour chaque type de mode. II.4}$$

$$W_a \sim \frac{S \hbar}{2\pi v^2} \cdot \left(\frac{k_B T}{\hbar}\right)^4 \cdot \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega_0}\right)^p \cdot (3+p)! \xi(4+p) \quad \text{II.5}$$

Ceci suppose, bien entendu, qu'il existe un processus d'excitation des modes de surface assez efficace pour que leur répartition reste à peu près celle de l'équilibre thermique, en l'absence d'absorption.

C) Flux d'énergie et h_K .

Considérons maintenant que le vide est remplacé par un liquide, comme l'hélium, pour lequel la densité et la vitesse du son sont très faibles par rapport à ceux du substrat. Cette adjonction, sans l'existence de couche, a été étudiée par Khalatnikov, et amène une petite perturbation du vecteur d'onde du mode de Raleygh, qui correspond à un flux d'énergie passant du solide au liquide à l'équilibre thermique (qui est, bien entendu, compensé par le phénomène excitateur de ces modes). La présence du liquide d'une part et celle de la couche de l'autre étant des petites perturbations du vecteur d'onde, il est légitime de supposer qu'en présence des deux, la perturbation est la somme des deux, c'est-à-dire que les quantités $\frac{1}{T}$ s'ajoutent, et donc, si, comme c'est le cas pour notre problème, l'énergie "piégée" dans la couche passe essentiellement dans le liquide, la contribution des modes de surface à h_K correspond à la somme des contributions associées au mode de Raleygh sans couche (Khalatnikov) et aux flux d'énergie "pompée" dans la couche pour les modes de Raleygh et Love. Ces contributions $h_{K,s}$, seront de la forme :

$$h_{K,s} = \frac{dW_a}{dT} = \frac{1}{2\pi v^2} \xi (4+p)(4+p)! \frac{k_B^4 T^3}{h^3} \left(\frac{k_B T}{h \omega_0}\right)^p \quad \text{II.6}$$

à comparer à h_K , Khalatnikov :

$$\sim \frac{2\pi^2}{15} \cdot \frac{k_B^4 T^3}{h^3} \cdot \frac{\rho_{He} c_{He}}{\rho_s b_s^3} \quad \text{II.7}$$

ρ_s : masse spécifique du solide.

ρ_{He}, c_{He} : masse spécifique et vitesse du son dans l'hélium liquide.

On trouve donc, compte tenu de ce que $v \sim b_s$, et pour chaque mode :

$$\frac{h_{K,s}}{h_{K,Khal}} \sim \frac{15 \cdot (4+p)! \xi (4+p)}{4\pi^3} \cdot \left(\frac{k_B T}{h \omega_0}\right)^p \cdot \frac{\rho_s b_s}{\rho_{He} c_{He}} \quad \text{II.8}$$

En principe, ceci est une limite supérieure, car, si ce processus est efficace, les états de phonons de surface ne seront pas repeuplés à l'équilibre thermique, ils seront "pompés" par le liquide, leur

densité diminuera, et donc la valeur de $h_{K,s}$ aussi.

D) Mode de Rayleigh.

Nous allons donc considérer le mode de Rayleigh pour un solide, de paramètres acoustiques ρ_s, c_s, b_s recouvert d'une couche d'épaisseur D d'un solide de paramètres ρ_1, c_1, b_1 .

Pour trouver, rigoureusement, la relation de dispersion $v(\omega)$, il faudrait résoudre une équation qui revient à annuler un déterminant 6×6 , en nombres complexes. Nous allons utiliser les approximations qui ont été développées par H.F. Tiersten pour un calcul analogue.*

En posant :

$$\begin{aligned} q &= \frac{v}{b_s} & \beta &= \sqrt{1 - q^2} & \eta_s &= \frac{b_s}{c_s} & \eta_1 &= \frac{b_1}{c_1} \\ \rho &= \frac{\rho_s}{\rho_1} & \alpha &= \sqrt{1 - \eta_s^2 q^2} & n &= \frac{b_s}{b_1} & \rho &\gg 1; n \gg 1 \\ & & & & & & q &\sim 1 \end{aligned}$$

L'équation de dispersion s'écrit :

$$(2 - q^2)^2 - 4\alpha\beta + \frac{\omega D q^2}{v} \left[\frac{1}{\rho} (\alpha + \beta) q^2 - \frac{4(1 - \eta_1)^2}{\rho n^2} \right] = 0 \quad \text{II.9}$$

qui est de la forme :

$$A(q^2) + \frac{\omega D}{v} B(q^2) = 0$$

L'équation $(2 - q^2)^2 - 4\alpha\beta = 0$ correspond au mode de Rayleigh "pur", c'est-à-dire sans couche. Soit q_0 la solution de cette équation. $q \neq q_0$, alors nous allons faire un développement limité, c'est-à-dire :

$$2q_0(q - q_0) \left(\frac{\partial A(q^2)}{\partial q^2} \right)_{q=q_0} \neq - \frac{\omega D}{b_s} \frac{1}{q_0} q_0^2 \left[\frac{(\alpha_0 + \beta_0) q_0^2}{\rho} - \frac{4\beta_0(1 - \eta_1^2)}{\rho n^2} \right] \quad \text{II.10}$$

α_0 et β_0 étant les valeurs correspondant à $q = q_0$.

Soit :

$$F_0 = \left(\frac{\partial A(q^2)}{\partial (q^2)} \right)_{q=q_0}$$

* (Journal of Applied Physics, 40, pages 770 à 789, 1969).

$$q - q_0 \# - \frac{\omega D}{2b_s F_0} \left(\frac{(\alpha_0 + \beta_0) q_0^2}{\rho} - (1 - \eta_1^2) \frac{4\beta_0}{\rho n^2} \right) \quad \text{II.11}$$

$F_0 \sim 1$, $\frac{\omega D}{2b_s} \ll 1$, $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{\rho n^2} \ll 1$, donc le développement est légitime.

Si maintenant la couche est absorbante, le seul effet sera sur la quantité $n = \frac{b_s}{b_l}$ qui devient $n(1 + i\nu)$.

$$q \# q_0 - \frac{\omega D}{2b_s F_0} \left[\frac{(\alpha_0 + \beta_0) q_0^2}{\rho} - \frac{4\beta_0 (1 - i\nu)^2 (1 - \eta_1^2)}{\rho n^2 (1 + \nu^2)^2} \right] \quad \text{II.12}$$

La partie imaginaire de q vaut :

$$- \frac{4\omega D}{b_s F_0} \frac{\beta_0 \nu (1 - \eta_1^2)}{\rho n^2 (1 + \nu^2)^2} = -\epsilon$$

$$\nu \# \nu_0 \left(1 - \frac{i\epsilon}{q_0} \right)$$

$$\frac{1}{\tau} \sim 2 \frac{\epsilon}{q_0} \omega \quad \text{le facteur 2 pour l'énergie.}$$

$$\frac{1}{\tau} = \omega \cdot \frac{8\omega D}{q_0 b_s F_0} \frac{(1 - \eta_1^2) \beta_0}{\rho n^2 (1 + \nu^2)^2} \cdot \nu$$

Correspond donc au cas étudié pour $p = 1$ et

$$\omega_0 = \frac{q_0 b_s F_0 \rho n^2 (1 + \nu^2)^2}{8D (1 - \eta_1^2) \beta_0} \cdot \frac{1}{\nu} \quad \text{II.13}$$

Dans cette formule, seuls D , η_1 , ρ et n dépendent de la couche.

$$\frac{h_{K,s}}{h_{K,Khal}} \sim \frac{15}{4\pi^3} S! \xi(5) \cdot \frac{\rho_s}{\rho_{He}} \cdot \frac{b_s}{c_{He}} \cdot \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega_0} \right) \quad \text{II.14}$$

Prenons $\eta_s = \eta_1 =$ ce qui est un ordre de grandeur raisonnable :

$$\frac{h_{K,s}}{h_{K,Khal}} \sim (0,17) \frac{\rho_1 b_1^2}{\rho_{He} c_{He} b_s} \cdot \frac{\eta}{b_s} \cdot \frac{\nu T}{(1 + \nu^2)^2} \quad \text{II.15}$$

Si D est exprimé en $\text{\AA}$ et b_s en km/s .

Même en forçant le modèle, c'est-à-dire en prenant $10 \text{ \AA}$ d'hélium solide à 400 atmosphère ($\rho_1 \sim 0,3 \text{ g/cm}^3$, $b_1 \sim 0,6 \text{ km/s}$) avec $\rho_{\text{He}} = 0,145 \text{ g/cm}^3$, $c_{\text{He}} = 0,24 \text{ km/s}$ et une vitesse b_s faible, de 2 km/s , on trouve :

$$\frac{h_{K,s}}{h_{K,Khal}} \sim 1,3 \frac{vT}{(1+v^2)^2} \text{ ce qui, en poussant encore la}$$

valeur de v jusqu'à $0,5$ et pour $T = 2$ donnerait :

$$\frac{h_{K,s}}{h_{K,Khal}} \sim 0,85$$

Pour du cuivre, avec $7 \text{ \AA}$ d'hélium solide à 400 atm (ce qui est déjà énorme) et $v = .5$.

$$\frac{h_{K,s}}{h_{K,Khal}} \sim 0,25$$

$$\frac{h_{K, \text{réel}}}{h_{K,Khal}} \sim 30 \text{ à } 100.$$

Donc cette correction, même en poussant le modèle à la limite, est négligeable.

E) Mode de Love.

Avec les mêmes notations, l'équation de dispersion des ondes de Love s'écrit :

$$\left(\frac{\omega D}{V}\right)^2 = \frac{\rho^2 n^4 (1 - q^2)}{(n^2 q^2 - 1)^2} \quad \text{II.16}$$

Posons $q^2 = 1 - \epsilon$ $\epsilon \ll 1$

$$\epsilon = \left(\frac{\omega D}{\rho b_s}\right)^2 \left(1 - \epsilon - \frac{1}{n^2}\right)^2 \quad \text{II.17}$$

Pour la partie imaginaire de ϵ , on peut négliger ϵ devant 1.

$$\text{Im}(\epsilon) = \frac{4iv}{n^2} \left(\frac{\omega D}{\rho b_s} \right)^2 \quad \text{II.18}$$

Ce qui correspond à une valeur de $\frac{1}{\tau} = \omega \text{Im}(\epsilon)$

$$\frac{1}{\tau} = \omega v \omega^2 \cdot 2 \left[\frac{2D}{\rho b_s n} \right]^2 \quad \text{II.19}$$

et donc un rapport

$$\begin{aligned} \frac{h_{K,s}}{h_{K,Khal}} &= \frac{15(6!) \cdot 5(6) \cdot 2}{4\pi^3} \left(\frac{2k_B T D}{\hbar \rho b_s n} \right)^2 \cdot \frac{\rho_s b_s}{\rho_{He} c_{He}} \cdot v \quad \text{II.20} \\ &\sim 0,06 \left(\frac{D}{b_s} \right)^2 \cdot \frac{\rho_1^2 b_1^2}{\rho_s \rho_{He} c_{He} b_s} v T^2 \quad \text{avec } D \text{ en } \text{\AA}, \\ &\quad b_s \text{ en km/s.} \end{aligned}$$

Ce terme est encore beaucoup plus petit que celui qui correspond au mode de Rayleigh.

En effet :

$$\frac{h_{K,Love}}{h_{K,Raleygh}} \sim \frac{0,06}{0,17} \cdot \left(\frac{D}{b_s} \right) \cdot \frac{\rho_1}{\rho_s} T$$

Pour du cuivre, avec 7 Å He solide à 400 atm, ce rapport vaut 0,06.

La contribution des modes de Love est donc complètement négligeable.

A P P E N D I C E III

RESOLUTION DU SYSTEME D'ÉQUATIONS AUX LIMITES

Considérons le système suivant : hélium liquide semi-infini/N couches solides/un substrat solide semi-infini. Toutes les surfaces de séparation sont parallèles, et l'axe des z est pris suivant leur normale commune.

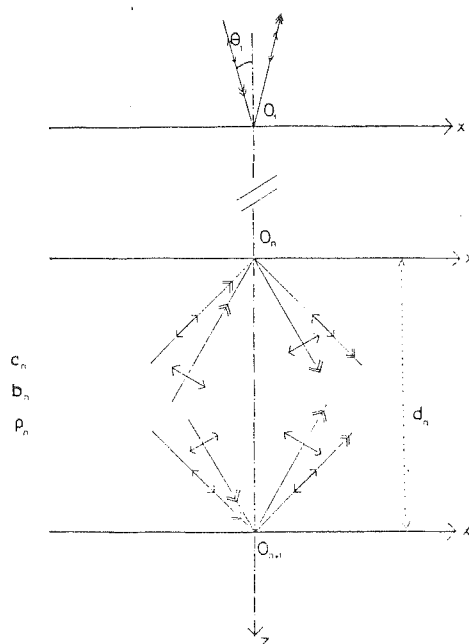


FIGURE 9

Schéma des divers modes se propageant dans la n° couche, correspondant à une onde plane incidente dans l'hélium liquide.

Soit Π_n , Π'_n , ψ_n , ψ'_n les potentiels scalaires et les composantes suivant oy (les seules non nulles) des potentiels vecteurs des vitesses, associés aux modes longitudinaux et transverses se propageant dans cette couche, toutes ces quantités, relatives à une onde incidente de vecteur d'onde k_1 , d'angle d'incidence θ_1 et de fréquence ω , dans le plan xz . Les quantités continues aux interfaces, à savoir σ_{xz} , σ_{zz} , v_x et v_z , sont des fonctions linéaires des potentiels.

Les conditions aux limites peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{zz} \\ v_x \\ v_z \end{pmatrix}_{O_n} = M_n(\omega, k_1, \theta_1, c_n, b_n, \rho_n) \begin{pmatrix} \Pi_n \\ \Pi'_n \\ \psi_n \\ \psi'_n \end{pmatrix}_{O_n} \quad \text{III.1}$$

M_n étant une matrice 4×4 .

Par ailleurs, les valeurs des potentiels au point O_{n+1} sont reliées à celles au point O_n par des relations linéaires, qui expriment les déphasages des ondes pendant la propagation.

$$\begin{pmatrix} \Pi_n \\ \Pi'_n \\ \psi_n \\ \psi'_n \end{pmatrix}_{O_n} = U_n(\omega, k_1, \theta_1, c_n, b_n, \rho_n, d_n) \begin{pmatrix} \Pi_n \\ \Pi'_n \\ \psi_n \\ \psi'_n \end{pmatrix}_{O_{n+1}} \quad \text{III.2}$$

On peut aussi réécrire le système III.1, en O_{n+1} , sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \Pi_n \\ \Pi'_n \\ \psi_n \\ \psi'_n \end{pmatrix}_{O_{n+1}} = \{ M_n(\omega, k_1, \theta_1, c_n, b_n, \rho_n) \}^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{zz} \\ x \\ z \end{pmatrix}_{O_{n+1}} \quad \text{III.3}$$

Par suite, nous obtenons le système :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{zz} \\ v_x \\ v_z \end{pmatrix}_{O_n} = \mathcal{M}_n(\omega, k_1, \theta_1, c_n, b_n, \rho_n, d_n) \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{zz} \\ v_x \\ v_z \end{pmatrix}_{O_{n+1}} \quad \text{III.4}$$

avec $\mathcal{M}_n = M_n U_n M_n^{-1}$.

En procédant de proche en proche, on trouve :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{zz} \\ v_x \\ v_z \end{pmatrix}_{O_1} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{zz} \\ v_x \\ v_z \end{pmatrix}_{O_{N+1}} \quad \text{III.5}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{M}_2 \dots \mathcal{M}_N.$$

Au point O_{N+1} , σ et v sont fonction de Π_s et ψ_s dans le substrat.

Au point O_1 , v_x et σ_{xz} sont fonctions de Π_{He} et Π'_{He} pour l'hélium, $\sigma_{zz} = 0$ et v_z est indéterminé (sans viscosité, les vitesses tangentielles du solide et du liquide ne sont pas couplées).

Nous obtenons donc un système de 3 équations à 3 inconnues, qui sont les amplitudes de Π_s , ψ_s et Π'_{He} , en prenant égale à 1 celle de Π_{He} .

Un procédé analogue permet de ramener à 4 les inconnues d'un système d'ondes engendré dans la suite des milieux : solide semi-infini/N couches solides/solide semi-infini, par une onde plane incidente dans un des solides extrêmes.

Analysis of heat transfer between solids at low temperatures

J. D. N. CHEEKE

Département de Physique, Université de Sherbrooke, Sherbrooke (Qué.), Canada J1K 2R1

AND

H. ETTINGER AND B. HEBRAL

C.R.T.B.T. - C.N.R.S., BP 166 Centre de Tri, 38042 Grenoble-Cedex, France

Received November 17, 1975¹

A detailed analysis is given of the acoustic mismatch formulation first given by Little for the thermal contact resistance between solids for the case of phonon transport in a Debye model. Extrema in the heat transfer coefficients as a function of the refractive index of the interface are shown to be due to either impedance matching conditions or to the presence of the critical cone. Detailed numerical tables are presented which permit rapid evaluation of the heat transfer coefficient to an accuracy of 5% or better.

Nous présentons une analyse détaillée de la formulation acoustique de Little pour la résistance thermique de contact entre solides à basse température. Nous démontrons que l'existence d'extrema dans les valeurs calculées des coefficients de transfert en fonction de l'indice de réfraction relatif à l'interface est due aux conditions d'adaptation d'impédance ou d'ouverture du cône critique. Nous fournissons des tableaux qui permettent la détermination rapide des coefficients de transfert de chaleur à une précision de 5% ou mieux.

Can. J. Phys. **54**, 1749 (1976)

The transfer of heat between dissimilar media at low temperatures is of interest for both practical and theoretical reasons. From the applied point of view, the subject is of crucial importance for the attainment of very low temperatures, the achievement of good thermal contact between specimen and reservoir, and the establishment of reproducible and reliable temperatures scales. On a more fundamental level, if we restrict ourselves to the case of phonon transmission across interfaces, there is presently great interest in the generation and detection of high frequency phonons in solids and in the study of thermal boundary resistances at low temperatures. The ideas developed in this paper are highly pertinent to all of these questions with the exception of the special case of the interface between classical solids and quantum systems (liquid and solid helium and hydrogen) for which the formalism developed here cannot be used with confidence (at least not without drastic modifications as mentioned in the discussion). Rather we concentrate our attention on the interface between two ordinary solids (one of which is a dielectric) and give detailed numerical results on the calculated heat transfer coefficient as a function of the acoustic properties of the two media, which should be of

wide application in interpreting experimental investigations of the problems mentioned above.

The paper is divided into five sections as follows. The Introduction contains a résumé of the Little model and definitions of symbols. In Sect. II, we outline the details of the computer calculations and estimate the errors. A detailed analysis of the variation of the heat transfer coefficients Γ_i as a function of the acoustic impedances is given in Sect. III; this section can be omitted by those only interested in the utilisation of the results, which are given in Sect. IV. A discussion of the limitations of the model and its generalization to more complicated cases is given in Sect. V.

I. Introduction

A detailed study of the heat flow between two dielectric solids at low temperatures was first made by Little (1959), who generalized the so-called acoustic mismatch model which had been used by Khalatnikov (1952, 1965) in treating the heat flow between solids and superfluid helium. The acoustic mismatch model is based on the idea of partial transmission of phonons across an interface due to differences in density and sound velocity between the two media or, more succinctly, as being due to difference in their respective acoustic impedances. For the case of two

¹Revision received May 3, 1976.

isotropic solids in contact, and in the context of a Debye model, Little (1959) has given the heat flow as

$$[1a] \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{2\pi k_B^4 S \pi^4}{h^3} \frac{\Gamma_{1tot}}{15 c_{11}^2} (T_1^4 - T_2^4)$$

where

$$[1b] \quad \Gamma_{1tot} = \Gamma_{11} + (c_{11}/c_{1t})^2 (\Gamma_{1t1} + \Gamma_{1t2})$$

$$[1c] \quad \Gamma_{1tot}/c_{11}^2 = \Gamma_{2tot}/c_{21}^2$$

medium 1 is at temperature T_1 ; medium 2 is at temperature T_2 ; k_B is Boltzmann's constant; h is Planck's constant; c_{11} is the longitudinal sound velocity in medium 1; c_{1t} is the transverse sound velocity in medium 1; S is the interface area.

For numerical calculations we have

$$\begin{aligned} dQ/dt &= 5.09 \times 10^9 S (\Gamma_{1tot}/c_{11}^2) (T_1^4 - T_2^4) \\ &= 2.04 \times 10^{10} S (\Gamma_{1tot}/c_{11}^2) T^3 \Delta T \text{ W} \end{aligned}$$

where S and c_{11} are expressed in cm and s. In these expressions, we note that $2\Gamma_1$ and $2\Gamma_t$ are the integrated energy transmission coefficients for the appropriate cases ($0 < 2\Gamma_{1,t} < 1$) while Γ_{tot} is simply a coefficient ($0 < \Gamma_{tot} < 10$) which is convenient to define. Finally, in terms of an interface resistance $R_K = SA\Delta T/\dot{Q}$, we have:

$$R_K = c_{11}^2 T^{-3} / (2.04 \times 10^{10} \Gamma_{tot}) \text{ cm}^2 \text{ K/W}$$

The transmission coefficients Γ_i for medium 1 are defined as follows (see Fig. 1):

$$[2] \quad \Gamma_i = \int_0^{\pi/2} \alpha_i(\theta_0) \sin \theta_0 \cos \theta_0 d\theta_0$$

where θ_0 is the angle of incidence; $i = l$ for an incident longitudinal wave; $i = t_1$ for an incident transverse wave with displacement vector in the plane of incidence; $i = t_2$ for a transverse wave with displacement vector perpendicular to the plane of incidence; $\alpha_i(\theta_0)$ is the energy transmission coefficient for the mode considered.

In the following it will be assumed that the incident wave is in medium 1. Then we have (Cheeke *et al.* 1973)

$$[3] \quad \alpha_i(\theta_0) = \left| \frac{A_{2i}}{A_{0i}} \right|^2 \frac{\rho_2 c_{1i} \cos \theta_{2i}}{\rho_1 c_{2i} \cos \theta_0} + \left| \frac{A_{2t1}}{A_{0i}} \right|^2 \frac{\rho_2 c_{1t} \cos \theta_{2t}}{\rho_1 c_{2t} \cos \theta_0}$$

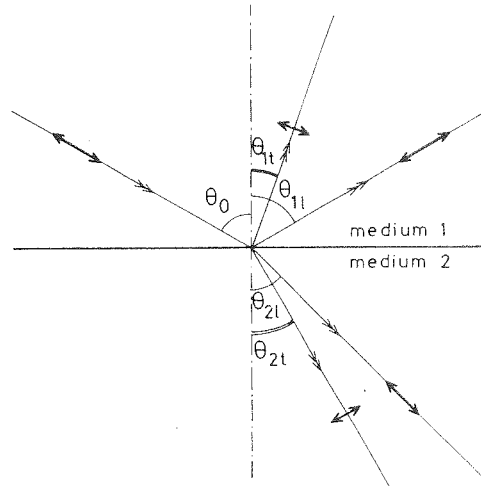


FIG. 1. Enumeration of polarizations and angles for reflected and transmitted acoustic waves due to an incident longitudinal wave at a solid-solid interface.

$$[4] \quad \alpha_{t1}(\theta_0) = \left| \frac{A_{2t1}}{A_{0t1}} \right|^2 \frac{\rho_2 c_{1t} \cos \theta_{2t}}{\rho_1 c_{2t} \cos \theta_0} + \left| \frac{A_{2t2}}{A_{0t1}} \right|^2 \frac{\rho_2 c_{1t} \cos \theta_{2t}}{\rho_1 c_{2t} \cos \theta_0}$$

$$[5] \quad \alpha_{t2}(\theta_0) = 4u/(1+u)^2$$

where

$$u = (\rho_2/\rho_1) \sin 2\theta_{2l}/\sin 2\theta_0$$

Here ρ_i and c_i refer to the densities and appropriate sound velocities of medium i , A_{0i} is the amplitude of the incident wave i , and A_{2k} the amplitude of the transmitted mode k . Application of the boundary conditions (continuity of normal and tangential components of stress and displacement) leads to 4 equations in the 4 amplitude ratios to be determined. Finally, the different angles of incidence, reflection, and transmission are related by the Snell-Descartes relations

$$[6] \quad \frac{\sin \theta_0}{c_{11}} = \frac{\sin \theta_{1l}}{c_{1t}} = \frac{\sin \theta_{2l}}{c_{21}} = \frac{\sin \theta_{2t}}{c_{2t}}$$

for an incident longitudinal wave. Similar expressions hold for the case of Γ_{t1} and Γ_{t2} . The relations [6] lead to the existence of a critical cone of total reflection in the medium of lower sound

²There is a misprint in this expression given by Cheeke *et al.* (1973).

velocity, which again limits the phonon transmission. We assume for simplicity that there is no absorption of the evanescent wave associated with total reflection, so that the transmission is zero for incidence outside the critical cone.

As pointed out by Cheeke *et al.* (1973), examination of the possibilities of mode conversion shows that the calculation of Γ_i and Γ_{11} involve similar degrees of complexity. It is readily seen that Γ_1 and Γ_{11} are each functions of 4 independent variables, which we have chosen as $\eta_1 = c_{11}/c_{12}$, $\eta_2 = c_{21}/c_{22}$, $n = c_{21}/c_{11}$, and $\rho = \rho_2/\rho_1$. The case of Γ_{12} is much simpler, as it follows directly from the boundary conditions that there is no mode conversion at the interface. It then turns out that Γ_{12} is a function of only two variables, which we have taken as $n = c_{21}/c_{11}$ and $\rho = \rho_2/\rho_1$. In the following, we have systematically chosen medium 1 such that $\rho \geq 1$.

In his original paper, Little calculated values of the Γ_i as a function of ρ and n for the cases $\eta_1 = \eta_2 = 0.33$ and $\eta_1 = 0.33$, $\eta_2 = 0.44$. The range of η values was obviously too limited to allow general use of these results and the curves presented were not easy to either interpolate or extrapolate. Weis (1969) rewrote the Little theory in a form analogous to the theory of electromagnetic radiation, although he only gave numerical results of the Γ_i (expressed as emissivities) for several particular cases. Some results for the case $\eta_1 = \eta_2 = 0.33$ have already been published by the present authors (Cheeke *et al.* 1973).

The aim of the present work is two-fold. In the first place, we analyse the theoretical expressions for the heat flow in detail, as a function of the parameters η , n , and ρ . It will be seen that in spite of the complexity of both the analytical expressions and the computed curves, it is possible to give a simple physical explanation to all of the observed features of the latter. Secondly, we have attempted to give a condensed yet complete collection of numerically calculated curves and tables of the Γ_{tot} values so that the general user can in a matter of minutes determine the value of Γ_{tot} appropriate to his problem with an accuracy of a few percent. We feel that recent experimental verification of the Little model (Herth and Weis 1970; Peterson and Anderson 1973; Cheeke *et al.* 1973) and the increased number of experiments at low temperatures involving phonon transmission indicate the need of such a set of tables at the present time.

II. Calculations

(A) General

The calculation is very similar for the case of Γ_1 and Γ_{11} so that we treat these first. The starting point is the 4×4 system of equations determined by the boundary conditions. For a given incidence angle θ , the 2 transmitted and the 2 reflected amplitudes are determined from these equations by Gauss' method. Using [3] and [4], the energy fluxes E_{inc} , E_{refl} , and E_{trans} can be determined. Thus, for each value of θ , the program can be checked for conservation of energy by verifying that $|(E_{inc} - (E_{refl} + E_{trans}))/E_{inc}| < \epsilon$ where $\epsilon \ll 1$ in practice as discussed later.

From [2], $d\Gamma/d\theta$ is determined and it is then integrated between $\theta = 0$ and $\theta = \theta_m$ where θ_m is the angle corresponding to total reflection for the mode considered. The maximum value of θ_m is $\pi/2$, corresponding to a higher velocity in the incident medium. The integration was carried out using Simpson's rule, by the use of N equidistantly spaced points, and a variable weighting factor ($2/3$ or $4/3$).

The case of Γ_{12} is much simpler due to the absence of mode conversion. The integral then becomes analytic and the results for Γ_{12} were then machine-calculated directly from this expression.

Most of the earlier results (Cheeke *et al.* 1973) of this work were obtained using the IBM 360/67 of the Université de Grenoble. However, the totality of the present results have been recalculated using the CDC 6600 of the Université de Paris VI.

(B) Accuracy

Errors may enter into the calculation either in the determination of $d\Gamma/d\theta$ or in the integration of this function. The error in $d\Gamma/d\theta$ is generally due to round-off in the intermediate calculations leading to $\epsilon \lesssim 10^{-6}$, giving a negligible error in the result. The error in the integration is determined mainly by the finite number of points used, rounding off errors being generally negligible. We aimed for a precision of 1 or 2% and experience in the preliminary calculations showed that 32 points were sufficient to attain this. 40 points were used in the final calculations. The error in Γ_{11} for $n \sim 1$ and η_2 quite different from η_1 may be slightly larger as $d\Gamma_{11}/d\theta$ is rather irregular and the absolute precision on $d\Gamma/d\theta$ is not as good as usual.

A critical test for the program, for reasons already indicated, is provided by the calculation of Γ_1 and Γ_{11} for the case of identical bodies ($\Gamma_1 \equiv 0.5$). The maximum error was found to be of the order of 1%.

(C) *Comparison with Previous Work*

We compare our numerical results with the few particular cases that have been reported in the literature. Apart from confirming our calculations, this procedure also has the advantage of indicating the order of magnitude of reproducibility generally associated with such calculations.

Some results in the form of curves giving contours of constant Γ (Γ_1 and Γ_{11}) as a function of n and ρ for a few selected values of Poisson's ratio (0.33 and 0.44) were given by Little in his original publication (Little 1959); for $n < 1$ these results agree with ours to better than 10%, often to within 2–5%, which is roughly the accuracy obtainable in reading the values from Little's figures. However, for $n > 1$, we find differences as great as 10–20%, our values generally being greater than Little's. The situation is similar for Γ_1 and Γ_{11} . The origin of this discrepancy probably lies in the relatively imprecise 5 points integration method that Little was obliged to use.

Weis (1972), and Kappus and Weis (1973) have given a number of results, calculated by a rather different method (Weis 1969), mainly for the case of different metal films deposited on either sapphire or diamond. We generally find agreement to within better than 2%, although in 2 cases this was larger (9% for gold/diamond, 5% for lead/sapphire). Finally, for the case of constantan/MgO we find agreement with Wigmore's value for Γ_{tot} to within 2% (Wigmore 1972). Detailed results have also been published by Peterson and Anderson (1973) for the case of metal-epoxy sandwiches. Extracting boundary resistances from their calculated sandwich resistances, we obtain agreement to within about 5% or better with the exception of epoxy/Be where the difference is about 9%.

A useful check is also provided by extending the range of the calculations to the case where medium 1 is liquid helium, which corresponds to the well-known Kapitza resistance. We should then obtain reasonable agreement with the results of Khalatnikov (1952, 1965) specifically for this case. This limit can be obtained easily by

using the relevant values of ρ_1 and c_1 for liquid helium and putting $\eta_1 \gg 1$ corresponding to the absence of transverse waves in medium 1. We then obtain quantitative agreement (better than 1%) with the Khalatnikov result, evaluated by using the F_1 values calculated by Challis and Cheeke (1968), for values of n and $\rho > 20$. For $n = \rho = 5$, the discrepancy is of 5 to 6%. This is quite normal as the result of Khalatnikov supposes n and $\rho \gg 1$. Effects due to surface wave absorption are not included in either calculation.

III. Curve Analysis

The analysis of the curves $d\Gamma/d\theta$ hinges upon the concepts of total reflexion and acoustic impedance. In general, an incident wave upon a boundary will be totally reflected if it is incident in the medium of lower sound velocity, and this at an angle $\theta = \sin^{-1}(c/c_2)$ where c_2 is the sound velocity of either longitudinal or transverse waves in the second medium. Thus there are two specific incidence angles, θ_{c1} and θ_{ct} , at which total reflection occurs for a given incident wave, corresponding to longitudinal and transverse surface waves in medium 2. The angle θ_{c1} determines the so-called critical cone, within which there is partial transmission of the incident wave with transmission coefficients given by [3], [4], and [5]. The situation is conveniently described with the aid of the concept of acoustic impedance $Z = \rho c / \cos \theta$ which can be defined for each l and t mode in either medium. As we are generally discussing only integrated coefficients Γ , it is sufficient to speak of an averaged impedance $\sim \rho c$. When we refer to matched (or mismatched) media, we are talking of solids of similar (or very different) impedance.

(A) Γ_{12}

We treat this case first because of its simplicity. As stated previously, Γ_{12} can be written as a function of two variables, which we write as $n = c_{2l}/c_{11}$ and $\rho = \rho_2/\rho_1$. The condition of microscopic reversibility (or equal heat flows in both directions in thermal equilibrium)

$$\frac{\Gamma_{(1 \rightarrow 2)l}}{c_{11}^2} + \frac{\Gamma_{(1 \rightarrow 2)t1}}{c_{11}^2} + \frac{\Gamma_{(1 \rightarrow 2)t2}}{c_{11}^2} = \frac{\Gamma_{(2 \rightarrow 1)l}}{c_{21}^2} + \frac{\Gamma_{(2 \rightarrow 1)t1}}{c_{21}^2} + \frac{\Gamma_{(2 \rightarrow 1)t2}}{c_{21}^2}$$

leads, in the absence of the modes l and t_1 , to the

condition

$$\Gamma_{12}(n, \rho) = (1/n^2)\Gamma_{12}(1/n, 1/\rho)$$

Study of the analytic form of Γ_{12} and of Fig. 2 leads us to the following conclusions:

(a) $\rho = 1$, $\Gamma_{12}(n, 1)$ has a maximum value of 0.5 for $n = 1$, corresponding to perfect acoustic matching (identical bodies in contact). The curve is very unsymmetrical, with a sharp maximum and discontinuous slope change at $n = 1$, corresponding to opening of the critical cone to $\theta = \pi/2$.

(b) $\rho > 1$. The maximum of Γ_{12} occurs at those values of n which satisfy $\rho n \sim 1$, and again a sharp change in slope occurs for $n \sim 1$. The curve has a vertical tangent at $n = 1$ (the series expansion of Γ_{12} near $n = 1$ is of the form $a + b|1 - n| \log |1 - n|$). This is a point of inflection as there is a maximum in Γ_{12} for $n > 1$, but with $|n - 1| \ll 1$.

(c) $n \sim 1$ ($c_{11} \sim c_{21}$), corresponding to incidence angle approximately equal to the angle of refraction. The behaviour is most easily described in terms of the half width of the critical cone θ_M , where

$$\Gamma_{12} = \int_0^{\theta_M} \frac{4u}{(1+u)^2} \sin \theta \cos \theta d\theta$$

with $u = \rho n \sqrt{1 - n^2 \cos^2 \theta} / \cos \theta$ and $\theta_M = (\pi/2)$ for $n < 1 = \arcsin(1/n)$ for $n > 1$.

For $n < 1$, $\theta_M = \pi/2$, which means that $d\Gamma/d\theta$ is non-zero for all incidence angles *i.e.* the cone is fully open and there is partial transmission of energy for all angles of incidence. For $n > 1$, there is now a critical cone in the first medium. Except for incidence very near the critical angle, $d\Gamma/d\theta$ is a relatively slowly varying function of ρ and n , and the sharp decrease in Γ_{12} then corresponds to the decrease in the cone as we increase n .

(d) $\rho n \sim 1$. This condition corresponds approximately to acoustic matching and hence a maximum in the heat transfer which can be seen in detail as follows.

We have $(4u/(1+u)^2) \sin \theta \cos \theta < 4 \sin \theta \cos \theta$ for all n , so that the maximum value of $(d\Gamma/d\theta)(n, \rho)$ occurs for $u = 1$. This condition is given by $\rho n \sqrt{(1 - n^2)/\cos^2 \theta} + n^2 = 1$. When θ varies, this condition corresponds to $\rho n \leq 1$. So the maximum occurs for $\rho n \leq 1$. We thus expect $\Gamma_{12}(n, \rho)$ to show a broad maximum with $\rho n \sim 1$ but with $|\Gamma| < 1/2$, which is what the detailed calculations show.

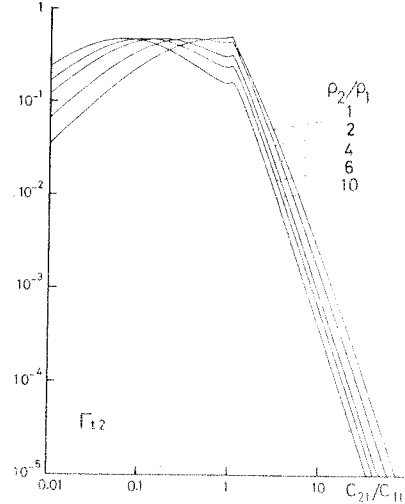


FIG. 2. Γ_{12} as a function of n and ρ , where $n = c_{21}/c_{11}$ and $\rho = \rho_2/\rho_1$.

(B) Γ_1 and Γ_{11} , General Remarks

Several curves are presented in Fig. 3. As for Γ_{12} , they have been given as a function of $n = c_{21}/c_{11}$ and $\rho = \rho_2/\rho_1$ for different fixed values of $\eta_1 = c_{11}/c_{11}$ and $\eta_2 = c_{21}/c_{21}$. Following several general remarks concerning both coefficients, we present a more detailed analysis showing the separate contributions of the transmitted longitudinal and transverse modes in each case.

Very generally, for fixed η , we can see that as ρ is increased, we will improve the matching (and hence Γ will increase) for $n \ll 1$, while the reverse is true (and hence Γ will decrease) for $n \gg 1$. A second general property of all of the curves (including Γ_{12}) is that if there is no critical cone in the first medium ($n < 1$), with Γ being a slowly varying function of n , we have Γ approximately constant in this region. However, for $n \gg 1$, the cone in the first medium is sharply decreasing as we increase n so that Γ also decreases sharply.

As opposed to the case of Γ_{12} , we see that there is much detailed structure in the results for Γ_1 and Γ_{11} . Two distinct maxima are observed, the one to the right being more pronounced (and shifting to the right) the higher the value of η_2 . In general, the peak on the left is determined by impedance matching conditions, while that on the right by effects due to mode conversion and velocity matching in the two media.

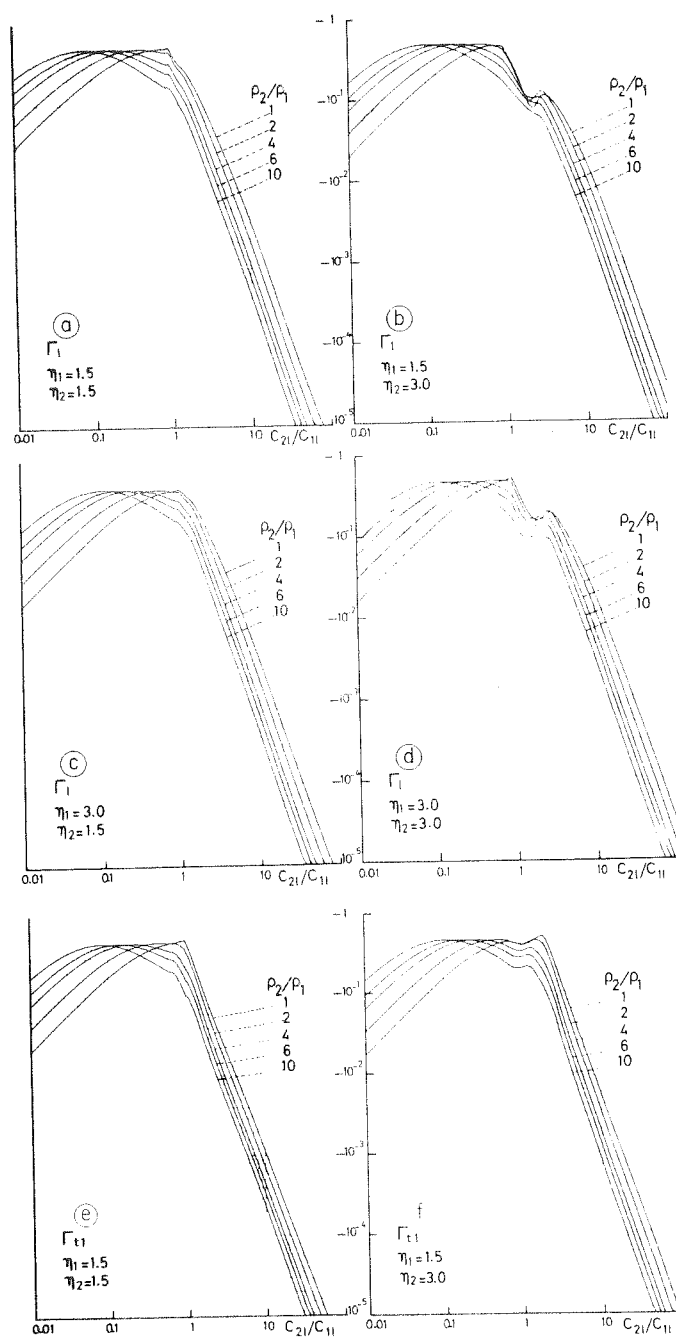


FIG. 3. (a)-(d): Γ_1 as a function of $n = c_{21}/c_{11}$ and $p = \rho_2/\rho_1$ for different values of η_1 and η_2 (the behaviour of most solids is intermediate between that of these 4 limiting cases); (e)-(f): Γ_{t1} as a function of $n = c_{21}/c_{11}$ and $p = \rho_2/\rho_1$.

The effects of mode conversion can be summarised as follows: if the two media are approximately matched then mode conversion is small, $\Gamma_{1 \rightarrow 1} \sim \Gamma_{t1 \rightarrow t1} \sim 0.5$; $\Gamma_{1 \rightarrow t1} \sim \Gamma_{t1 \rightarrow 1} \sim 0$. For extreme values of n , we have, for c_i = speed of the incident mode, for $n \ll 1$, $1 > c_{2t}/c_i > c_{2l}/c_i$ and $1 > \rho_2 c_{2l}/\rho_1 c_i > \rho_2 c_{2t}/\rho_1 c_i$, which means that the transmitted l mode is less poorly adapted than the transmitted t mode so that $\Gamma \sim \Gamma_{-l}$. Likewise for $n \gg 1$, $1 < c_{2t}/c_i < c_{2l}/c_i$ and $1 < \rho_2 c_{2t}/\rho_1 c_i < \rho_2 c_{2l}/\rho_1 c_i$, and by the same reasoning $\Gamma \sim \Gamma_{-t1}$. This simplified type of analysis is mainly valid for $\eta_1 \sim \eta_2$. A final observation is that Γ_l and Γ_{t1} are practically independent of η_1 for $n \gg 1$ and to a lesser degree independent of η_2 for $n \ll 1$.

(i) Γ_l

The decomposition of the transmitted wave into longitudinal and transverse components is shown in Fig. 4a. The behaviour for $n \ll 1$ and $n \gg 1$ is determined by the considerations of the previous section. For $\rho = 1$, we note that there is a pronounced dip in $\Gamma_{1 \rightarrow t1}$, corresponding to vastly reduced mode conversion when the two media are approximately matched. The position of the minimum is determined by the condition $c_{2t} = c_{11}$ (i.e. $\theta_{2t} = \theta_0$) so that there is no mode conversion, as can be seen from Fig. 1. For $\rho = 10$, the situation is different as both l and t modes are relatively poorly matched, leading to virtual effacement of the minimum in $\Gamma_{1 \rightarrow t1}$. The two maxima in $\Gamma_{1 \rightarrow t1}$ correspond to: (a) for $n < 1$, to approximate impedance matching $1 \rightarrow t1$ and (b) for $n > 1$, to closing of the cone in the first medium ($c_{11} \lesssim c_{2t1}$). As mentioned previously, this second peak shifts to the left with decreasing η_2 , eventually blending into the peak in $\Gamma_{1 \rightarrow l}$.

(ii) Γ_{t1}

We see in Figs. 4c and d that a minimum is also often observed in this case, due again to a strong decrease in the transmission of the mode converted wave as compared to the mode transmitted directly at conditions of approximate matching. For the latter the minimum of the mode converted signal now occurs for $\theta_0 = \theta_{2t}$ for the reasons given above. Another evident feature is that the amplitude of the maximum ($n > 1$) of the mode converted signal is always inferior to that of the nonconverted mode.

(C) Angular Variation of Γ_l ; $d\Gamma/d\theta(0)$

The behaviour indicated above can be related directly to the variation of $d\Gamma/d\theta$ as a function

of θ . The case of Γ_l will be treated for simplicity and for the particular case where $\eta_1 = 1.5$, $\eta_2 = 3$, $n = 1.5$, and $\rho = 1$ and 10. As will be indicated below, for this case, there is a direct correspondence between the two peaks shown in Fig. 5 and the contribution $\Gamma_{1 \rightarrow l}$ and $\Gamma_{1 \rightarrow t1}$ of Fig. 4. In general, for $n \ll 1$, the peaks coalesce and $d\Gamma/d\theta$ becomes a curve with simply one smooth maximum. For $n > 1$ the two correspond to $\Gamma_{1 \rightarrow l}$ for small θ and $\Gamma_{1 \rightarrow t1}$ for large θ . The integrals of the respective curves give directly the corresponding amplitudes $\Gamma_{1 \rightarrow l}$ and $\Gamma_{1 \rightarrow t1}$ shown in Fig. 4. In general, as will be explained below, as n increases, the contribution of the second peak becomes more important. We now treat the 4 points indicated in Figs. 4a and b in turn.

Point 1: We are not too far from the impedance matching condition for $1 \rightarrow l$. So the first ($1 \rightarrow l$) peak is large, with the $1 \rightarrow t1$ critical cone occurring at $\theta \sim 42^\circ$.

Point 2: Worsening mismatch for $1 \rightarrow l$ and improving match for $1 \rightarrow t1$ means that the relative peak heights are reversed.

Point 3: Same as Point 1 but with $\rho \sim 10$. We have decreased the matching for $1 \rightarrow l$ and improved it for $1 \rightarrow t1$, so that the two contributions become about equal.

Point 4: Same as Point 2 but with $\rho \sim 10$. The same effect occurs, but now the preponderance of $1 \rightarrow t1$ is even greater.

Similar analyses were made for a large range of values of n and ρ and the above behaviour is fairly typical. A more complicated variation is observed for $d\Gamma_{t1}/d\theta$, but the basic principles of course remain the same.

IV. Results

A collection of the final results for Γ_{tot} is given in Fig. 6 for a reasonable range of η_1 , η_2 , and ρ . We have given Γ_{tot} rather than the separate curves for Γ_l , Γ_{t1} , and Γ_{t2} for convenience. A complete set of numerical values corresponding to these curves is given in the Appendix, as well as results for many intermediate values of η_1 and η_2 . For very small values of Γ_{tot} , the value given in the table is equal to Γ_{tot} times the multiplying factor given in the right hand column.

Having suitably defined the media 1 and 2 of the problem at hand, the user should then calculate η_1 , η_2 , n , and ρ appropriate to his system. In general, the values of η_1 and η_2 will not correspond to those given in the curves and Appendix, and the most suitable procedure is then to select those sets of curves which have η_1 and η_2

CAN. J. PHYS. VOL. 54, 1976

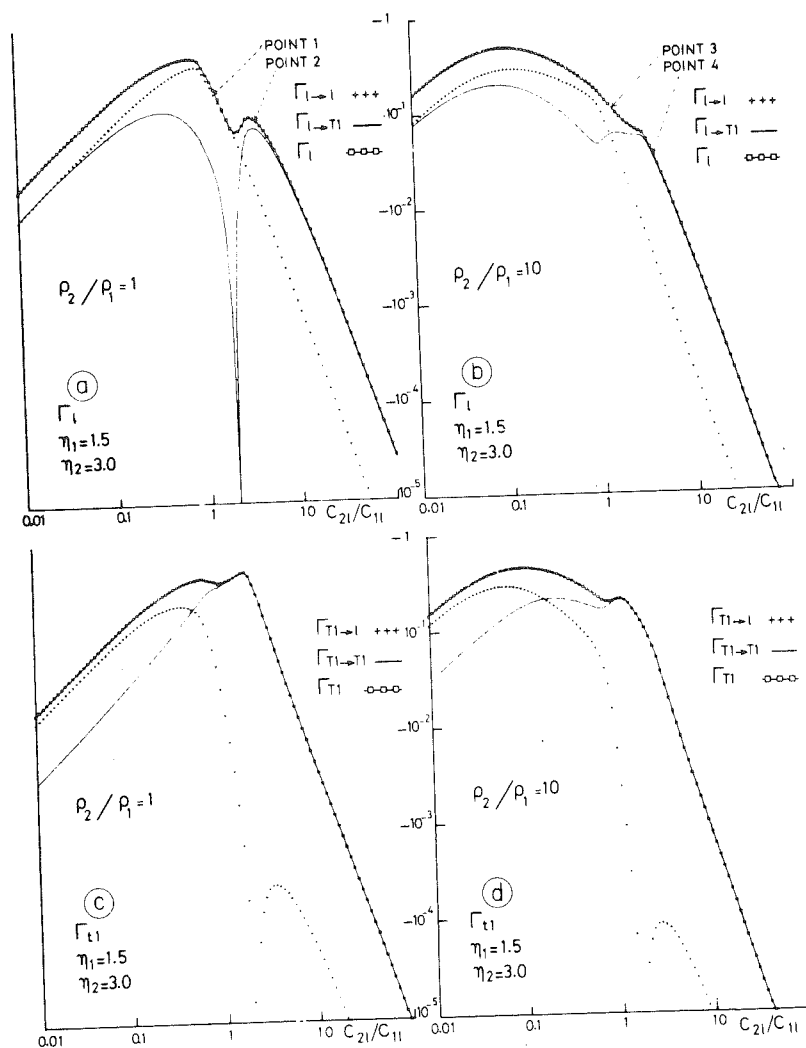


FIG. 4. Decomposition of curves for Γ_l and Γ_{t1} in terms of directly transmitted modes and converted modes.

nearest to the desired values. This will give from 2 to 4 values of Γ_{tot} , and with the aid of the Appendix, a suitable interpolation can usually be made to within better than 5% in our experience. This is probably sufficient for the practical user in most cases, especially in view of the intrinsic uncertainty in the appropriate average values of c_1 and c_l for crystalline media in any case.

As an example of the accuracy obtainable by this procedure in typical cases, we have given in Table 1 the results for Γ_{tot} calculated by this

method and compared to the exact values obtained by the machine calculation for each specific case.

V. Discussion

The present results should be useful chiefly in providing quantitative estimates of thermal boundary resistances between solids at low temperatures and in the determination of phonon radiation temperatures of pulse heated metal films on a variety of dielectric substrates. Both

CHEEKE ET AL.

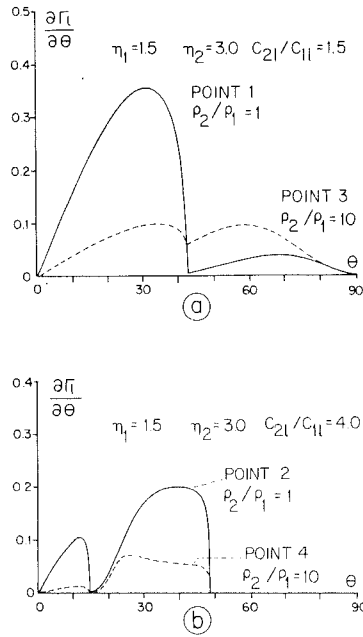


FIG. 5. Curves of $d\Gamma/d\theta$ for selected points of Fig. 4, showing directly effects due to mode conversion.

applications follow directly from [1]. Before commenting upon the range of validity of the theory to these two problems, we shall deal briefly with a number of modifications and extensions of the model which are generally applicable.

(A) Anisotropic Effects

Phonon Focussing

The classical theory of acoustic wave propagation in anisotropic media shows that in general the energy propagation vector associated with a mode is not parallel to $\mathbf{q}$, with the consequence that the energy flux density is greater in some directions than in others. Such 'phonon focussing' effects will of course alter the simple Debye-Knudsen angular distribution of the incident energy flux assumed in the present work. A general description of this effect has been given by Taylor *et al.* (1969), and its application to heat pulse propagation has been treated quantitatively by Weis *et al.*³

Transmission Between Anisotropic Media

The calculation outlined in the present work becomes much more complicated. Even in the

³Martinson, C. 1975. Private communication.

TABLE 1. Results for Γ_{tot} calculated by interpolation with a comparison to machine-calculated exact values

	Indium Quartz	Tin Sapphire	Tin Quartz	Epibond Tungsten
Γ_{tot} (from table)	0.45	0.32	0.62	0.28
Γ_{tot} (machine calculation)	0.463	0.317	0.640	0.269

case of an isotropic source medium, the transmission coefficient will be altered due to acoustic anisotropy in medium 2.

(B) Phonon Lifetime Effects

The phonon lifetime effects in the medium of the higher acoustic velocity may lead to important modifications of the above formulation (Peterson and Anderson 1973). In this case, absorption of the generalised (Stoneley) surface wave set up in the second medium leads to a greatly enhanced heat flow, as the critical cone is effectively opened. The effect is thus particularly important in cases where the critical cone is small (cases of large mismatch, for example the metal-liquid helium interface) and is easily included in the calculation by the use of complex wave vectors (as opposed to the real ones used here). Both the general uncertainty concerning the value of the relevant attenuation coefficient for any given problem plus the vastly increased amount of information that would have to be presented precluded any treatment of the effect in the present work.

(C) The Case of a Heated Film

In the case of a heated film, it has been shown that, due to the finite thickness of the film, there can be significant deviations from a Bose-Einstein distribution (Perrin and Budd 1972; Maris 1972). While such effects may be limited by severe defect scattering in the film, they may become very important at low temperatures and for thin films.

(D) Phonon Dispersion

As the temperature is increased, there are departures from a linear dispersion law and a quadratic density of states so that the Debye model is not strictly valid unless $T \ll \theta_D$. Effects due to dispersion and the temperature dependence of the Debye integral can be included quantitatively as shown by Weis (1969) and

CAN. J. PHYS. VOL. 54, 1976

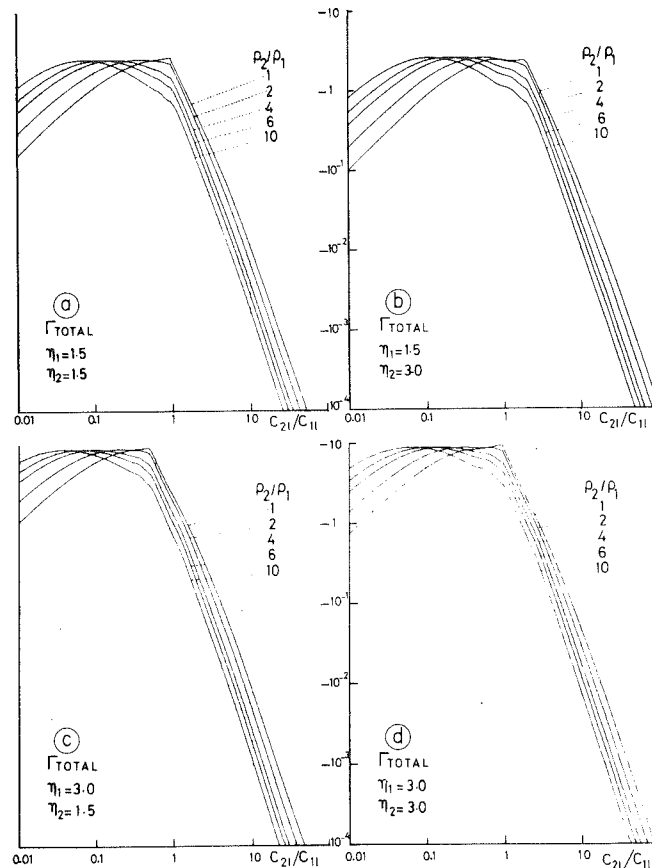


FIG. 6. Representative curves of Γ_{tot} .

Cheeke *et al.* (1973). These corrections can generally be neglected for $T < \theta_D/10$.

(E) Corrections

Corrections due to the nonequilibrium nature of the phonon distribution function in the presence of a heat current (Simons 1974). Inclusion of a nonspherical distribution function in the Little (1959) model resolves a well-known paradox concerning the necessary vanishing of the boundary resistance when the two bodies are identical. The corresponding correction to the Little result should be important for the case where the mismatch between the two media is small.

We now pass to a brief consideration of the above generalisations to the principal experimental situations of interest. It is fortunate that

in the case of heat pulse phonon radiation most of the above factors are either negligible or easily included in the model under normal operating conditions. In particular, the radiation temperature is usually sufficiently high so that (c) and (e) are not important and sufficiently low so as to exclude (d); *i.e.* in the range $4 \lesssim T \lesssim 20$ K. The film is isotropic in the plane and thick enough to avoid the necessity of size corrections. The substrate is usually optically polished, so that (b) should be unimportant. If the substrate is an anisotropic monocrystal, the actual transmission coefficients depend on the interface direction. For media such as diamond and sapphire, the isotropic model can be used and leads to an agreement of a few percent with experiment. When quartz is the heat pulse transmission medium, some measures were also

correctly explained by an averaged isotropic model (Cheeke *et al.* 1972). Later on, using other directions of propagation, discrepancies of 10% to 30% were found (Martinon, 1976). No data or calculation are as yet available on very anisotropic systems. To use an isotropic model, one needs to choose averaged velocities for longitudinal and transverse modes. As the real phase and group velocities may vary by a factor of 2 to 10 with the direction, the averaged values are not easy to define.

All of the above refinements are of course also present to varying degrees in the solid-solid thermal resistance problem. Effects due to phonon focussing and anisotropy have been observed in thermal conductivity experiments in sapphire (Doulat *et al.* 1976) but not as yet on boundary resistance experiments. In most experiments (and certainly in practical applications) the materials used are polycrystalline, in which case the correction should be very small. The most important single correction is probably due to phonon lifetime effects. These may be only of the order of a few per cent for reasonably well acoustically matched defect free solids (copper-epoxy) but they may be very large ($\sim 50\%$ or more) for badly matched solids with considerable surface damage or a strong electron-phonon interaction (Be-epoxy). A thorough experimental and theoretical treatment is given by Peterson and Anderson (1973). In the special case of a solid in contact with liquid helium (and undoubtedly also for other quantum systems), lifetime effects may reduce the boundary resistance by orders of magnitude (Haug and Weiss 1972; Anderson and Johnson 1972) at least near $T \sim 0.1$ K. As far as nonequilibrium effects are concerned, a special case of a metal-epoxy sandwich has been investigated by Reynolds and Anderson (1975). However, for this configuration (and in fact in most experimental situations), one does not know the frequency distribution of phonons incident upon the boundary so that it is difficult to compare Simons' (Simons 1974) predictions with existing data. Fortunately, if the mismatch is large, the correction is small while if the mismatch is small (where the Simons' correction may be important), the boundary resistance is often masked by bulk or spurious thermal resistances. The present calculations can be used directly (by use of Simons' equation (21)) to examine this correction term for any particular case. As the boundary resistance varies approxi-

mately as T^{-3} , it becomes increasingly unimportant with increasing temperature (and, as before, inapplicable due to the breakdown of the Debye model). Hence the present tables are mainly of interest for low temperature work, and will be useful for the temperature range below roughly 4 K. It should be emphasized that in any given problem, one must of course add in any series or parallel bulk thermal resistances, size effects, etc. In particular, it is important that glued or greased joints be made as thin as possible, otherwise the bulk contribution of the glue may well swamp the boundary resistance.

- ANDERSON, A. C. and JOHNSON, W. L. 1972, *J. Low Temp. Phys.* **7**, 1.
 CHALLIS, L. J. and CHEEKE, J. D. N. 1968, *Proc. R. Soc. A*, **304**, 479.
 CHEEKE, J. D. N. and MARTINON, C. 1972, *Solid State Commun.* **11**, 1971.
 CHEEKE, J. D. N., HEBRAL, B., and MARTINON, C. 1973, *J. Physique*, **34**, 257.
 DOULAT, J., LOCATELLI, M., and RIVALLIN, J. 1976, Phonon scattering in solids, *ed. by L. J. Challis, V. W. Rampton, and A. F. G. Wyatt* (Plenum Press, New York, NY), p. 383.
 HAUG, H. and WEISS, K. 1972, *Phys. Lett. A*, **40**, 19.
 HERTH, P. and WEIS, O. 1970, *Z. Angew. Phys.*, **29**, 101.
 KAPPUS, W. and WEIS, O. 1973, *J. Appl. Phys.*, **44**, 1947.
 KHALATNIKOV, I. M. 1952, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **22**, 687.
 ——— 1965, *An introduction to the theory of superfluidity* (Benjamin Press, New York, NY), p. 138.
 LITTLE, W. A. 1959, *Can. J. Phys.*, **37**, 334.
 MARIS, H. J. 1972, *Suppl. J. Phys. (Paris)*, **33**, C4-3 (Ste. Maxime Conference on High Frequency Phonons).
 MARTINON, C. 1976, Doctoral Thesis, Heidelberg University, Heidelberg, Germany.
 PERRIN, N. and BUDD, H. 1972, *Phys. Rev. Lett.*, **28**, 1701.
 PETERSON, R. E. and ANDERSON, A. C. 1973, *J. Low Temp. Phys.*, **11**, 639.
 REYNOLDS, C. L. and ANDERSON, A. C. 1975, *J. Low Temp. Phys.*, **21**, 641.
 SIMONS, S. 1974, *J. Phys. C*, **7**, 4048.
 TAYLOR, B., MARIS, H., and ELBAUM, C. 1969, *Phys. Rev. Lett.*, **23**, 416.
 WEIS, O. 1969, *Z. Angew. Phys.*, **26**, 325.
 ——— 1972, *Suppl. J. Phys. (Paris)*, **33**, C4-48 (Ste. Maxime Conference on High Frequency Phonons).
 WIGMORE, J. K. 1972, *Phys. Rev. B*, **5**, 700.

Appendix

Values of Γ_{tot} as a function of the density ratio and longitudinal sound velocity ratio of the two media are given in Table 2. For very small values of Γ_{tot} , the value given in Table 2 is equal to Γ_{tot} times the multiplying factor given in the right-hand column.

CAN. J. PHYS. VOL. 54, 1976

TABLE 2. Values of Γ_{tot} as a function of the density ratio and the longitudinal sound velocity ratio of the two media

MEDIUM 1: MEDIUM 2:		CL/CT=1.50 CL/CT=1.50		POISSON'S RATIO= .1000 POISSON'S RATIO= .1000		DENSITY 2/DENSITY 1										MULTIPLYING FACTOR
C2L/C1L		1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0					
0.1	1.15	1.51	1.78	2.14	2.36	2.48	2.57	2.51	2.28	2.06	1.86	1				
0.2	1.76	2.14	2.36	2.55	2.57	2.52	2.29	2.05	1.86	1.66	1.39	1				
0.3	2.14	2.44	2.56	2.56	2.45	2.31	1.96	1.68	1.29	1.06	0.84	1				
0.35	2.26	2.51	2.57	2.52	2.36	2.14	1.82	1.53	1.16	0.93	0.71	1				
0.4	2.36	2.56	2.57	2.47	2.27	2.08	1.69	1.41	1.06	0.84	0.61	1				
0.45	2.43	2.59	2.55	2.41	2.19	1.99	1.59	1.31	0.97	0.76	0.54	1				
0.5	2.49	2.61	2.56	2.35	2.11	1.90	1.50	1.23	0.90	0.71	0.51	1				
0.6	2.57	2.61	2.51	2.24	1.97	1.75	1.36	1.10	0.79	0.62	0.43	1				
0.8	2.66	2.60	2.42	2.05	1.75	1.53	1.15	0.92	0.65	0.52	0.34	1				
1	2.75	2.57	2.42	1.85	1.55	1.32	0.97	0.76	0.54	0.41	0.27	1				
1.25	1.70	1.59	1.44	1.20	1.02	0.84	0.63	0.51	0.38	0.29	0.19	1				
1.5	1.15	1.06	0.96	0.73	0.64	0.57	0.43	0.36	0.29	0.16	0.13	1				
1.75	0.829	0.750	0.670	0.543	0.455	0.391	0.290	0.231	0.166	0.131	0.091	1				
2	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	10				
2.5	3.76	3.62	3.44	2.18	1.79	1.52	1.11	0.88	0.63	0.49	0.34	10				
3	2.46	2.06	1.70	1.35	1.10	0.90	0.67	0.53	0.37	0.24	0.12	10				
3.5	1.70	1.40	1.10	0.85	0.69	0.56	0.42	0.30	0.23	0.16	0.12	10				
4	1.23	0.93	0.69	0.54	0.42	0.33	0.23	0.16	0.12	0.09	0.06	100				
5	0.85	0.55	0.37	0.24	0.17	0.12	0.08	0.05	0.03	0.02	0.01	100				
10	11.5	5.53	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1000				

MEDIUM 1: MEDIUM 2:		CL/CT=1.50 CL/CT=1.75		POISSON'S RATIO= .1000 POISSON'S RATIO= .2576		DENSITY 2/DENSITY 1										MULTIPLYING FACTOR
C2L/C1L		1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0					
0.1	1.07	1.42	1.67	2.07	2.30	2.44	2.57	2.55	2.36	2.13	1.86	1				
0.2	1.59	2.07	2.30	2.53	2.58	2.55	2.36	2.14	1.76	1.48	1.21	1				
0.3	2.06	2.38	2.53	2.58	2.50	2.37	2.05	1.77	1.38	1.12	0.84	1				
0.35	2.14	2.47	2.57	2.55	2.42	2.27	1.91	1.62	1.24	1.00	0.71	1				
0.4	2.29	2.53	2.57	2.51	2.34	2.16	1.78	1.50	1.13	0.90	0.61	1				
0.45	2.37	2.57	2.57	2.46	2.26	2.07	1.68	1.40	1.04	0.82	0.54	1				
0.5	2.44	2.59	2.56	2.40	2.18	1.98	1.58	1.31	0.96	0.76	0.51	1				
0.6	2.53	2.60	2.53	2.29	2.04	1.83	1.43	1.17	0.85	0.67	0.43	1				
0.8	2.59	2.59	2.46	2.15	1.88	1.66	1.27	1.02	0.73	0.57	0.34	1				
1	2.66	2.56	2.34	1.94	1.64	1.42	1.05	0.86	0.59	0.45	0.27	1				
1.25	2.24	2.11	1.91	1.57	1.33	1.15	0.86	0.68	0.49	0.38	0.21	1				
1.5	1.51	1.41	1.28	1.07	0.90	0.78	0.59	0.47	0.33	0.26	0.15	1				
1.75	1.09	1.01	0.91	0.75	0.63	0.53	0.41	0.32	0.23	0.18	0.10	1				
2	0.819	0.744	0.667	0.544	0.457	0.394	0.292	0.232	0.165	0.128	0.071	1				
2.5	5.02	4.42	3.89	3.10	2.57	2.20	1.61	1.27	0.89	0.62	0.34	10				
3	3.32	2.85	2.47	1.94	1.59	1.35	0.97	0.76	0.53	0.44	0.25	10				
3.5	2.32	1.95	1.67	1.29	1.05	0.86	0.67	0.49	0.37	0.27	0.15	10				
4	1.69	1.40	1.18	0.94	0.73	0.61	0.43	0.34	0.23	0.18	0.10	10				
5	0.83	0.71	0.59	0.44	0.35	0.29	0.23	0.18	0.12	0.09	0.05	100				
10	1.65	1.24	0.94	0.71	0.55	0.45	0.31	0.24	0.16	0.12	0.07	100				

MEDIUM 1: MEDIUM 2:		CL/CT=1.50 CL/CT=2.00		POISSON'S RATIO= .1000 POISSON'S RATIO= .3333		DENSITY 2/DENSITY 1										MULTIPLYING FACTOR
C2L/C1L		1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0					
0.1	1.01	1.35	1.61	2.00	2.24	2.40	2.57	2.57	2.41	2.21	1.96	1				
0.2	1.61	1.99	2.24	2.49	2.58	2.57	2.42	2.21	1.84	1.56	1.31	1				
0.3	1.99	2.33	2.49	2.58	2.53	2.42	2.12	1.85	1.46	1.19	0.94	1				
0.35	2.12	2.42	2.55	2.57	2.46	2.33	1.98	1.70	1.32	1.07	0.81	1				
0.4	2.23	2.49	2.58	2.53	2.39	2.23	1.86	1.58	1.20	0.96	0.71	1				
0.45	2.32	2.54	2.57	2.49	2.31	2.13	1.75	1.47	1.11	0.88	0.61	1				
0.5	2.39	2.57	2.56	2.44	2.24	2.05	1.66	1.38	1.03	0.81	0.54	1				
0.6	2.48	2.59	2.54	2.33	2.10	1.89	1.50	1.23	0.93	0.72	0.47	1				
0.8	2.54	2.55	2.45	2.18	1.92	1.71	1.33	1.08	0.78	0.61	0.38	1				
1	2.57	2.54	2.39	2.05	1.76	1.54	1.16	0.91	0.66	0.51	0.29	1				
1.25	2.52	2.36	2.14	1.76	1.48	1.28	0.94	0.74	0.54	0.41	0.24	1				
1.5	1.94	1.62	1.40	1.17	1.01	0.87	0.69	0.54	0.43	0.33	0.19	1				
1.75	1.39	1.30	1.18	0.98	0.84	0.73	0.54	0.43	0.34	0.24	0.14	1				
2	1.05	0.90	0.81	0.70	0.61	0.53	0.40	0.31	0.22	0.17	0.10	1				
2.5	0.49	0.43	0.38	0.32	0.27	0.23	0.17	0.13	0.09	0.06	0.03	10				
3	0.33	0.30	0.27	0.23	0.19	0.17	0.13	0.10	0.07	0.05	0.03	10				
3.5	0.25	0.22	0.20	0.17	0.14	0.12	0.09	0.07	0.05	0.03	0.02	10				
4	0.22	0.19	0.17	0.14	0.11	0.09	0.07	0.05	0.03	0.02	0.01	10				
5	0.13	0.10	0.09	0.07	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0.01	0.00	100				
10	2.28	1.73	1.40	1.01	0.78	0.67	0.48	0.34	0.23	0.17	0.10	100				

CHEEKE ET AL.

TABLE 2 (Continued)

MEDIUM 1: CL/CT=1.50 MEDIUM 2: CL/CT=2.25		POISSON'S RATIO=.1000 POISSON'S RATIO=.3764		DENSITY 2/DENSITY 1										MULTIPLYING FACTOR
C2L/C1L	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0				
0.1	.954	1.08	1.25	1.43	2.19	2.35	2.55	2.58	2.46	2.27				
0.2	1.54	1.93	2.18	2.46	2.56	2.58	2.46	2.27	1.92	1.64		1		
0.3	1.92	2.27	2.40	2.58	2.55	2.46	2.18	1.92	1.53	1.26		1		
0.35	2.06	2.38	2.52	2.57	2.49	2.37	2.05	1.78	1.39	1.13		1		
0.4	2.17	2.45	2.56	2.55	2.43	2.24	1.83	1.65	1.27	1.02		1		
0.45	2.27	2.51	2.58	2.51	2.36	2.19	1.82	1.54	1.17	.938		1		
0.5	2.34	2.54	2.58	2.47	2.29	2.10	1.72	1.44	1.08	.865		1		
0.6	2.44	2.57	2.55	2.36	2.15	1.95	1.56	1.29	.951	.752		1		
0.8	2.50	2.53	2.44	2.18	1.94	1.73	1.36	1.11	.811	.638		1		
1	2.49	2.49	2.38	2.09	1.83	1.62	1.24	1.01	.728	.569		1		
1.25	2.46	2.39	2.20	1.85	1.58	1.37	1.03	.820	.584	.453		1		
1.5	2.44	2.27	2.04	1.67	1.41	1.22	.906	.721	.511	.396		1		
1.75	1.74	1.63	1.49	1.25	1.06	.923	.694	.555	.397	.309		1		
2	1.31	1.22	1.12	.934	.796	.692	.520	.416	.297	.231		1		
2.5	.816	.747	.673	.553	.466	.402	.299	.238	.169	.131		1		
3	5.49	4.90	4.35	3.51	2.92	2.50	1.84	1.46	1.03	.796		10		
3.5	3.90	3.40	2.98	2.37	1.95	1.66	1.21	.955	.670	.517		10		
4	2.88	2.47	2.14	1.67	1.37	1.16	.840	.658	.460	.354		10		
5	1.71	1.42	1.21	.926	.749	.630	.450	.351	.244	.187		10		
10	3.04	2.34	1.79	1.38	1.08	.890	.619	.475	.324	.247		100		

MEDIUM 1:		CL/CT=1.50		POISSON'S RATIO= .1000											
MEDIUM 2:		CL/CT=2.50		POISSON'S RATIO= .4044											
DENSITY 2/DENSITY 1															
C2L/C1L	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0	MULTIPLYING FACTOR				
0.1	.908	1.23	1.49	1.87	2.13	2.31	2.53	2.58	2.49	2.32	1				
0.2	1.48	1.87	2.13	2.42	2.54	2.58	2.49	2.32	1.94	1.71	1				
0.3	1.87	2.22	2.42	2.57	2.56	2.49	2.23	1.98	1.50	1.32	1				
0.35	2.01	2.33	2.49	2.57	2.51	2.41	2.11	1.84	1.45	1.19	1				
0.4	2.12	2.42	2.54	2.56	2.46	2.32	1.99	1.71	1.33	1.08	1				
0.45	2.22	2.47	2.56	2.53	2.39	2.24	1.88	1.60	1.23	.989	1				
0.5	2.29	2.51	2.57	2.49	2.32	2.15	1.78	1.50	1.14	.912	1				
0.6	2.40	2.55	2.55	2.39	2.19	2.00	1.61	1.34	.997	.792	1				
0.8	2.46	2.51	2.43	2.19	1.96	1.76	1.38	1.13	.820	.653	1				
1	2.43	2.44	2.35	2.09	1.85	1.65	1.29	1.05	.769	.605	1				
1.25	2.39	2.37	2.24	1.93	1.66	1.46	1.11	.891	.639	.498	1				
1.5	2.40	2.27	2.07	1.72	1.46	1.26	.946	.755	.537	.417	1				
1.75	2.15	2.02	1.84	1.52	1.29	1.12	.837	.668	.476	.370	1				
2	1.61	1.51	1.38	1.16	.986	.858	.646	.517	.370	.288	1				
2.5	1.00	.931	.846	.705	.599	.519	.388	.310	.221	.172	1				
3	.679	.616	.553	.451	.379	.326	.241	.191	.136	.105	1				
3.5	4.85	4.31	3.81	3.06	2.56	2.17	1.60	1.26	.888	.687	10				
4	3.60	3.14	2.74	2.17	1.79	1.52	1.11	.872	.612	.472	10				
5	2.16	1.82	1.56	1.21	.986	.831	.598	.467	.326	.250	10				
10	3.94	3.06	2.50	1.83	1.44	1.19	.830	.638	.437	.332	100				

MEDIUM 1: MEDIUM 2:		CL/CT=1.50 CL/CT=3.00		POISSON'S RATIO= .1000 POISSON'S RATIO= .4375		DENSITY 2/DENSITY 1										MULTIPLYING FACTOR
C2L/C1L	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0						
0.1	.835	1.14	1.39	1.77	2.03	2.22	2.48	2.56	2.53	2.39		1				
0.2	1.39	1.77	2.03	2.35	2.50	2.56	2.56	2.39	2.09	1.82		1				
0.3	1.76	2.13	2.34	2.53	2.56	2.52	2.31	2.09	1.71	1.44		1				
0.35	1.91	2.25	2.43	2.56	2.54	2.46	2.20	1.95	1.56	1.30		1				
0.4	2.03	2.34	2.49	2.56	2.49	2.39	2.09	1.82	1.44	1.18		1				
0.45	2.12	2.41	2.52	2.54	2.44	2.31	1.98	1.71	1.33	1.08		1				
0.5	2.21	2.46	2.54	2.51	2.38	2.23	1.88	1.61	1.24	1.00		1				
0.6	2.33	2.51	2.54	2.43	2.26	2.08	1.71	1.44	1.09	.869		1				
0.8	2.39	2.47	2.43	2.22	2.01	1.81	1.44	1.19	.879	.695		1				
1	2.34	2.38	2.30	2.08	1.86	1.67	1.32	1.09	.801	.633		1				
1.25	2.27	2.29	2.21	1.98	1.76	1.57	1.23	1.00	.732	.576		1				
1.5	2.30	2.29	2.16	1.87	1.62	1.43	1.09	.878	.632	.494		1				
1.75	2.33	2.23	2.04	1.70	1.45	1.26	.944	.755	.538	.418		1				
2	2.34	2.19	1.96	1.61	1.36	1.18	.875	.696	.494	.382		1				
2.5	1.44	1.35	1.24	1.04	.892	.776	.585	.469	.335	.261		1				
3	.981	.913	.833	.694	.590	.511	.383	.306	.218	.169		1				
3.5	.707	.645	.581	.476	.401	.345	.256	.204	.144	.112		1				
4	5.29	4.74	4.22	3.41	2.85	2.44	1.80	1.42	1.00	.776		10				
5	3.22	2.80	2.44	1.92	1.58	1.35	.978	.769	.539	.415		10				
10	6.15	4.88	4.03	2.99	2.38	1.97	1.39	1.07	.735	.560		100				

CAN. J. PHYS. VOL. 54, 1976

TABLE 2 (Continued)

MEDIUM 1: CL/CT=1.75 MEDIUM 2: CL/CT=1.50		POISSON'S RATIO = .2576 POISSON'S RATIO = .1000									
		DENSITY 2/DENSITY 1									
CZL/C1L	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0	MULTIPLYING FACTOR
0.1	1.65	2.12	2.47	2.91	3.14	3.26	3.30	3.19	2.86	2.54	1
0.2	2.46	2.91	3.15	3.32	3.30	3.20	2.87	2.56	2.06	1.71	1
0.3	2.90	3.22	3.33	3.27	3.10	2.90	2.44	2.08	1.59	1.29	1
0.35	3.04	3.30	3.34	3.20	2.98	2.75	2.25	1.90	1.44	1.15	1
0.4	3.15	3.34	3.34	3.13	2.86	2.61	2.11	1.76	1.31	1.04	1
0.45	3.23	3.36	3.31	3.05	2.75	2.49	1.98	1.64	1.21	.956	1
0.5	3.29	3.37	3.28	2.97	2.66	2.39	1.88	1.54	1.13	.889	1
0.6	3.36	3.36	3.22	2.86	2.52	2.24	1.74	1.42	1.03	.810	1
0.8	3.50	3.31	3.01	2.48	2.10	1.81	1.35	1.08	.765	.593	1
1	2.66	2.44	2.25	1.88	1.59	1.37	1.02	.811	.577	.448	1
1.25	1.66	1.54	1.40	1.16	.989	.858	.644	.516	.371	.291	1
1.5	1.13	1.04	.933	.764	.642	.554	.412	.330	.237	.187	1
1.75	.814	.727	.645	.519	.432	.370	.273	.218	.156	.122	1
2	6.06	5.31	4.65	3.68	3.05	2.60	1.90	1.51	1.08	.847	10
2.5	3.65	3.09	2.65	2.06	1.68	1.42	1.03	.817	.582	.455	10
3	2.37	1.96	1.60	1.27	1.03	.863	.623	.491	.349	.272	10
3.5	1.64	1.32	1.11	.835	.672	.568	.405	.319	.226	.176	10
4	1.18	.937	.777	.540	.465	.399	.278	.219	.154	.120	10
5	6.69	5.21	4.26	3.14	2.50	2.08	1.48	1.16	.816	.633	100
10	10.7	7.49	5.26	4.50	3.53	2.91	2.05	1.58	1.10	.840	1000

MEDIUM 1: CL/CT=1.75 MEDIUM 2: CL/CT=1.75		POISSON'S RATIO = .2576 POISSON'S RATIO = .2576									
		DENSITY 2/DENSITY 1									
CZL/C1L	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0	MULTIPLYING FACTOR
0.1	1.54	2.01	2.35	2.92	3.09	3.23	3.33	3.26	2.97	2.67	1
0.2	2.35	2.82	3.09	3.31	3.33	3.27	2.98	2.68	2.19	1.83	1
0.3	2.91	3.17	3.31	3.32	3.18	3.00	2.56	2.20	1.71	1.39	1
0.35	2.97	3.26	3.35	3.26	3.07	2.85	2.38	2.02	1.54	1.24	1
0.4	3.08	3.32	3.35	3.19	2.96	2.72	2.23	1.87	1.41	1.12	1
0.45	3.17	3.35	3.34	3.12	2.85	2.60	2.10	1.74	1.30	1.03	1
0.5	3.24	3.36	3.31	3.05	2.76	2.49	1.99	1.64	1.21	.957	1
0.6	3.31	3.36	3.25	2.93	2.61	2.34	1.85	1.51	1.11	.875	1
0.8	3.44	3.38	3.16	2.70	2.32	2.03	1.54	1.24	.887	.692	1
1	3.56	3.31	2.96	2.40	2.02	1.73	1.26	1.02	.721	.558	1
1.25	2.20	2.05	1.86	1.55	1.32	1.15	.864	.692	.495	.386	1
1.5	1.48	1.37	1.25	1.04	.884	.768	.576	.461	.329	.256	1
1.75	1.07	.982	.886	.729	.615	.530	.395	.314	.223	.173	1
2	.806	.723	.644	.521	.436	.374	.276	.218	.154	.120	1
2.5	4.91	4.27	3.72	2.94	2.42	2.06	1.50	1.18	.828	.638	10
3	3.23	2.74	2.35	1.82	1.49	1.26	.905	.708	.494	.379	10
3.5	2.25	1.86	1.58	1.21	.978	.821	.587	.457	.317	.243	10
4	1.63	1.33	1.12	.843	.677	.566	.402	.312	.216	.165	10
5	9.40	7.46	6.17	4.58	3.64	3.02	2.13	1.64	1.13	.861	100
10	1.55	1.15	.915	.650	.505	.413	.284	.217	.147	.111	100

MEDIUM 1: CL/CT=1.75 MEDIUM 2: CL/CT=2.00		POISSON'S RATIO = .2576 POISSON'S RATIO = .3333									
		DENSITY 2/DENSITY 1									
CZL/C1L	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0	MULTIPLYING FACTOR
0.1	1.46	1.91	2.25	2.74	3.03	3.20	3.34	3.30	3.04	2.77	1
0.2	2.26	2.74	3.03	3.29	3.35	3.31	3.06	2.78	2.30	1.94	1
0.3	2.73	3.12	3.29	3.34	3.23	3.07	2.66	2.31	1.81	1.48	1
0.35	2.89	3.22	3.34	3.30	3.14	2.94	2.48	2.13	1.63	1.32	1
0.4	3.02	3.29	3.35	3.24	3.03	2.81	2.33	1.97	1.49	1.20	1
0.45	3.11	3.33	3.35	3.18	2.93	2.69	2.19	1.84	1.39	1.10	1
0.5	3.19	3.35	3.33	3.11	2.84	2.58	2.08	1.73	1.28	1.02	1
0.6	3.27	3.35	3.25	2.97	2.67	2.41	1.91	1.57	1.15	.910	1
0.8	3.36	3.37	3.22	2.83	2.48	2.20	1.70	1.38	1.00	.786	1
1	3.47	3.31	3.03	2.52	2.13	1.85	1.38	1.11	.790	.614	1
1.25	2.62	2.65	2.41	1.99	1.69	1.47	1.10	.884	.632	.492	1
1.5	1.90	1.76	1.61	1.35	1.15	1.000	.753	.604	.432	.337	1
1.75	1.36	1.26	1.15	.961	.818	.710	.533	.426	.304	.237	1
2	1.03	.947	.850	.705	.596	.515	.383	.305	.217	.168	1
2.5	6.37	5.06	4.00	4.02	3.34	2.86	2.09	1.65	1.17	.901	10
3	4.24	3.66	3.19	2.51	2.06	1.75	1.27	.997	.698	.537	10
3.5	2.97	2.51	2.16	1.67	1.36	1.15	.827	.646	.450	.346	10
4	2.17	1.80	1.53	1.17	.947	.795	.568	.442	.307	.235	10
5	1.26	1.02	.853	.639	.511	.426	.301	.233	.161	.123	10
10	2.14	1.61	1.29	.921	.718	.568	.406	.310	.211	.160	100

CHEEKE ET AL.

TABLE 2 (Continued)

MEDIUM 1: MEDIUM 2:		CL/CT=1.75 CL/CT=2.25		POISSON'S RATIO= .2576 POISSON'S RATIO= .3769		DENSITY 2/DENSITY 1										MULTIPLYING FACTOR
C2L/C1L		1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0					
0.1	1.38	1.83	2.10	2.55	2.77	3.71	3.34	3.33	3.13	2.87	2.86	2.04	1			
0.2	2.17	2.66	2.90	3.26	3.35	3.33	3.13	2.87	2.86	2.04	1.56	1				
0.3	2.66	3.07	3.26	3.35	3.27	3.14	2.75	2.41	1.96	1.56	1.40	1				
0.35	2.82	3.18	3.32	3.33	3.19	3.01	2.58	2.22	1.72	1.40	1.27	1				
0.4	2.95	3.26	3.35	3.28	3.09	2.89	2.42	2.06	1.57	1.27	1.16	1				
0.45	3.06	3.31	3.35	3.22	3.00	2.77	2.28	1.92	1.45	1.16	1.07	1				
0.5	3.14	3.34	3.34	3.15	2.90	2.66	2.16	1.80	1.35	1.07	0.96	1				
0.6	3.23	3.34	3.28	3.01	2.73	2.47	1.96	1.62	1.20	0.96	0.854	1				
0.8	3.30	3.33	3.21	2.88	2.56	2.29	1.80	1.47	1.08	0.854	0.691	1				
1	3.38	3.33	3.12	2.66	2.29	2.00	1.52	1.23	0.884	0.691	0.551	1				
1.25	3.34	3.32	3.12	2.66	2.29	2.00	1.52	1.23	0.884	0.691	0.551	1				
1.5	2.39	2.25	2.05	1.70	1.45	1.26	0.953	0.765	0.549	0.428	0.305	1				
1.75	1.71	1.59	1.45	1.22	1.00	0.905	0.682	0.547	0.392	0.305	0.224	1				
2	1.29	1.19	1.09	0.907	0.773	0.671	0.504	0.403	0.288	0.224	0.163	1				
2.5	0.804	0.727	0.651	0.530	0.445	0.393	0.253	0.224	0.154	0.123	0.097	1				
3	0.538	0.474	0.418	0.334	0.276	0.236	0.172	0.136	0.095	0.073	0.055	1				
3.5	0.340	0.288	0.255	0.204	0.183	0.156	0.113	0.083	0.061	0.047	0.034	1				
4	0.274	0.236	0.203	0.157	0.128	0.108	0.076	0.066	0.042	0.034	0.024	1				
5	0.165	0.135	0.114	0.084	0.075	0.062	0.043	0.032	0.022	0.017	0.010	1				
10	0.086	0.078	0.070	0.056	0.047	0.041	0.030	0.023	0.016	0.010	0.006	1				

MEDIUM 1: MEDIUM 2:		CL/CT=1.75 CL/CT=2.50		POISSON'S RATIO= .2576 POISSON'S RATIO= .4048		DENSITY 2/DENSITY 1										MULTIPLYING FACTOR
C2L/C1L		1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0					
0.1	1.32	1.76	2.10	2.59	2.91	3.11	3.33	3.35	3.18	2.94	2.94	2.13	1			
0.2	2.10	2.59	2.90	3.23	3.34	3.35	3.18	2.94	2.94	2.13	1.64	1				
0.3	2.59	3.01	3.23	3.35	3.30	3.19	2.83	2.49	1.99	1.64	1.47	1				
0.35	2.76	3.14	3.30	3.34	3.23	3.07	2.66	2.31	1.80	1.47	1.33	1				
0.4	2.89	3.22	3.34	3.30	3.14	2.95	2.50	2.14	1.65	1.33	1.22	1				
0.45	3.00	3.28	3.35	3.25	3.05	2.84	2.36	2.00	1.52	1.22	1.13	1				
0.5	3.09	3.32	3.35	3.19	2.96	2.73	2.24	1.88	1.41	1.13	1.07	1				
0.6	3.19	3.33	3.29	3.05	2.78	2.53	2.03	1.68	1.25	0.986	0.891	1				
0.8	3.24	3.30	3.20	2.89	2.59	2.33	1.85	1.52	1.12	0.891	0.763	1				
1	3.30	3.30	3.14	2.75	2.41	2.13	1.64	1.34	0.971	0.763	0.600	1				
1.25	3.29	3.14	2.88	2.40	2.05	1.78	1.34	1.07	0.770	0.600	0.516	1				
1.5	2.94	2.77	2.51	2.08	1.77	1.54	1.16	0.926	0.663	0.516	0.382	1				
1.75	2.11	1.97	1.80	1.51	1.29	1.13	0.851	0.683	0.490	0.382	0.284	1				
2	1.58	1.47	1.35	1.13	0.965	0.861	0.634	0.508	0.364	0.284	0.183	1				
2.5	0.989	0.909	0.824	0.681	0.576	0.498	0.371	0.296	0.210	0.163	0.107	1				
3	0.668	0.598	0.533	0.431	0.360	0.308	0.227	0.180	0.127	0.091	0.065	1				
3.5	0.475	0.416	0.365	0.290	0.240	0.204	0.149	0.117	0.083	0.063	0.043	1				
4	0.351	0.302	0.262	0.205	0.168	0.142	0.103	0.077	0.054	0.043	0.034	1				
5	0.209	0.174	0.148	0.113	0.097	0.080	0.055	0.042	0.029	0.022	0.017	1				
10	0.107	0.096	0.086	0.068	0.056	0.047	0.034	0.027	0.018	0.013	0.008	1				

MEDIUM 1: MEDIUM 2:		CL/CT=1.75 CL/CT=3.00		POISSON'S RATIO= .2576 POISSON'S RATIO= .4375		DENSITY 2/DENSITY 1										MULTIPLYING FACTOR
C2L/C1L		1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0					
0.1	1.22	1.64	1.97	2.47	2.80	3.02	3.24	3.36	3.24	3.06	2.89	2.09	1			
0.2	1.97	2.46	2.79	3.16	3.31	3.35	3.25	3.06	2.84	2.64	2.49	1.79	1			
0.3	2.46	2.91	3.15	3.34	3.33	3.25	2.95	2.64	2.14	1.79	1.61	1				
0.35	2.64	3.05	3.24	3.35	3.28	3.16	2.79	2.46	1.96	1.61	1.46	1				
0.4	2.79	3.15	3.30	3.33	3.22	3.06	2.64	2.29	1.79	1.46	1.34	1				
0.45	2.90	3.22	3.33	3.30	3.14	2.95	2.50	2.15	1.66	1.34	1.24	1				
0.5	3.00	3.27	3.34	3.25	3.05	2.84	2.36	2.00	1.52	1.22	1.13	1				
0.6	3.12	3.30	3.30	3.12	2.88	2.64	2.15	1.80	1.35	1.07	0.921	1				
0.8	3.16	3.25	3.18	2.91	2.61	2.37	1.89	1.57	1.16	0.921	0.861	1				
1	3.17	3.21	3.10	2.79	2.50	2.25	1.78	1.47	1.09	0.861	0.720	1				
1.25	3.16	3.15	2.99	2.61	2.28	2.01	1.55	1.26	0.917	0.720	0.586	1				
1.5	3.18	3.04	2.79	2.33	1.99	1.73	1.31	1.05	0.752	0.586	0.523	1				
1.75	3.05	2.87	2.59	2.14	1.81	1.57	1.18	0.943	0.672	0.523	0.417	1				
2	2.28	2.14	1.96	1.64	1.41	1.23	0.927	0.745	0.535	0.417	0.325	1				
2.5	1.41	1.32	1.21	1.02	0.869	0.756	0.570	0.457	0.327	0.255	0.162	1				
3	0.967	0.891	0.809	0.670	0.568	0.491	0.367	0.292	0.208	0.162	0.105	1				
3.5	0.695	0.627	0.561	0.456	0.382	0.328	0.242	0.192	0.136	0.105	0.070	1				
4	0.518	0.459	0.405	0.324	0.269	0.230	0.168	0.133	0.093	0.070	0.049	1				
5	0.313	0.268	0.232	0.181	0.148	0.126	0.097	0.071	0.049	0.038	0.026	1				
10	0.155	0.138	0.120	0.096	0.078	0.065	0.047	0.036	0.026	0.019	0.013	1				

CAN. J. PHYS. VOL. 54, 1976

TABLE 2 (Continued)

MEDIUM 1: CL/CI=2.00 MEDIUM 2: CL/CI=1.50		POISSON'S RATIO=.3333 POISSON'S RATIO=.1000										
DENSITY 2/DENSITY 1												
CL/CI	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0	MULTIPLYING FACTOR	
0.1	2.28	2.08	3.30	3.80	4.04	4.14	4.11	3.92	3.48	3.07	1	
0.2	3.30	3.01	4.05	4.18	4.10	3.95	3.50	3.09	2.44	2.05	1	
0.3	3.61	4.13	4.20	4.06	3.81	3.54	2.95	2.51	1.92	1.55	1	
0.35	3.76	4.20	4.17	3.86	3.51	3.19	2.57	2.13	1.59	1.26	1	
0.4	4.07	4.23	4.13	3.76	3.38	3.05	2.43	2.00	1.44	1.17	1	
0.45	4.15	4.24	4.03	3.68	3.29	2.96	2.33	1.92	1.41	1.11	1	
0.5	4.20	4.24	4.01	3.48	3.03	2.68	2.07	1.69	1.23	.970	1	
0.6	4.30	4.25	3.78	2.87	2.57	2.06	1.56	1.25	.907	.714	1	
0.7	4.42	4.21	3.50	2.78	2.37	2.06	1.56	1.25	.800	.570	.443	1
1	4.57	4.34	3.18	1.92	1.55	1.35	1.00	.800	.570	.443	1	
1.25	4.62	4.30	1.30	1.13	.958	.831	.623	.395	.316	.227	.178	1
1.5	4.62	4.01	.906	.737	.619	.532	.395	.260	.206	.146	.116	1
1.75	4.74	4.07	.823	.647	.513	.395	.260	.206	.146	.116	.090	1
2	5.43	4.14	.447	.352	.289	.246	1.80	1.43	1.07	.796	10	
2.5	5.55	4.37	2.54	1.40	1.24	1.34	.970	.765	.543	.424	10	
3	5.30	4.08	1.50	1.20	.984	.810	.583	.458	.325	.253	10	
3.5	5.58	4.08	1.50	.986	.810	.528	.378	.297	.204	.163	10	
4	5.13	4.31	1.50	.986	.810	.363	.254	.203	.143	.111	10	
5	5.19	4.33	4.01	2.74	2.33	1.94	1.36	1.07	.753	.582	100	
10	10.1	7.37	5.85	4.17	3.27	2.69	1.88	1.45	1.00	.766	1000	

MEDIUM 1: CL/CI=2.00 MEDIUM 2: CL/CI=1.75		POISSON'S RATIO= .3333 POISSON'S RATIO= .2576									
DENSITY 2/DENSITY 1											
CL/CI	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0	MULTIPLYING FACTOR
0.1	2.14	2.14	3.17	3.71	4.00	4.13	4.17	4.03	3.63	3.24	1
0.2	3.17	3.17	4.00	4.19	4.16	4.05	3.64	3.25	2.66	2.20	1
0.3	3.71	4.04	4.20	4.13	3.92	3.67	3.11	2.67	2.05	1.67	1
0.35	3.87	4.17	4.22	4.04	3.77	3.49	2.89	2.45	1.84	1.49	1
0.4	4.00	4.22	4.20	3.95	3.63	3.33	2.71	2.27	1.70	1.36	1
0.45	4.04	4.24	4.17	3.86	3.51	3.19	2.56	2.13	1.54	1.26	1
0.5	4.15	4.24	4.13	3.77	3.40	3.08	2.45	2.03	1.50	1.19	1
0.6	4.21	4.25	4.10	3.67	3.27	2.92	2.30	1.89	1.34	1.09	1
0.65	4.41	4.21	3.85	3.20	2.73	2.37	1.79	1.43	1.03	.799	1
1	3.47	3.27	2.95	2.44	2.07	1.80	1.35	1.09	.773	.603	1
1.25	2.15	1.94	1.62	1.31	1.24	1.12	.843	.676	.484	.377	1
1.5	1.46	1.34	1.22	1.01	.800	.746	.559	.447	.319	.248	1
1.75	1.06	.951	.852	.705	.593	.510	.378	.301	.213	.165	1
2	.796	.705	.624	.501	.417	.357	.252	.207	.146	.113	1
2.5	4.41	4.13	3.58	2.80	2.30	1.95	1.41	1.11	.773	.595	10
3	3.15	2.64	2.25	1.73	1.40	1.18	.846	.660	.458	.352	10
3.5	2.18	1.79	1.51	1.14	.919	.769	.547	.424	.294	.225	10
4	1.57	1.27	1.00	.793	.634	.529	.374	.289	.199	.152	10
5	4.02	3.08	2.82	4.28	3.34	2.81	1.97	1.51	1.04	.791	100
10	1.46	1.08	.851	.602	.466	.380	.261	.199	.135	.102	100

MEDIUM 1: CL/CI=2.00 MEDIUM 2: CL/CI=2.00		POISSON'S RATIO=.3333 POISSON'S RATIO=.3333									
DENSITY 2/DENSITY 1											
CL/CI	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0	MULTIPLYING FACTOR
0.1	2.03	2.02	3.06	3.62	3.94	4.11	4.21	4.11	3.75	3.38	1
0.2	3.05	3.02	3.94	4.19	4.20	4.12	3.76	3.39	2.78	2.33	1
0.3	3.61	4.03	4.14	4.18	4.00	3.78	3.24	2.80	2.18	1.77	1
0.35	3.74	4.13	4.22	4.11	3.87	3.61	3.02	2.58	1.97	1.59	1
0.4	3.93	4.19	4.22	4.02	3.73	3.45	2.84	2.39	1.81	1.45	1
0.45	4.03	4.22	4.20	3.93	3.61	3.30	2.68	2.24	1.67	1.33	1
0.5	4.10	4.23	4.16	3.84	3.49	3.17	2.55	2.12	1.57	1.25	1
0.6	4.15	4.22	4.10	3.74	3.37	3.04	2.43	2.01	1.49	1.18	1
0.65	4.34	4.28	4.01	3.44	3.04	2.61	2.00	1.61	1.17	.914	1
1	4.50	4.18	3.74	3.05	2.57	2.22	1.66	1.32	.943	.733	1
1.25	2.77	2.58	2.35	1.96	1.67	1.46	1.10	.883	.634	.495	1
1.5	1.86	1.72	1.57	1.31	1.12	.973	.732	.587	.420	.327	1
1.75	1.35	1.24	1.12	.935	.794	.689	.516	.412	.294	.229	1
2	1.02	.927	.833	.683	.575	.499	.367	.292	.207	.161	1
2.5	6.26	5.50	4.83	3.85	3.19	2.71	1.94	1.56	1.10	.845	10
3	4.14	3.54	3.06	2.39	1.95	1.65	1.19	.933	.651	.500	10
3.5	2.84	2.42	2.06	1.58	1.26	1.08	.773	.602	.418	.320	10
4	2.10	1.73	1.46	1.11	.890	.744	.529	.411	.284	.217	10
5	1.22	.973	.807	.600	.478	.397	.279	.216	.148	.113	10
10	2.02	1.51	1.20	.854	.663	.542	.373	.284	.197	.146	100

CHEEKE ET AL.

TABLE 2 (Continued)

MEDIUM 1: CL/CI=2.00 MEDIUM 2: CL/CI=2.25		POISSON'S RATIO= .3333 POISSON'S RATIO= .3789									
		DENSITY 2/DENSITY 1									
C2L/C1L	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0	MULTIPLYING FACTOR
0.1	1.43	2.51	2.95	3.54	3.88	4.07	4.22	4.16	3.85	3.50	1
0.2	2.45	3.53	3.87	4.17	4.22	4.17	3.86	3.51	2.91	2.46	1
0.3	3.53	3.98	4.17	4.21	4.07	3.87	3.36	2.92	2.24	1.88	1
0.35	3.72	4.10	4.22	4.15	3.95	3.70	3.14	2.70	2.04	1.68	1
0.4	3.86	4.17	4.23	4.08	3.82	3.55	2.95	2.50	1.90	1.53	1
0.45	3.97	4.21	4.21	3.99	3.69	3.40	2.78	2.34	1.74	1.40	1
0.5	4.05	4.22	4.18	3.90	3.57	3.28	2.64	2.20	1.64	1.31	1
0.6	4.09	4.20	4.11	3.77	3.42	3.10	2.49	2.07	1.56	1.22	1
0.8	4.25	4.27	4.08	3.60	3.17	2.82	2.19	1.79	1.30	1.03	1
1	4.41	4.19	3.82	3.18	2.70	2.35	1.77	1.42	1.07	.797	1
1.25	3.48	3.27	2.97	2.47	2.10	1.83	1.38	1.11	.793	.619	1
1.5	2.34	2.17	1.98	1.66	1.42	1.24	.935	.751	.540	.421	1
1.75	1.88	1.55	1.42	1.18	1.01	.880	.662	.511	.380	.296	1
2	1.27	1.17	1.06	.882	.750	.650	.447	.349	.274	.216	1
2.5	.792	.709	.631	.511	.427	.366	.269	.213	.150	.116	1
3	5.28	4.00	4.03	3.19	2.03	2.24	1.03	1.28	.845	.690	10
3.5	3.72	3.17	2.73	2.13	1.74	1.47	1.06	.826	.576	.442	10
4	2.72	2.27	1.94	1.49	1.21	1.01	.725	.565	.392	.300	10
5	1.55	1.29	1.06	.814	.652	.543	.344	.248	.157	.100	10
10	2.72	2.04	1.64	1.17	.914	.749	.517	.345	.203	.100	100

MEDIUM 1: CL/CI=2.00 MEDIUM 2: CL/CI=2.50		POISSON'S RATIO= .3333 POISSON'S RATIO= .4045									
		DENSITY 2/DENSITY 1									
C2L/C1L	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0	MULTIPLYING FACTOR
0.1	1.44	2.42	2.80	3.45	3.81	4.03	4.22	4.20	3.93	3.60	1
0.2	2.45	3.45	3.81	4.14	4.23	4.20	3.94	3.81	3.52	2.57	1
0.3	3.44	3.92	4.14	4.23	4.12	3.94	3.46	3.04	2.40	1.98	1
0.35	3.64	4.05	4.20	4.14	4.01	3.79	3.25	2.80	2.10	1.77	1
0.4	3.80	4.14	4.23	4.12	3.99	3.63	3.05	2.61	1.94	1.61	1
0.45	3.91	4.19	4.22	4.05	3.77	3.49	2.88	2.43	1.74	1.48	1
0.5	4.00	4.21	4.20	3.98	3.65	3.35	2.73	2.29	1.72	1.47	1
0.6	4.05	4.19	4.11	3.80	3.46	3.15	2.54	2.11	1.57	1.25	1
0.8	4.17	4.22	4.07	3.68	3.28	2.95	2.33	1.92	1.41	1.12	1
1	4.32	4.22	3.94	3.35	2.89	2.53	1.93	1.56	1.11	.859	1
1.25	4.30	4.01	3.60	2.95	2.50	2.16	1.62	1.30	.924	.723	1
1.5	2.89	2.64	2.40	2.06	1.76	1.53	1.16	.935	.673	.526	1
1.75	2.06	1.92	1.75	1.47	1.26	1.10	.830	.667	.474	.373	1
2	1.55	1.44	1.31	1.10	.941	.819	.618	.495	.355	.276	1
2.5	.977	.890	.802	.659	.556	.480	.357	.284	.201	.156	1
3	6.57	5.82	5.15	4.14	3.44	2.94	2.15	1.70	1.26	.923	10
3.5	4.65	4.03	3.51	2.77	2.28	1.93	1.40	1.10	.776	.593	10
4	3.42	2.91	2.51	1.95	1.54	1.34	.965	.754	.525	.403	10
5	2.02	1.67	1.41	1.07	.862	.722	.513	.398	.276	.211	10
10	3.54	2.89	2.17	1.56	1.22	1.00	.695	.512	.362	.275	100

MEDIUM 1: CL/CI=2.00 MEDIUM 2: CL/CI=3.00		POISSON'S RATIO= .3333 POISSON'S RATIO= .4375									
		DENSITY 2/DENSITY 1									
C2L/C1L	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0	MULTIPLYING FACTOR
0.1	1.71	2.26	2.70	3.30	3.69	3.93	4.20	4.23	4.04	3.77	1
0.2	2.69	3.30	3.80	4.40	4.22	4.23	4.05	3.77	3.22	2.78	1
0.3	3.30	3.81	4.07	4.23	4.18	4.05	3.83	3.67	2.80	2.16	1
0.35	3.51	3.96	4.18	4.22	4.10	3.92	3.43	3.00	2.37	1.94	1
0.4	3.67	4.06	4.21	4.18	4.00	3.78	3.24	2.79	2.17	1.76	1
0.45	3.81	4.13	4.22	4.12	3.99	3.64	3.08	2.61	2.00	1.62	1
0.5	3.90	4.17	4.21	4.04	3.75	3.50	2.90	2.46	1.86	1.49	1
0.6	3.95	4.14	4.12	3.88	3.56	3.26	2.65	2.22	1.66	1.32	1
0.8	4.05	4.15	4.08	3.71	3.36	3.04	2.44	2.03	1.52	1.21	1
1	4.14	4.16	4.00	3.55	3.15	2.82	2.21	1.82	1.34	1.06	1
1.25	4.17	4.05	3.75	3.18	2.73	2.39	1.83	1.47	1.07	.836	1
1.5	4.19	3.91	3.52	2.84	2.45	2.13	1.61	1.29	.926	.720	1
1.75	2.99	2.80	2.50	2.14	1.74	1.60	1.22	.980	.704	.552	1
2	2.24	2.08	1.91	1.61	1.38	1.20	.914	.735	.524	.413	1
2.5	1.39	1.29	1.18	.984	.845	.736	.554	.444	.318	.247	1
3	.955	.872	.788	.644	.544	.473	.352	.280	.194	.154	1
3.5	6.64	5.11	3.93	3.38	2.87	2.43	1.80	1.62	1.24	.989	10
4	5.09	4.45	3.80	3.10	2.55	2.18	1.59	1.25	.975	.674	10
5	3.05	2.59	2.22	1.72	1.40	1.18	.849	.663	.461	.354	10
10	5.59	4.34	3.53	2.80	2.03	1.65	1.17	.896	.612	.405	100

CAN. J. PHYS. VOL. 54, 1976

TABLE 2 (Continued)

MEDIUM 1: CL/CI=2.25 MEDIUM 2: CL/CI=1.50		POISSON'S RATIO= .3769 POISSON'S RATIO= .1000									
DENSITY 2/DENSITY 1											
C2L/C1L	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0	MULTIPLYING FACTOR
0.1	3.05	3.19	4.29	4.83	5.05	5.13	5.00	4.72	4.11	3.63	1
0.2	4.29	4.84	5.08	5.14	4.98	4.76	4.17	3.67	2.92	2.41	1
0.3	4.85	5.10	5.12	4.93	4.58	4.23	3.51	2.97	2.26	1.82	1
0.35	5.01	5.21	5.15	4.74	4.39	4.01	3.26	2.73	2.05	1.64	1
0.4	5.12	5.23	5.10	4.67	4.23	3.83	3.07	2.55	1.89	1.50	1
0.45	5.19	5.23	5.05	4.57	4.11	3.71	2.96	2.44	1.81	1.43	1
0.5	5.25	5.25	5.02	4.46	3.95	3.53	2.77	2.27	1.67	1.31	1
0.6	5.40	5.19	4.79	4.05	3.49	3.06	2.34	1.90	1.34	1.08	1
0.8	3.84	3.58	3.27	2.73	2.34	2.05	1.56	1.26	.919	.727	1
1	2.49	2.32	2.11	1.76	1.50	1.31	.980	.781	.556	.432	1
1.25	1.59	1.47	1.33	1.10	.929	.805	.604	.484	.344	.273	1
1.5	1.10	.989	.881	.714	.595	.513	.381	.304	.214	.171	1
1.75	.785	.688	.603	.474	.395	.338	.248	.197	.140	.110	1
2	5.41	4.99	4.32	3.38	2.77	2.35	1.71	1.35	.964	.753	10
2.5	3.45	2.87	2.45	1.86	1.51	1.27	.918	.723	.512	.399	10
3	2.23	1.80	1.51	1.14	.914	.766	.550	.432	.305	.237	10
3.5	1.92	1.51	1.09	.746	.595	.495	.356	.279	.196	.152	10
4	1.69	.851	.679	.516	.411	.342	.244	.191	.134	.104	10
5	6.12	4.59	3.80	2.77	2.14	1.82	1.24	1.01	.703	.542	100
10	4.54	3.46	3.20	3.42	3.06	2.52	1.75	1.35	.927	.707	1000

MEDIUM 1: CL/CI=2.25 MEDIUM 2: CL/CI=1.75		POISSON'S RATIO= .3769 POISSON'S RATIO= .2576									
DENSITY 2/DENSITY 1											
C2L/C1L	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0	MULTIPLYING FACTOR
0.1	2.87	3.02	4.14	4.74	5.03	5.14	5.10	4.87	4.33	3.84	1
0.2	4.13	4.74	5.03	5.18	5.08	4.89	4.36	3.87	3.11	2.59	1
0.3	4.74	5.12	5.20	5.03	4.72	4.40	3.70	3.16	2.43	1.96	1
0.35	4.91	5.19	5.19	4.91	4.54	4.19	3.45	2.91	2.20	1.76	1
0.4	5.04	5.22	5.15	4.75	4.38	4.00	3.25	2.71	2.03	1.62	1
0.45	5.12	5.22	5.10	4.68	4.25	3.86	3.11	2.58	1.92	1.53	1
0.5	5.16	5.22	5.07	4.62	4.17	3.78	3.02	2.51	1.87	1.48	1
0.6	5.29	5.27	5.01	4.40	3.86	3.43	2.66	2.17	1.54	1.25	1
0.8	5.21	4.94	4.47	3.70	3.16	2.75	2.08	1.67	1.20	.938	1
1	3.38	3.17	2.69	2.34	2.03	1.77	1.33	1.07	.764	.608	1
1.25	2.11	1.95	1.77	1.45	1.25	1.09	.820	.656	.476	.365	1
1.5	1.44	1.32	1.19	.984	.834	.722	.540	.431	.307	.239	1
1.75	1.05	.941	.841	.684	.573	.493	.364	.289	.204	.158	1
2	.781	.688	.606	.484	.401	.342	.250	.197	.134	.107	1
2.5	4.71	4.01	3.45	2.69	2.20	1.85	1.34	1.05	.729	.560	10
3	3.07	2.55	2.10	1.65	1.33	1.12	.798	.621	.436	.329	10
3.5	2.12	1.72	1.44	1.09	.870	.726	.514	.398	.275	.210	10
4	1.52	1.22	1.01	.772	.599	.498	.350	.271	.184	.142	10
5	8.68	6.76	5.53	4.05	3.19	2.64	1.84	1.41	.967	.735	100
10	13.8	10.1	8.00	5.63	4.35	3.54	2.43	1.84	1.25	.943	1000

MEDIUM 1: CL/CI=2.25 MEDIUM 2: CL/CI=2.00		POISSON'S RATIO= .3769 POISSON'S RATIO= .3333									
DENSITY 2/DENSITY 1											
C2L/C1L	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0	MULTIPLYING FACTOR
0.1	2.72	3.47	4.00	4.85	4.98	5.13	5.15	4.98	4.44	4.02	1
0.2	3.99	4.64	4.99	5.14	5.14	5.00	4.51	4.04	3.29	2.75	1
0.3	4.63	5.07	5.20	5.10	4.84	4.54	3.86	3.32	2.57	2.09	1
0.35	4.83	5.16	5.21	4.99	4.66	4.33	3.61	3.06	2.33	1.88	1
0.4	4.97	5.21	5.18	4.88	4.50	4.14	3.39	2.85	2.15	1.72	1
0.45	5.06	5.21	5.13	4.76	4.35	3.97	3.22	2.69	2.01	1.60	1
0.5	5.09	5.20	5.09	4.69	4.26	3.88	3.14	2.62	1.94	1.56	1
0.6	5.18	5.25	5.08	4.59	4.10	3.69	2.92	2.41	1.78	1.41	1
0.8	5.45	5.22	4.79	4.02	3.43	3.00	2.27	1.83	1.32	1.03	1
1	4.40	4.13	3.74	3.10	2.64	2.30	1.74	1.40	1.01	.787	1
1.25	2.71	2.52	2.29	1.92	1.64	1.43	1.08	.866	.623	.486	1
1.5	1.83	1.69	1.53	1.28	1.09	.945	.711	.569	.407	.317	1
1.75	1.33	1.22	1.10	.910	.772	.669	.500	.399	.285	.221	1
2	1.01	.908	.813	.663	.556	.474	.354	.281	.199	.154	1
2.5	6.16	5.36	4.68	3.70	3.05	2.59	1.89	1.48	1.04	.799	10
3	4.05	3.43	2.95	2.29	1.86	1.57	1.13	.881	.613	.470	10
3.5	2.82	2.34	1.98	1.51	1.22	1.02	.728	.566	.392	.300	10
4	2.04	1.66	1.39	1.05	.842	.703	.497	.385	.266	.203	10
5	1.16	.932	.769	.584	.451	.374	.252	.202	.138	.105	10
10	1.93	1.42	1.13	.800	.620	.506	.347	.264	.179	.135	100

CHEEKE ET AL.

TABLE 2 (Continued)

MEDIUM 1: MEDIUM 2:		CL/CT=2.25 CL/CT=2.25		POISSON'S RATIO= .3764 POISSON'S RATIO= .3764		DENSITY 2/DENSITY 1										MULTIPLYING FACTOR
C2L/C1L		1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0					
0.1	2.60	3.34	3.88	4.55	4.92	5.10	5.20	5.07	4.83	4.18	1					
0.2	3.87	4.55	4.91	5.19	5.19	5.08	4.64	4.19	3.45	2.90	1					
0.3	4.54	5.02	5.19	5.15	4.93	4.56	4.01	3.48	2.71	2.21	1					
0.35	4.74	5.13	5.21	5.09	4.77	4.45	3.75	3.20	2.44	1.99	1					
0.4	4.90	5.19	5.20	4.95	4.60	4.26	3.52	2.98	2.26	1.81	1					
0.45	5.06	5.20	5.18	4.84	4.45	4.08	3.33	2.79	2.10	1.67	1					
0.5	5.03	5.18	5.08	4.74	4.34	3.96	3.22	2.69	2.01	1.61	1					
0.6	5.10	5.20	5.08	4.65	4.22	3.83	3.08	2.56	1.91	1.53	1					
0.8	5.36	5.29	4.97	4.28	3.71	3.27	2.51	2.04	1.48	1.17	1					
1	5.56	5.17	4.63	3.79	3.20	2.77	2.08	1.67	1.19	.932	1					
1.25	5.42	3.18	2.90	2.42	2.00	1.61	1.37	1.10	.793	.620	1					
1.5	2.24	2.12	1.93	1.62	1.38	1.21	.911	.732	.526	.410	1					
1.75	1.65	1.52	1.38	1.15	.983	.855	.643	.515	.368	.287	1					
2	1.25	1.15	1.04	.854	.728	.631	.472	.377	.268	.209	1					
2.5	.781	.693	.614	.494	.411	.351	.258	.203	.143	.111	1					
3	5.19	4.48	3.89	3.06	2.51	2.13	1.54	1.21	.846	.651	10					
3.5	3.63	3.07	2.63	2.03	1.65	1.39	.999	.774	.542	.415	10					
4	2.65	2.20	1.86	1.42	1.15	.960	.683	.531	.368	.281	10					
5	1.94	1.64	1.33	.772	.616	.512	.361	.274	.192	.146	10					
10	2.54	1.94	1.54	1.10	.855	.700	.482	.367	.244	.189	100					

MEDIUM 1: MEDIUM 2:		CL/CT=2.25 CL/CT=2.50		POISSON'S RATIO= .3764 POISSON'S RATIO= .4044		DENSITY 2/DENSITY 1										MULTIPLYING FACTOR
C2L/C1L		1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0					
0.1	2.49	3.22	3.76	4.46	4.85	5.07	5.22	5.13	4.74	4.31	1					
0.2	3.75	4.45	4.84	5.17	5.21	5.13	4.75	4.32	3.59	3.04	1					
0.3	4.44	4.96	5.17	5.19	5.01	4.76	4.14	3.61	2.84	2.33	1					
0.35	4.66	5.09	5.21	5.11	4.85	4.56	3.88	3.33	2.50	2.09	1					
0.4	4.83	5.16	5.21	5.02	4.70	4.37	3.65	3.10	2.36	1.90	1					
0.45	4.94	5.19	5.18	4.90	4.54	4.19	3.44	2.90	2.14	1.75	1					
0.5	4.97	5.16	5.12	4.80	4.41	4.04	3.30	2.76	2.07	1.66	1					
0.6	5.03	5.17	5.07	4.68	4.27	3.89	3.15	2.63	1.98	1.58	1					
0.8	5.26	5.28	5.06	4.47	3.94	3.51	2.74	2.24	1.65	1.30	1					
1	5.47	5.17	4.72	3.93	3.35	2.91	2.20	1.78	1.24	1.00	1					
1.25	4.22	3.96	3.00	3.00	2.56	2.24	1.70	1.37	.991	.777	1					
1.5	2.83	2.63	2.40	2.01	1.72	1.51	1.14	.923	.666	.521	1					
1.75	2.03	1.87	1.71	1.43	1.22	1.07	.806	.648	.465	.363	1					
2	1.53	1.41	1.29	1.08	.917	.798	.601	.482	.345	.269	1					
2.5	.965	.872	.782	.640	.538	.464	.344	.273	.193	.150	1					
3	6.47	5.68	5.00	3.98	3.30	2.81	2.05	1.62	1.13	.875	10					
3.5	4.56	3.91	3.39	2.66	2.18	1.84	1.33	1.04	.727	.559	10					
4	3.34	2.82	2.41	1.86	1.51	1.27	.912	.711	.494	.374	10					
5	1.96	1.60	1.35	1.02	.816	.681	.483	.374	.258	.197	10					
10	3.38	2.55	2.05	1.47	1.15	.939	.648	.495	.337	.255	100					

MEDIUM 1: MEDIUM 2:		CL/CT=2.25 CL/CT=3.00		POISSON'S RATIO= .3764 POISSON'S RATIO= .4375		DENSITY 2/DENSITY 1										MULTIPLYING FACTOR
C2L/C1L		1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0					
0.1	2.31	3.02	3.50	4.29	4.71	4.97	5.22	5.20	4.91	4.54	4.34					
0.2	3.56	4.28	4.71	5.11	5.22	5.20	4.92	4.54	3.85	3.30	1					
0.3	4.26	4.84	5.11	5.22	5.11	4.92	4.37	3.86	3.04	2.55	1					
0.35	4.51	5.00	5.18	5.18	4.99	4.74	4.11	3.57	2.80	2.29	1					
0.4	4.70	5.09	5.21	5.11	4.85	4.56	3.87	3.33	2.57	2.08	1					
0.45	4.83	5.14	5.20	5.01	4.70	4.38	3.66	3.11	2.37	1.91	1					
0.5	4.86	5.12	5.14	4.90	4.55	4.21	3.48	2.94	2.22	1.78	1					
0.6	4.91	5.11	5.07	4.74	4.36	3.99	3.25	2.73	2.05	1.64	1					
0.8	5.08	5.19	5.06	4.61	4.16	3.77	3.02	2.51	1.84	1.50	1					
1	5.27	5.23	4.95	4.30	3.76	3.32	2.58	2.10	1.54	1.22	1					
1.25	5.30	4.98	4.52	3.74	3.18	2.76	2.09	1.68	1.21	.947	1					
1.5	4.10	1.85	1.51	2.93	2.51	2.14	1.67	1.34	.971	.760	1					
1.75	2.93	2.73	2.50	2.10	1.80	1.58	1.20	.973	.704	.552	1					
2	2.19	2.04	1.88	1.57	1.34	1.17	.888	.715	.514	.402	1					
2.5	1.37	1.27	1.15	.965	.823	.716	.539	.431	.304	.240	1					
3	.944	.855	.768	.630	.531	.457	.339	.270	.191	.148	1					
3.5	6.74	5.76	5.27	4.22	3.51	3.00	2.19	1.73	1.22	.939	10					
4	4.44	4.33	3.77	2.98	2.45	2.08	1.51	1.18	.827	.637	10					
5	2.98	2.50	2.14	1.64	1.33	1.12	.802	.625	.434	.332	10					
10	5.36	4.13	3.35	2.43	1.91	1.57	1.04	.836	.570	.433	100					

CAN. J. PHYS. VOL. 54, 1976

TABLE 2 (Continued)

MEDIUM 1: CL/CI=2.50 MEDIUM 2: CL/CI=1.50		POISSON'S RATIO= .4048 POISSON'S RATIO= .1000									
		DENSITY 2/DENSITY 1									
C ₂ L/C ₁ L	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0	MULTIPLYING FACTOR
0.1	3.95	4.85	5.41	5.99	6.19	6.21	5.98	5.57	4.84	4.21	1
0.2	5.41	6.01	6.22	6.19	5.94	5.63	4.88	4.26	3.37	2.77	1
0.3	6.02	6.30	6.25	5.87	5.41	4.98	4.10	3.46	2.67	2.10	1
0.35	6.18	6.33	6.20	5.71	5.19	4.73	3.83	3.20	2.39	1.91	1
0.4	6.24	6.34	6.13	5.57	5.03	4.56	3.66	3.04	2.26	1.79	1
0.45	6.37	6.36	6.09	5.43	4.83	4.33	3.42	2.82	2.08	1.64	1
0.5	6.47	6.35	5.97	5.17	4.51	4.00	3.11	2.53	1.85	1.46	1
0.6	6.66	6.27	5.66	4.69	4.01	3.50	2.67	2.16	1.57	1.24	1
0.8	7.73	6.47	5.17	3.67	2.69	2.01	1.53	1.24	.909	.720	1
1	8.43	6.25	4.05	1.71	1.46	1.27	.954	.760	.541	.420	1
1.25	1.57	1.43	1.29	1.07	.903	.762	.586	.470	.338	.265	1
1.5	1.08	.968	.860	.694	.574	.487	.368	.293	.210	.165	1
1.75	.771	.671	.586	.463	.382	.325	.238	.189	.135	.105	1
2	5.64	4.85	4.18	3.25	2.66	2.25	1.64	1.29	.919	.717	10
2.5	3.37	2.78	2.35	1.79	1.44	1.21	.875	.688	.484	.378	10
3	2.16	1.74	1.45	1.09	.872	.730	.523	.410	.284	.224	10
3.5	1.47	1.16	.968	.712	.568	.474	.338	.264	.185	.143	10
4	1.05	.817	.688	.492	.391	.325	.231	1.80	1.24	.974	100
5	.849	.649	.503	.364	.288	1.73	1.22	.949	.661	.508	100
10	4.09	6.61	5.22	3.70	2.68	2.37	1.65	1.26	.866	.659	1000

MEDIUM 1: CL/CI=2.50		POISSON'S RATIO= .4048										
MEDIUM 2: CL/CI=1.75		POISSON'S RATIO= .2576										
		DENSITY 2/DENSITY 1										
C2L/C1L	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0	MULTIPLYING FACTOR	
0.1	3.73	4.64	5.24	5.90	6.17	6.25	6.10	5.77	5.07	4.46	1	
0.2	5.23	5.91	6.19	6.26	6.07	5.81	5.11	4.51	3.60	2.98	1	
0.3	5.90	6.27	6.29	6.00	5.59	5.19	4.33	3.68	2.81	2.27	1	
0.35	6.08	6.32	6.25	5.84	5.37	4.93	4.04	3.40	2.56	2.05	1	
0.4	6.20	6.33	6.19	5.70	5.20	4.74	3.84	3.21	2.40	1.91	1	
0.45	6.25	6.33	6.16	5.63	5.10	4.63	3.73	3.11	2.33	1.85	1	
0.5	6.33	6.37	6.14	5.52	4.93	4.43	3.51	2.90	2.14	1.70	1	
0.6	6.53	6.36	5.92	5.06	4.38	3.86	2.97	2.42	1.74	1.38	1	
0.8	5.12	4.82	4.40	3.69	3.16	2.77	2.11	1.71	1.24	.968	1	
1	3.30	3.08	2.82	2.34	1.99	1.73	1.30	1.05	.751	.587	1	
1.25	2.07	1.91	1.73	1.44	1.22	1.06	.796	.637	.455	.355	1	
1.5	1.42	1.29	1.16	.958	.810	.701	.523	.417	.297	.231	1	
1.75	1.03	.923	.821	.665	.556	.477	.352	.279	.197	.152	1	
2	.770	.672	.589	.468	.387	.329	.240	.189	.132	.102	1	
2.5	4.61	3.90	3.34	2.59	2.11	1.77	1.27	.995	.692	.531	10	
3	2.99	2.47	2.08	1.58	1.27	1.07	.758	.588	.407	.311	10	
3.5	2.06	1.66	1.38	1.04	.829	.690	.487	.376	.259	.198	10	
4	1.48	1.17	.968	.717	.569	.472	.331	.255	.175	.133	10	
5	.838	.649	.528	.385	.303	2.44	1.74	1.33	.909	.690	100	
10	13.2	9.63	7.57	5.31	4.10	3.33	2.28	1.73	1.17	.882	1000	

MEDIUM 1: CL/CT=2.50 MEDIUM 2: CL/CT=2.00		POISSON'S RATIO=.4048 POISSON'S RATIO=.3333										
		DENSITY 2/DENSITY 1										
C2L/C1L		1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0	MULTIPLYING FACTOR
0.1	3.55	4.47	5.07	5.80	6.13	6.26	6.20	5.93	5.20	4.69	1	
0.2	5.07	5.80	6.14	6.29	6.17	5.95	5.31	4.72	3.81	3.17	1	
0.3	5.74	6.23	6.31	6.10	5.74	5.36	4.52	3.87	2.99	2.42	1	
0.35	5.94	6.30	6.29	5.95	5.52	5.10	4.22	3.57	2.71	2.18	1	
0.4	6.12	6.32	6.23	5.81	5.33	4.84	3.94	3.25	2.52	2.01	1	
0.45	6.17	6.30	6.17	5.71	5.21	4.77	3.88	3.25	2.45	1.96	1	
0.5	6.22	6.32	6.17	5.66	5.13	4.67	3.77	3.14	2.35	1.88	1	
0.6	6.34	6.40	6.12	5.41	4.78	4.26	3.33	2.73	2.01	1.59	1	
0.8	6.71	6.31	5.69	4.70	3.99	3.47	2.62	2.11	1.51	1.18	1	
1	4.31	4.04	3.66	3.05	2.60	2.27	1.72	1.34	1.00	.785	1	
1.25	2.67	2.46	2.22	1.87	1.59	1.34	1.05	.844	.607	.474	1	
1.5	1.81	1.65	1.50	1.25	1.06	.919	.690	.552	.395	.307	1	
1.75	1.31	1.19	1.08	.888	.752	.651	.486	.388	.274	.215	1	
2	.997	.891	.794	.645	.540	.464	.342	.271	.192	.148	1	
2.5	6.06	5.23	4.55	3.58	2.94	2.44	1.80	1.41	.989	.760	10	
3	3.97	3.33	2.85	2.20	1.78	1.50	1.07	.837	.581	.445	10	
3.5	2.75	2.26	1.91	1.45	1.16	.974	.692	.536	.371	.283	10	
4	1.99	1.61	1.34	1.00	.802	.668	.471	.364	.251	.191	10	
5	1.14	.896	.735	.541	.428	.354	.247	1.90	1.30	.991	100	
10	1.84	1.35	1.07	.756	.584	.476	.326	.248	.168	.127	100	

CHEEKE ET AL.

TABLE 2 (Continued)

MEDIUM 1: CL/CT=2.50 MEDIUM 2: CL/CT=2.25		POISSON'S RATIO= .4044 POISSON'S RATIO= .3769									
		DENSITY 2/DENSITY 1									
C2L/C1L	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0	MULTIPLYING FACTOR
0.1	3.39	4.31	4.94	5.70	6.08	6.25	6.26	6.05	5.46	4.88	1
0.2	4.93	5.69	6.07	6.31	6.24	6.06	5.48	4.91	4.00	3.35	1
0.3	5.68	6.18	6.31	6.18	5.86	5.51	4.70	4.05	3.14	2.56	1
0.35	5.90	6.27	6.31	6.04	5.65	5.25	4.39	3.73	2.85	2.30	1
0.4	6.05	6.30	6.26	5.90	5.45	5.02	4.13	3.48	2.63	2.11	1
0.45	6.09	6.28	6.19	5.77	5.30	4.86	3.97	3.34	2.52	2.01	1
0.5	6.13	6.28	6.10	5.71	5.22	4.77	3.89	3.26	2.46	1.97	1
0.6	6.27	6.36	6.17	5.60	5.03	4.54	3.62	3.00	2.23	1.77	1
0.8	6.61	6.35	5.85	4.92	4.22	3.70	2.82	2.28	1.65	1.29	1
1	5.45	5.12	4.84	3.95	3.29	2.87	2.17	1.75	1.27	.993	1
1.25	3.36	3.11	2.83	2.37	2.02	1.77	1.34	1.08	.779	.610	1
1.5	2.26	2.08	1.89	1.58	1.35	1.17	.885	.711	.510	.398	1
1.75	1.63	1.49	1.35	1.13	.957	.831	.624	.499	.357	.278	1
2	1.24	1.13	1.02	.838	.709	.614	.458	.366	.260	.202	1
2.5	.770	.678	.598	.478	.397	.339	.248	.195	.137	.106	1
3	5.09	4.36	3.77	2.95	2.42	2.04	1.47	1.15	.805	.618	10
3.5	3.55	2.98	2.54	1.95	1.58	1.33	.951	.740	.513	.393	10
5	2.58	2.12	1.79	1.36	1.09	.914	.649	.503	.348	.266	10
10	1.50	1.20	.990	.736	.585	.486	.341	.263	.181	.138	10
	2.48	1.84	1.47	1.04	.807	.659	.453	.345	.234	.177	100

MEDIUM 1: CL/CT=2.50 MEDIUM 2: CL/CT=2.50		POISSON'S RATIO= .4044 POISSON'S RATIO= .4044									
		DENSITY 2/DENSITY 1									
C2L/C1L	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0	MULTIPLYING FACTOR
0.1	3.26	4.16	4.81	5.60	6.02	6.22	6.31	6.14	5.61	5.06	1
0.2	4.80	5.59	6.01	6.30	6.24	6.14	5.62	5.08	4.18	3.52	1
0.3	5.58	6.12	6.30	6.23	5.96	5.64	4.86	4.22	3.30	2.69	1
0.35	5.82	6.26	6.32	6.12	5.76	5.39	4.54	3.89	2.99	2.42	1
0.4	5.98	6.28	6.28	5.98	5.56	5.15	4.27	3.62	2.75	2.21	1
0.45	6.02	6.26	6.21	5.84	5.39	4.96	4.08	3.43	2.59	2.07	1
0.5	6.06	6.25	6.17	5.76	5.29	4.85	3.97	3.33	2.52	2.02	1
0.6	6.17	6.30	6.17	5.67	5.15	4.69	3.79	3.17	2.38	1.90	1
0.8	6.50	6.42	6.04	5.21	4.53	4.00	3.09	2.52	1.84	1.45	1
1	6.75	6.28	5.83	4.61	3.91	3.39	2.55	2.05	1.47	1.15	1
1.25	4.15	3.86	3.52	2.95	2.53	2.21	1.69	1.36	.990	.778	1
1.5	2.78	2.57	2.34	1.96	1.68	1.46	1.11	.895	.646	.505	1
1.75	2.00	1.84	1.67	1.40	1.19	1.04	.783	.629	.451	.352	1
2	1.51	1.38	1.26	1.05	.891	.774	.582	.466	.333	.259	1
2.5	.956	.856	.765	.623	.523	.449	.332	.264	.187	.144	1
3	6.36	5.55	4.86	3.85	3.18	2.71	1.97	1.55	1.08	.834	10
3.5	4.47	3.91	3.29	2.56	2.09	1.76	1.27	.992	.691	.530	10
5	3.27	2.73	2.33	1.79	1.45	1.21	.867	.675	.468	.358	10
10	1.91	1.55	1.30	.972	.778	.648	.457	.354	.244	.186	10
	3.24	2.43	1.95	1.39	1.08	.886	.610	.466	.316	.239	100

MEDIUM 1: CL/CT=2.50 MEDIUM 2: CL/CT=3.00		POISSON'S RATIO= .4044 POISSON'S RATIO= .4375									
		DENSITY 2/DENSITY 1									
C2L/C1L	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0	MULTIPLYING FACTOR
0.1	3.03	3.92	4.57	5.40	5.87	6.13	6.34	6.26	5.84	5.35	1
0.2	4.56	5.40	5.88	6.26	6.33	6.26	5.84	5.36	4.50	3.83	1
0.3	5.39	6.00	6.25	6.30	6.12	5.85	5.14	4.51	3.54	2.95	1
0.35	5.65	6.15	6.31	6.22	5.94	5.62	4.82	4.17	3.25	2.65	1
0.4	5.84	6.23	6.30	6.10	5.76	5.38	4.54	3.88	2.98	2.41	1
0.45	5.89	6.21	6.23	5.96	5.57	5.16	4.30	3.64	2.77	2.23	1
0.5	5.92	6.19	6.18	5.85	5.42	5.01	4.13	3.48	2.64	2.11	1
0.6	6.01	6.22	6.14	5.72	5.25	4.81	3.93	3.31	2.50	2.01	1
0.8	6.28	6.37	6.17	5.56	4.97	4.47	3.55	2.94	2.18	1.74	1
1	6.56	6.34	5.88	4.99	4.30	3.78	2.90	2.35	1.71	1.35	1
1.25	6.00	5.66	5.13	4.24	3.62	3.15	2.39	1.93	1.40	1.09	1
1.5	4.04	3.76	3.43	2.88	2.47	2.16	1.65	1.33	.966	.759	1
1.75	2.88	2.67	2.44	2.05	1.76	1.55	1.18	.954	.692	.543	1
2	2.16	1.99	1.82	1.53	1.31	1.14	.863	.695	.500	.390	1
2.5	1.36	1.24	1.13	.942	.802	.697	.524	.420	.300	.234	1
3	.932	.839	.751	.613	.515	.444	.329	.261	.185	.143	1
3.5	6.64	5.83	5.13	4.09	3.39	2.89	2.11	1.66	1.16	.897	10
5	4.90	4.22	3.66	2.87	2.35	1.99	1.44	1.13	.788	.605	10
10	2.91	2.42	2.00	1.58	1.27	1.07	.763	.593	.411	.314	10
	5.16	3.95	3.19	2.31	1.81	1.48	1.03	.787	.536	.407	100

CAN. J. PHYS. VOL. 54, 1976

TABLE 2 (Continued)

MEDIUM 1: CL/CI=1.00 MEDIUM 2: CL/CI=1.50		POISSON'S RATIO= .4375 POISSON'S RATIO= .1000										
		DENSITY 2/DENSITY 1										
CL/CIL		1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0	MULTIPLYING FACTOR
0.1	0.18	1.38	1.07	0.80	0.75	0.70	0.67	0.67	0.64	0.62	0.62	1
0.2	0.06	1.71	1.03	0.74	0.74	0.70	0.67	0.64	0.61	0.59	0.59	1
0.3	0.75	1.91	1.03	0.74	0.74	0.70	0.67	0.64	0.61	0.59	0.59	1
0.35	0.90	1.92	1.01	0.71	0.71	0.68	0.65	0.62	0.59	0.57	0.57	1
0.4	0.00	1.95	1.00	0.70	0.70	0.67	0.64	0.61	0.58	0.56	0.56	1
0.45	0.02	1.96	0.99	0.69	0.69	0.66	0.63	0.60	0.57	0.55	0.55	1
0.5	0.03	1.97	0.98	0.68	0.68	0.65	0.62	0.59	0.56	0.54	0.54	1
0.6	0.04	1.98	0.97	0.67	0.67	0.64	0.61	0.58	0.55	0.53	0.53	1
0.65	0.05	1.99	0.96	0.66	0.66	0.63	0.60	0.57	0.54	0.52	0.52	1
0.7	0.06	2.00	0.95	0.65	0.65	0.62	0.59	0.56	0.53	0.51	0.51	1
1	0.07	2.01	0.94	0.64	0.64	0.61	0.58	0.55	0.52	0.50	0.50	1
1.25	0.08	2.02	0.93	0.63	0.63	0.60	0.57	0.54	0.51	0.49	0.49	1
1.5	0.09	2.03	0.92	0.62	0.62	0.59	0.56	0.53	0.50	0.48	0.48	1
1.75	0.10	2.04	0.91	0.61	0.61	0.58	0.55	0.52	0.49	0.47	0.47	1
2	0.11	2.05	0.90	0.60	0.60	0.57	0.54	0.51	0.48	0.46	0.46	1
2.5	0.12	2.06	0.89	0.59	0.59	0.56	0.53	0.50	0.47	0.45	0.45	1
3	0.13	2.07	0.88	0.58	0.58	0.55	0.52	0.49	0.46	0.44	0.44	1
3.5	0.14	2.08	0.87	0.57	0.57	0.54	0.51	0.48	0.45	0.43	0.43	1
4	0.15	2.09	0.86	0.56	0.56	0.53	0.50	0.47	0.44	0.42	0.42	1
5	0.16	2.10	0.85	0.55	0.55	0.52	0.49	0.46	0.43	0.41	0.41	1
10	0.17	2.11	0.84	0.54	0.54	0.51	0.48	0.45	0.42	0.40	0.40	1

MEDIUM 1: CL/CI=3.00 MEDIUM 2: CL/CI=1.75		POISSON'S RATIO= .4375 POISSON'S RATIO= .2576										
		DENSITY 2/DENSITY 1										
CL/CIL		1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0	MULTIPLYING FACTOR
0.1	0.80	1.12	1.08	0.84	0.79	0.75	0.71	0.67	0.64	0.61	0.61	1
0.2	0.86	1.01	1.03	0.88	0.81	0.77	0.73	0.69	0.66	0.63	0.63	1
0.3	0.91	1.09	1.07	0.91	0.84	0.80	0.76	0.72	0.69	0.66	0.66	1
0.35	0.76	1.09	1.05	0.87	0.80	0.76	0.72	0.68	0.65	0.62	0.62	1
0.4	0.86	1.13	1.06	0.90	0.83	0.79	0.75	0.71	0.68	0.65	0.65	1
0.45	0.02	1.14	1.07	0.91	0.84	0.80	0.76	0.72	0.69	0.66	0.66	1
0.5	0.16	1.15	1.08	0.92	0.85	0.81	0.77	0.73	0.70	0.67	0.67	1
0.6	0.85	1.16	1.09	0.93	0.86	0.82	0.78	0.74	0.71	0.68	0.68	1
0.65	0.92	1.17	1.10	0.94	0.87	0.83	0.79	0.75	0.72	0.69	0.69	1
0.7	0.93	1.18	1.11	0.95	0.88	0.84	0.80	0.76	0.73	0.70	0.70	1
1	0.94	1.19	1.12	0.96	0.89	0.85	0.81	0.77	0.74	0.71	0.71	1
1.25	0.95	1.20	1.13	0.97	0.90	0.86	0.82	0.78	0.75	0.72	0.72	1
1.5	0.96	1.21	1.14	0.98	0.91	0.87	0.83	0.79	0.76	0.73	0.73	1
1.75	0.97	1.22	1.15	0.99	0.92	0.88	0.84	0.80	0.77	0.74	0.74	1
2	0.98	1.23	1.16	1.00	0.93	0.89	0.85	0.81	0.78	0.75	0.75	1
2.5	0.99	1.24	1.17	1.01	0.94	0.90	0.86	0.82	0.79	0.76	0.76	1
3	1.00	1.25	1.18	1.02	0.95	0.91	0.87	0.83	0.80	0.77	0.77	1
3.5	1.01	1.26	1.19	1.03	0.96	0.92	0.88	0.84	0.81	0.78	0.78	1
4	1.02	1.27	1.20	1.04	0.97	0.93	0.89	0.85	0.82	0.79	0.79	1
5	1.03	1.28	1.21	1.05	0.98	0.94	0.90	0.86	0.83	0.80	0.80	1
10	1.04	1.29	1.22	1.06	0.99	0.95	0.91	0.87	0.84	0.81	0.81	1

MEDIUM 1: CL/CI=3.00 MEDIUM 2: CL/CI=2.00		POISSON'S RATIO= .4375 POISSON'S RATIO= .3333										
		DENSITY 2/DENSITY 1										
CL/CIL		1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0	MULTIPLYING FACTOR
0.1	0.61	0.89	1.00	0.80	0.79	0.78	0.77	0.76	0.75	0.74	0.74	1
0.2	0.67	0.90	1.01	0.81	0.80	0.79	0.78	0.77	0.76	0.75	0.75	1
0.3	0.73	0.91	1.02	0.82	0.81	0.80	0.79	0.78	0.77	0.76	0.76	1
0.35	0.76	0.92	1.03	0.83	0.82	0.81	0.80	0.79	0.78	0.77	0.77	1
0.4	0.77	0.93	1.04	0.84	0.83	0.82	0.81	0.80	0.79	0.78	0.78	1
0.45	0.78	0.94	1.05	0.85	0.84	0.83	0.82	0.81	0.80	0.79	0.79	1
0.5	0.79	0.95	1.06	0.86	0.85	0.84	0.83	0.82	0.81	0.80	0.80	1
0.6	0.80	0.96	1.07	0.87	0.86	0.85	0.84	0.83	0.82	0.81	0.81	1
0.65	0.81	0.97	1.08	0.88	0.87	0.86	0.85	0.84	0.83	0.82	0.82	1
0.7	0.82	0.98	1.09	0.89	0.88	0.87	0.86	0.85	0.84	0.83	0.83	1
1	0.83	0.99	1.10	0.90	0.89	0.88	0.87	0.86	0.85	0.84	0.84	1
1.25	0.84	1.00	1.11	0.91	0.90	0.89	0.88	0.87	0.86	0.85	0.85	1
1.5	0.85	1.01	1.12	0.92	0.91	0.90	0.89	0.88	0.87	0.86	0.86	1
1.75	0.86	1.02	1.13	0.93	0.92	0.91	0.90	0.89	0.88	0.87	0.87	1
2	0.87	1.03	1.14	0.94	0.93	0.92	0.91	0.90	0.89	0.88	0.88	1
2.5	0.88	1.04	1.15	0.95	0.94	0.93	0.92	0.91	0.90	0.89	0.89	1
3	0.89	1.05	1.16	0.96	0.95	0.94	0.93	0.92	0.91	0.90	0.90	1
3.5	0.90	1.06	1.17	0.97	0.96	0.95	0.94	0.93	0.92	0.91	0.91	1
4	0.91	1.07	1.18	0.98	0.97	0.96	0.95	0.94	0.93	0.92	0.92	1
5	0.92	1.08	1.19	0.99	0.98	0.97	0.96	0.95	0.94	0.93	0.93	1
10	0.93	1.09	1.20	1.00	0.99	0.98	0.97	0.96	0.95	0.94	0.94	1

CHEEKE ET AL.

TABLE 2 (Concluded)

MEDIUM 1:		CL/CT=1.00		POISSON'S RATIO= .4375							
MEDIUM 2:		CL/CT=2.25		POISSON'S RATIO= .3769							
DENSITY 2/DENSITY 1											
CL/CIL	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0	MULTIPLYING FACTOR
0.1	5.39	8.07	7.50	8.40	8.70	8.86	8.64	8.20	7.23	6.38	1
0.2	7.48	8.39	8.70	8.84	8.59	8.23	7.28	6.44	5.17	4.29	1
0.3	8.37	8.83	8.65	8.46	7.92	7.37	6.18	5.28	4.06	3.28	1
0.35	8.55	8.84	8.75	8.23	7.61	7.02	5.81	4.91	3.73	3.00	1
0.4	8.61	8.82	8.67	8.09	7.44	6.84	5.63	4.76	3.61	2.91	1
0.45	8.69	8.86	8.69	8.02	7.33	6.71	5.48	4.61	3.49	2.80	1
0.5	8.81	8.94	8.69	7.92	7.15	6.47	5.20	4.33	3.24	2.59	1
0.6	9.11	9.02	8.51	7.60	6.49	5.75	4.48	3.67	2.69	2.13	1
0.8	9.26	7.83	7.14	5.96	5.11	4.47	3.41	2.75	2.00	1.57	1
1	5.27	4.91	4.46	3.72	3.18	2.78	2.11	1.71	1.24	.971	1
1.25	3.25	2.99	2.71	2.26	1.92	1.68	1.27	1.02	.737	.577	1
1.5	2.20	2.00	1.81	1.50	1.28	1.11	.835	.670	.481	.375	1
1.75	1.59	1.44	1.30	1.07	.909	.788	.591	.472	.337	.262	1
2	1.21	1.09	.975	.800	.676	.584	.436	.347	.247	.192	1
2.5	7.69	6.52	5.70	4.53	3.74	3.18	2.32	1.82	1.28	.983	10
3	4.92	4.18	3.57	2.77	2.26	1.90	1.37	1.07	.740	.568	10
3.5	3.41	2.82	2.39	1.82	1.47	1.23	.875	.679	.469	.359	10
4	2.47	2.01	1.68	1.26	1.01	.842	.595	.460	.317	.242	10
5	1.42	1.12	.922	.679	.538	.445	.311	.239	.164	.125	10
10	2.30	1.70	1.34	.948	.733	.597	.409	.311	.210	.159	100

MEDIUM 1: CL/CT=1.00 POISSON'S RATIO= .4375
MEDIUM 2: CL/CT=2.50 POISSON'S RATIO= .4064

DENSITY 2/DENSITY 1											
CL/CIL	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0	MULTIPLYING FACTOR
0.1	5.19	8.47	7.33	8.29	8.71	8.86	8.75	8.36	7.47	6.64	1
0.2	7.31	8.27	8.70	8.87	8.69	8.38	7.50	6.68	5.41	4.52	1
0.3	8.25	8.74	8.87	8.57	8.08	7.56	6.40	5.50	4.25	3.45	1
0.35	8.45	8.81	8.78	8.33	7.76	7.19	5.99	5.09	3.88	3.13	1
0.4	8.50	8.78	8.69	8.16	7.54	6.96	5.75	4.87	3.70	2.98	1
0.45	8.57	8.80	8.66	8.08	7.43	6.83	5.62	4.75	3.61	2.91	1
0.5	8.67	8.86	8.68	8.02	7.32	6.69	5.45	4.58	3.46	2.78	1
0.6	8.93	9.01	8.67	7.75	6.90	6.19	4.90	4.05	3.08	2.38	1
0.8	9.39	8.85	8.04	6.68	5.70	4.97	3.77	3.04	2.20	1.72	1
1	6.54	6.10	5.55	4.63	3.97	3.47	2.64	2.14	1.55	1.22	1
1.25	4.01	3.70	3.37	2.81	2.41	2.10	1.60	1.29	.932	.730	1
1.5	2.70	2.47	2.24	1.86	1.59	1.39	1.05	.845	.609	.476	1
1.75	1.95	1.77	1.60	1.33	1.13	.983	.740	.593	.425	.332	1
2	1.48	1.34	1.20	.995	.844	.732	.549	.438	.313	.243	1
2.5	.931	.826	.733	.593	.496	.426	.314	.249	.176	.136	1
3	6.17	5.31	4.62	3.63	2.99	2.53	1.83	1.44	1.00	.771	10
3.5	4.31	3.63	3.10	2.40	1.95	1.64	1.17	.914	.634	.486	10
4	3.14	2.59	2.19	1.67	1.34	1.12	.798	.619	.428	.327	10
5	1.82	1.46	1.21	.900	.716	.595	.418	.322	.221	.169	10
10	3.02	2.25	1.79	1.27	.984	.804	.552	.420	.285	.215	100

MEDIUM 1: CL/CT=3.00 POISSON'S RATIO= .4375
MEDIUM 2: CL/CT=3.00 POISSON'S RATIO= .4375

DENSITY 2/DENSITY 1											
CL/CIL	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0	MULTIPLYING FACTOR
0.1	4.85	8.13	7.01	8.05	8.57	8.81	8.87	8.61	7.85	7.09	1
0.2	7.00	8.04	8.55	8.84	8.83	8.61	7.86	7.11	5.86	4.94	1
0.3	8.03	8.68	8.67	8.72	8.33	7.68	6.80	5.90	4.62	3.78	1
0.35	8.26	8.74	8.82	8.51	8.03	7.51	6.35	5.44	4.19	3.40	1
0.4	8.31	8.71	8.81	8.31	7.76	7.21	6.02	5.12	3.91	3.15	1
0.45	8.36	8.71	8.86	8.19	7.59	7.01	5.81	4.93	3.75	3.02	1
0.5	8.44	8.74	8.85	8.11	7.47	6.88	5.67	4.80	3.65	2.94	1
0.6	8.65	8.86	8.88	8.02	7.31	6.67	5.43	4.56	3.44	2.77	1
0.8	9.15	8.84	8.51	7.36	6.42	5.68	4.41	3.60	2.84	2.09	1
1	4.50	4.04	3.74	3.05	2.54	2.15	1.60	1.27	.926	.729	1
1.25	5.83	5.43	4.99	4.15	3.55	3.11	2.37	1.92	1.39	1.09	1
1.5	3.90	3.60	3.28	2.75	2.36	2.06	1.57	1.27	.926	.729	1
1.75	2.79	2.56	2.33	1.95	1.66	1.45	1.10	.890	.642	.503	1
2	2.10	1.92	1.74	1.45	1.24	1.08	.815	.655	.471	.368	1
2.5	1.33	1.20	1.09	.901	.766	.665	.500	.400	.286	.223	1
3	.911	.810	.721	.585	.490	.421	.311	.246	.174	.135	1
3.5	6.44	5.59	4.88	3.86	3.19	2.71	1.97	1.54	1.08	.831	10
4	4.73	4.02	3.47	2.70	2.20	1.86	1.34	1.04	.726	.556	10
5	2.79	2.29	1.94	1.47	1.18	.988	.701	.543	.375	.287	10
10	4.83	3.66	2.94	2.11	1.65	1.35	.932	.712	.486	.366	100

Macroscopic Calculation of the Kapitza Resistance between Solids and Liquid ^4He

David Cheeke

Département de Physique, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Province of Quebec, Canada

and

Henry Ettinger

Centre de Recherches sur les Très Basses Températures, Centre National de la Recherche Scientifique,

38042 Grenoble, France

(Received 26 July 1976)

We treat the Kapitza thermal boundary resistance R_K between a Debye solid and liquid ^4He in the temperature range 0.1 to 1 K, where the phonon transmission coefficient is known to be highly anomalous. Using a continuum model, we consider the consequences of a solid van der Waals layer of helium which is acoustically absorbing. Using values of acoustic wave attenuation in the layer based on experiment, we are able to predict the correct order of magnitude and temperature dependence of R_K for copper.

The anomalously high phonon transmission coefficient between liquid helium and solids has been a well-known problem since its discovery by Kapitza in 1941.¹ Khalatnikov² proposed an acoustic mismatch model which in its simplest form failed to predict the observed magnitude of the effect.³ In this Letter we propose a more general macroscopic model based on acoustic mismatch which successfully predicts the order of magnitude of the experimental results.

The Kapitza effect has been found to exist^{4,5} in both liquid and solid ^3He and ^4He and even solid H_2 and D_2 and it is now generally believed to be characteristic of quantum systems. For simplicity and brevity we restrict our discussion here to the "classic" problem of the steady-state thermal boundary resistance R_K for phonon transport between an isotropic ordinary Debye solid in contact with a bath of liquid ^4He in the temperature range 0.1 to 2 K. In this case classic acoustic theory predicts the existence of a small critical cone for total reflection in the helium as a result of the large difference in acoustic properties of the two media. The small transmission coefficient

for incidence within this cone explains the high values of R_K predicted by the Khalatnikov theory.

A first attempt to provide a mechanism for an increased phonon transmission coefficient was made by Challis, Dransfeld, and Wilks (CDW),⁶ who took into account the formation of a dense layer of helium at the interface due to the van der Waals attraction of helium atoms to the substrate. This layer acts as an acoustic matching unit which leads to an increased transmission coefficient within the critical cone; this is, however, quite insufficient in itself to resolve the discrepancy. More recently, other workers^{7,8} have considered the effects of a finite phonon lifetime in the substrate, which led to an effective widening of the critical cone. The two mechanisms have been combined in a single calculation by Opsal and Pollack.⁹ However a large body of evidence¹⁰ suggests that substrate lifetime effects cannot provide the sole basis for the correct explanation for $T \gtrsim 1$ K and we do not consider them further here.

The present model uses the existence of a

dense layer as its starting point. For simplicity we consider a model composed of two solid layers each 3-Å thick at pressures of 30 and 260 atm; values of density and longitudinal and transverse sound velocities for each layer were obtained by using experimental results for bulk solid at these pressures.¹¹ As did previous workers,^{6,9,12} we use a continuum model in that the van der Waals layer is chosen as an elastic continuum across which plane waves propagate from one medium to the other,¹³ mostly in the limit in which the wavelength is larger than the layer thickness.

The new and crucial point is that in the present work we consider *explicitly* that the van der Waals layer is an acoustically absorbing medium. We can obtain an estimate of the attenuation constant for 1-K thermal phonons in such a layer from the work of Anderson and Sabisky^{14,12}; for slightly thicker films this gives a mean free path $l \sim 100$ Å at a frequency of about 60 GHz varying approximately linearly with wavelength. The attenuation is expected to be even greater for the thin inhomogeneous layer considered here even though it is solid. In any case, we treat the absorption constant ν as a free parameter in the calculation, of the order of the above value ($\nu \sim 0.2$ for an average wave in our film).¹⁵

The actual calculation (both of the acoustic properties of the multilayered system and of the heat flow) follows very closely the now standard formalism for such problems which has been presented in great detail by Opsal and Pollack.⁹ The boundary conditions lead to a secular expression which is solved by computer to determine the wave amplitudes in the incident and substrate media for a given incident wave in the liquid helium at angle θ . The corresponding energy fluxes are determined in the usual way, and for the simple and known case of no absorption in the film we verify conservation of energy at angle θ , as well as verifying an enhanced transmission with respect to Khalatnikov of at most 3 or 4, as obtained by previous workers.^{6,9} We now include absorption in the film by expressing the phonon wave vector as $k = k' + ik''$ in the van der Waals layer, with $k'' = \nu k'$. Wave amplitudes are again calculated by computer and, following the astuce of Peterson and Anderson⁷ in a similar problem, we obtain by subtraction the energy flux in the layer for incidence at angle θ . Integration over θ and ω then gives the total heat flux absorbed in the layer; and the crucial question now is to determine what fraction β of this heat flux is sub-

sequently transmitted into the substrate. As the calculation is macroscopic we are unable to treat questions related to the frequency spectrum of the re-emitted phonons in the layer (e.g., the possibility of frequency conversion, etc.).

The determination of β is based entirely upon acoustic mismatch.¹⁶ At each interface we determine an average transmission and reflection coefficient deduced from the calculated R_K for an interface between the corresponding semi-infinite media.^{3,7} We then consider that there are incoherent multiple reflections in the film, a hypothesis that has been used successfully in similar problems of transmission of thermal phonons across thin foils or sandwiches.^{17,7} This argument leads to the expression

$$\beta = \frac{1}{2} t_2 (1 + r_1) / (1 - r_1 r_2),$$

where r_1 and t_1 are average reflection and transmission coefficients at the layer-to-liquid interface and r_2 and t_2 the corresponding entities at the layer-to-substrate interface. β is typically of the order of 10^{-3} in the cases of interest here,¹⁸ but this is quite sufficient to obtain agreement with experiment as most of the energy flux from the liquid comes from outside the critical cone.

By adding the above heat flux $\dot{Q}_2$ to that $\dot{Q}_1$ transmitted directly inside the cone we thus determine $R_K T^3$ for each value of T . The results are presented in the Fig. 1 for the case of copper and compared with a representative selection of available experimental values.^{19,20} It is clear that the basic Khalatnikov model as well as that with a dense layer with $\nu=0$ are quite incapable of explaining the results, while the present model with ν in the range 0.1 to 0.5 reproduces the correct general magnitude and temperature dependence. For $\nu=0.5$ and $T=1$ K, we have $\dot{Q}_2/\dot{Q}_1 \sim 30$ which illustrates the predominance of the present mechanism. For materials other than copper, a representative comparison is made in Table I where we see that aluminum¹⁷ and quartz⁶ can be satisfactorily explained while the discrepancy is rather bigger and perhaps significant for silicon.²¹ Disagreement by a factor of 2 to 4 seems rather typical for such high- θ_D materials (e.g. Ni and Al_2O_3). Whether or not this disagreement is significant will depend upon the outcome of a more elaborate treatment of our model, and upon detailed calculations on possible competing parallel mechanisms.

It is easy to see the physical significance of the additional heat flow calculated in the present

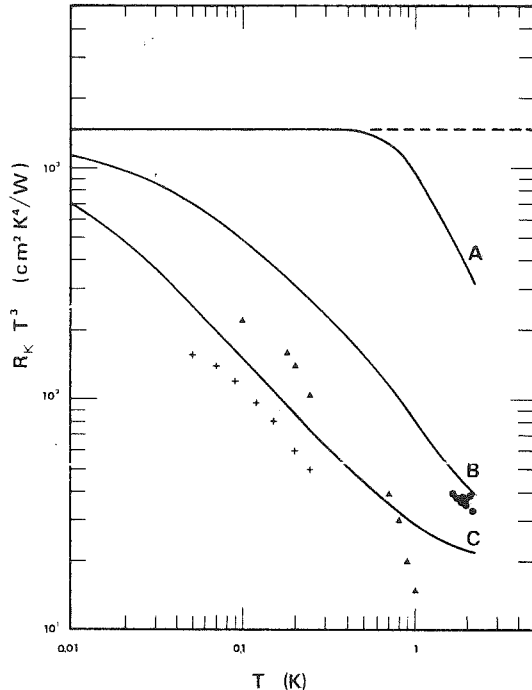


FIG. 1. Calculated values of $R_K T^3$ vs T compared with experimental results for copper: ---, Khalatnikov (term F_1) from Ref. 2; curve A, dense layer with $\nu=0$; curve B, dense layer with $\nu=0.1$; curve C, dense layer with $\nu=0.5$; ●, experiment (Ref. 20); ▲, experiment (Ref. 19); +, experiment (Ref. 19).

model. The presence of absorption (imaginary k vector) in the layer relaxes Snell's law, permitting absorption of the incident energy flux that enters the layer by direct transmission. A consequence is that, for $\nu > 0.1$, we calculate a transmission coefficient approximately independent of angle. This agrees with an empirical suggestion by Challis³ concerning the dependence of the transmission coefficient on the relative densities and sound velocities. Physically it corresponds to an "opening out" of the critical cone to most of the incident half space.

In conclusion, the simple macroscopic model presented here seems capable of predicting the rough temperature dependence and the order of magnitude for R_K of Cu-liquid ^4He . This model is consistent with the idea of an anomalous transmission for quantum systems, for which the high compressibility leads to the formation of a dense layer; the high attenuation in the layer may also have a characteristic quantum origin, but this is beyond the scope of the present analysis. The model does not explain *per se* the Kapitza anom-

TABLE I. Values of $R_K T^3$ calculated for aluminum, quartz, and silicon at $T=1.5$ K compared to experiment in watt-centimeter units.

	Al	SiO ₂	Si
Khalatnikov (F_1) ^a	1060	1900	3880
Solid layer with ^b			
$\nu=0$	460	788	1490
Our theory with			
$\nu=0.1$	42.3	72	129
$\nu=0.5$	18.2	31	58
Experiment	~ 20 ^c	~ 20 ^d	~ 24 ^e

^aRef. 2, and L. J. Challis and J. D. N. Cheeke, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **304**, 479 (1968).

^bWe include both longitudinal and transverse waves in the layer.

^cRef. 17.

^dRef. 6.

^eRef. 21.

aly, but for the first time it does indicate the lines along which a successful microscopic calculation could be carried out.

We thank V. Bortolani, L.-G. Caron, H. J. Maris, and L. P. Kadanoff for comments and discussions, as well as A. C. Anderson for communication of unpublished results. This work was partially supported by the GRSD (Groupe de Recherches sur les semiconducteurs et diélectriques).

¹P. L. Kapitza, J. Phys. (Moscow) **4**, 181 (1941).

²I. M. Khalatnikov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **22**, 687 (1952).

³L. J. Challis, J. Phys. C **7**, 481 (1974).

⁴J. S. Buechner and H. J. Maris, Phys. Rev. Lett. **34**, 316 (1975).

⁵C. L. Reynolds and A. C. Anderson, Phys. Rev. B **14**, 4114 (1976).

⁶L. J. Challis, K. Dransfeld, and J. Wilks, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **260**, 31 (1961).

⁷R. E. Peterson and A. C. Anderson, J. Low Temp. Phys. **11**, 639 (1973).

⁸H. Haug and K. Weiss, Phys. Lett. **A40**, 19 (1972).

⁹J. L. Opsal and G. L. Pollack, Phys. Rev. A **9**, 2227 (1974).

¹⁰To fit the sapphire-liquid ^4He data with a bulk solid attenuation model requires an attenuation constant $\nu \sim 0.5$. The same value used for an indium-sapphire interface would predict an R_K about 12 times less than that observed, this latter value being in good agreement with the simple acoustic-mismatch model [J. D. N. Cheeke, B. Hébral, and C. Martinon, J. Phys. (Paris) **34**, 257 (1973), and D. A. Neepner and J. R. Dillinger, Phys. Rev. **135**, A1028 (1964)]. This suggests that at thermal frequencies higher than 1 K,

attenuation, roughness, etc., in the solid surface make, at most, secondary contributions. The experimental situation is similar for metals [J. D. N. Cheeke, B. Hébral, and J. Richard, *J. Low Temp. Phys.* **12**, 359 (1973)].

¹¹We use for layer 2, $\rho = 0.258 \text{ g/cm}^3$, $C_t = 0.96 \text{ km sec}^{-1}$, and $C_l = 0.48 \text{ km sec}^{-1}$; for layer 1, $\rho = 0.195 \text{ g/cm}^3$, $C_t = 0.5 \text{ km sec}^{-1}$, $C_l = 0.25 \text{ km sec}^{-1}$. The results are not critically dependent upon the choice of these values, which has been made as realistically as possible; full details of the determination of such constants and of their relative importance is given in Ref. 9. The model used here corresponds to the currently accepted value of about 1.6 statistical atomic layers of solid helium.

¹²A. F. G. Wyatt, N. A. Lockerbie, N. G. Mills, and R. A. Sherlock, *Solid State Commun.* **11**, 1089 (1972).

¹³It has been shown quite conclusively [J. G. Dash, in *Critical Reviews in Solid State Sciences* (Chemical Rubber Company, Cleveland, Oh., 1976), p. 209] absorbed helium can be described surprisingly well as an elastic two-dimensional Debye continuum insofar as its low-temperature acoustic and thermal properties are concerned.

¹⁴C. H. Anderson and E. S. Sabisky, in *Physical Acoustics*, edited by W. P. Mason and R. N. Thurston (Academic, New York, 1971), Vol. 8.

¹⁵Even supposing the simple k dependence of the absorption term assumed here, ν will generally be a temperature- and thickness-dependent parameter, which could of course be included in more sophisticated versions of the present model.

¹⁶Previous workers [W. Dietsche and H. Kinder, *J. Low Temp. Phys.* **23**, 27 (1976)] have discussed the possibility of a similar model to explain phonon reflection experiments. However these authors ruled out an explanation based upon the use of acoustic mismatch. In the present work we show that the classic Kapitza problem can be explained by such a model using acoustic mismatch alone.

¹⁷L. J. Challis and R. A. Sherlock, *J. Phys. C* **3**, 1193 (1970).

¹⁸For the copper-⁴He interface, the numerical values and methods stated in the text lead to $r_1 = 0.6$, $t_1 = 0.4$, $r_2 \sim 1$, and $t_2 = 1.5 \times 10^{-3}$.

¹⁹J. T. Folinsbee and A. C. Anderson, *Phys. Rev. Lett.* **31**, 1580 (1973), and *J. Low Temp. Phys.* **17**, 409 (1974).

²⁰N. S. Snyder, *J. Low Temp. Phys.* **22**, 257 (1976). These measurements were made on what were probably the most carefully controlled R_K surfaces ever studied.

²¹R. C. Johnson and W. A. Little, *Phys. Rev.* **130**, 596 (1963).

THE KAPITZA RESISTANCE AND PHONON REFLECTIVITY
BETWEEN SOLIDS AND LIQUID HELIUM

by

DAVID CHEEKE, Département de physique, Université
de Sherbrooke, Sherbrooke, Québec, Canada J1K 2R1

and

HENRY ETTINGER, Centre de Recherches sur les Très
Basses Températures, C.N.R.S., B.P. 166X, 38042
Grenoble Cedex , France

Abstract

Results of calculations of Kapitza resistance and phonon reflectivity are presented for clean and dirty solid surfaces in contact with liquid helium. We suppose the existence of a thin attenuating layer of adsorbed solid helium at the interface. It is shown that even 5 - 15⁰ thick layers of contamination can very significantly improve the phonon transmission near 1 - 2 K, and could also explain results for hydrogen, deuterium and neon.

I INTRODUCTION

The explanation of the anomalous transmission of high frequency phonons between ordinary solids and quantum media (primarily helium) remains a major problem of low temperature physics (1) . This is still so despite the information obtained from the use of new techniques (heat pulse (2) and tunnel junction (3) reflectivity, spin phonon spectrometry (4) etc) in the high frequency ($f > 20$ GHz) and high temperature ($T > 0,1K$) range which interests us here. In particular it has been shown for helium that the anomalous transmission may be associated with the presence of the first few absorbed atomic layers (2) (3) and that the effect is apparently characteristic of quantum systems (3He , H_2 , D_2 and perhaps Ne) (5) . The fastest change in phonon reflectivity with frequency has been observed to be in the range 20 to 140 GHz for typical solids (4) .

An examination of the published data indicates that the results in this temperature and/or frequency range depend on the state of the substrate surface in a subtle way. Recent experiments using both steady state (6)(7) and reflectivity (8) techniques in which efforts were made to reduce both physical and chemical imperfections of the surface indicate that the anomalous transmission is reduced for clean and perfect surfaces. Also results at lower temperatures ($T \sim 0,1K$) on copper seem to be explainable in terms of the condition of the solid surface (9) .

On the theoretical side there have been many microscopic models. None of these has apparently been successful. We restrict our attention here to a strictly macroscopic approach, first adopted by Khalatnikov

in 1952 (10) in terms of partial transmission of phonons due to acoustic mismatch. Numerous modifications to this model have been quite encouraging. The first of these was due to Challis, Dransfeld & Wilks (11), (C.D.W.); on the basis of an observed weak pressure dependence of the Kapitza Resistance ($R_K \equiv 1/h_K$) in the range 0.5 - 2.0K, they proposed the existence of a dense helium layer at the interface due to the Van der Waals (VDW) attraction. This dense inhomogeneous layer of helium was seen to act as an impedance matching layer, improving the classical transmission coefficient by a factor $\sim 3-4$ for $T \sim 1 - 2K$. Later Peterson and Anderson (12) and Haug and Weiss (13) successfully explained R_K measurements at lower temperatures ($0.1K < T < 0.5K$) by including the attenuation of the evanescent wave set up in the solid by helium phonons incident outside the critical cone. Opsal and Pollack (14) combined the two previous mechanisms in the hope of explaining the R_K data for $T \sim 1 - 2K$. While a reasonable fit to selected data was obtained, we feel that this explanation must be ruled out, for reasons given in detail in section II. Finally the present authors (15) proposed a model based on attenuation in the helium film which successfully predicted many of the experimental features. The essential idea of this model is retained in the present work, although the detailed approach is quite different.

The present paper is divided up as follows. In section II we present a critique of the experimental evidence, which would seem to be necessary due to the increasing complexity and ambiguity of the observed phenomena. In section III we outline the approach adopted here, as well

as details of the model. The main predictions of the model (transmission coefficient as a function of mode, incidence angle, frequency, surface condition and quanticity) are given in section IV and comparison with experiment is made where possible. The conclusions are summarised in V.

II EXPERIMENT: CRITIQUE OF AVAILABLE DATA

Generally one can say that the surface preparation is certainly important over the whole temperature range, except perhaps for $T \rightarrow 0$. The situation seems most confusing in the range 1 - 2K, and from now on we concentrate mainly on this range. For some time, it has been well known (16) (17) that the experimental results were notoriously unreproducible and a typical disagreement with Khalatnikov of about 50 to 100 was obtained. In principle the anomalously high values of h_K could be due to both physical and chemical imperfections. Physical defects (roughness, dislocations etc.) would decrease the phonon lifetime and hence R_K in the manner described previously (12) (13). "Chemical" contamination would lead to the formation of acoustic matching units as described in the present work. For extreme imperfection of both types an increase in R_K could and indeed has been observed (18) (19) due to a large thermal resistance correction for the steady state technique. Such cases can usually be identified and easily avoided if desired.

We consider first the case of physical deformation. We believe that this is not the primary cause of the anomalous transmission in the

1 - 2K range for the following reasons;

a) A number of R_K measurements have been made on polished sapphire surfaces between helium on one hand and indium on the other. As sapphire is extremely hard and the polishing techniques standard, the surfaces involved must all be very similar. Numerical calculation shows that if we are to explain the anomalous h_K for $Al_2O_3 - {}^4He$ by surface attenuation, this would imply a disagreement between experiment and the acoustic mismatch value of h_K for $Al_2O_3 - Indium$ by a factor of 12. However independent steady state (20) and heat pulse (21) experiments have established that the $Al_2O_3 - In$ data can be explained by standard acoustic mismatch theory without surface attenuation.

b) A series of steady state R_K measurements in a copper cell on 3He , 4He , H_2 , D_2 and Ne showed a disagreement by a factor of ~ 80 with the Khalatnikov model for 4He (5). It would require excessive values of attenuation to bring about agreement with theory, but even if this were possible, it would imply a disagreement by a factor ~ 5 for Cu-Ne. However the latter results are in agreement with the basic Khalatnikov model to 20%.

c) Careful experiments to look for a significant increase in h_K due to surface damage have been made independently for Fe, Co, Ni (22) and for Cu (7) . The results were negative in all cases. Very recently (23) careful work on electropolished copper would seem to indicate a small contribution due to dislocations, but the remaining disagreement with theory is very much larger.

Finally points (a) and (b) would also seem to eliminate surface roughness (24) as it is essentially equivalent to an attenuation model in the limit of large roughness. Hence in what follows we will not consider further effects due either to dislocations or to roughness.

In contrast, it is now known that even monolayers of surface contamination (either chemi - or physi - sorbed) may have a significant and systematic effect.

a) Van der Sluijs and coworkers (7) have observed a systematic decrease in h_K with pumping time for a same copper surface.

b) Anderson and Sabisky (4) found an increase in transmission due to accidental deposition of pump oil on the surface.

c) Weber et al (8) observed a systematic and significant increase in the reflectivity at 290 GHz after cleaving crystals of LiF and NaF under liquid helium or in ultravacuum (UHV) at helium temperatures.

d) Snyder (6) prepared a copper surface in UHV at room temperature and found that R_K was sensitive to monolayer contamination.

e) Solecki and Veran (25) have observed highly unreproducible heat pulse reflectivity between ^3He and Silicon. The crystals were all polished in a similar manner but differed in surface treatment. For transverse phonons, reflectivities of 0,3, 0,6 and 0,9 under nominally identical conditions were observed.

Thus the conclusion here, based on available experimental results, is that even monolayer contamination may be important. This being the case we will then compare calculations for the clean surface only with surfaces prepared under liquid helium or in UHV. For typical "dirty" surfaces we will suppose the existence of a thin layer of contamination as explained in section III.

There is very little data in the literature that one can use with confidence to compare with the clean surface phonon transmission calculations. The work on metals (26) (19) was motivated by a search for an electron tunnelling mechanism, and extraction of the phonon term cannot be made due to possible competing effects of surface damage and subsequent surface contamination upon annealing. Probably the most usable metal surface results available are those of Snyder for copper prepared under UHV, but even here monolayer contamination is likely.

A small amount of data is available for insulators cleaved in liquid helium; we assume, without proof, that effects associated with mechanical damage are small here. Johnson cleaved KCl in superfluid helium (27) and obtained a conductance significantly ($\sim \times 15 - 30$) larger than the Khalatnikov value. Similar work was done by Weber et al for LiF and NaF by reflectivity measurements, and a comparable disagreement, with Khalatnikov is deduced. Finally Anderson and Sabisky (4) heated a SrF_2 crystal to 180K in a 4K environment to remove physisorbed layers and found no spectacular change in the general form of the reflectivity, as a function of frequency over the 20 - 200 GHz range. This

result may or may not be significant as the character of the contamination is unknown.

III CALCULATIONS

For the clean surface we use the model already proposed (15), whereby the enhanced heat transfer is seen as being due to acoustic attenuation in the thin inhomogeneous layer of solid helium observed at the interface. Viewed from the liquid this corresponds to an effective widening of the critical cone in the helium. In the previous treatment we considered incidence from the liquid in the usual way (14) integrating over all incidence angles and frequencies and then summing the directly transmitted heat flux and that dissipated in the film and retransmitted into the solid, to obtain finally h_K . This approach has the advantage that it permits a direct comparison with the basic Khalatnikov model and the modified version due to surface attenuation (12) (13) (14). However there are two disadvantages to this approach. Firstly the transmission factor β for the heat flux re-emitted from the film is in principle determined by acoustic mismatch, but in practice, even for a simplified model, it seems very difficult to determine with precision. Secondly we would like to compare calculations with reflectivity data as a function of mode, incidence, angle and frequency, and this cannot be done via that approach. For these reasons we base our present work on incidence from the substrate side of the boundary, where both of these limitations are removed. In addition we are able to determine the effects of thin contaminating layers on the surface in a much more direct way.

For the clean surface we suppose the existence of either one or two layers of absorbed solid helium at the interface, depending on the estimated values of the Van der Waals (VDW) potential (28). The appropriate density and sound velocities for each layer were estimated from the calculated mean pressure in the layer using bulk data; all of these calculations are now standard (14) (15) and will not be repeated here. Following (15) we use the attenuation parameter in the layer ν as an adjustable parameter, and experiment suggests that $\nu \sim 0,2$ is an appropriate value in the 1 - 2K range. Here the phonon wave vector in the film is $\vec{k} = \vec{k}' + i\vec{k}''$ and $k'' = \nu k'$.

A calculation of the transmission coefficient involves considering incidence of a given plane wave mode (ℓ, t_1 or t_2) at angle θ and frequency ω in the solid. Reflected wave fields in the solid and those transmitted in the layer and the liquid are defined in the usual way (14). We note that in all cases the phonon vectors in the solid and the fluid are real so that the possible contribution of evanescent waves in either medium is excluded from the calculation. It is a straightforward matter to calculate the transmitted energy flux for a given incidence, while that absorbed in the layer for a given value of ν is deduced by subtraction of the reflected and transmitted fluxes from that incident. We make the simplifying assumption that the total incoherent energy flux trapped in the film is transmitted to the liquid; from the point of view of acoustic mismatch this is a good approximation (to about 10^{-3}) for all the cases treated here, and corresponds to neglecting backscattering

from the film into the solid. In this way we obtain directly curves of the transmission coefficient for each mode in the solid as a function of θ and ω . The Kapitza resistance R_K corresponding to this transmission-absorption mechanism of bulk modes is readily obtained by integration over θ and ω and summing the contributions of the three modes.

For a "dirty" surface covered with several layers of contamination, we have chosen to represent the latter by a variable number of monolayers. There are many likely contaminant materials: water, grease, acetone etc. Preferential condensation during cooldown and the use of distilled water in electropolishing solutions, final surface rinses, etc. would suggest water as an obvious candidate for typical contamination. The particular choice of ice is of course somewhat arbitrary, but it does give an indication of the result expected for thin layers of a contaminant with properties intermediate between those of typical substrates and liquid and solid helium. We suppose the layer of contaminant to be covered by one or two layers of solid helium; the choice is uncertain due to a lack of knowledge of the VDW constants of ice, but in any case the results are relatively insensitive to this choice. The ice layer has been chosen non attenuating in the lack of any information on the subject and also because inclusion of dissipation would lead us to the same type of uncertainty in the calculation previously mentioned in connection with the parameter β in (15). An alternative and equally plausible approach would be to replace the contaminant layer plus attenuating dense helium layer by some sort of thick, wavy dissipative "sponge" of intermediate properties (29),

but we believe that the results would be qualitatively the same as those obtained here.

IV RESULTS AND COMPARISON WITH EXPERIMENT

1. Transmission - Angular Variation-Clean Surface

In this section we look at the energy transmission coefficient frequency, chosen as 290 GHz so as to permit a comparison with recent experimental results (8). In the case of interest where the helium layer is strongly attenuating, the sharp resonances characteristic of the transmission for a non-absorbing film as a function of frequency seen in figs. (4) to (7) are smeared out, so that the curves shown here are quite typical for the high frequency régime (above 100 GHz). The results for LiF with an appropriately chosen solid layer are given in figs (1) (2) and (3).

The detailed behaviour of these curves can be understood in terms of general principles of impedance matching and mode conversion. Incident modes from the solid will set up displacements normal and tangential to the surface in the layer. In the absence of absorption the normal component is well coupled to the liquid while the tangential component is not transmitted at all. Then the effect of absorption in the film is to reduce the transmission of the normal component (set up mainly by ℓ at normal incidence or t_1 at large incidence angles). The tangential component will be absorbed for increasing v and thus coupled to the liquid (t_1 normal incidence, ℓ at large incidence angle, t_2 at all θ).

These considerations explain most of the features of the curves. We note that the results for $\theta \sim 0^\circ$ will be useful in interpreting reflectivity experiments, while the behaviour at $\theta \sim 45^\circ$ is more appropriate to the determination of R_K .

These results can be used to compare with reflectivity experiments on clean surfaces. For the reflectivity R we use $R = 1 - \alpha$ for each mode. Comparing the results of Weber et al (8) figs (1) and (2), in fig (1) their first pulse corresponds to t_2 at normal incidence. We have $\alpha \sim 1.5 - 2\%$ as opposed to $\alpha \sim 3\%$ for the second peak (t_1 at 20°), compared to the experimental values of $< 1\%$ and 6% respectively. Referring to their fig (2), we see that the observed transmission is about the same for ℓ and degenerate t modes at normal incidence; for $\nu \sim 0.2$ we find $\alpha_\ell \sim 5\%$, $\alpha_t \sim 4\%$. Thus it would seem that at least the major trends of the experimental results are correctly predicted, despite the simplifications used in the model. For the dirty surface the experimental results have been found to be quite unreproducible and it seems pointless to attempt detailed comparisons.

2. Transmission - Frequency dependence - clean and dirty surfaces

This is probably the most direct and interesting type of curve to use to characterise the anomalous transmission. It should be noted that the mode t_2 is not transmitted at all in a model with $\nu = 0$, so this

mode is expected to play a major role in the extra "anomalous" transmission. We also emphasise that the resonances seen in the figures are of type $\lambda/4$ for either ice or helium layers and in real life these would almost certainly be smoothed out for all but the most perfect surfaces, and this is assumed in the discussion. Finally the dirty surface has been represented as one with $15 \text{ \AA}$ of ice which would seem to be a realistic contamination thickness.

For the clean surface transmission curves the effects of attenuation are seen to correspond to the conclusions of §1 at all frequencies; this is seen dramatically for t_1 and t_2 , where it is clear that we can only obtain an anomalous transmission by including dissipation in the film.

For all modes a $15 \text{ \AA}$ ice layer has no effect for frequencies inferior to 150 GHz which is expected as we are far from the $\lambda/4$ resonance at 250 - 300 GHz. This could explain the results of Anderson and Sabisky in SrF_2 . Likewise their observation of pump oil effects at these frequencies would suggest that these films were rather thicker than the usual residual layer of contamination. As this type of experiment is sensitive to the same phonons as R_K (transverse at 45°) but is frequency selective, we conclude that the observed rapid frequency dependence is due to t_2 . In the high frequency region ($\sim 300 \text{ GHz}$) for either a clean or a dirty surface, it is clear that the anomalous transmission can only be explained by dissipation in the layers. Finally we note that at these frequencies ice increases the transmission for t_1 and t_2 by an order of magnitude while ℓ is only moderately affected, and this is again in good agreement with reflectivity measurements on dirty surfaces, where one usually finds $R_\ell \sim 1$.

3. Kapitza Resistance

One can in principle determine the contributions of different modes and the importance of various parameters by detailed inspection of figures (1) to (7). However this is a tedious business and suffice it to say that the ℓ mode can be neglected due to the small density of states, the behaviour of t_1 is highly complicated and finally that the inclusion of t_2 due to attenuation in the layer is the most important single effect. In what follows we have integrated the transmitted energy over θ and ω to obtain $R_K T^3$ vs T to compare with experiment. Generally we note that the curves saturate at low temperatures around 0,1 to 0,3K and the biggest deviation from a simple Khalatnikov model occurs between 1 and 2K.

We compare experiment first with the only chemically clean results available, those of Johnson for KCl (27) shown in fig (8). For $v \sim 0,2$ we obtain agreement to within a factor of two. A $5 \text{ \AA}$ dense layer at 100 atmospheres pressure has been assumed in the calculation, reflecting the relatively small VDW constant expected for this case (28); using a thicker two layer structure as for figs (4) to (7) doesn't significantly improve the agreement ($\sim 10\%$ variation). In view of the paucity of experimental data and the many hypotheses made in the calculation (to be discussed later), we feel that agreement to within a factor of two is a very encouraging result.

Comparison of theory and experiment for the case where we expect only a few monolayers of contamination can best be made for the case of copper, shown in figs (9) and (10). Experimentally the results of Snyder (6) and Van der Sluijs et al (23) are consistent and will be taken as representative of such a surface, which we assume has a negligible concentration of dislocations. Again agreement between the model and experiment is very encouraging and order of magnitude agreement is obtained if we assume the presence of about $15 \text{ \AA}$ of H_2O . There is not enough available experimental data to come to any clear conclusions regarding the temperature dependence.

Finally it is interesting to consider the implications of quantum effects on this work, which can be done most fruitfully by comparing with the experimental results of Anderson et al (5). It is in the spirit of our model that quantum effects are manifested primarily by the enhanced compressibility of the medium, leading to the creation of a dense attenuating layer at the interface; the resulting anomalous phonon transmission is then further increased due to the existence of thin contaminating layers of impurities. As all reported experiments so far have been done on slightly contaminated surfaces, and as the effects associated with the dense layer are expected to be much smaller for quantum systems other than ^3He or ^4He , it is important to verify that the anomalous transmission observed for H_2 , D_2 and Ne is compatible with the presence of a thin layer of contamination. This is done in Table (1) where we have assumed the existence of a $15 \text{ \AA}$ layer of H_2O on the copper surface. It is seen that theory and experiment are quite compatible; for H_2 and D_2 we are unable to reproduce the observed temperature dependence but the disagreement is small and perhaps not significant. In fact, examination of fig (10) and some unpublished

curves lead us to the conclusion that this disagreement could be removed if the contaminating layer was rather thicker than $15 \text{ \AA}$ or slightly attenuating.

Thus it is quite possible that the anomalous transmission observed for quantum systems other than helium could be ascribed mainly to improved impedance matching by contamination. Experiments on freshly cleaved surfaces are needed to confirm this point.

IV DISCUSSION AND CONCLUSION

It is in order to emphasise that many hypotheses have been made both explicitly and implicitly in our treatment and so we really cannot justify looking for anything better than rough agreement for both magnitude and T dependence of R_K . Some of these assumptions are:

1) Plane wave continuum approach which must certainly be questioned for monolayer thicknesses, although this can be justified for solid helium if the correct densities and sound velocities are used (15).

2) Homogeneous and isotropic medium. The homogeneity will be upset by surface imperfections and deviations from isotropy lead to phonon focussing, group velocity corrections which may well be far from minor, especially of course for the reflectivity at given θ and ω .

3) Concerning comparison with experiment, v will generally be a frequency, temperature and perhaps even sample dependent parameter. It will basically depend on the microscopic excitation spectrum of the layer and this is as yet a subject very much in its infancy.

4) The nature of the contaminating layer is quite open. It could of course be acoustically attenuating and also composed of molecules (organic) larger than H_2O . Both of these effects would increase the heat flow, as compared to our calculation, for a given number of monolayers. In short we have taken what we feel is a conservative approach in order to show that contamination effects are really important.

5) The surface wave contribution has not been included here. For the case of small dissipative effects (residual surface roughness and dislocations, conduction electron attenuation) this term should be of the order of magnitude of that calculated by Khalatnikov (10), which would reduce R_K by about 10% in our case. In addition, we estimate that attenuation of Rayleigh and Love waves in the dense helium layer would lead to at most a further 5% reduction in R_K (30). We have not calculated these effects in detail as the above considerations plus the reasonable agreement with experiment obtained in this work would suggest that the surface wave term is secondary in the present context. Of course for a solid surface that is highly attenuating this term could become important and even dominant at lower temperatures, as has apparently been observed (9).

A final point is that the saturation temperatures at which R_K approaches the Khalatnikov value are rather higher here than those calculated for the case of incidence from the liquid considered previously (15). We feel that this is mainly due to uncertainty in the parameter β as mentioned there; the value of β depends critically upon the assumptions

made on the multiple reflections in the layer and could well be frequency dependent in consequence (31). Thus while β is uniquely determined in principle for the calculation with incidence from the liquid, in fact this is impracticable, and we regard the present treatment as being quantitatively correct, within the reserves given above.

In conclusion the present work shows that thin layers of contamination can have an important effect on R_K , in agreement with experiment. We believe that the main features of all experiments can be explained by an essentially classical treatment of a layered system, which in turn owes its existence to important quantum effects in liquid and solid helium. Finally as the reflectivity coefficients appropriate to ideal surfaces are approaching unity, it may be that in future work on such surfaces, low temperature phonon transmission experiments or R_K measurements over the whole temperature range will be more fruitful than reflectivity studies.

ACKNOWLEDGEMENT

This work was partially supported by the France-Québec exchange programme, the Groupe de recherches sur les semiconducteurs et les diélectriques and the National Research Council of Canada. We would like to thank Drs. H.J. Maris and J.C.A. Van der Sluijs for preprints before publication. One of us (H.E.) wishes to thank the Département de physique, Université de Sherbrooke for their hospitality.

REFERENCES

- 1) L.J. Challis, J. Phys. C 7, 481 (1974) .
- 2) C.J. Guo and H.J. Maris, Phys. Rev. A10, 960 (1974) .
- 3) W. Dietsche and H. Kinder, J. Low Temp. Phys. 23, 27 (1976).
- 4) E.S. Sabisky and C.H. Anderson, Solid State Comm. 17, 1095 (1975).
- 5) C.L. Reynolds and A.C. Anderson, Phys. Rev. B 15, 5466 (1977).
- 6) N.S. Snyder, J. Low Temp. Phys. 22, 257 (1976).
- 7) J.C.A. Van der Sluijs and A.E. Al Naimi, Cryogenics 16, 161 (1976).
- 8) J. Weber, W. Sandmann, W. Dietsche and H. Kinder, Phys. Rev. Letters 40, 1469 (1978).
- 9) A.C. Anderson and W.L. Johnson, J. Low Temp. Phys. 7, 1 (1972).
- 10) I.M. Khalatnikov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 22, 687, (1952) and Introduction to the theory of superfluidity, Benjamin, New York, 1965.
- 11) L.J. Challis, K. Dransfeld and J. Wilks, Proc. Roy. Soc. London Ser A 260 , 31, (1961).
- 12) R.E. Peterson and A.C. Anderson, J. Low Temp. Phys. 11, 639 (1973).
- 13) H. Haug and K. Weiss, Phys. Lett. A40, 19 (1972).

- 14) J.L. Opsal and G.L. Pollack, Phys. Rev. A9, 2227 (1974).
- 15) D. Cheeke and H. Ettinger, Phys. Rev. Letters 37, 1625 (1976).
- 16) G.L. Pollack, Rev. Mod. Phys. 41, 48 (1969).
- 17) N.S. Snyder, Cryogenics 10, 89 (1970).
- 18) L.J. Challis, Proc. Phys. Soc. 80, 759 (1962).
- 19) J.D.N. Cheeke, Cryogenics 10, 463 (1970).
- 20) D.A. Neeper and J.R. Dillinger, Phys. Rev. 135, A 1028 (1964).
- 21) J.D.N. Cheeke, B. Hébral and C. Martinon, J. Phys. (Paris) 34,
257 (1973).
- 22) J.D.N. Cheeke, B. Hébral and J. Richard, J. Low Temp. Phys. 12,
359 (1973).
- 23) K.C. Rawlings and J.C.A. Van der Sluijs, J. Low Temp. Phys.
(to be published).
- 24) I.N. Adamenko and I.M. Fuks, Sov. Phys. JETP 32, 1123 (1971).
- 25) J.C. Solecki and J.L. Veran, private communication and J.L. Veran,
Thèse de 3e cycle, Université de Grenoble (unpublished) 1977.
- 26) R.C. Johnson and W.A. Little, Phys. Rev. 130, 596 (1963).
- 27) R.C. Johnson, Bull. of the American Physical Society 9, 713 (1964)

- 28) E.S. Sabisky and C.H. Anderson, Phys. Rev. A 7, 790 (1973).
- 29) H.J. Maris, Phys. Rev. B (to be published).
- 30) H. Ettinger, Thèse, Université de Grenoble 1979 (unpublished)
- 31) We define (r_o, t_o) and (r'_o, t'_o) the amplitude reflection and transmission coefficients at normal incidence at the layer / liquid and layer / solid respectively and (R_o, T_o) (R'_o, T'_o) the same quantities for the energy. Assuming incoherent scattering in the layer and hence no interference we find $\beta_{\max} \sim \frac{T'_o}{2} \frac{(1 + R_o)}{(1 - R'_o)}$. On the other hand for long mean free path and multiple interference we have $\beta_{\min} = \frac{T'_o(1 - R_o)}{|1 - r_o r'_o| e^{i\phi}}^2$, ϕ being the round trip phase change. The ratio of the two could be as large as 5 or 10. $\beta_{\max}$ is more likely to be applicable to the high temperature régime (1 - 2K) and $\beta_{\min}$ progressively more appropriate at lower temperatures. An estimate of R_K based on electromagnetic theory (R. Guermeur and C. Jacolin, Jour. Low Temp. Phys. 28, 369, 1977) similar to the approach adopted in the present work also enables a direct calculation of β to be avoided.

LEGENDS TO FIGURES

- Fig. (1) $\alpha_{\ell}(\theta)$ for a LiF/5 Å Solid ^4He at 100 atm/liq. ^4He interface at 290 GHz. The damping parameter ν varies from 0 to 0,5.
- Fig. (2) $\alpha_{t1}(\theta)$ for a LiF/5 Å solid ^4He at 100 atm/liq. ^4He interface at 290 GHz.
- Fig. (3) $\alpha_{t2}(\theta)$ for a LiF/5 Å solid ^4He at 100 atm/liq. ^4He interface at 290 GHz.
- Fig. (4) α_{ℓ} as a function of frequency for a Al_2O_3 /15 Å ice/3,5 Å sol ^4He at 400 atm/3,5 Å solid ^4He at 40 atm/liq. ^4He interface.
- Fig. (5) α_{t1} as a function of frequency at 5° incidence for a Al_2O_3 /15 Å ice /3,5 Å sol. ^4He at 400 atm/3,5 Å solid ^4He at 40 atm/liq. ^4He interface.
- Fig. (6) α_{t1} as a function of frequency at 45° incidence for a Al_2O_3 /15 Å ice /3,5 Å sol. ^4He at 400 atm/3,5 Å sol. ^4He at atm/liq. ^4He interface.
- Fig. (7) α_{t2} as a function of frequency at 5° incidence for a Al_2O_3 /15 Å ice /3,5 Å sol. ^4He at 400 atm /3,5 Å sol. ^4He at 40 atm/liq. ^4He interface. α_{t2} has almost the same values for θ varying from 0° to 45° .

Fig. (8) $R_K T^3$ vs T for a perfectly clean KCl surface. Experiment is from reference (27) and the theoretical curves are calculated for a $KCl/5 \text{ \AA}$ sol. 4He at 100 atm/liq. 4He interface.

Fig. (9) $R_K T^3$ for copper as a function of H_2O layer thickness at different temperatures. The curves were calculated for a copper / ice / $3,5 \text{ \AA}$ solid 4He at 400 atm/ $3,5 \text{ \AA}$ solid 4He at 40 atm/liq. 4He interface.

Fig. (10) $R_K T^3$ for copper as a function of temperature for different thicknesses of H_2O in $\text{\AA}$. The curves were calculated for a copper /ice / $3,5 \text{ \AA}$ solid 4He at 400 atm/ $3,5 \text{ \AA}$ solid 4He at 40 atm/liq. 4He interface. The experimental points are from reference (6).

LEGENDS TO TABLES

Table 1. Comparison of calculations of R_K for a copper surface with $15\text{\AA}$ of ice and H_2 , D_2 and Ne. The experimental values are from reference (5).

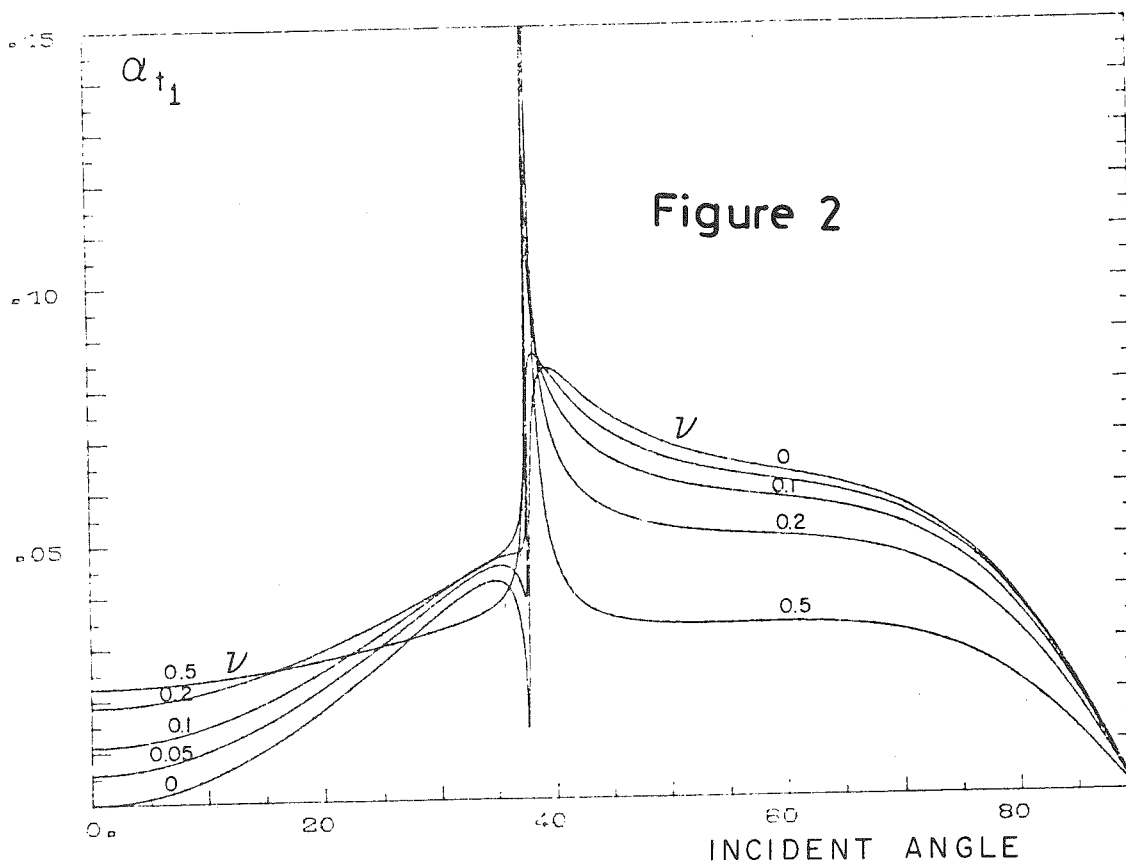
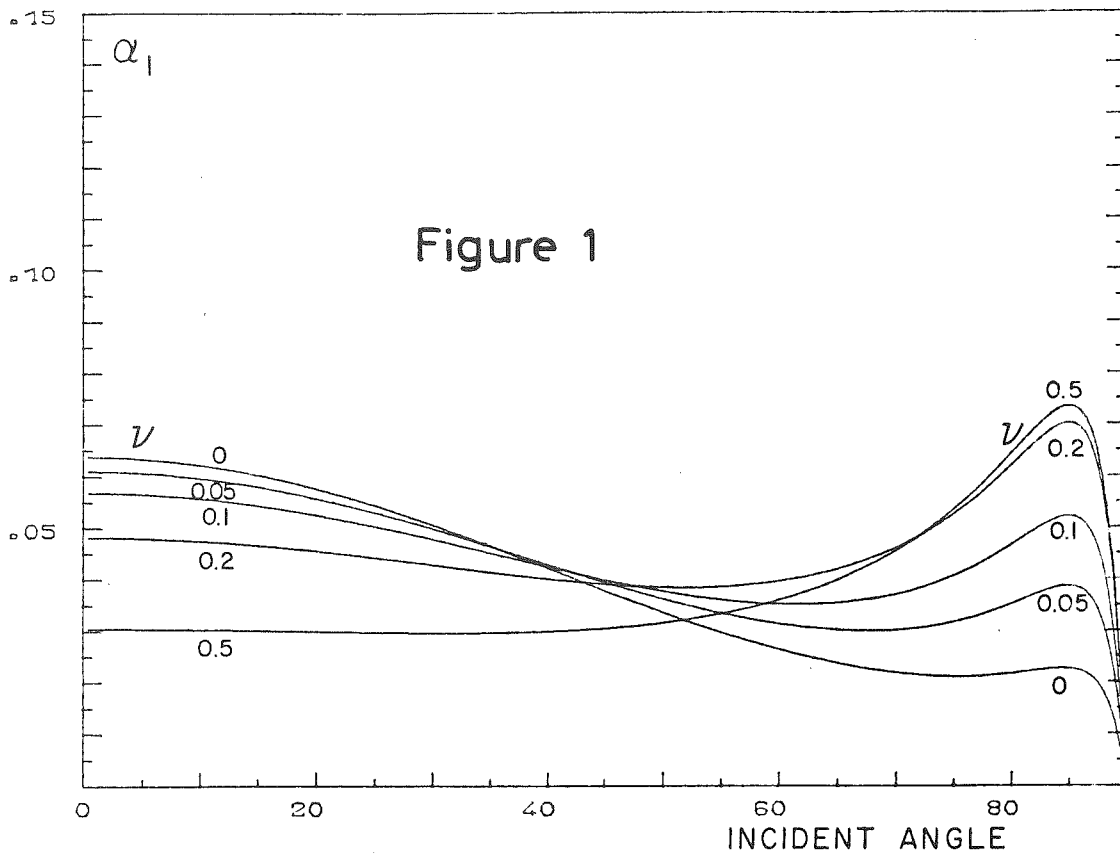
Table 2. Numerical values of parameters used in the calculations.

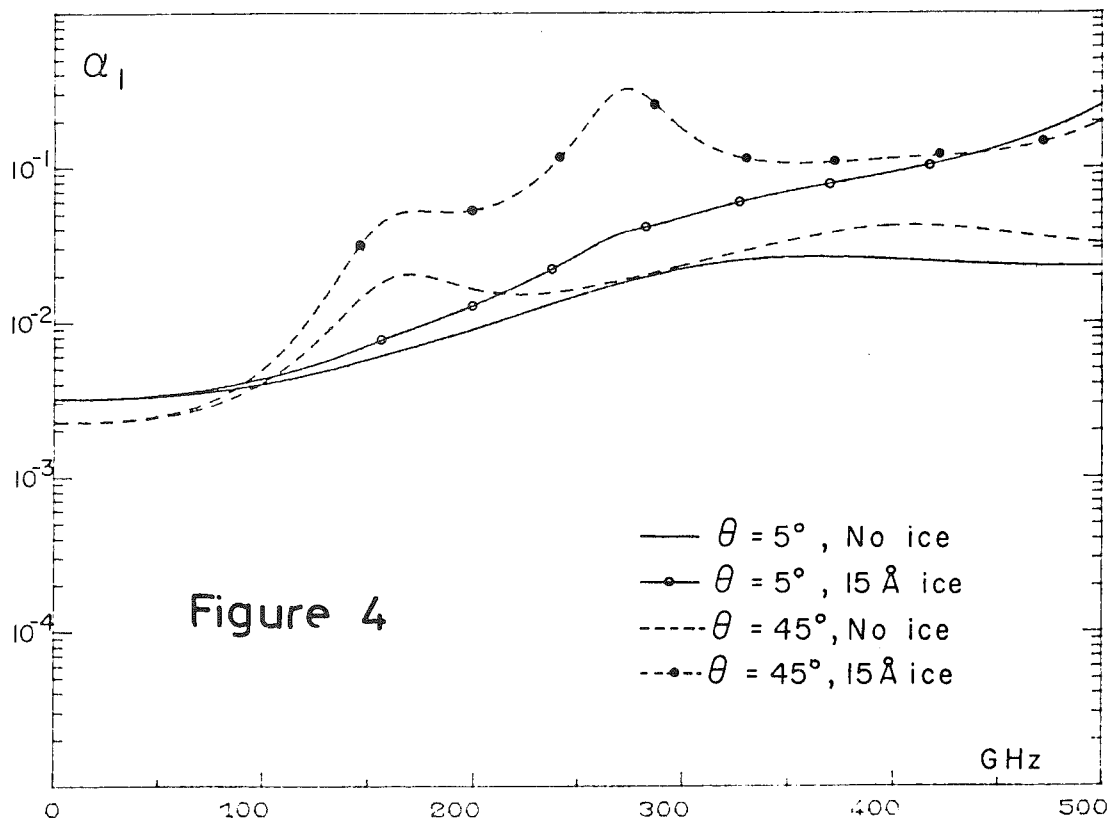
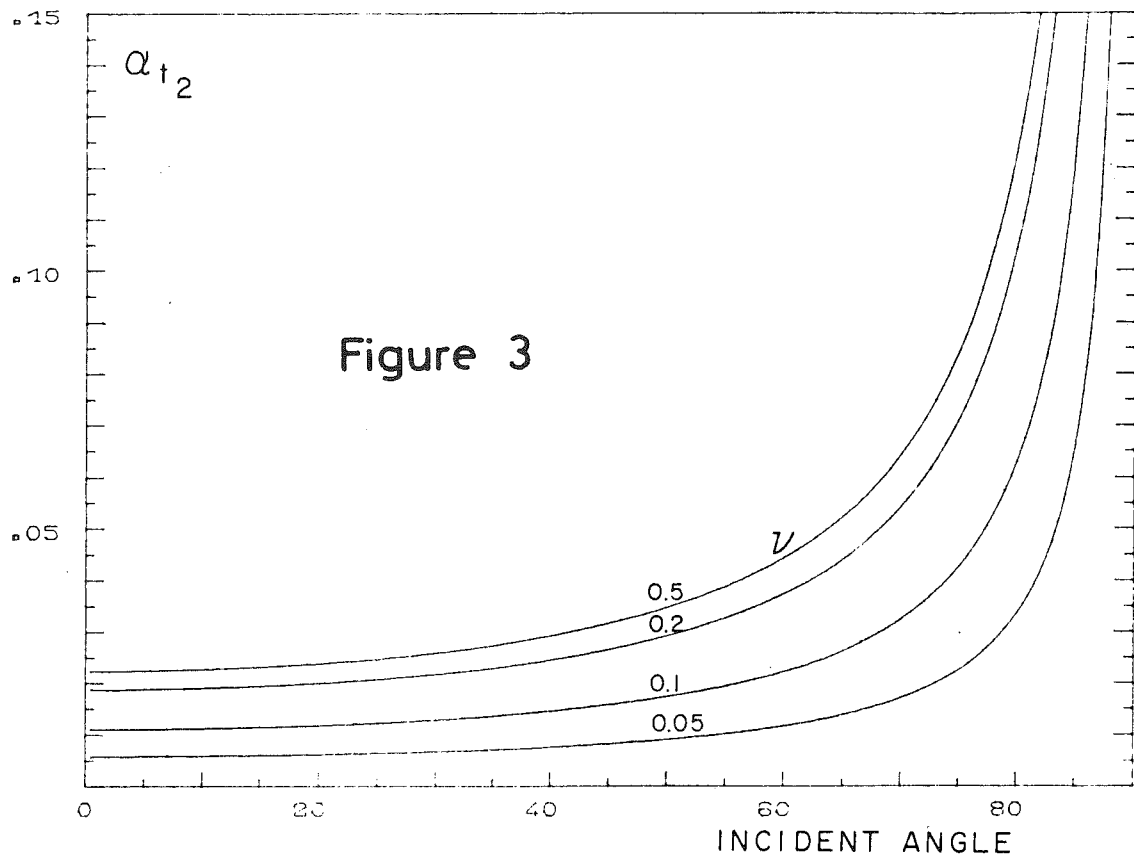
TABLE 1

Interface	Temperature dependance of $R_K T^3$		$R_{K, \text{Khalatnikov}}/R_K$ at $T = 2 \text{ K}$	
	This work	Exp.	This work	Exp.
Cu/H ₂	$T^{-1.6}$	$\sim T^0$	3.8	3.9 - 5.9
Cu/D ₂	$T^{-1.26}$	$\sim T^0$	2.9	3 ± 0.1
Cu/Ne	$T^{-0.21}$	$\sim T^0$	1.25	1.2 ± 0.1

TABLE 2

Material	ρ (g/cm ³)	c (km/s)	b (km/s)
⁴ He (liquid)	0.145	0.24	
⁴ He (40atm)	0.2	0.54	0.27
⁴ He(100 atm)	0.24	0.7	0.35
⁴ He(400 atm)	0.3	1.1	0.6
Ice	0.94	3.8	1.7
LiF	2.65	7.2	4.1
KCl	2	4.09	2.31
Al ₂ O ₃	3.9	11.0	6.04
Cu	9.0	4.8	2.4
H ₂ (4K)	0.0882	1.95	1.15
D ₂ (4K)	0.2	1.78	1
Ne(4K)	1.507	1.13	0.633





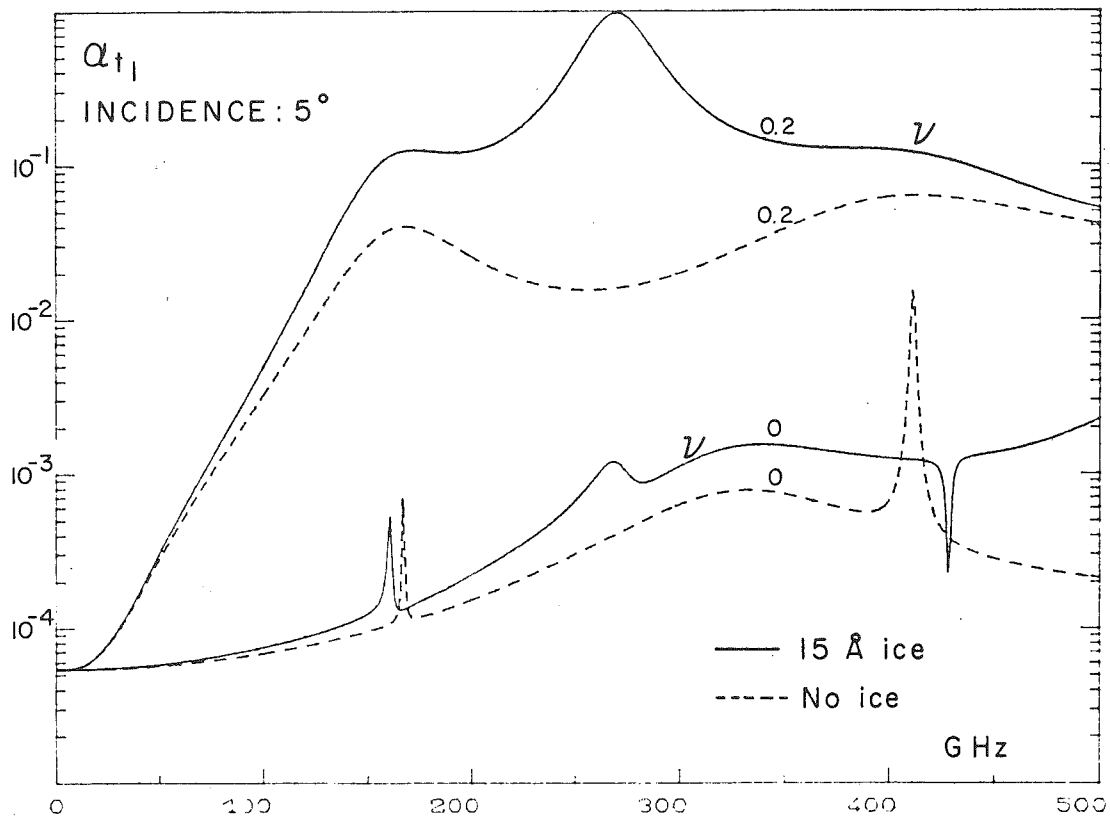


Figure 5

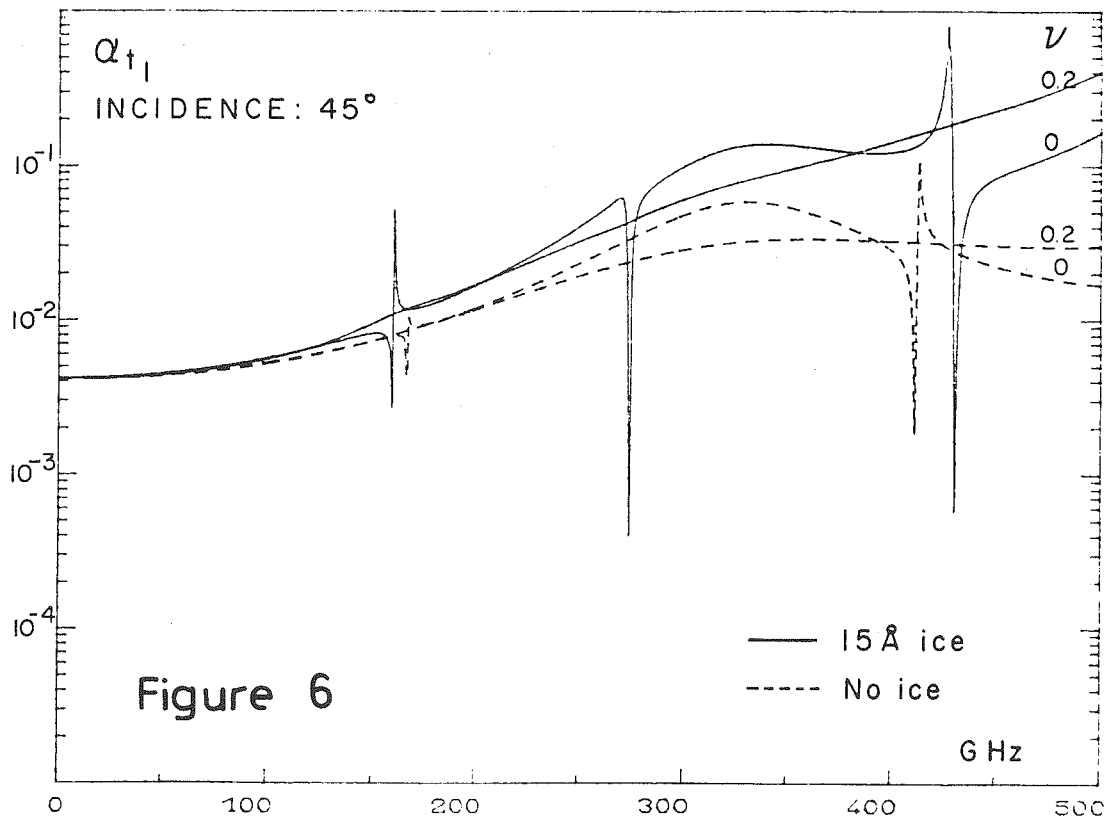


Figure 6

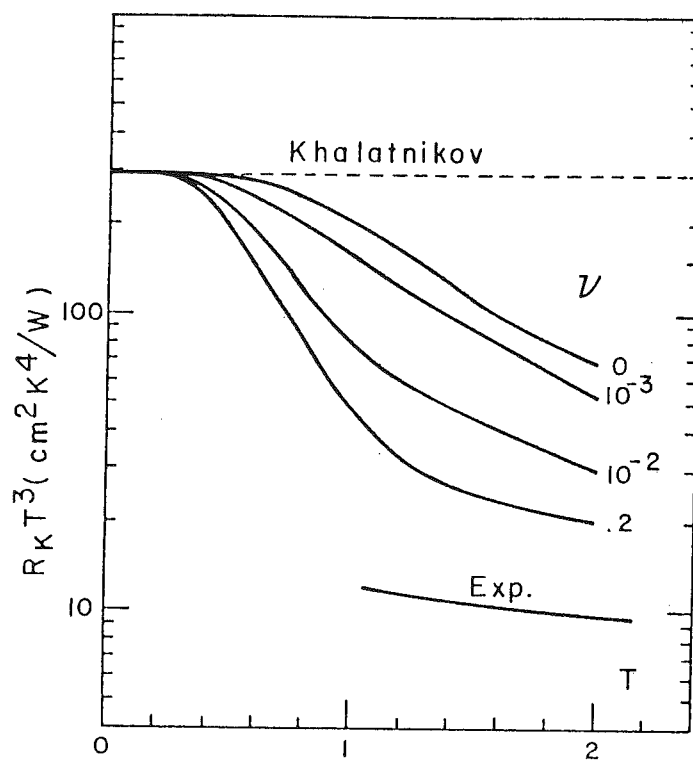
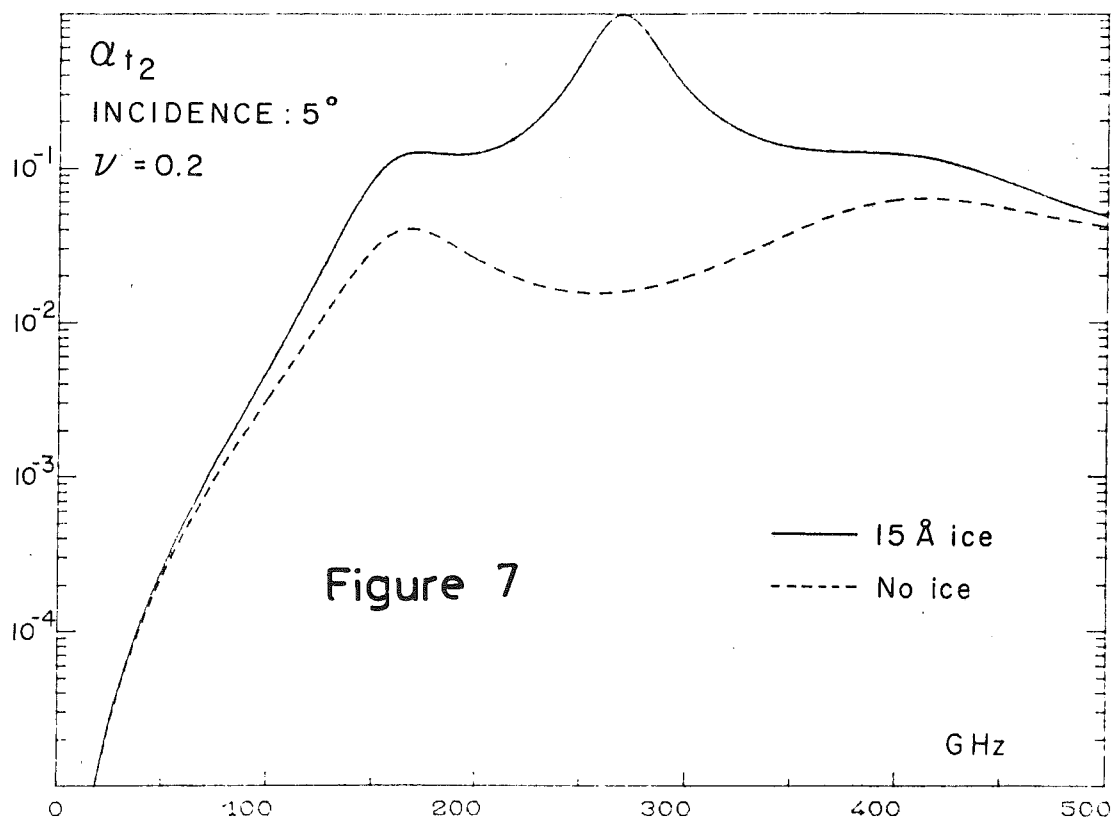


Figure 8

Figure 9

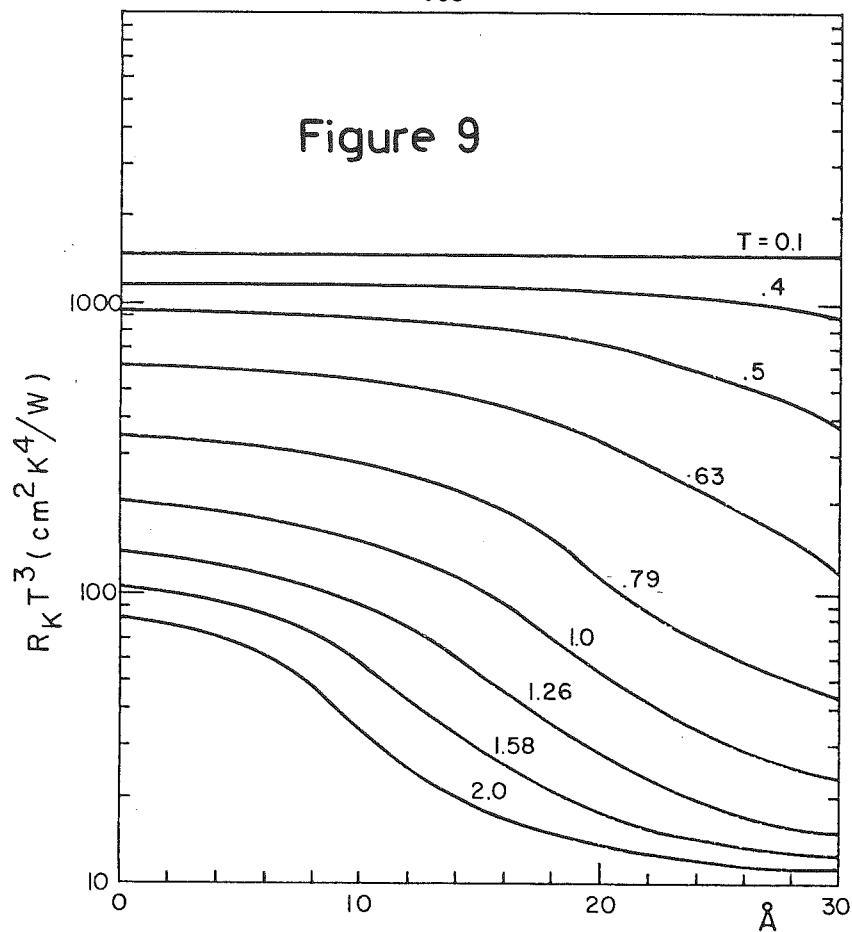
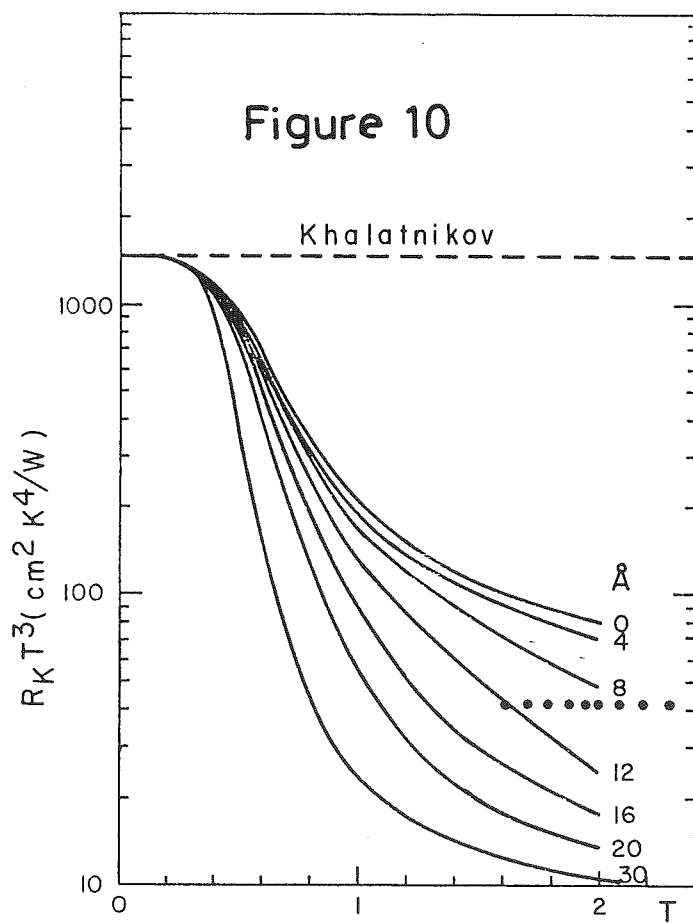


Figure 10



P A R T I E . . I I

ANALYSE D'UN MODÈLE D'ÉCHOS DE POLARISATION POUR UNE POUDRE
PIEZOELECTRIQUE

I N T R O D U C T I O N

Les échos de polarisation que nous allons considérer appartiennent à une famille de phénomènes dont les caractéristiques sont les suivantes : un échantillon est soumis à une première impulsion d'un champ haute fréquence (qui dure typiquement une dizaine de périodes). Un temps τ après, il est soumis à une deuxième impulsion analogue. Un temps τ après, l'échantillon émet spontanément, à la fréquence du champ excitateur une impulsion usuellement appelé e_2 et que nous nommerons écho direct. Cet effet a d'abord été observé pour un système de spins nucléaires, soumis à un champ magnétique, vers 1950.

La théorie quantique du phénomène est assez simple et montre que la deuxième impulsion joue, en quelque sorte, le rôle d'inverser le temps. Les spins qui étaient excités en phase par la première impulsion, se sont déphasés pendant le temps τ . La deuxième impulsion "renversant le temps" fera que ces spins seront de nouveau en phase au temps 2τ , et par suite il y aura émission d'un signal notable.

Depuis lors, des échos analogues ont été observés dans des plasmas, ou avec des photons ou des phonons, dans des milieux monocristallins ou en poudre. Dans tous ces cas, le phénomène a été associé à une non-linéarité des équations du milieu en présence du champ excitateur. Quelque soit le processus "vibratoire" excité par le champ, il relaxe, d'une manière plus ou moins compliquée, mais il est évident que si τ est grand par rapport au temps de relaxation T_2 , toute "mémoire" de la première impulsion est alors perdue, on ne peut avoir d'écho.

Un processus qualitativement nouveau peut être mis en évidence quand on soumet une poudre piézoélectrique à 2 impulsions de champ électrique d'une fréquence voisine de la fréquence propre de vibrations des grains.

Après avoir envoyé les deux impulsions (et avoir obtenu l'écho e_2), on attend maintenant un temps très long par rapport à T_2 . T_2 est de l'ordre de quelques dizaines de microsecondes. Dans certains cas, on a pu attendre plusieurs jours. Alors, une impulsion analogue aux précédentes génère un écho e_3 un temps τ plus tard. Cela signifie donc que l'intervalle de temps τ a été "inscrit" dans la poudre d'une manière stable. Nous appellerons e_3 écho de mémoire.

Il est naturellement nécessaire de faire appel à un processus d'un type différent qu'une relation de phase entre grains vibrants, pour expliquer e_3 . Il est donc tentant de chercher à expliquer les deux échos e_2 et e_3 par le même processus.

En fait, comme pour beaucoup de mesures associées à des temps de relaxation aussi petits, l'expérience réalisée est en général un peu plus compliquée : plutôt que d'envoyer uniquement 2 impulsions, on envoie des trains de deux impulsions, séparés par un temps grand devant T_2 , mais humainement petit (quelques millisecondes, typiquement) et l'appareillage électronique de mesure détermine l'écho par échantillonnage du signal émis par la poudre. On vérifie alors aisément que l'amplitude de e_2 est une fonction croissante du nombre de cycles d'"écriture". L'amplitude e_3 aussi, car, pour des impulsions identiques, elle est pratiquement égale à celle de e_2 . Réciproquement, si on "lit" l'échantillon un grand nombre de fois, sans écriture intermédiaire, e_3 diminue et tend à disparaître. D'autre part, des mesures effectuées avec de l'électronique plus sensible, susceptible de mesurer l'écho e_2 après une seule "écriture", ne mettent pas en évidence e_3 . Ce qui renforce l'idée que la mémorisation est un effet cumulatif.

Un modèle simple a été proposé pour expliquer la rémanence de e_3 , qui doit être inscrite de manière mécanique (stable ou métastable) dans la poudre. Melcher et Shiren ont supposé que les grains piézoélectriques, qui vibraient sous l'effet du champ électrique excitateur, tournaient aussi, sous l'effet du couple créé par ce même champ agissant sur le moment électrique oscillant du grain (surtout pendant la deuxième impulsion).

Cette rotation avait tendance à orienter l'axe principal du grain soit vers le champ, soit perpendiculairement à celui-ci selon que le champ et le moment étaient en phase ou non. Or cette relation de phase est déterminée par la fréquence propre du grain, et par le temps pendant lequel ce grain a vibré librement, c'est-à-dire entre deux impulsions. On assiste donc à une réorganisation des orientations des grains, réorganisation d'autant plus complète que le nombre de cycles de deux impulsions est grand (dans ce modèle, les rotations pour deux impulsions sont d'une fraction de degré). C'est ce "spectre" de grains, quand il est excité par une impulsion, longtemps après, qui pourrait générer l'écho e_3 .

Nous avons développé les calculs relatifs à ce modèle, en gardant les hypothèses simplificatrices de base : essentiellement, assimiler chaque grain à un moment électrique oscillant à une fréquence propre, bien déterminée, et selon une direction rigidement liée au grain. Beaucoup de résultats semblent confirmer la plausibilité de ce modèle, sauf une expérience simple : si le champ excitateur de la 3e impulsion n'est pas dirigé dans la même direction que pour l'"écriture", mais fait un angle θ avec celle-ci, le modèle considéré prévoit une dépendance de l'amplitude de l'écho en $|\cos^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{2}|$, alors que l'expérience montre une dépendance en $\cos^2\theta$, et en particulier plus d'écho si $\theta = 90^\circ$. Il nous paraît un problème encore ouvert de savoir si cela suffit à éliminer ce modèle-qui a l'intérêt d'être physiquement très simple- ou s'il faudrait rechercher des raffinements, en particulier au niveau du modèle de chaque grain. Il est évident, par exemple, qu'avoir un seul axe piézoélectrique rigidement lié au grain est une simplification dont il est difficile de juger de la portée. Réciproquement, le comportement réel d'un grain est probablement trop compliqué pour être exploité directement, même en lui supposant une forme géométrique simple, la piézoélectricité supposant une anisotropie notable du cristal.

Deux publications sont présentées à l'appui de ce travail :

- Orientation dependence of the memory echo in piezoelectric powders,
D. CHEEKE, A.A. LAKHANI et H. ETTINGER,
Solid State Comm. 25, pages 289,291 (1978).
- Aspects théoriques des échos de polarisation pour une poudre piézo-
électrique,
H. ETTINGER, A.A. LAKHANI et D. CHEEKE,
C.J.P. 56, 7, pages 865-71 (1978).

Solid State Communications, Vol. 25, pp. 289-291, 1978. Pergamon Press. Printed in Great Britain

ORIENTATION DEPENDENCE OF THE MEMORY ECHO IN PIEZOELECTRIC POWDERS

David Cheeke and Amir A. Lakhani

Département de Physique, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, P.Q., Canada

and

Henry Ettinger

CRTBT-CNRS, BP 166, 38042 Grenoble, France

(Received 24 August 1977 by MF Collins)

(in revised form 24 Oct. 1977)

Observation of two pulse and memory echos in TeO_2 powder is reported. An electric field rotation experiment on the reading pulse gives a $\cos^2\theta$ dependence of the echo amplitude. This is in apparent disagreement with the predictions of the orientation model.

The echo phenomenon, the coherent reemission by a nonlinear system after absorption of two applied RF pulses, was first observed for nuclear spins¹. Since then, the effect has been observed in plasmas^{2,3}, photons⁴, phonons⁵, magnetic, metallic and superconducting powders⁶ etc. A particularly interesting case, that which concerns us here, is that of polarisation echos in a piezoelectric powder, where long memory times of the order of days or weeks have been observed. An explanation for this observation has been proposed recently in the form of an orientation model for the piezoelectric grains^{7,8}. In this letter, we present results which provide a direct experimental test of this orientation model. We also give a simple phase space description of the echo formation which gives a more clear physical basis to the recent models^{7,8} as well as making contact with older and more general treatments^{2,3,6}. The experiments were carried out on paratellurite (TeO_2), a material which has particularly interesting acoustical and optical properties and which had not previously been studied by the polarisation echo technique.

The experiments were done on laboratory grade TeO_2 powder with an estimated mean grain size $d \approx 50\mu$. The powder was placed between the plates of a condenser to which radio frequency pulses (width 1-5 μsec , RF power 1 - 2 kwatts) in the range 10 - 100 MHz were applied by use of a MATEC 6600 ultrasonic system and a model 70 matching unit. When two pulses (called writing pulses) were applied at $t = 0$ and $t = \tau$ a series of strong echos at times $(n + 1)\tau$ where $n = 1, 2, \dots$ were obtained. The echo height decreased exponentially with τ and was found to give a relaxation time $T_2 \sim 15\mu\text{sec}$ at 300 K and $\sim 100\mu\text{sec}$ at 20 K. A memory echo at time $t = T + \tau$ could easily be obtained, at all temperatures studied, by the application of a third pulse (the reading pulse) at time $t = T$. This memory echo could be observed for periods of up to several days and could be read as often as desired without noticeable decrease of the echo amplitude.

The formation of both the two pulse and memory echo can be described by a simple particle

orientation model^{7,8}. The first pulse sets up mechanical oscillations of the piezoelectric grains at the applied frequency ω and there is an associated oscillatory dipole moment. Melcher and Shiren (MS) have given nonlinear equations of motion for the dipole moment and the angle between the piezoelectric axis and the electric field direction for a system of independent particles³. These equations determine the subsequent motion; following application of the first RF pulse, phase mixing occurs due to the spectrum of natural frequencies of the grains which characterises the powder. The second RF pulse not only changes the amplitude of oscillations of the grains but simultaneously applies a torque. The sense of rotation of each grain is determined by the phase of its dynamic dipole with respect to that of the second RF pulse. Hence, a static pattern of the piezoelectric axes is formed and this pattern can be probed by subsequent RF pulses to give a memory echo.

In order to test the reorientation model, we placed the powder in a thin walled quartz tube which was inserted between the condenser plates. After the termination of the writing pulses, the sample was rotated by angle θ about an axis parallel to the plates and the height and shape of the resulting memory echo (ϵ_3) were studied. The results are shown in figure 1a. in which the number associated with each curve corresponds to the orientation angle. The echo height decreases rapidly as the sample is rotated and reaches a value approximately zero at $\theta = 90^\circ$. Rotation through an angle of 180° results in almost the same echo height as at $\theta = 0^\circ$. The results correspond to a $\cos^2\theta$ variation of the amplitude as shown in fig. 1b. An experiment was also done in which the tube was continuously rotated during the writing sequence; we then find, as expected, that the memory echo is independent of θ . As other observers, we find that a sharp rap, which disturbs the spatial orientation of the grains, is sufficient to destroy the memory echo. All of these results thus provide evidence in favour of the establishment of a static preferred axis in the system.

As an aid to the interpretation of the above results, following the original work of Gould³

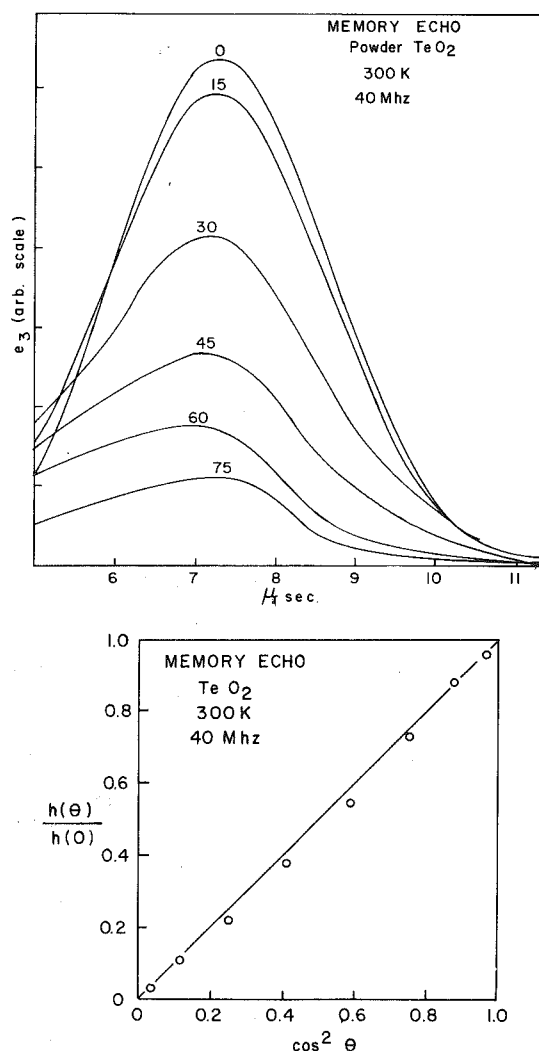


Figure 1. The memory echo as a function of the orientation of the sample between the plates of a condenser. (a) The numbers associated with each curve give the angle of rotation θ , with respect to the position during the writing pulses. (b) Normalized height of the echo versus $\cos^2 \theta$

we give a simple phase space description of echo formation in the context of the MS model. The phase of each dipole with respect to a dipole oscillating at frequency ω (in phase with the first pulse) is given by the angle ϕ . Without loss of generality, we consider a set of dipoles initially oriented in space at the same angle to the RF electric field. Only narrow pulses are considered so that no dephasing occurs within the duration of a pulse.

In fig. 2(a), all elastic dipole oscillators are equally excited and are in phase at $t = 0$ but they quickly become dephased during

$0 < t < \tau$ ($\tau < T_2$) due to their natural frequency spectrum. The numbers around the circle in fig. 2(b) indicate groups of oscillators which have the same phase at a given time t . The second RF pulse at $t = \tau$ (for simplicity assumed to have the same phase as the first one) applies a torque, reorients the grains and consequently imparts different amplitudes to different grains depending on their relative phases as shown in fig. 2(c). At a time τ later the oscillators rebunch to give a net polarisation as in fig. 2(d) resulting in an echo. The reorientation of the grain axis continues during each two pulse sequence until a static distribution of the grain axes is established. The echo height is expected to increase during this writing process; this has been observed by ourselves and other workers.

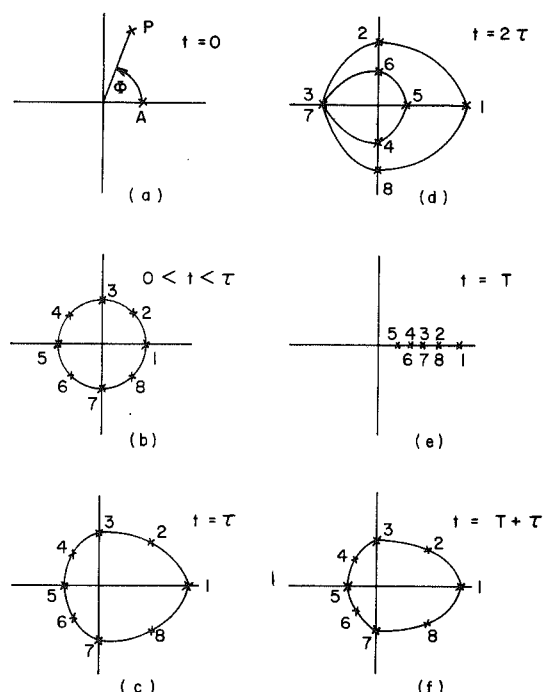


Figure 2. Representation of the system in phase space in the frame of reference of a dipole oscillating at a frequency ω . At a time t each point P in phase space indicates the amplitude as well as the relative phase ϕ of a given dipole. (a) All dipoles have the same phase, 0, and amplitude A after the first pulse; (b) complete phase mixing occurs before the second pulse; (c) after the second pulse; (d) at the time of the first echo the oscillators rebunch and give a net polarization; (e) after the reading pulse and (f) at the time of the memory echo.

The memory echo can be explained in similar fashion. When a third pulse is applied at $t = T$, fig. 2(e), all dipoles are excited in phase but there is now a spectrum in amplitude which reflects their previous static orientation spectrum.

After a time τ , we thus find a memory echo, fig. (2f), in analogy to the two pulse echo of fig. 2(d). The phase space picture can be used to predict the behaviour of the memory echo when the sample is rotated after the completion of the writing sequence. In particular, if we consider the 90° orientation, the third pulse inverts the relative amplitude distribution shown in fig. 2e. For example, the relative positions of group 1 and 5 are interchanged. Such an amplitude distribution would result in a memory echo when $\theta = 90^\circ$.

More quantitative considerations of the MS model lead to the same conclusion. Following (8) we have done a numerical calculation for the two and three pulse echos for a model powder similar to that used by them. As these authors, we find that the dipoles in phase with the second rf pulse are preferentially oriented towards the electric field direction while out of phase dipoles are reoriented towards the plane perpendicular to the field. We would thus expect to see a memory echo in both the $\theta = 90^\circ$ and $\theta = 0^\circ$ directions. This conclusion is confirmed by a computer calculation in which a rotation of axes by 90° is applied to the equations of motion of each grain

for the third pulse. The calculation predicts a 90° echo of half the amplitude of the $\theta = 0^\circ$ echo. Behaviour at intermediate angles is more complicated and will be published elsewhere, but it is in clear disagreement with a $\cos^2\theta$ law. Thus the predictions of a simplified version of the MS theory are in contradiction with experiment.

The MS model has been seen to provide a convenient framework for discussing polarisation echo experiments in piezoelectric powders¹¹. In fact, this model has explained all of the principal observations reported up to now, with the exception of the $\cos^2\theta$ dependence. In order to decide whether it is the simplicity of the model used or the theory itself that is in question, a possible next step would be to consider a more realistic model of a piezoelectric powder, taking into account for example the tensorial nature of the coupling and the excitation of several different acoustic modes in the same grain.

ACKNOWLEDGEMENT - This work was supported by the National Research Council of Canada. We wish to thank Mr. Guy Seguin and Dr. G. Calvarin for doing many of the preliminary experiments.

REFERENCES

1. HAHN, E.L., Phys. Rev. **80**, 580, 1950
2. GOULD, R.W., Physics Letters **19**, 477, 1965.
3. HERMANN, G.F., KAPLAN, D.E., and HILL, R.M., Phys. Rev. **181**, 829, 1969.
4. BREWER, R.G., Physics Today, **30**, 50, 1977.
5. BILLMANN, A., FRENOIS, Che., JOFFRIN, J., LEVELUT, A. and ZIOLKIEWICZ, S., Journal de Physique, **34**, 453, 1973.
6. EHRENFREUND, E., GOLDBERG, I.B. and WEGER, M., J. App. Phys. **39**, 5941, 1968.
7. MELCHER, R.L. and SHIREN, N.S., Phys. Rev. Letters **36**, 888, 1976.
8. WILMS, K., VERTOGEN, G. and SAWATSKY, G.A., Solid State Communications **20**, 1165, 1976.
9. The nonlinearity in the Melcher-Shiren equations of motion is due to the reorientation of the piezoelectric axis during the second pulse. The form of this non-linearity is given explicitly in their eqn (6); no confusion should arise between these terms and the usual non-linear elastic constants.
10. The absence of an echo at 90° was also observed by S.N. Popov, N.N. Krainik and S.A. Smolenskii, JETP Lett. **21**, 253, 1975.
11. It has been suggested (Asadullinet et al, JETP Letters, **22**, 132, 1975) that the creation of a periodic structure of "traps" in the powder could give rise to a memory echo. This idea is clearly based on a holographic memory type mechanism, but it does not seem to be applicable to a powder of insulating grains vibrating at their resonant frequencies.

Aspects théoriques des échos de polarisation pour une poudre piézoélectrique

HENRI ETTINGER

Centre de Recherches sur les Très Basses Températures, CNRS, BP 166 X, 38042 Grenoble Cedex, France

ET

AMIR A. LAKHANI ET DAVID CHEEKE

Département de Physique, Université de Sherbrooke, Sherbrooke (Qué.), Canada

Reçu le 21 février 1978

Une étude théorique des conséquences du modèle Melcher-Shiren pour les échos d'une poudre piézoélectrique est présentée. Le modèle prédit la plupart des résultats expérimentaux sauf les effets de rotation de l'échantillon sur l'écho de mémoire.

A theoretical study of the consequences of the model of Melcher and Shiren for the echos of a piezoelectric powder is presented. This model predicts most of the experimental results, but disagrees with the results of a rotation of the sample on the memory echo.

Can. J. Phys., 56, 865 (1978)

Des échos de polarisation pour diverses poudres piézoélectriques ont été mis en évidence depuis quelques années (1-3).

On soumet l'échantillon à trois impulsions d'un champ électrique de haute fréquence (susceptible de faire résonner les grains) aux temps 0, τ et T . Il y a émission de deux échos, e_2 au temps 2τ et e_3 à $T + \tau$. Alors que l'étude de e_2 en fonction de τ indique des temps de relaxation de la milliseconde ou moins, le temps T atteint, dans certains cas, quelques heures ou quelques jours (3-6). Un phénomène de mémoire aussi stable suppose une méthode d' "écriture" du temps τ dans la poudre suivant un processus statique, c'est-à-dire qui subsiste bien après que tous les grains aient fini de vibrer. Un modèle physique simple, qui considère la réorientation des grains, a été proposé par Melcher et Shiren (7). En utilisant cette idée, nous avons calculé la polarisation d'un échantillon de poudre. Ceci nous permet de bien mettre en évidence que l'orientation sélective des grains crée un spectre en fréquence propre et que c'est ce spectre qui explique les deux échos e_2 et e_3 . De plus, nous montrons que e_2 et e_3 doivent croître avec le nombre de séquences d'écriture, avec une saturation qui s'interprète aisément. Mais les prédictions du modèle sont en opposition avec les résultats de mesures de e_3 quand on fait tourner l'échantillon avant le temps T (8). Nos calculs sont basés sur l'hypothèse, justifiée numériquement et expérimentalement, que les grains tournent d'un angle très petit à chaque impulsion. Cela nous permet de séparer les divers paramètres intervenant dans la formation des échos plus clairement que ne le firent Wilms *et al.* (9) dont le travail était plus numérique.

I. Modèle

Le modèle étudié considère que les grains, qui vi-

brent sous l'influence du champ exciteur, sont orientés par rotation due au couple $\mathbf{p} \times \vec{\mathcal{E}}$, si $\mathbf{p}$ est le moment dipolaire d'un grain. Le sens de cette orientation (vers le champ ou s'écartant du champ) dépend de la phase relative de $\mathbf{p}$ et $\vec{\mathcal{E}}$, laquelle fait intervenir le temps τ pendant lequel les grains ont vibré indépendamment, à leur fréquence de résonance. Par ailleurs, cette rotation une fois effectuée a peu de raison d'être effacée par le temps, si le système reste à l'abri de toute perturbation mécanique, ce qui explique que l'on puisse attendre des heures avant de "lire" le spectre ainsi créé. Les équations proposées par Melcher et Shiren (7) sont, pour un grain donné, de diamètre d et pulsation propre ω_0 :

$$[1] \quad \ddot{p} + \frac{2}{T_2} \dot{p} + \omega_0^2 p = \frac{\gamma \Omega^2 e^2 \bar{a} \mathcal{E} \cos \alpha}{c}$$

$$[2] \quad \ddot{\alpha} + \Gamma \dot{\alpha} = -\frac{\mathcal{E}}{I} p \sin \alpha$$

ou T_2 , le temps de relaxation d'un grain; α , l'angle de $\mathbf{p}$ et $\vec{\mathcal{E}}$; Ω , la pulsation de $\mathcal{E}$; e , la constante piézoélectrique de la poudre; γ , une constante numérique de l'ordre de 1; $\bar{a}$, une moyenne en volume, environ $\frac{1}{2}V$; V , étant le volume du grain; c , l'inverse du module mécanique adéquat; Γ , un coefficient d'amortissement de la rotation; I , le moment d'inertie du grain.

En changeant l'unité de temps $t' = \Omega t$, ce qui revient à normaliser à 1 la pulsation du champ, on obtient:

$$\ddot{p} + \frac{2}{T_2 \Omega} \dot{p} + \left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right)^2 p = \frac{\gamma e^2 \bar{a}}{c} \mathcal{E} \cos \alpha = A \mathcal{E} \cos \alpha$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{T}{\Omega} \dot{\alpha} = -\frac{\mathcal{E} p \sin \alpha}{I \Omega^2} = B \mathcal{E} p \sin \alpha$$

En posant $q = \sqrt{A/B} p$, $E = \sqrt{AB} \mathcal{E}$, $k = T/\Omega$, $\omega = \omega_0/\Omega$ et en considérant $T_2\Omega \gg 1$, on arrive au système entre quantités sans dimensions:

$$[3] \quad \ddot{q} + \omega^2 q = E \cos \alpha$$

$$[4] \quad \ddot{\alpha} + h\dot{\alpha} = -Eq \sin \alpha$$

identique à celui étudié par Wilms *et al.* (9).

II. Résolution des équations

Soit ρ la masse spécifique du matériau piézoélectrique et v la vitesse du son pour le mode considéré

$$\bar{a} \sim \frac{1}{2}V = \pi d^3/12$$

$$I \sim (1/10)d^2V = (\pi/60)\rho d^5$$

$$\Omega \sim \omega_0 \sim \pi v/d$$

$$\rho cv^2 \sim 1$$

Donc,

$$AB = \frac{\gamma e^2 \bar{a}}{I c \Omega} \sim \frac{5\gamma}{\pi} e^2 \sim e^2$$

Par suite $E \sim e\mathcal{E}$. Numériquement, e varie de 2 à 200×10^{-1} cm/V, $\mathcal{E}$ de 10^3 à 10^4 V/cm, ce qui donne une valeur typique de E de l'ordre de 10^{-5} . On peut s'attendre à ce que $|q|$ soit de l'ordre de $|E|$, auquel cas la rotation pendant une impulsion de durée Δ (en temps normalisé) sera de l'ordre de $\delta\alpha \sim |Eq|\Delta/k$ par intégration de l'équation 4.

$\delta\alpha \sim E^2\Delta/k \sim 10^{-10} \Delta/k$, a priori $\delta\alpha \ll 1$. Nous reviendrons sur ce résultat pour le justifier à la fin du calcul. Par suite, nous pouvons résoudre le système [3], [4] en considérant que α varie très peu pendant 1 cycle d'écriture. Ceci correspond bien à l'expérience, qui montre que l'amplitude de e_2 (et de e_3) croît régulièrement si on augmente le nombre de cycles d'écriture, c'est-à-dire de deux impulsions de largeurs Δ séparées par un temps τ , les séquences étant séparées par un temps assez grand par rapport à T_2 .

Dans ces conditions, pour chaque cycle, α sera

considéré comme constant dans [3], qui sera alors résolue analytiquement pour une forme simple de $E(t)$. Nous avons choisi $E = E_0 \sin t$ pendant l'impulsion, 0 en dehors. Cette forme, qui correspond à un créneau rigoureux, est certainement approximative, mais permet de pousser plus loin les calculs formels.

Alors, on obtient

$$[5] \quad q = \cos \alpha E_0 q(t, \omega)$$

L'amplitude q ne dépend plus de α et E_0 , mais seulement du grain (par l'intermédiaire de sa pulsation propre ω) et des paramètres Δ et τ .

Dans la même approximation sur α , [4] s'intègre:

$$k\delta\alpha = -\sin \alpha \cos \alpha E_0^2 \int q \sin t dt$$

l'intégrale ne devant être calculée que pour les intervalles où E est non nul.

$$[6] \quad \delta\alpha = -\sin \alpha \cos \alpha E_0^2 f(\omega)$$

f ne dépend pas de α .

Pour $\delta\alpha \ll 1$, ceci s'intègre pour N cycles à partir d'une valeur α_0 .

$$[7] \quad \text{tg } \alpha = \text{tg } \alpha_0 \exp \left(-\frac{NE_0^2}{k} f \right)$$

Considérons un échantillon de poudre, de volume $\mathcal{V}$, les grains ayant un diamètre moyen d_0 (et donc un volume moyen $V_0 \sim (\pi/6)d_0^3$) et une pulsation propre normalisée répartie à peu près uniformément entre ω_1 et ω_2 .

Le rapport A/B entre p^2 et q^2 vaut

$$\frac{A}{B} = \frac{\gamma e^2 \bar{a} I \Omega^2}{c} \sim (\rho v^2 V_0 e)^2 \frac{\pi^2 \gamma}{20}, \quad p \sim \rho V_0 v^2 e q$$

La polarisation totale de l'échantillon, par raison de symétrie, est dirigée dans la direction du champ et vaut

$$P = \sum p_i \cos \alpha_i \sim \rho V_0 v^2 e \sum q_i \cos \alpha_i$$

$$\sum q_i \cos \alpha_i \sim \frac{\gamma}{V_0} \frac{E_0}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^{\pi/2} \sin \alpha_0 d\alpha_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} q \cos^2 \alpha d\omega$$

$$P(t) \sim \frac{\rho v^2 \mathcal{V} e^2 \mathcal{E}}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^{\pi/2} \sin \alpha_0 d\alpha_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} q(t, \omega) \cos^2 \alpha(\omega) d\omega$$

Cela suppose que l'on s'intéresse à $P(t)$ quand les grains ont fini de tourner.

Grâce à [7], on peut intégrer sur α_0

$$[8] \quad \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha \sin \alpha_0 d\alpha_0 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha_0 d\alpha_0}{1 + u^2 \text{tg}^2 \alpha_0}, \quad u = \exp \left(-\frac{NE_0^2 f(\omega)}{k} \right)$$

g étant une fonction exprimable analytiquement (cf. appendice).

Donc, on arrive au résultat principal;

$$[9] \quad P(t) \sim \frac{\rho v^2 e^2 \chi \mathcal{E}}{\omega_2 - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_2} q(\omega, t) g \left[\exp \left(-\frac{NE_0^2}{k} f \right) \right] d\omega$$

En dehors des impulsions de champ électrique, $q(\omega, t)$ est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation ω , d'amplitude et de phase à l'origine dépendant bien entendu de ω , Δ , τ (et éventuellement la forme réelle des impulsions). $P(t)$ est donné, dans [9] à partir de sa transformée de Fourier. En appendice, nous donnons les formules de q (pour e_2 et e_3) et de f , pour des impulsions "rectangulaires".

III. Analyse des résultats

La fonction f , qui est proportionnelle à la rotation d'un grain pour un cycle, est une fonction oscillante de ω , dont la "période" vaut $2\pi/\tau$. Elle s'amortit pour $|\omega - 1| \gtrsim 2\pi/\Delta$ et ne change plus de signe pour $|\omega - 1| \gtrsim 2\pi/3\Delta$ (fig. 1). Les valeurs extrêmes sont de l'ordre de $\pm \Delta^2/4$. Nous avons vu que f n'intervient que dans le terme $u = \exp(- (NE_0^2/k)f)$. L'argument oscille donc entre $\pm (N/k)(E_0\Delta/2)^2$. Nous allons appeler $S = (N/k)(E_0\Delta/2)^2$ facteur de saturation, pour des raisons qui apparaîtront plus loin.

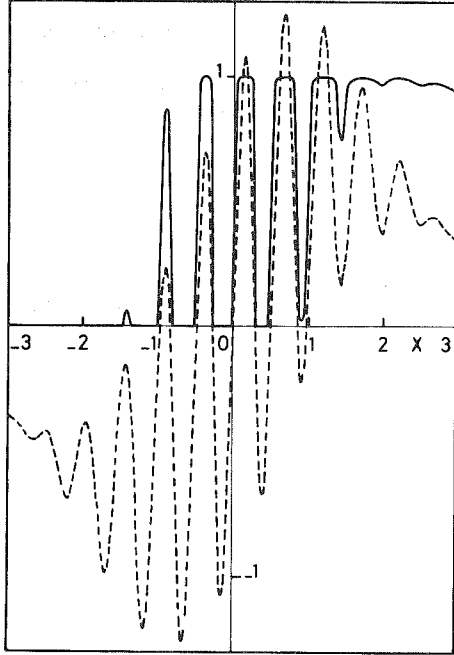


FIG. 1. Rotation normalisée d'un grain après un cycle: $f(2/\Delta)^2$ (---) et fonction $g(\omega)$ (—) après un grand nombre de cycles. $\Delta = 200\pi$, $x = 100\pi(\omega - 1)$, $\tau = 6\Delta$.

Si S est assez grand, presque pour tout ω , u est ou très grand ou très petit, ce qui signifie que l'angle α est ou proche de $\pi/2$ (grain orienté normalement au champ) ou très petit (grain orienté dans le sens du champ). C'est cette structure angulaire fonction de la fréquence propre qui va créer les échos. De manière plus précise, dans la transformée de Fourier de $P(t)$, g vaudra ≈ 1 si $f > 0$, et sera très petit si $f < 0$. Donc, n'interviennent que les grains dont la pulsation propre est telle qu'ils ont tendance à s'aligner sur le champ. Les autres (pour une valeur de S assez grande) ne seront plus polarisés car leur axe sera normal à $\mathcal{E}$. Comme f ne change pas de signe pour $|\omega - 1| \gtrsim 2\pi/3\Delta$, le spectre d'orientation correspond essentiellement à ce domaine.

Rappelons que q n'est pas vraiment proportionnel à la polarisation d'un grain, qui contient le facteur $\cos \alpha$. Donc, même si q est grand, si $\alpha = \pi/2$, le grain n'est pas polarisé. q est proportionnel à la polarisation qu'aurait un grain qui garderait une direction fixe, sans tourner sous l'influence du couple $\mathbf{p} \times \mathcal{E}$.

Pour l'étude de q , nous allons séparer les cas e_2 et e_3 et commencer par le plus simple, à savoir e_3 . C'est également le plus fondamental, puisque le modèle doit expliquer les temps énormes de rémanence de la mémoire.

(A) Echo de mémoire: e_3 (fig. 2)

Après l'impulsion de lecture, q est une fonction sinusoïdale du temps, de pulsation ω , dont l'amplitude varie comme

$$h(\omega) = \frac{\sin(\omega - 1)\Delta/2}{(\omega - 1)\Delta/2}$$

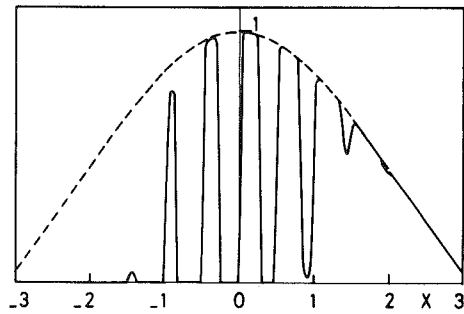


FIG. 2. Amplitude normalisée $2q/\Delta$ (---) et transformée de Fourier de $P(t)$ (—) pour e_3 . $\Delta = 200\pi$, $x = 100\pi(\omega - 1)$, $\tau = 6\Delta$.

(voir appendice). Les phases à l'origine peuvent être annulées par un bon choix de l'origine des temps. $h(\omega)$ varie lentement par rapport à g . En effet, pour $|\omega - 1| \lesssim \frac{2}{3} \pi/\Delta$, h reste compris entre 1 et 0.8 et varie régulièrement. Donc, la transformée de Fourier de $P(t)$ est essentiellement une série de crêteaux de "périodicité" $2\pi/\tau$. Ceci nous donnera des battements, avec amplitude extrême au voisinage de $t = \tau$. Le fait que ces crêteaux sont localisés par $|\omega - 1| \lesssim \frac{2}{3} \pi/\Delta$, donc sur un intervalle de $4\pi/3\Delta$, correspond à une largeur de l'écho de l'ordre de $3\Delta/2$.

(B) *Echo direct: e_2 (fig. 3)*

L'expression de l'amplitude q est plus compliquée, c'est maintenant une fonction oscillante modulant la fonction trouvée dans le cas e_3 . On pourrait penser qu'il y aurait un écho même si les grains ne tournaient pas. En effet, q n'en serait pas modifié et il semble bien être analogue au $g(\omega)$ étudié précédemment. Bien que ce ne soit pas évident sur la figure, il est facile de se convaincre que là aussi, on n'a d'écho que parce qu'il y a rotation des grains. Autrement dit, que $P(t)$ ne présente pas d'amplitude grande au voisinage de $t = \tau$, si on remplace g par une constante. Cela peut se faire analytiquement ou numériquement mais surtout il suffit de considérer qu'alors, les équations 3 et 4 se résument à l'équation 3, linéaire, et qu'il faut un phénomène non linéaire pour donner naissance à un écho.

Les calculs numériques conduisent à un écho e_2 d'amplitude approximativement égale à celle de e_3 .

(C) *Effets de saturation*

On sait, aussi bien sur le plan expérimental que théorique, que les effets des cycles consécutifs sont cumulatifs, ce qui est une caractéristique de ce type d'échos (5, 10). De plus, l'étude de la croissance en fonction du nombre de séquences de e_2 , aisément mesurable sur un oscilloscope, permettrait de donner un ordre de grandeur au *seul* paramètre très mal déterminé, à savoir k , correspondant à l'amortissement de la rotation des grains. Nous avons vu que la rotation d'un grain après N cycles fait intervenir $\exp(-NE_0^2 f/k)$ et que f varie entre $\pm(\Delta/2)^2$. Le calcul numérique montre (fig. 4) que l'écho croît avec N jusqu'à ce que le facteur S vaille 4 ou 5, et sature ensuite (ce qui explique le nom choisi). Pratiquement, la croissance de l'écho, mesurée, s'étend sur plusieurs milliers de cycles. C'est une assurance de cohérence interne du modèle, à savoir $\delta\alpha \ll 1$ pour un cycle. Une autre conséquence de ce calcul est que e_2 et e_3 sont pratiquement identiques, ce qui correspond bien, aussi, à l'expérience.

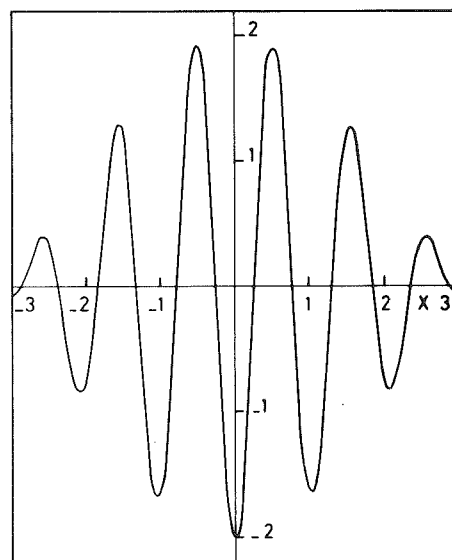


FIG. 3. Amplitude normalisée $2q/\Delta$
 $x = 100\pi(\omega - 1)$, $\tau = 6\Delta$.

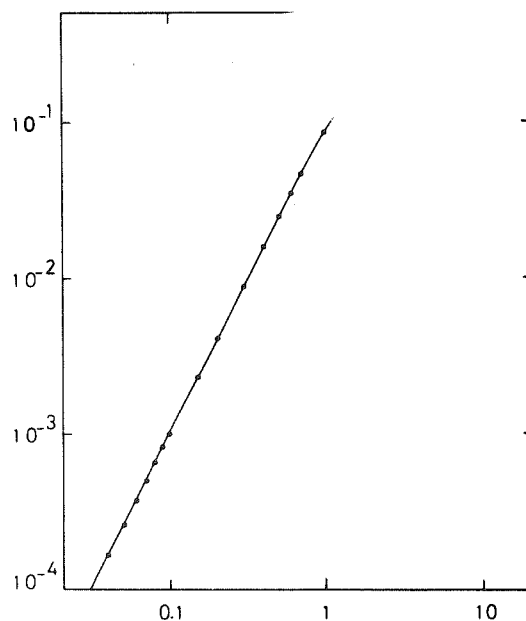


FIG. 4. Énergie de e_3 en fonction de S , qui est proportionnel au nombre de cycles d'écriture.

Ceci est montré pour un cas particulier dans la fig. 5, où on représente les échos e_2 et e_3 calculés à partir du modèle. Pour e_3 , on montre un écho loin de saturation ($S \sim 1.5$) et l'écho d'amplitude plus grande presque saturé ($S \sim 10$).

IV. Rotation de l'échantillon

Nous avons mesuré la variation de l'amplitude de e_3 , quand l'échantillon est tourné d'un angle θ autour d'un axe normal au champ $\vec{e}$ entre l'inscription et la lecture (8).

Considérons que $\vec{e}$ est dirigé suivant Oz , et que l'axe d'un grain est repéré par les angles polaires (α_0, ϕ) avant toute impulsion (fig. 6). Après N cycles de deux impulsions, il sera dirigé suivant (α, ϕ) . On tourne maintenant l'échantillon d'un angle θ autour de Ox . α devient α' , avec

$$\begin{aligned} \cos \alpha' &= \cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \phi \sin \theta \cos \alpha' \\ &= \cos^2 \alpha \cos^2 \theta \sin^2 \alpha \sin^2 \phi \sin^2 \theta + \frac{\sin 2\alpha \sin 2\theta \sin \phi}{2} \end{aligned}$$

Il faut donc remplacer $g(\omega)$ par

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha' \sin \alpha_0 d\alpha_0 &= g_R(\omega, \theta) \\ g_R(\omega, \theta) &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{2} \cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \alpha}{2} \sin^2 \theta \right) \sin \alpha_0 d\alpha_0 \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha \left(\cos^2 \theta - \frac{\sin^2 \theta}{2} \right) \sin^2 \alpha_0 d\alpha_0 + \frac{\sin^2 \theta}{2} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{2} + \left(\cos^2 \theta - \frac{\sin^2 \theta}{2} \right) g(\omega) \end{aligned}$$

Comme nous l'avons vu précédemment, prendre une valeur constante pour g ne donne lieu à aucun écho.

Par suite, e_3 sera uniquement dû à la partie de $g_R(\omega, \theta)$ proportionnelle à $g(\omega)$, et son amplitude doit varier comme $|\cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta|$.

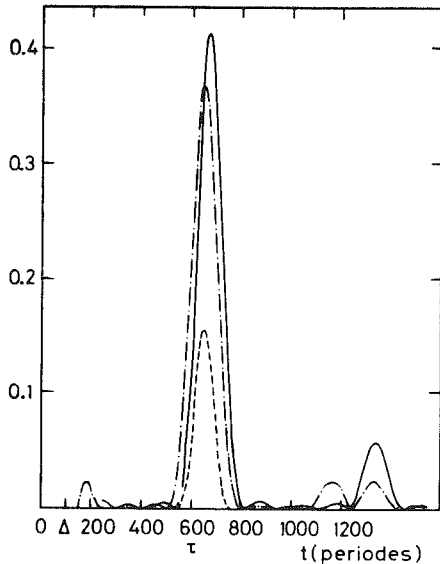


FIG. 5. Energie des échos e_2 et e_3 . ---- e_3 , — e_2 pour une saturation des orientations ($S = 10$), --- pour e_3 non saturé ($S = 1.5$). Les petites oscillations ("ringing") sont dues à une annulation de phase incomplète, ce qui est caractéristique d'un système d'un petit nombre de grains.

Cette fonction décroît de 1 à 0 quand θ varie de 0 à $\arctg \sqrt{2}$, et croît de nouveau jusqu'à 0.5 pour $\theta = \pi/2$ (fig. 7).

Ce comportement n'est pas vérifié par l'expérience qui montre une décroissance monotone (approximativement comme $\cos^2 \theta$) quand θ croît, et pas d'écho e_3 notable pour $\theta = \pi/2$ (8).

V. Conclusion

En conclusion, nous avons vu qu'une théorie basée sur la notion d'une réorientation des particules de poudre peut expliquer beaucoup, mais pas toutes, des propriétés observées des échos de polarisation. En particulier le modèle le plus simple imaginable,

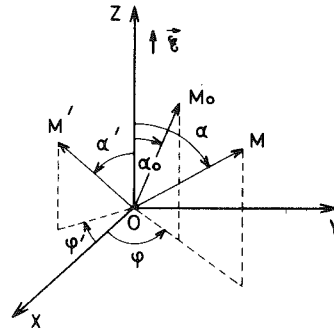


FIG. 6. Angles polaires de l'axe du grain. L'axe est suivant OM_0 avant toute impulsion, suivant OM après "écriture", suivant OM' après rotation de l'échantillon. θ est l'angle entre les plans xOM et xOM' .

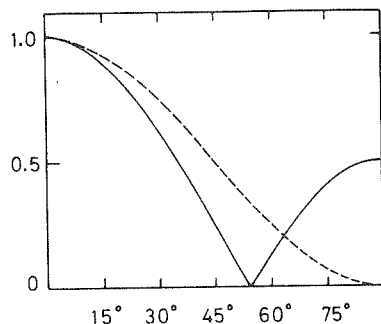


FIG. 7. Amplitude de e_3 en fonction de l'angle de rotation de l'échantillon: — d'après le modèle, --- d'après les résultats expérimentaux.

celui proposé par Melcher et Shiren (7), peut expliquer en détail les observations suivantes: (1) L'existence de e_2 et e_3 . (2) Les temps de mémoire T_1 infiniment longs. (3) Les effets de saturation. (4) Effacement de e_3 par vibration ou compaction de la poudre, ou l'imprégnation de la poudre d'une circ. (5) Observation de e_3 dans une poudre mais pas dans le milieu cristallin correspondant.

Par contre, ce modèle simplifié ne peut pas expliquer le comportement observé pour e_3 pendant une rotation de l'échantillon. Il faudrait alors chercher à raffiner ce modèle avant de conclure que la théorie de réorientation elle-même est fautive. Nous voyons quelques possibilités à cet égard. D'abord, pour une poudre cristalline et non-isotrope, l'interaction sera obligatoirement tensorielle de nature et pas uniaxiale comme c'est supposé par Melcher et Shiren (7). De plus, même pour des grains quasi-sphériques, il existerait de nombreux modes résonants acoustiques. Les effets conjugués de l'anisotropie du tenseur piézo-électrique et les modes acoustiques devraient nous donner des grains d'un comportement passablement compliqué. Il faudrait aussi tenir compte des effets dépolarisants pour déterminer le champ électrique effectif agissant sur chaque grain. Il est possible que des modifications au modèle de ce genre pourraient expliquer l'écart entre le modèle Melcher-Shiren et l'expérience trouvée ici, mais ceci est manifestement une modification majeure qui dépasse le cadre du travail présent.

1. A. R. KESSEL, I. A. SAFIN et A. M. GOLDMAN, *Fiz. Tverd. Tela*, **12**, 3070 (1970); *Trad. angl. Sov. Phys. Solid State*, **12**, 2488 (1971).
2. CH. FRENOIS, J. JOFFRIN et A. LEVELUT, *J. Phys. (Paris)*, **35**, L.221 (1974).
3. R. L. MELCHER et N. S. SHIREN, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 731 (1975).
4. S. N. POPOV, N. N. KRAINIK et G. A. SMOLENSKII, *JETP Lett.* **21**, 253 (1975).
5. V. M. BEREZOV, YA YA. ASADULLIN, V. D. KAREPANOV et

V. S. ROMANOV, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **69**, 1674 (1975);

Trad. angl. Sov. Phys. JETP, **42**, 851 (1976).

6. G. A. SAWATZKY et S. HUIZINGA, *Appl. Phys. Lett.* **28**, 476 (1976).

7. R. L. MELCHER et N. S. SHIREN, *Phys. Rev. Lett.* **36**, 888 (1976).

8. J. D. N. CHEEKE, A. A. LAKHANI et H. ETTINGER, *Solid State Commun.* **25**, 289 (1978).

9. K. WILMS, G. VERTOGEN et G. A. SAWATZKY, *Solid State Commun.* **20**, 1165 (1976).

10. S. KUPCA et C. W. SEARLE, *Proc. IEEE, Ultrasonics Symposium*, Annapolis, MD, 1976, p. 618.

Appendice

Pour simplifier les formules, nous avons considéré des impulsions identiques, de durée normalisée $\Delta = 2\pi$, du type $E = E_0 \sin t$, $0 < t < \Delta$. La deuxième impulsion commence au temps τ . Les équations à résoudre sont:

$$[A1] \quad q + \omega^2 q = E/E_0$$

$$[A2] \quad f = \int q(E/E_0) dt$$

Pour $\omega = 1$, les formules qui suivent deviennent indéterminées et ne sont donc pas utilisables directement (pour un ordinateur, par exemple). Mais les fonctions q , f , g , etc, sont continues pour $\omega = 1$, qui ne nécessite aucune étude spéciale. Le choix de la valeur de Δ (n périodes du champ) peut masquer certaines symétries des formules. Ainsi, $\sin 2\pi n\omega = \sin 2\pi n(\omega - 1)$ et $|\sin \pi n\omega| = |\sin \pi n(\omega - 1)|$. Pendant une impulsion:

$$q = \frac{1}{\omega^2 - 1} \left(\sin t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right) + q_0 \cos \omega t + \dot{q}_0 \frac{\sin \omega t}{\omega}$$

si q_0 et $\dot{q}_0$ sont les valeurs de q et $\dot{q}$ pour $t = 0$, pris comme début de l'impulsion.

En l'absence de champ exciteur,

$$q = q_0 \cos \omega t + \dot{q}_0 \frac{\sin \omega t}{\omega}$$

en prenant pour origine des temps la fin de l'impulsion, et q_0 et $\dot{q}_0$ les valeurs correspondantes.

Après quelques calculs simples, on en déduit que, pour un cycle de deux impulsions:

$$[A3] \quad f = \frac{2}{\omega^2 - 1} \left(\pi n - \frac{\sin \pi n \omega}{\omega(\omega^2 - 1)} \right) \times (\cos \pi n \omega - \sin \pi n \omega \sin \omega \tau)$$

et que, en prenant chaque fois pour origine des temps le milieu de la dernière impulsion précédent l'écho,

ETTINGER ET AL.

$$[A4] \text{ pour } e_2: q = \frac{-2}{\omega(\omega^2 - 1)} \times (\cos \omega(t + \tau) + \cos \omega t) \sin \pi n \omega$$

$$[A5] \text{ pour } e_3: q = \frac{2}{\omega^2 - 1} \sin(\pi n \omega) \cos \omega t$$

L'étude faite plus haut montre que toute intégrale en ω de ces fonctions peut être limitée à $|\omega - 1| \lesssim 1/n$. Enfin, la fonction

$$g(u) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha_0 d\alpha_0}{1 + u^2 \tan^2 \alpha_0} \quad Y = \frac{u}{\sqrt{|1 - u^2|}}$$

vaut:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 - u^2} \left(1 - \frac{\arctg Y}{Y} \right) \quad \text{si } 0 < u < 1 \\ & \frac{1}{1 - u^2} \left(\frac{\text{Arg Th } Y}{Y} - 1 \right) \quad \text{si } u > 1 \\ & \frac{1}{3} \quad \text{si } u = 1 \end{aligned}$$

Pour mieux mettre en évidence les approximations à faire, nous allons poser:

$$y = \omega - 1, \quad x = n\pi y$$

n est assez grand (la valeur numérique utilisée est 100), donc $y \ll 1$. Nous prendrons aussi τ multiple de 2π . Nous obtenons:

$$[A6] \text{ pour } e_2: q \sim -\frac{2\pi n \sin x}{x} \cos \frac{y\tau}{2} \times \cos \left(\omega t + \frac{y\tau}{2} \right)$$

$$[A7] \text{ pour } e_3: q \sim \frac{\pi n \sin x}{x} \cos(1 + y)t$$

$$[A8] \quad f \sim \frac{\pi^2 n^2}{x} \left| 1 - \frac{\sin x}{x} (\cos x - \sin x \sin \tau y) \right|$$

Pour étudier l'évolution de la polarisation, nous avons calculé:

$$[A9] \quad W(t_0) = \left| \frac{1}{b} \int_{t_0-b}^{t_0+b} e^{it} dt \int q g d\omega \right|^2$$

$P(t)$ étant essentiellement une fonction sinusoïdale de pulsation 1 modulée, W est proportionnel à l'énergie moyenne que recevrait un récepteur, pendant l'intervalle de temps $t_0 - b, t_0 + b$, à condition que le récepteur possède une bande passante $\Delta\omega/\omega$ au moins de l'ordre de π/b . L'intérêt de cette méthode est qu'elle nous donne le profil de l'énergie émise en calculant quelques valeurs de W , chaque valeur correspondant à un calcul (pour l'ordinateur) du même ordre de grandeur que celui d'une valeur de $P(t)$. Comme P est rapidement oscillant, si on voulait étudier directement P , il faudrait prendre des valeurs de t séparées par une fraction de la période du champ électrique, c'est-à-dire ici calculer plusieurs centaines de points pour un écho. Nous avons pris $b = 20\pi$, $\Delta = 10b$. En intégrant t , en tenant compte de ce que $d\omega = dx/\pi n$ et $\sin b = 0$, nous obtenons:

$$\text{pour } e_2: W \sim \left| \int 2 \frac{\sin x}{x} \cos \left(\frac{\tau y}{2} \right) \frac{\sin yb}{yb} \times e^{iy(t_0 + \tau/2)} g(u) dx \right|^2$$

$$\text{pour } e_3: W \sim \left| \int \frac{\sin x}{x} \frac{\sin yb}{yb} g(u) e^{iyt_0} dx \right|^2$$

Pour les valeurs de x considérées ($|x| \lesssim \pi$) ($\sin yb)/yb$ reste compris entre 1 et 0.96, et varie régulièrement. On peut donc omettre ce facteur sous l'intégrale.

Après divers essais, nous avons choisi $x_0 = 3$. Les parties négligées des intégrales correspondant à $3 < |x| < 20$ donnent une correction de 1 à 2% seulement. De fait $\sim 90\%$ de la valeur de W , donc la quasi-totalité de la polarisation est due aux grains tels que $|x| < 1.5$.