

THÈSES

présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE D'INGENIEUR-DOCTEUR

par

Denis DESCAMPS

Licencié ès Sciences, Ingénieur E.N.S.R.G.

900
(043).0.1.
1368
1

Centre National de la Recherche
Scientifique
Laboratoire d'Électrostatique
et de Physique du milieu
Centre de recherches sur les
très basses températures
- BIBLIOTHÈQUE -

1^{re} THESE

Etude et réalisation d'un amplificateur Maser

2^e THESE

APERÇUS SUR LES DÉTECTEURS INFRA-ROUGES

soutenues le 27 janvier 1962 devant la Commission d'examen

MM. L. NEEL Président

J. BENOIT
M. SOUTIF } Examineurs
Y. AYANT }

To 170
1962 / DI

THESES

présentées à la
Faculté des Sciences de l'Université de Grenoble
pour obtenir
le grade d'Ingénieur-Docteur

par

Denis DESCAMPS

Licencié-ès-Sciences, Ingénieur E.N.S.R.G.

Première Thèse

ETUDE ET REALISATION D'UN AMPLIFICATEUR MASER .

Deuxième Thèse

LES DETECTEURS INFRAROUGES.

soutenues le janvier 1962 devant la commission d'examen.

Jury

Monsieur L. NEEL	Président
Messieurs J. BENOIT M. SOUTIF Y. AYANT	} Examineurs

UNIVERSITE DE GRENOBLE
FACULTE DES SCIENCES.

Doyen : Monsieur L. WEIL Thermodynamique

Professeurs.

MM.	F. WOLFERS	Physique Expérimentale
	L. NEEL	Physique Expérimentale, Membre de l'Institut
	A. DORIER	Zoologie
	R. HEILMANN	Chimie Organique
	J. KRAVTCHENKO	Mathématiques
	Cl. CHABAUTY	Calcul Différentiel et Intégral
	M. PARDE	Hydrologie Fluviale
	J. BENOIT	Radioélectricité
	M. CHENE	Chimie Papetière
	J. BESSON	Chimie Minérale
	L. WEIL	Thermodynamique
	N. FELICI	Electrostatique
	J. KUNTZMANN	Mathématiques Appliquées
	R. BARBIER	Geologie Appliquée
	L. SANTON	Mécanique des Fluides
	P. OZENDA	Botanique
	M. FALLOT	Physique Industrielle
	O. GALVANI	Mathématiques
	A. MOUSSA	Chimie Nucléaire et Radioactivité
	Ph. TRAYNARD	Chimie Générale
	M. SOUTIF	Physique Générale
	A. CRAYA	Mécanique
	G. REEB	Mathématiques
	R. REULOS	Physique
	Y. AYANT	Physique Théorique
	F. GALLISSOT	Mathématiques
Mlle	E. LUTZ	Mathématiques
MM.	M. BLAMBERT	Mathématiques
	R. BOUCHEZ	Physique Nucléaire
	L. LLIBOUTRY	Géophysique et Glaciologie
	R. MICHEL	Géologie
	E. BONNIER	Electrochimie
	G. DESSAUX	Physiologie Animale
	E. PILLET	Electrotechnique

Professeurs sans Chaire.

MM.	R. SILBER	Mécanique des Fluides
	J. MOUSSIEGT	Electronique
	J.Cl. BARBIER	Physique
	M. BUYLE-BODIN	Electronique

Professeurs sans Chaire.

M. R. PAUTHENET Electrotechnique
Mme L. KOFLER Botanique

Maîtres de Conférences.

MM. F. VAILLANT Zoologie
B. DREYFUS Thermodynamique
Mme L. LUMER Mathématiques
MM. R. PERRET Servomécanisme
P. ARNAUD Chimie
Mme M.J. BARBIER Electrochimie
MM. P. BRISSONNEAU Physique
J. COHEN Electrotechnique
J. DEBELMAS Géologie
Mme J. SOUTIF Physique
MM. B. VAUQUOIS Mathématiques Appliquées
R. DEPASSEL Mécanique
R. GERBER Mathématiques
A. ROBERT Chimie Papetière
ANGLES D'AURIAC Mécanique des Fluides
J.P. BIAREZ Mécanique Physique
A. COUMES Electronique
J. DODU Mécanique des Fluides
P. DUCROS Minéralogie et Cristallographie Physique
P. GIDON Géologie et Minéralogie
R. GLENAT Chimie
G. HACQUES Calcul Numérique
R. LANCIA Physique Automatique
J. Cl. PEBAY-PEYROULA Physique
A. GASTINEL Mathématiques Appliquées
A. LACAZE Thermodynamique
Mme J. KAHANE Physique
MM. Ch. DEGRANGE Zoologie
D. GAGNAIRE Chimie Papetière
A. RASSAT Chimie
J. KLEIN Mathématiques
P. BETHOUX Mathématiques Appliquées
M. POLOUJADOFF Electrotechnique

Secrétariat Principal.

M. MONTAGNAT

Le travail présenté dans ce document a été effectué au laboratoire
de la Société Alsacienne de Constructions Mécaniques, en vertu du
contrat d'études et recherches
du Service Technique des Télécommunications de l'Air
n° 8662 59/SITA/SRE

Ce travail est extrait de résultats obtenus au cours d'une étude faite par la Société Alsacienne de Constructions Mécaniques - E.N.T.E. - . Je tiens en premier lieu à remercier son Directeur Général, Monsieur R. JULIA qui a bien voulu me permettre de présenter cette Thèse, qu'il trouve ici l'expression de toute ma gratitude.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur le Professeur L. NEEL, Membre de l'Institut, qui a accepté de présider le Jury d'examen.

Que Monsieur le Professeur J. BENOIT qui me communiqua le goût des hyperfréquences et qui a bien voulu examiner ce travail, soit ici remercié.

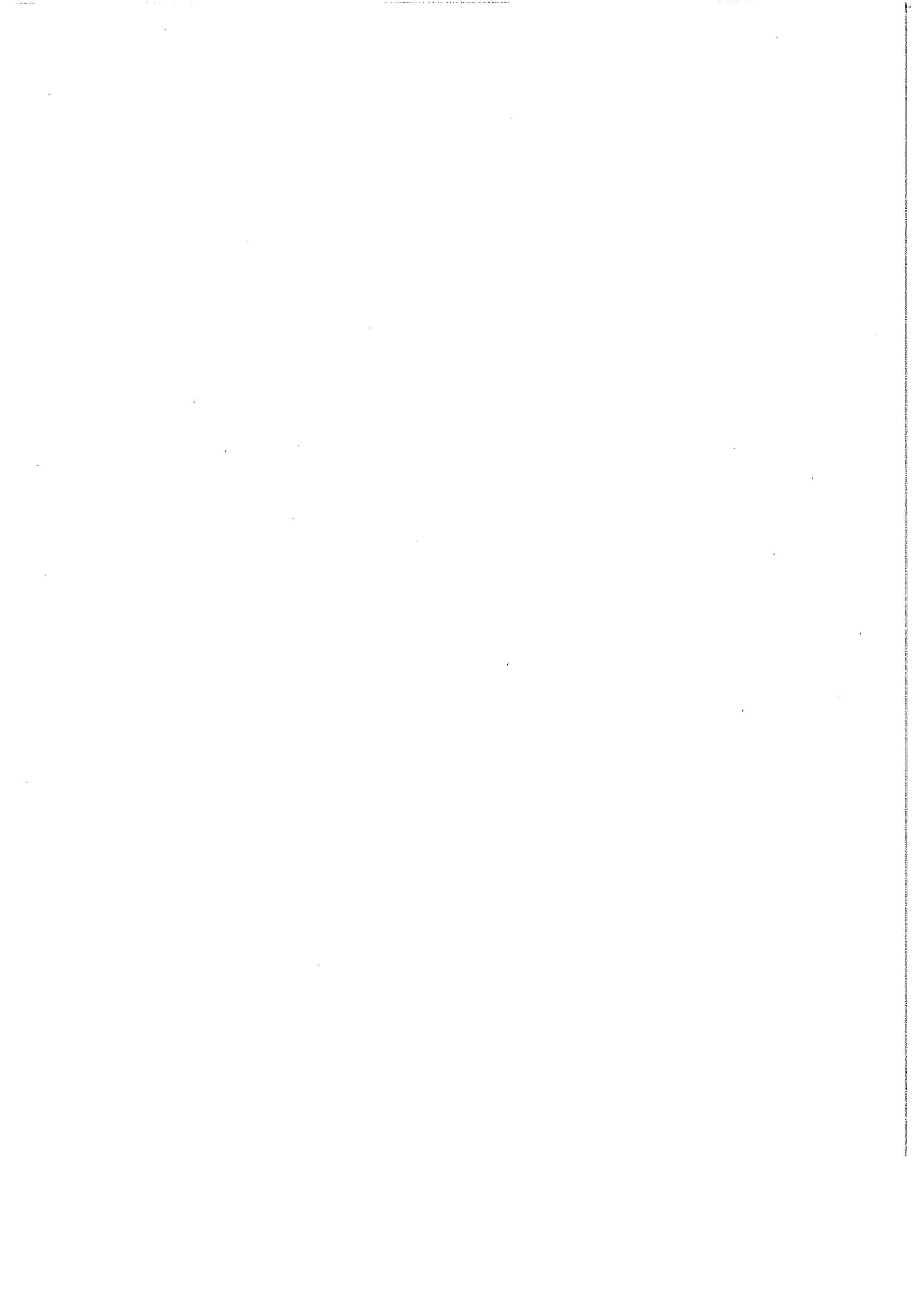
Cette étude a été réalisée dans les laboratoires et sous la direction de Monsieur le Professeur M. SOUTIF, c'est dire l'intérêt qu'il y a pris. Je tiens à l'assurer de ma reconnaissance.

Que Monsieur le Professeur Y. AYANT soit remercié pour les calculs théoriques qu'il a effectués et les éclaircissements qu'il n'a pas hésité à me prodiguer.

Ce travail fut surtout une réalisation d'équipe. Que Monsieur R. GRUDZINSKI qui lança cette étude et m'initia aux secrets du Maser, Messieurs R. BUISSON et J. GALAND qui participèrent activement au travail commun, Monsieur R. CHICAULT pour ses conseils éclairés en hyperfréquence, trouvent ici l'expression de ma reconnaissance pour le profit que j'ai tiré de leur amicale collaboration.

Je tiens également à remercier Monsieur LACAZE et le service des Basses Températures de l'Institut Fourier pour leur collaboration technique.

Que les Techniciens du laboratoire et spécialement Messieurs G. D'ASSENZA et P. MICHOUILLER soient remerciés de leur compétence et de leur dévouement ainsi que Messieurs P. TREILLE et R. GRENIER pour leurs prouesses mécaniques.

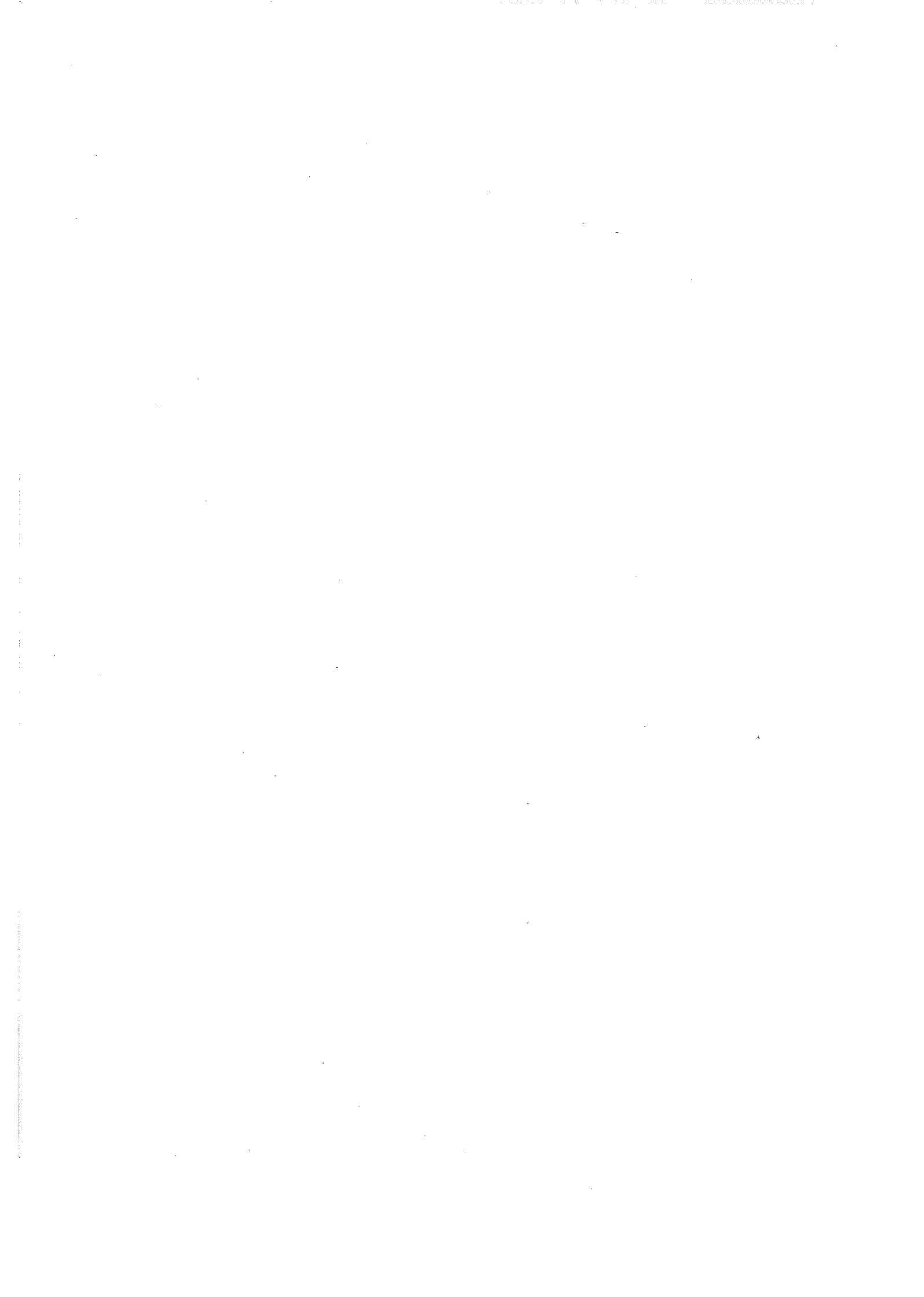


SOMMAIRE.

	<u>Page.</u>
INTRODUCTION.	
Sujet de l'étude	1
Historique.	1
Chapitre I THEORIE DU MASER.	3
Transitions induites.	4
Transitions naturelles.	6
Saturation.	7
METHODES D'INVERSION DE POPULATIONS MASER A DEUX NIVEAUX.	7
Maser à ammoniac.	8
Maser solide à deux niveaux.	9
MASER A TROIS NIVEAUX.	11
Cas de quatre niveaux.	14
Couplage harmonique de spin.	15
Effet de concentration et de température.	17
Calcul dans quelques cas particuliers.	18
Chapitre II CHOIX DU CRISTAL.	
Données générales.	24
CHROMICYANURE.	24
Description du cristal.	
Niveaux d'énergie.	25
RUBIS.	26
Description du cristal.	28
Méthode de calcul des niveaux et des probabilités de transition .	31
Tracé des diagrammes de raies.	36
Points de fonctionnement.	36
Courbe de C.H.S.	40
Calcul des probabilités de transitions induites.	45
Probabilités de transitions naturelles.	47
Chapitre III DISPOSITIFS EXPERIMENTAUX.	
Montage d'ensemble.	49
Cryostat.	53
Cavité du Maser.	55
Montage hyperfréquence pour le fonction- nement du Maser.	61
Observation des raies.	63
Mesure des temps de relaxation.	63

DISPOSITIFS ANNEXES.	
Orientation et taille des cristaux.	65
Mesure de champ.	68
Formation des cristaux de $K_3Cr(CN)_6$	71
Chapitre IV THEORIE ET TECHNIQUES DES MESURES EN HYPERFREQUENCES.	
Mesure des coefficients de surtension.	72
Rôle du té magique.	75
Effet hyperfréquence du cristal paramagnétique : Q_m .	77
Passage sur la raie.	79
Mesure de Q_m .	83
RESULTATS EXPERIMENTAUX.	
Largeur de raie.	85
Temps de relaxation.	88
Point D au couplage harmonique de spin.	93
Chapitre V PERFORMANCES DU MASER. THEORIE, METHODES DE MESURES, RESULTATS EXPERIMENTAUX.	
Produit $\sqrt{G.B.}$.	94
Facteur de bruit.	98
Maser à cavité en réflexion ou en transmission.	101
MESURES EFFECTUEES.	
Fixation des fréquences.	
Détermination du point de fonctionnement.	102
Mesure du $\sqrt{G.B.}$.	103
Variation du $\sqrt{G.B.}$ avec la puissance de pompe et de signal.	107
Mesure de la température équivalente de bruit.	107
Température du récepteur.	108
Température de bruit du Maser.	109
Mesure du signal minimum détectable.	113
Amélioration des performances.	114
Dynamique de l'amplification.	115
Plage en angle et en champ.	115
CONCLUSION.	116
NOTATIONS.	117
BIBLIOGRAPHIE.	120

ANNEXE I : EVOLUTION DES POPULATIONS DANS LE CAS DE QUATRE NIVEAUX	124
ANNEXE II : CALCUL DE L'HAMILTONIEN DE SPIN DU RUBIS : CAS DES PETITS ANGLES, APPLICATION AU COUPLAGE HARMONIQUE.	128
ANNEXE III DETERMINATION EXPERIMENTALE DES CONSTANTES E ET D DE L'HAMILTONIEN DE SPIN DU CHROMICYANURE DE POTASSIUM.	135



INTRODUCTION.

Sujet de l'étude.

Le but du présent travail est l'étude et la réalisation d'un amplificateur du type "M.A.S.E.R." dont la fréquence de travail est située dans la bande Radar des 10 cm de longueur d'ondes et la fréquence de l'énergie d'alimentation de préférence dans la bande des 3 cm.

Mais tout d'abord, définissons le terme M.A.S.E.R. Il est dérivé des initiales anglo-saxonnes de "Microwave Amplifier by Stimulated Emission of Radiation". La réalisation d'un appareil de ce type s'inscrit dans la recherche d'amplificateurs ayant de très bonnes performances et, en tout premier lieu, un bon facteur de bruit accompagné d'un produit gain-bande passante suffisant pour rendre négligeable le bruit amené par le récepteur classique qui suivra le Maser. Un tel appareil doit également conserver une relation de phase constante entre l'entrée et la sortie, c'est ce qu'on appelle la cohérence de phase : il ne s'agit pas d'un simple détecteur d'ondes. Les récepteurs classiques ont, au mieux, des facteurs de bruit de l'ordre de 7 db. Nous verrons dans le cours de ce travail que le facteur de bruit de l'ensemble complet d'une tête hyperfréquence équipée d'un Maser peut être nettement inférieur.

Historique.

Historiquement, les premières idées concrètes sur la possibilité d'amplification par émission stimulée semblent venir de trois sources différentes et indépendantes ⁽¹⁾ : un Américain, Weber ⁽²⁾, en 1953 donne quelques idées théoriques ; d'autre part, les Russes Basov et Prokhorov en 1954 proposent des structures hyperfréquences utilisables ⁽³⁾ et signalent en 1955 ⁽⁴⁾ avoir indiqué, au cours d'une conférence en 1952, la possibilité théorique de construire un amplificateur moléculaire. A.H. Nethercot discuta en 1951 la possibilité théorique d'oscillations moléculaires.

Quoi qu'il en soit, le premier Maser réalisé le fut en 1954 par Gordon, Zeiger et Townes⁽⁵⁾ ⁽⁶⁾ avec de l'ammoniac. Nous verrons qu'une telle technique n'est guère utilisable pour notre propos, car la bande de fréquence d'un amplificateur de ce type est fort étroite : il est utilisé pour faire des horloges atomiques, c'est-à-dire des standards de fréquence.

Le premier effet Maser utilisant un corps solide - en anglais "Solid State Maser" - fut obtenu par Combrisson, Honig et Townes⁽⁷⁾ ⁽⁸⁾ au début de 1956 sur du silicium contenant des impuretés de phosphore ou d'arsenic. Toutefois, les auteurs n'obtinrent pas les résultats escomptés : ils ne parvinrent ni à l'amplification ni à l'oscillation. Dans ces expériences, le cristal est placé dans un état émissif par impulsions : on observe l'effet Maser entre les impulsions.

Peu après ces expériences, Bloembergen⁽⁹⁾ proposait une nouvelle méthode permettant de placer le cristal dans un état émissif de façon continue, c'est ce qu'on a appelé le Maser à trois niveaux : nous verrons plus loin la signification de ce terme. Le même auteur suggérait également l'utilisation de l'éthyle sulfate de lanthane dopé au gadolinium ; cette idée fut mise à profit par Scovil, Feher et Seidel⁽¹⁰⁾ qui réalisèrent ainsi le premier Maser solide sans toutefois être maîtres de l'amplification : ils ne virent que l'oscillation.

Ces premières expériences furent suivies de nombreuses réalisations utilisant des corps différents et mieux appropriés : signalons le premier Maser au $K_3Co(CN)_6$ dopé au Cr^{+++} de Mac Worther et Meyer en 1957⁽¹¹⁾ ⁽¹²⁾. Puis le rubis (Al_2O_3 dopé au Cr^{+++}) dont le spectre magnétique avait été étudié par Basov et Prokhorov⁽³⁾, fut plus largement utilisé. Un Maser ainsi constitué fut monté sur un radiotélescope de la Marine américaine par Townes et ses collaborateurs⁽¹³⁾ destiné à l'observation des planètes et autres radiosources de l'espace. D'autres Masers furent destinés à des liaisons avec les satellites artificiels. D'autres encore furent montés sur spectromètre. Il serait fastidieux d'établir une liste exhaustive de ces réalisations très variées. Signalons toutefois un prolongement très important des études sur le Maser vers les fréquences optiques : on les appelle alors les LASER (Light A.S.E.R.) destinés principalement à obtenir des sources lumineuses cohérentes.

CHAPITRE I

THEORIE DU MASER.

Au point de vue physique l'amplification ou la production d'ondes électromagnétiques utilisant les phénomènes de résonance magnétique se caractérise par une interaction entre des particules et un champ électromagnétique : il s'agit de fournir aux particules une énergie supérieure à celle de leur état normal pour qu'elles puissent céder ce supplément d'énergie à l'onde. Ces particules sont des ions paramagnétiques dont on modifie l'énergie interne sans qu'il y ait mouvement macroscopique. Cette énergie au lieu d'être répartie dans une bande continue est quantifiée en "niveaux discrets" dont les populations (si on considère un grand nombre de particules) sont données à l'équilibre thermique par la loi de répartition statistique de Boltzmann :

$$N_i \sim e^{-\frac{E_i}{kT}} \quad \text{I,1}$$

avec N_i = population du niveau i

E_i = énergie du niveau i

k = constante de Boltzmann

T = température absolue

L'interaction de la particule avec l'onde se fait par l'intermédiaire de "transitions". En effet, si l'ion possède deux niveaux d'énergie $E_2 > E_1$ et s'il se trouve en présence d'une onde électromagnétique de fréquence

ν_{12} telle que $E_2 - E_1 = h \nu_{12}$

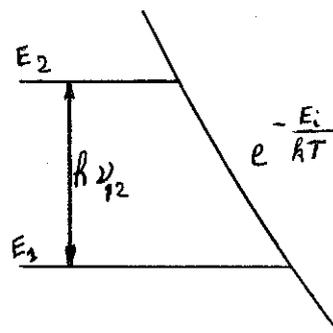


fig : 1

si h est la constante de Planck cette onde pourra provoquer des transitions entre les deux niveaux d'énergie, c'est-à-dire que chaque photon, d'énergie $h \nu_{12}$, fera passer un ion de l'état 1 dans l'état 2 ou inversement. Nous voyons que les transitions sont quantifiées, mais comme il existe toujours un grand nombre de particules assemblées, de l'ordre de grandeur du nombre d'Avogadro, et que dans la gamme des hyperfréquences, qui nous intéresse ici, une puissance même minime représente un nombre considérable de photons par seconde (Ex : à 3 000 MHz 1 μ W de puissance représente environ 10^{18} photons/s) le phénomène paraît continu.

Par ailleurs, ces transitions n'ont pas toujours lieu : elles dépendent de certaines règles de sélection qui déterminent les transitions permises ou interdites. Nous les étudierons au chapitre II avec le choix de l'ion paramagnétique et la détermination de ses niveaux d'énergie.

Transitions induites.

Ces transitions sont caractérisées par la probabilité qu'un ion passe d'un état à un autre sous l'influence du champ excitateur. Cette probabilité, proportionnelle à la puissance véhiculée par le champ radiofréquence, est dite "induite". Nous la noterons W , car elle est égale dans les deux sens : si nous considérons deux niveaux, les probabilités de transition de $1 \rightarrow 2$ et de $2 \rightarrow 1$ sont égales. Par contre, le nombre de transitions effectuées n'est pas égal, car il est proportionnel à la population du niveau de départ :

$$\dot{N}_1 = - \dot{N}_2 = W N_2 - W N_1 = W(N_2 - N_1) \quad I,2$$

Le point représentant la dérivation par rapport au temps.

Si $N_1 > N_2$, il y a absorption d'énergie, et si $N_2 > N_1$, il y a émission d'une onde électromagnétique. La puissance absorbée ou émise suivant le signe de $(N_2 - N_1)$ est donnée par la relation :

$$P = (N_2 - N_1)W h \nu_{12} \quad I,3$$

En fait, la probabilité de transition induite W peut être décomposée en deux termes $W = B_{12}U(\nu)$.

$B_{12} = B_{21}$ est le coefficient d'émission stimulée d'Einstein. Nous verrons ultérieurement (chap. II) qu'il est proportionnel au carré de l'élément de matrice de couplage entre les états 1 et 2.

$U(\nu)$ est la densité d'énergie de l'onde incidente (non normalisée, c'est-à-dire proportionnelle à l'énergie du champ radiofréquence).

En toute rigueur, nous devrions également faire intervenir l'émission spontanée dont la valeur est déterminée par le coefficient d'émission spontanée d'Einstein A_{12} , mais il se trouve que dans la zone des hyperfréquences ce coefficient est tout à fait négligeable. En effet, les deux coefficients d'émission induite et spontanée sont liés par la relation (14)

$$A_{12} = \frac{8\pi \nu_{12}^2}{c^3} h \nu_{12} B_{12} \quad \text{I,4}$$

où h est la constante de Planck

c la vitesse de la lumière

$\frac{8\pi \nu_{12}^2}{c^3}$ représente le nombre de modes par unité de volume et par unité de bande de fréquence.

$h \nu_{12}$ l'énergie d'un photon à la fréquence considérée.

A 3 000 MHz le rapport entre les deux coefficients vaut environ 10^{-29} c.g.s. ce qui équivaut à une puissance émise spontanément tout à fait négligeable : elle intervient comme un bruit, car elle n'est pas cohérente. La limite inférieure qui est en même temps un ordre de grandeur de ce bruit, évalué en température équivalente (nous la définirons au chapitre III) est donnée par $T_B = \frac{h\nu}{k}$ (15).
A notre fréquence cette température vaut $0,15^\circ\text{K}$.

Transitions naturelles.

L'évolution de la population des niveaux telle que nous l'avons définie précédemment est également réglée par un deuxième mécanisme : l'interaction entre les ions et leur voisinage qui caractérise les relations non plus avec une onde électromagnétique, mais avec l'entourage de l'ion. A ce mécanisme sont attachées des probabilités de transitions dites "naturelles", ou dans le cas de corps solides dites "spin réseau", qu'on note habituellement w_{ij} entre deux niveaux i et j . C'est cette "relaxation" qui met en équilibre thermique les ions et le milieu dans lequel ils baignent. Physiquement, étant donné que les photons sont quantifiés et que les transitions intéressent chaque ion pris en particulier, on est amené à introduire la notion de quantum d'énergie de vibration du réseau qu'on appelle phonon. C'est cette énergie de vibration du réseau qui assure la conservation de l'énergie.

Ce phénomène étant responsable du maintien à l'équilibre de Boltzmann ou du retour à cet équilibre après une perturbation, nous trouvons la relation liant les probabilités de transition dans chaque sens en écrivant l'équation d'évolution de la population du niveau 1 par exemple (dans le cas de deux niveaux fig. 1)

$$\dot{N}_1 = w_{2 \rightarrow 1} N_2(t) - w_{1 \rightarrow 2} N_1(t) \quad \text{I,5}$$

à l'équilibre $\dot{N}_1 = 0$
d'où

$$w_{1 \rightarrow 2} = w_{2 \rightarrow 1} \frac{N_2}{N_1} = w_{2 \rightarrow 1} e^{-\frac{1}{kT}(E_2 - E_1)} \quad \text{I,6}$$

Dans le cas des deux niveaux étudiés ici, le temps de relaxation T_1 caractéristique de l'exponentielle décrivant le retour à l'équilibre est rigoureusement :

$$T_1 = \frac{1}{w_{1 \rightarrow 2} + w_{2 \rightarrow 1}} \quad \text{I,7}$$

L'équation complète d'évolution de la population du niveau 1 peut donc s'écrire

$$\dot{N}_1 = w_{2 \rightarrow 1} N_2 - w_{1 \rightarrow 2} N_1 + (N_2 - N_1)W \quad \text{I,8}$$

Saturation.

Si W est suffisamment grand (si le champ radiofréquence est intense) nous pouvons parvenir à un état d'équilibre caractérisé par la saturation, c'est-à-dire l'égalisation des populations des deux niveaux.

En effet, en posant $N_1 - N_2 = n$ et $\frac{w_{2 \rightarrow 1}}{w_{1 \rightarrow 2}} = K < 1$ sachant que $N_1 + N_2 = N$ et qu'à l'équilibre $\dot{N}_1 = 0$

l'équation I,8 nous donne

$$N_1 - N_2 = n = \frac{N \left(\frac{1 - K}{1 + K} \right)}{1 + \frac{2}{(1 + K)w_{2 \rightarrow 1}} W} \quad \text{I,9}$$

$$N_1 - N_2 = \Delta N_0 \text{ à l'équilibre thermique} \cdot \frac{1}{1 + 2 T_1 W} \quad \text{I,10}$$

Nous voyons apparaître le facteur de saturation $\frac{1}{1 + 2 T_1 W}$. Il nous indique la nécessité d'avoir des champs forts si on désire saturer, mais également d'avoir des temps de relaxation assez longs pour obtenir le même effet avec des champs radiofréquence d'une intensité plus faible.

METHODE D'INVERSION DE POPULATIONS .

MASER A DEUX NIVEAUX.

Pour obtenir une puissance émise il s'agit donc d'inverser les populations, ce qui s'appelle également obtenir une température négative. En effet, il est toujours possible d'affecter un facteur de Boltzmann au rapport entre les populations et si celui-ci est inversé par rapport à l'équilibre thermique la température T_s doit être négative

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT_s}} \quad \text{I,11}$$

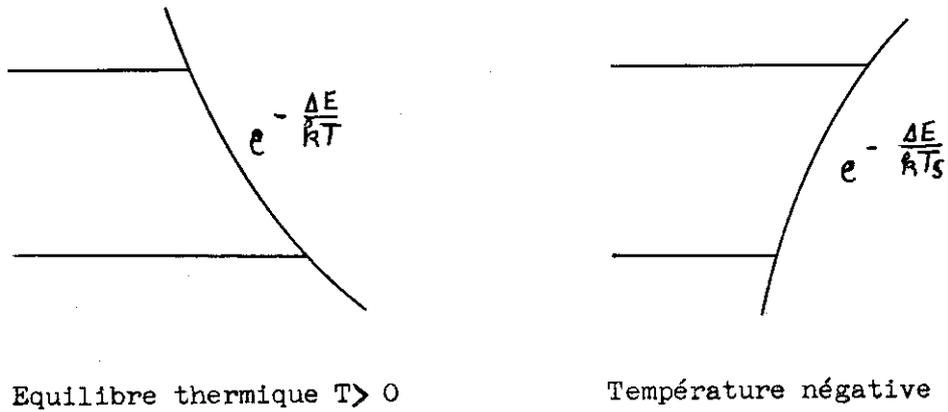


fig : 2

Maser à ammoniac.

Plusieurs méthodes sont utilisées pour réaliser cette inversion de populations. La première historiquement (5)(6) consiste à envoyer un jet de molécules gazeuses, en l'occurrence du NH_3 , à travers un focaliseur à effet Stark qui trie les molécules suivant l'orientation de leur moment électrique. Aux deux orientations possibles correspondent deux niveaux d'énergie distincts. Le focaliseur concentre les molécules qui se trouvent dans l'état supérieur à l'intérieur d'une cavité hyperfréquence où elles échangent leur énergie avec l'onde et retombent dans l'état inférieur, l'ensemble du montage étant évidemment sous pression réduite (fig. 3).

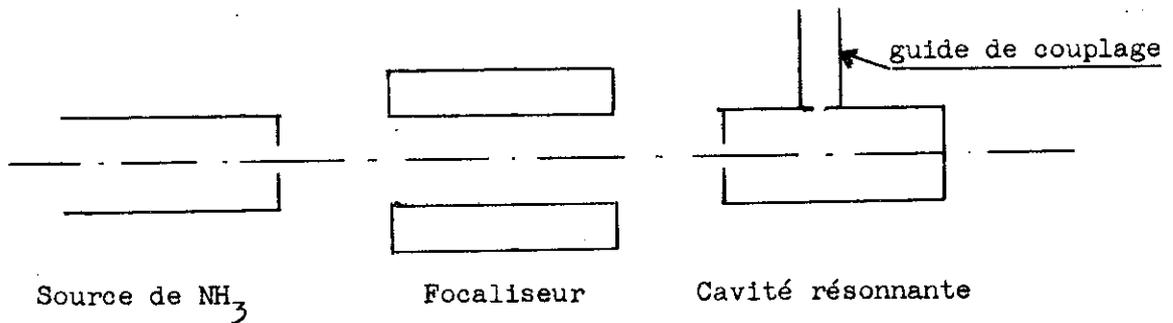


Schéma du Maser à ammoniac

fig : 3

Ce montage présente l'avantage de fonctionner à des températures pas trop basses (77°K) et s'il marche en oscillateur, d'être monochromatique et très stable en fréquence. Les inconvénients présentés sont les compléments des avantages : ce montage ne peut servir d'amplificateur hyperfréquence, car sa largeur de bande est limitée par la largeur de la raie de l'ammoniac qui est très faible. Ceci est dû en partie au fait qu'il s'agit d'un gaz sous pression réduite. D'autre part, le nombre de molécules en jeu étant très faible, les puissances susceptibles d'intervenir le sont également.

Maser solide à deux niveaux.

Il est également possible d'obtenir un effet Maser entre deux niveaux dans des solides, il suffit de prendre un corps ayant au moins deux niveaux d'énergie convenablement séparés et que la transition entre ces deux niveaux soit permise. Les corps le plus couramment employés sont des solides qui comportent un électron "presque libre", la séparation des deux niveaux d'énergie par effet Zeeman est alors telle que

$$h\nu = g \mu_B H \quad I,12$$

où g est le facteur de Landé = 2 ici

et μ_B le magnéton de Bohr

(nous expliquerons plus en détail tous ces termes dans le paragraphe suivant).

Trois méthodes ont été jusqu'à présent utilisées (16) :

1°) La méthode dite des échos de spin couramment pratiquée en résonance nucléaire, mais qui peut être adaptée à la résonance électronique. Elle consiste à envoyer des impulsions de champ hyperfréquence durant un temps déterminé, de façon que cette énergie retourne de 180° l'aimantation : on obtiendra donc en principe une température négative égale en valeur absolue à celle dont on était parti.

2°) Le passage adiabatique rapide, comme l'a montré en résonance nucléaire Félix Bloch⁽¹⁷⁾, peut également retourner l'aimantation en passant soit en champ, soit en fréquence à travers la raie de résonance suffisamment rapidement par rapport au temps de relaxation⁽¹⁸⁾.

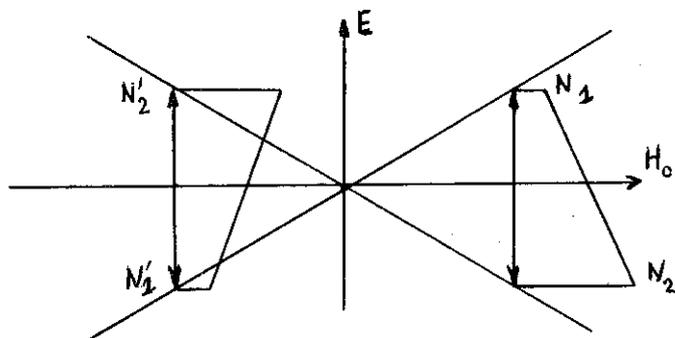


fig : 4

3°) Une inversion rapide du champ aboutit au même résultat (fig. 4) : l'opération consiste à arriver très rapidement au voisinage du champ zéro de façon que la population ne change pas ($t < T_1$) puis à travers le zéro

plus rapidement encore ($t < T_2$, si T_2 est le temps de relaxation spin spin).

Ces méthodes dont seules les deux premières et surtout la deuxième ont été utilisées pratiquement, présentent le gros inconvénient de ne pas permettre une amplification continue. En effet, il faut d'une part que l'ensemble du processus : inversion, utilisation, soit plus rapide que le temps de relaxation et, d'autre part, l'utilisation ne peut intervenir que durant une petite partie de la période de récurrence sous peine de voir chuter le gain de façon sensible. Il faut également attendre que le système soit revenu en équilibre pour pouvoir à nouveau l'exciter, ce qui empêche d'augmenter la période de récurrence. Il semble qu'un rapport de 1 % entre le temps d'amplification et la période de récurrence soit un ordre de grandeur correct de ce qu'on sait faire actuellement. Ces inconvénients sont évidemment prohibitifs pour qui veut réaliser un amplificateur dont le gain soit stable dans le temps.

MASER A TROIS NIVEAUX.

En vue de cette utilisation, Bloembergen⁽⁹⁾ a proposé une méthode à peu près universellement employée actuellement. Elle consiste à provoquer la saturation d'une raie de résonance, c'est-à-dire à égaliser les populations d'un couple de niveau, de façon à obtenir une inversion entre l'un ou l'autre de ces deux niveaux et un niveau intermédiaire selon le schéma des figures 5 et 6

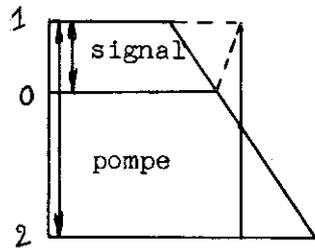


fig : 5

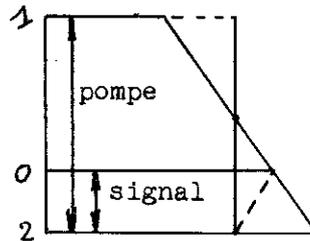
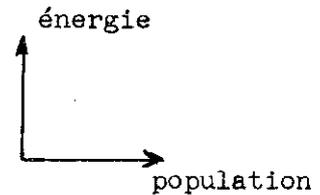


fig : 6



La transition saturée porte le nom de transition de "pompe". Celle qu'on utilise transition signal, ici $1 \leftrightarrow 0$ ou $0 \leftrightarrow 2$ suivant les cas de figure. La dernière est la transition image (idler pour les anglo-saxons). Nous pouvons assimiler l'exponentielle à une droite même lorsque la température est basse (dans notre cas pour $\nu = 9\ 000$ MHz et $T = 4,2^\circ\text{K}$ $\frac{h\nu}{kT} = 0,10$). Si cela n'était pas, les raisonnements qualitatifs seraient les mêmes, seuls les résultats quantitatifs seraient un peu améliorés. Moyennant cette approximation et à partir d'un raisonnement géométrique simple, nous voyons que sur la figure 5, par exemple, la condition d'inversion est $\nu_{10} < \nu_{12}/2$.

En fait, le problème est moins simple, car il faut tenir compte de la relaxation. Nous l'avons jusqu'à présent considérée simplement entre deux niveaux. Elle existe, en fait, entre tous les couples de niveaux. S'il y a n niveaux il existe $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ probabilités de transitions indépendantes $w_{i \rightarrow j}$ (les $w_{j \rightarrow i}$ s'en déduisent comme déjà vu).

Si nous écrivons les n équations d'évolution des populations

$$\dot{N}_i = \sum_{j \neq i} w_{j \rightarrow i} N_j - w_{i \rightarrow j} N_i \quad \text{I,13}$$

nous pouvons les mettre sous forme matricielle

$$\left| \dot{N}_i \right| = \left| W \right| \cdot \left| N_i \right| \quad \text{I,14}$$

Les temps de relaxation T_1 sont tels que $\frac{1}{T_1}$ sont les valeurs propres de la matrice $|W|$. Il y en a $n - 1$, car une brève analyse de cette matrice montrerait qu'une des valeurs propres est nulle. Le temps de relaxation mesuré entre deux niveaux particuliers est une combinaison de ces $n - 1$ temps de relaxation.

Selon le processus déjà indiqué pour deux niveaux nous écrivons les équations d'évolution de population dans le cas de la figure 5

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= N_0 w_{0 \rightarrow 1} - N_1 w_{1 \rightarrow 0} + (N_0 - N_1) W_s + N_2 w_{2 \rightarrow 1} - N_1 w_{1 \rightarrow 2} + (N_2 - N_1) W_p \\ \dot{N}_0 &= N_1 w_{1 \rightarrow 0} - N_0 w_{0 \rightarrow 1} + N_2 w_{2 \rightarrow 0} - N_0 w_{0 \rightarrow 2} + (N_1 - N_0) W_s \\ \dot{N}_2 &= N_1 w_{1 \rightarrow 2} - N_2 w_{2 \rightarrow 1} + N_0 w_{0 \rightarrow 2} - N_2 w_{2 \rightarrow 0} + W_p (N_1 - N_2) \end{aligned} \quad \text{I,15}$$

où W_s est la probabilité de transition induite par le signal appliqué entre 1 et 0

et W_p est la probabilité de transition induite par la puissance de pompe appliquée entre 1 et 2.

Si nous simplifions l'écriture des termes tels que $N_i w_{i \rightarrow j}$ en supposant la température assez haute ($\frac{h\nu}{kT} \ll 1$) nous les écrivons

$$N_i w_{i \rightarrow j} = N_i w_{j \rightarrow i} e^{-\frac{h\nu_{ij}}{kT}} = w_{ji} \left(N_i - \frac{N}{3} \frac{h\nu_{ij}}{kT} \right)$$

A l'équilibre les trois premiers membres sont nuls et en remarquant que si $W_P \gg w_{ij}$, c'est-à-dire si la puissance de pompe est suffisante, il y a saturation de la raie correspondante : $N_1 = N_2$, nous réécrivons la deuxième équation :

$$w_{01} \left(N_1 - \frac{N}{3} \frac{h\nu_{01}}{kT} - N_0 \right) + w_{02} \left(N_1 - N_0 + \frac{N}{3} \frac{h\nu_{02}}{kT} \right) + (N_1 - N_0) W_s = 0 \quad \text{I,16}$$

$$N_1 - N_0 = \frac{N}{3} \frac{h}{kT} \left(\frac{w_{01} \nu_{01} - w_{02} \nu_{02}}{w_{01} + w_{02} + W_s} \right) \quad \text{I,17}$$

Nous prendrons positivement la puissance fournie par le cristal

$$P_{\text{magn}} = - h\nu_s W_s (N_1 - N_0) = \frac{N}{3} \frac{h^2 \nu_s W_s}{kT} \left(\frac{w_{02} \nu_{02} - w_{01} \nu_{01}}{w_{01} + w_{02} + W_s} \right) \quad \text{I,18}$$

La condition de Bloembergen qui détermine le fonctionnement du Maser apparaît au numérateur

$$w_{02} \nu_{02} > w_{01} \nu_{01} \quad \text{I,19}$$

Concrètement, cette condition signifie que la relaxation doit être plus rapide entre les niveaux 0 et 2 qu'entre 1 et 0 compte tenu des écarts d'énergie, de façon que le niveau intermédiaire ne s'engorge pas et que l'inversion se maintienne entre 0 et 1. Remarquons que, si cette condition n'est pas remplie, l'inversion a lieu entre l'autre couple de niveaux 0 et 2 sauf si

$w_{02} \nu_{02} = w_{01} \nu_{01}$. Dans ce cas les trois niveaux restent également peuplés.

Dans le cas où les w_{ij} sont égaux, la condition de Bloembergen équivaut à celle écrite plus haut : $\nu_{02} > \nu_{01}$ et la puissance fournie devient

$$P_{\text{magn}} = \frac{N}{3} \cdot \frac{(h\nu_s)^2}{kT} \cdot W_s \left(\frac{\nu_P}{2\nu_s} - 1 \right) \quad \text{I,20}$$

Nous voyons apparaître le rôle de la température dans les formules (I,18) ou (I,20). Comme les valeurs relatives des w_{ij} ne sont pas modifiées par la température, la puissance fournie est $\sim \frac{1}{T}$: ceci s'explique par le fait que la pente de la droite dans un diagramme énergie population (fig. 5) est en $\frac{1}{T}$. Si le facteur de Boltzmann $\frac{h\nu}{kT}$ devient appréciable, l'amélioration est encore meilleure.

Toutefois, le rôle fondamental de l'abaissement de la température est d'allonger les temps de relaxation T_1 et spécialement celui de la transition de pompe de façon à permettre la saturation avec une puissance raisonnable. Le facteur de saturation étant $\frac{1}{1 + 2T_1 W}$, il s'agit d'obtenir $2T_1 W \gg 1$.

L'évolution de T_1 avec la température est assez considérable. A titre indicatif, dans le rubis ⁽¹⁹⁾ pour la même raie, T_1 varie de $4 \cdot 10^{-6}$ s à 300°K , à $2 \cdot 10^{-4}$ s à 77°K et $1,6 \cdot 10^{-2}$ s à 4°K : entre la température ambiante et celle de l'hélium on gagne donc un facteur de 10^4 sur la puissance de saturation. Nous verrons également au chapitre V le rôle important de la température dans le facteur de bruit.

Cas de quatre niveaux.

Nous n'avons jusqu'ici considéré que trois niveaux. Dans la pratique la plupart des corps utilisés jusqu'à présent pour faire des Masers comportent des ions paramagnétiques dont le spin est $S = 3/2$ donnant $2S + 1 = 4$ niveaux pour le terme fondamental (voir chapitre II) Un cas fréquemment rencontré est celui de l'ion Cr^{+++} ($S = 3/2$) ; c'est d'ailleurs cet ion que nous utiliserons. Le rôle joué par le quatrième niveau n'est pas négligeable. Il intervient dans la relaxation entre les niveaux considérés jusqu'ici.

Le calcul complet de la différence de populations entre deux niveaux dans un cas particulier (fig.7) est effectué en annexe au présent exposé (annexe 1). (D'autres cas particuliers, le niveau 3 situé différemment par rapport aux autres niveaux, donneraient des formules analogues, mais non identiques.)

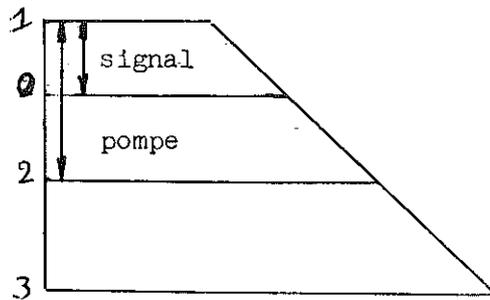


fig : 7

La différence de populations entre le niveau 1 et 2 est alors

$$N_1 - N_0 = \frac{N}{4} \frac{h\nu_s}{kT} \left(\frac{\nu_P}{\nu_s} \cdot \frac{w_{03}(w_{02} + w_{32}) + w_{02}(w_{32} + w_{13})}{w_{03}(w_{01} + w_{02} + w_{13} + w_{32}) + (w_{02} + w_{01})(w_{13} + w_{32})} - 1 \right)$$

I,21

La condition d'inversion devient plus compliquée

$$\left(w_{03}(w_{02} + w_{32}) + w_{02}(w_{32} + w_{13}) \right) \nu_P > \left(w_{03}(w_{01} + w_{02} + w_{13} + w_{32}) + (w_{02} + w_{01})(w_{13} + w_{32}) \right) \nu_s$$

I,22

mais se réduit à la même condition que précédemment si les w_{ij} sont tous égaux

$$\nu_P > 2 \nu_s$$

et la puissance magnétique est identique (à ceci près que nous avons négligé le W_s devant les w_{ij} pour ne pas alourdir les calculs).

$$P_{\text{magn}} = \frac{N}{4} \frac{(h\nu_s)^2}{kT} W_s \left(\frac{\nu_P}{2\nu_s} - 1 \right)$$

I,23

Couplage harmonique de spin.

Expérimentalement, nous avons constaté que l'inversion de populations entre les deux niveaux choisis n'était pas toujours facile à obtenir, et à l'époque où nous avons entrepris ce travail, on expliquait souvent les déboires des expérimentateurs par le "couplage harmonique de spin" (noté C.H.S.) qui servait ainsi de bouc émissaire sans qu'on comprenne toujours bien concrètement son rôle. Son mécanisme consiste en une relaxation "croisée" qui met en communication deux couples de niveaux correspondant à des raies

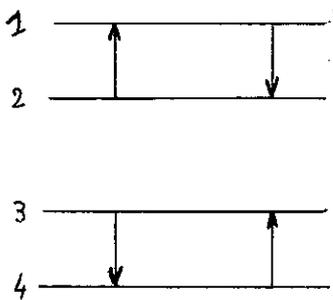


fig : 8

dont les fréquences sont dans des rapports simples entre elles : d'où le nom de couplage harmonique.

Par exemple dans le cas de la figure 8 où $\nu_{12} = \nu_{34}$, un ion passant du niveau 1 au niveau 2 entraînera le passage d'un autre ion : du niveau 4 au niveau 3 et inversement. Les expérimentateurs malheu-

reux pensaient souvent que le fait d'égaliser deux niveaux par la pompe perturbait l'ensemble des niveaux : au point de rendre leurs populations pratiquement égales. Après plusieurs essais infructueux, nous avons réussi à obtenir l'inversion des populations dans des conditions particulières où le couplage harmonique de spin expliquait parfaitement l'amélioration de l'effet Maser⁽²⁰⁾⁽²¹⁾. Une analyse plus fine du phénomène nous a ensuite montré que si souvent l'effet du C.H.S. était néfaste, dans certains cas particuliers bien choisis, il pouvait par contre bien améliorer l'inversion de populations ou même la faire apparaître si elle n'avait pas lieu en l'absence de C.H.S.⁽²²⁾.

Ce phénomène peut aussi être caractérisé par une probabilité de transition C dite de C.H.S. qui apparaît ainsi dans l'équation du niveau 2 de la figure 8 par exemple

$$\dot{N}_2 = C(N_1 N_4 - N_2 N_3) \quad \text{I,24}$$

à l'équilibre :

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{N_3}{N_4} = e^{-\frac{h\nu}{kT_s}} \quad \text{I,25}$$

Il y a égalisation des températures de spin entre les deux couples de niveaux, ce qui tend au même effet que la relaxation normale considérée jusqu'ici : ramener le système à l'équilibre de Boltzmann.

Si les différences d'énergie ne sont plus dans un rapport 1 mais n (fig. 9) l'équation du niveau 2 s'écrit

$$\dot{N}_2 = C(N_1^n N_4 - N_3 N_2^n) \quad \text{I,26}$$

à l'équilibre :

$$\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^n = \frac{N_3}{N_4} = e^{-\frac{nh\nu_{12}}{kT}} \quad \text{I,27}$$

Il y a toujours égalisation des températures.

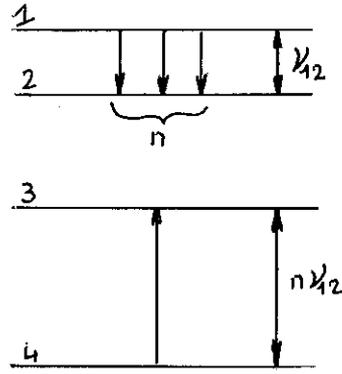


fig : 9

Nous avons jusqu'à présent supposé que les rapports de fréquence étaient entiers exactement, c'est-à-dire que le phénomène se faisait sans échange d'énergie avec le milieu extérieur. En fait, la théorie avec Bloembergen⁽²³⁾ et l'expérience⁽²⁴⁾ montrent que le phénomène de C.H.S. a une largeur de raie de l'ordre de plusieurs fois la largeur des raies prises isolément. Il faut admettre que le réseau assure dans une certaine mesure l'appoint d'énergie dont le bilan dû au seul C.H.S. n'est pas rigoureusement équilibré.

Il serait d'ailleurs intéressant de poursuivre l'étude expérimentale de ce phénomène à l'aide d'un appareillage assurant une variation continue des deux fréquences de pompe et de signal permettant de "traverser" le couplage harmonique de spin.

Effet de concentration et de température.

La valeur de la constante C dépend fortement du type de processus employé : plus le rapport harmonique n est grand plus la probabilité du phénomène, donc C, est faible. Elle dépend également et fortement de la concentration⁽²⁵⁾. A des concentrations trop faibles, le rôle du C.H.S. est négligeable devant la relaxation naturelle caractérisée par les w_{ij} et à concentration trop forte, les processus à grand nombre de spins ayant une importance comparable à la relaxation naturelle, on assiste à un couplage de tous les niveaux, et il suffit par exemple de saturer une raie pour que toutes les autres le soient également.

Dans le domaine de concentration où l'on travaille habituellement (de l'ordre de 10^{-4} ions actifs/ions neutres du réseau) la constante C est indépendante de la température, de sorte que souvent l'effet de C.H.S. n'est sensible qu'à basse température lorsque la relaxation naturelle est ralentie. Il arrive d'ailleurs que dans certains cas où l'effet de C.H.S. serait néfaste, on doit fonctionner à température suffisamment élevée pour le rendre négligeable : l'abaissement de la température n'améliore pas comme de coutume les performances du Maser, bien au contraire. (cf Maiman⁽²⁶⁾) Ceci est toujours le cas des Masers utilisant des corps à grande concentration d'ions actifs qui ne peuvent fonctionner qu'à température de l'azote liquide et non celle de l'hélium.

Calculs dans quelques cas particuliers.

Les calculs précis permettant d'évaluer quantitativement l'effet de C.H.S. ne peuvent se faire que dans des cas particuliers. Nous en étudierons trois en détail.

1°) Tout d'abord un cas défavorable fig. 10. La puissance de pompe est appliquée entre 1 et 2 et le signal entre 0 et 2 ; il y a d'autre part C.H.S. entre les raies 1 ↔ 2 et 2 ↔ 3 (que ce soit avec un rapport 1 ou n, le raisonnement est le même). En supposant qu'en l'absence de C.H.S. on obtienne effectivement l'inversion entre 0 et 2 par égalisation des niveaux 1 et 2, si on retient l'action du C.H.S. l'inversion disparaît, car les populations des niveaux 1, 2 et 3 sont égalisées.

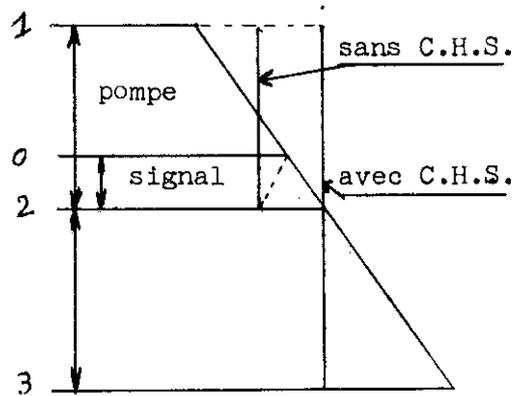


fig : 10

2°) Nous étudierons quantitativement le cas de la figure 11. Le signal est appliqué entre 0 et 1 et la pompe entre 0 et 2.

Le couplage harmonique a lieu entre la fréquence image $1 \leftrightarrow 2$ et $2 \leftrightarrow 3$. A première vue on se rend compte que le rôle du C.H.S. sera de diminuer la population du niveau 3 et d'augmenter celle des niveaux 0 et 2 en laissant celle du niveau 1 inchangé, car la température de spin entre 1 et 2 a augmenté, et d'autre part, d'accélérer la relaxation entre 1 et 2, ce qui est tout à fait favorable, comme nous l'avons déjà vu. En éliminant les termes rendus négligeables soit par la probabilité de transition W_p de pompe, soit par le C.H.S. : $W_p \gg C.N_1 \gg w_{ij} \gg W_s$ nous écrivons les équations d'évolution des populations des niveaux 1, 2 et 3

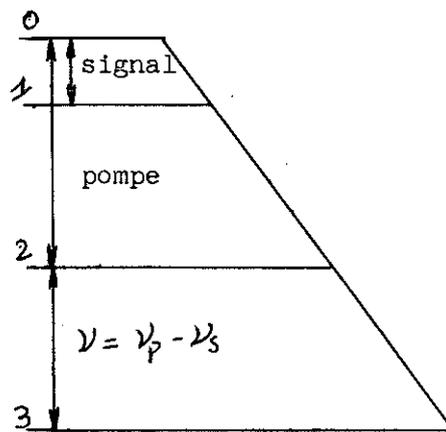


fig : 11

$$\dot{N}_1 = -C(N_1 N_3 - N_2^2) + w_{0 \rightarrow 1} N_0 - w_{1 \rightarrow 0} N_1$$

$$\dot{N}_2 = 2C(N_1 N_3 - N_2^2) + W_p(N_0 - N_2) \quad I,28$$

$$\dot{N}_3 = -C(N_1 N_3 - N_2^2) + w_{0 \rightarrow 3} N_0 - w_{3 \rightarrow 0} N_3$$

Pour alléger l'écriture* et symétriser les équations, nous développons les exponentielles ainsi (cf annexe 1)

$$N_i = \frac{N}{4} \left(1 - \frac{E_i}{kT} + x_i \right)$$

où

E_i = énergie du niveau i

x_i = écart (réduit) de la population du niveau i par rapport à la répartition de Boltzmann.

* selon la méthode élaborée par Y. Ayant.

Pour justifier cette expression il suffit de choisir l'origine des énergies de façon que

$$\sum_i E_i = 0$$

Nous symétrisons également les w_{ij}

$$w_{i \rightarrow j} = w_{ij} \left[1 - \frac{1}{kT} \left(\frac{E_j - E_i}{2} \right) \right]$$

Le terme de C.H.S. s'écrit alors :

$$C(N_1 N_3 - N_2^2) = \frac{CN^2}{16} (x_1 + x_3 - 2x_2) \quad \text{I,29}$$

$$w_{0 \rightarrow 1} N_0 - w_{1 \rightarrow 0} N_1 = w_{01} \frac{N}{4} (x_0 - x_1)$$

et

$$N_0 - N_2 = \frac{N}{4} \left(-\frac{h\nu_s}{kT} + x_0 - x_2 \right)$$

En posant encore

$$y_1 = x_1 - x_0$$

et

$$\frac{CN}{4} = K$$

et en remarquant qu'en régime continu les \dot{N}_i sont nuls, nous aboutissons aux trois équations :

$$\left. \begin{aligned} -K(y_1 + y_3 - 2y_2) - w_{01} y_1 &= 0 \\ 2K(y_1 + y_3 - 2y_2) - w_P y_2 &= \frac{h\nu_s w_P}{kT} \\ -K(y_1 + y_3 - 2y_2) - w_{03} y_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{I,30}$$

Ce système à trois inconnues y_1 , y_2 et y_3 se résoud aisément et donne la solution suivante pour y_1 :

$$y_1 = x_1 - x_0 = -\frac{2}{kT} \frac{h\nu_s}{P} \left(\frac{w_{03}}{w_{01} + w_{03}} \right) \quad \text{I,31}$$

ou en revenant aux variables primitives

$$N_0 - N_1 = \frac{N}{4} \frac{h}{kT} \left[2 \nu_P \frac{w_{03}}{w_{01} + w_{03}} - \nu_S \right] \quad \text{I,32}$$

d'où la puissance magnétique fournie

$$P_{\text{magn}} = \frac{N}{4} \frac{(h\nu_S)^2}{kT} w_s \left[2 \frac{\nu_P}{\nu_S} \frac{w_{03}}{w_{01} + w_{03}} - 1 \right] \quad \text{I,33}$$

Formule valable tant que $w_s \ll w_{ij}$, car nous l'avons négligé dans le calcul.

Dans le cas où les w_{ij} sont tous égaux, nous gagnons un facteur 2 dans le premier terme de la parenthèse. La puissance magnétique fournie est supérieure, toutes choses égales par ailleurs, à celle donnée par la formule dans le cas simple de quatre niveaux

$$P_{\text{magn}} = \frac{N}{4} \frac{(h\nu_S)^2}{kT} w_s \left(\frac{\nu_P}{\nu_S} - 1 \right) \quad \text{I,34}$$

au lieu de $\left(\frac{\nu_P}{2\nu_S} - 1 \right)$

3°) Nous examinerons maintenant le cas de la figure 12 qui est celui que nous avons utilisé pour faire fonctionner notre Maser.

Le signal est appliqué entre 1 et 0 et la pompe entre 1 et 2. La fréquence de la transition $2 \leftrightarrow 3$ est égale à celle de la pompe $1 \leftrightarrow 2$.

Il nous suffit pour résoudre le problème d'écrire l'équation d'évolution de la population du niveau 0 :

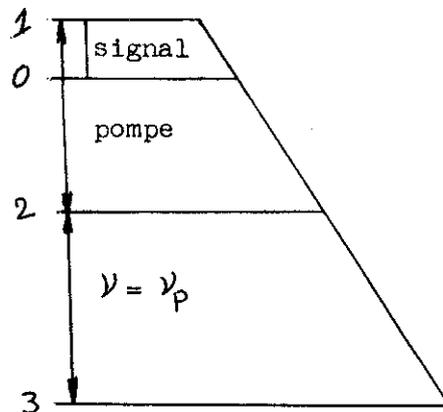


fig : 12

$$\dot{N}_0 = N_1 w_{1 \rightarrow 0} - N_0 w_{0 \rightarrow 1} + (N_1 - N_0) w_s + N_2 w_{2 \rightarrow 0} - N_0 w_{0 \rightarrow 2} + N_3 w_{3 \rightarrow 0} - N_0 w_{0 \rightarrow 3}$$

I,35

en utilisant une partie des approximations indiquées précédemment

$$w_{i \rightarrow j} = w_{ij} \left(1 - \frac{1}{kT} \frac{(E_j - E_i)}{2} \right)$$

$$\text{et } \frac{N_i + N_j}{2} = \frac{N}{4}$$

Nous récrivons :

$$\dot{N}_0 = (N_1 - N_0 + \frac{N}{4} \frac{h\nu_s}{kT}) w_{01} + (N_2 - N_0 - \frac{N}{4} \frac{h\nu_{02}}{kT}) w_{02} + (N_3 - N_0 - \frac{N}{4} \frac{h\nu_{03}}{kT}) w_{03} + W_s (N_1 - N_0)$$

I,36

En régime continu $\dot{N}_0 = 0$. Le rôle de la pompe étant de maintenir $N_1 = N_2$ et celui du C.H.S. de rendre $\frac{N_1}{N_2} = \frac{N_2}{N_3}$, nous avons, en définitive, égalité des populations des trois niveaux :

$$N_1 = N_2 = N_3$$

Nous trouvons dans ce cas

$$N_1 - N_0 = \frac{N}{4} \frac{h\nu_s}{kT} \left[\frac{\nu_P (2w_{03} + w_{02})}{\nu_s (w_{01} + w_{02} + w_{03} + W_s)} - \frac{w_{01} + w_{02} + w_{03}}{w_{01} + w_{02} + w_{03} + W_s} \right]$$

I,37

en négligeant $W_s \ll w_{ij}$ la puissance magnétique fournie devient :

$$P_{\text{magn}} = \frac{N}{4} \frac{(h\nu_s)^2}{kT} W_s \left[\frac{\nu_P}{\nu_s} \cdot \frac{2w_{03} + w_{02}}{w_{01} + w_{02} + w_{03}} - 1 \right]$$

I,38

En supposant les w_{ij} égaux, l'amélioration sur la puissance fournie est identique à celle du cas précédent par rapport aux quatre niveaux. La parenthèse vaut :

$$\left[\frac{\nu_P}{\nu_s} - 1 \right] \text{ au lieu de } \left[\frac{\nu_P}{2\nu_s} - 1 \right]$$

Dans le cas présent, le rôle du C.H.S. est, en quelque sorte, de dépeupler le niveau inférieur 3 au profit de l'ensemble des deux niveaux 1 et 2. Remarquons que cet effet est exactement celui du double pompage qui consiste à appliquer la puissance de pompe à deux transitions connexes de même fréquence pour égaliser les populations des trois niveaux. L'avantage du C.H.S. est qu'il permet cette égalisation, même si la transition $2 \leftrightarrow 3$ est interdite,

(ce que nous verrons être notre cas) car il n'obéit à aucune règle de sélection. D'autre part, cet effet demeure même lorsque le rapport harmonique au lieu d'être l'unité comme ici, a une valeur quelconque entière : 2, 3 etc. ou fractionnaire $2/3$, $3/4$ etc. pourvu que sa probabilité soit suffisante.

CHAPITRE II

CHOIX DU CRISTAL

ETUDE DE SES PROPRIETES PARAMAGNETIQUES.

Le but de cette étude n'étant pas de trouver un nouveau corps susceptible de donner un effet Maser, mais de construire un amplificateur, nous n'expliquerons que brièvement les conditions générales qui déterminent le choix d'un corps et plus longuement les mesures effectuées sur le corps choisi d'après les données de la littérature.

Données générales.

D'après les conditions de fonctionnement exposées au chapitre précédent, nous voyons qu'il faut prendre un ion paramagnétique inclus dans un cristal diamagnétique, dont les écarts de niveaux du terme fondamental soient de l'ordre de grandeur des fréquences utilisées, son spin doit être $S \gg 1$ pour donner $2S + 1 \geq 3$ niveaux au moins. Il est également préférable de prendre des ions qui n'aient pas de spin nucléaire de façon que la structure hyperfine n'élargisse pas les raies.

Parmi les ions du groupe du fer (configuration 3 d) l'ion Cr^{+++} semble présenter toutes les conditions requises. Il possède trois électrons 3 d, donc son spin est $3/2$ ⁽²⁷⁾ et nous verrons qu'en choisissant convenablement la matrice diamagnétique, les écarts entre les niveaux sont, pour des champs magnétiques relativement faibles, dans le domaine des hyperfréquences.

CHROMICYANURE.

Nous nous sommes tout d'abord intéressés au chrome inclus dans le cobalticyanure de potassium $\text{K}_3\text{Co}(\text{CN})_6$ qui donnait des écarts entre les niveaux d'énergie de l'ordre de grandeur des fréquences utilisées.

Nous avons nous-mêmes constitué un appareillage que nous décrivons au chapitre III, destiné à obtenir des monocristaux par voie aqueuse, mais les résultats obtenus n'ont pas répondu à nos espérances : nous obtenions bien de petits cristaux suffisamment propres qui nous ont permis de faire les mesures indiquées plus bas, mais il nous a été fort difficile d'obtenir les gros cristaux non maclés nécessaires pour remplir largement la cavité utilisée pour le Maser. De plus, la fragilité des cristaux rendait la taille délicate.

Description du cristal.

Bien que la structure cristalline de $K_3Co(CN)_6$ ne soit pas encore connue dans tous ses détails, l'étude de la morphologie a permis à Groth⁽²⁸⁾ d'en donner les grandes lignes. Le cristal est monoclinique avec $a : b : c = 1,2861 : 1 : 0,8093$; $\beta = 90^\circ 16'$. Les principaux plans apparents sur le cristal sont $a \{100\}$; $b \{010\}$; $m \{110\}$. Ils permettent de déterminer les axes a, b, c .

L'introduction d'impuretés de Cr ne modifie pas d'une manière importante la structure, car $K_3Cr(CN)_6$ est lui aussi monoclinique avec des valeurs a, b, c , très voisines ($a : b : c = 1,2873 : 1 : 0,8045$ et $\beta = 90^\circ 6'$).

Niveaux d'énergie.

Baker, Bleaney et Bowers⁽²⁹⁾ ont montré que le spectre de résonance pouvait être interprété comme dû à deux complexes magnétiquement similaires, mais orientés différemment par rapport aux axes de la maille, leurs axes principaux Oxyz étant repérés par rapport aux axes abc selon le tableau

	x	y	z
a	0,104	0	0,994
b	$\begin{matrix} + \\ - \end{matrix}$ 0,994	0	$\begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$ 0,104
c	0	$\begin{matrix} + \\ - \end{matrix}$ 1	0

Ils ont également montré que, pour chacun de ces complexes, l'Hamiltonien de spin était

$$\mathcal{H} = g \mu_B \vec{H} \cdot \vec{S} + D(S_z^2 - \frac{S(S+1)}{3}) + E(S_x^2 - S_y^2) \quad \text{II,1}$$

par rapport aux axes principaux du complexe

avec g : facteur de décomposition spectrale = 1,992
(sensiblement isotrope)

μ_B : magnéton de Bohr

S_x, S_y, S_z les composantes de l'opérateur spin

$$S = \frac{3}{2}$$

$$D = 0,0831 \pm 0,0010 \text{ cm}^{-1}$$

$$E = 0,0108 \pm 0,0010 \text{ cm}^{-1}$$

Les valeurs de D et E , données ci-dessus, résultent de mesures faites à 20°K. Il était fondamental pour nous de les connaître à 4,2°K puisque le Maser devait fonctionner à cette température.

Déduire les valeurs de g , D et E d'un spectre de résonance avec une bonne précision n'est pas aisé dans le cas du chromicyanure : les deux complexes étant orientés différemment, on trouve pour chaque orientation relative (H_0 , cristal) un assez grand nombre de raies qu'il faut relier pour tracer le diagramme complet. En fait, de la forme de l'Hamiltonien on peut tirer des conclusions qui simplifient beaucoup le problème et la détermination de D et E se fait par deux séries de mesures seulement. ~~L'annexe 3 décrit la méthode employée.~~

Nous avons négligé, dans ces mesures, les variations de g . En effet, l'écart par rapport à la valeur 2, de l'électron libre, est très faible ; par conséquent, la correction de température à apporter, due au déplacement des états orbitaux plus élevés est négligeable.

RUBIS.

Beaucoup plus prometteuses semblaient les études publiées sur le rubis⁽³⁰⁾⁽³¹⁾. Il pouvait être obtenu sous forme de gros monocristaux (quelques cm³) très propres*, c'est-à-dire sans macles et

* Les monocristaux de rubis ont été fabriqués spécialement par la Société "Le Rubis Synthétique des Alpes" à Jarrrie/Isère.

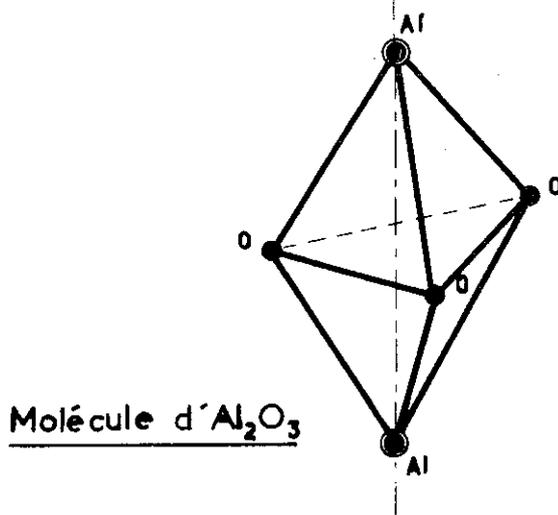


Fig:13

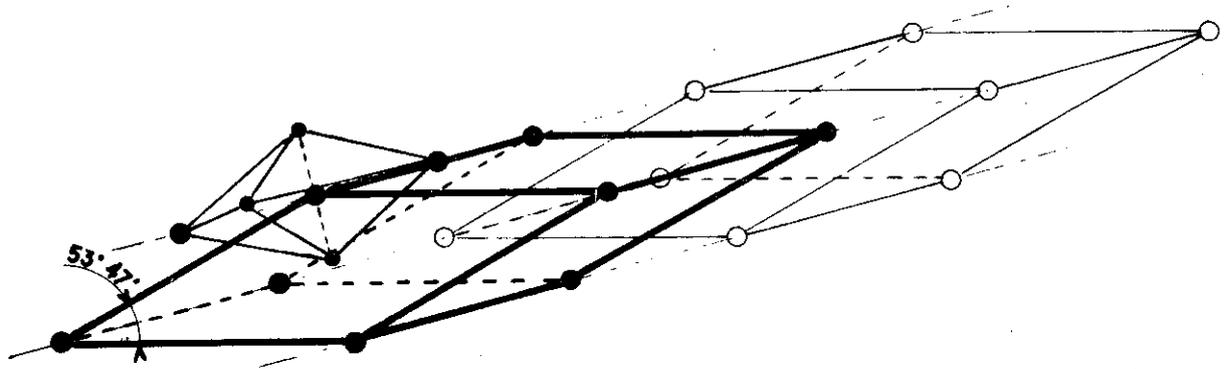


Fig:14

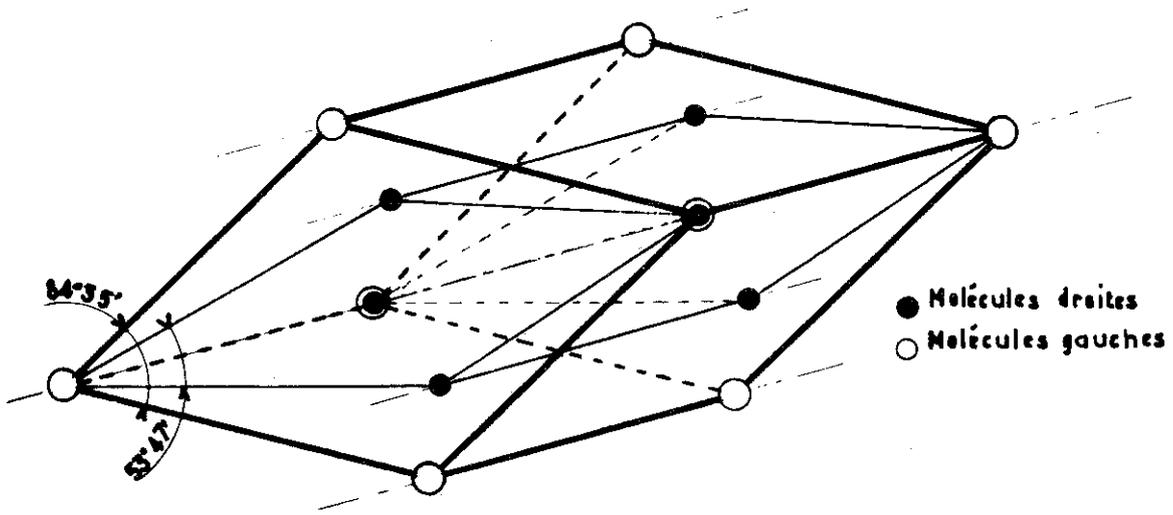


Fig:15

tels qu'ils ne présentent aucune anomalie magnétique et d'une robustesse mécanique à toute épreuve. Les temps de relaxation semblaient suffisamment longs pour permettre la saturation avec des puissances raisonnables.

Description du cristal.

Le rubis se présente comme un cristal d' Al_2O_3 (corindon) dont quelques ions Al^{+++} sont remplacés par du Cr^{+++} . La structure du corindon peut se décrire de façon assez simple de la manière suivante : (32)

La molécule d' Al_2O_3 a la forme d'un hexaèdre axé sur les deux aluminiums (fig. 13). Ce groupement se situe à chacun des sommets d'un rhomboèdre de telle façon que l'axe des Al soit parallèle à la diagonale principale (fig. 14). D'autres molécules identiques en constitution, mais inversées en position par rapport aux premières (symétrie par rapport à un plan passant par deux O et parallèle à l'axe des Al) se situent au sommet d'un deuxième rhomboèdre déduit du premier par translation le long de la diagonale principale et de la moitié de celle-ci. Les deux sortes de molécules sont dites droites et gauches. L'angle du rhomboèdre ainsi formé est de $53^\circ 47'$.

Une deuxième façon de se représenter cette structure consiste à partir d'un cube à faces centrées (type ClNa), à l'étirer selon la diagonale principale de façon à former un deuxième type de rhomboèdre et à remplacer les atomes de Cl par des molécules droites et les atomes de Na par des molécules gauches (fig. 15). L'angle de ce deuxième rhomboèdre est alors de $84^\circ 56'$.

La notion importante à retenir de cette description est la symétrie trigonale de l'entourage de l'ion Cr^{+++} autour de l'axe du rhomboèdre qui sera l'axe Oz. Le cristal est donc uniaxe et ses propriétés optiques et électriques possèdent une symétrie cylindrique qui se traduit par l'équivalence entre les axes Ox et Oy. Il existe deux sites distincts pour les chromes situés à la place des aluminiums. Toutefois comme le spin du chrome est < 2 , les deux sites sont équivalents au point de vue magnétique (33)* (ce ne serait pas vrai pour

* Nous démontrerons ceci dans le cas du spin $3/2$ (selon les indications de Y. Ayant).

Comme nous sommes en symétrie trigonale, le potentiel cristallin relatif à l'un des sites s'écrit⁽³⁴⁾ :

$$V = V_0 + V_1 e^{i3\varphi} + V_1^* e^{-i3\varphi} + V_2 e^{i6\varphi} + V_2^* e^{-i6\varphi}$$

V_1, V_2, V_3 étant des fonctions de ρ et θ uniquement. On passe d'un site à l'autre par une rotation α autour de Oz

$$V' = V_0 + V_1 e^{i3(\varphi - \alpha)} + \dots$$

Les états propres $|M'\rangle$ du deuxième site se déduisent de ceux du premier $|M\rangle$ par application de l'opérateur associé à la rotation (Oz, α) qui est ici $e^{-iS_z \alpha}$. Les deux sites seront indiscernables si les éléments de matrice de V par rapport aux $|M\rangle$ sont égaux à ceux de V' par rapport aux $|M'\rangle$

$$\langle M_j | V | M_1 \rangle = \langle M'_j | V' | M'_1 \rangle$$

En fait, nous ne nous intéressons ici qu'au seul terme $V_1 e^{i3\varphi}$ (le raisonnement serait analogue pour les termes suivants)

$$\begin{aligned} \langle M_j | V_1 e^{i3\varphi} | M_1 \rangle &= \langle M_j | e^{iS_z \alpha} V_1 e^{i3\varphi} e^{-i3\alpha} e^{-iS_z \alpha} | M_1 \rangle \\ &= \langle M_j | e^{iM_j \alpha} V_1 e^{i3\varphi} e^{-i3\alpha} e^{-iM_1 \alpha} | M_1 \rangle \\ &= e^{i\alpha(M_j - M_1 - 3)} \langle M_j | V_1 e^{i3\varphi} | M_1 \rangle \end{aligned}$$

Il faut que $M_j = M_1 + 3$ puisque α est quelconque. Les seuls éléments de matrice de V_1 non nuls doivent donc être situés aux deux extrémités de la deuxième diagonale pour que les deux sites soient indiscernables.

Montrons qu'il en est ainsi :

Soient deux états décrits par $|U\rangle$ et $|U'\rangle$ tels qu'on passe de $|U\rangle$ à $|U'\rangle$ par une rotation de $+\alpha$ autour de Oz. La valeur moyenne de l'opérateur $V_1(\rho, \theta) e^{iM\varphi}$ qui nous intéresse est la même

qu'on la prenne entre les états $|U\rangle$ ou $|U'\rangle$ pourvu qu'on ait tourné les axes de l'angle α

$$\langle U' | V_1 e^{i\mu(\varphi-\alpha)} | U' \rangle = \langle U | V_1 e^{i\mu\varphi} | U \rangle$$

Nous négligeons $V_1(\rho, \theta)$

$$\langle U | e^{iS_z\alpha} e^{i\mu\varphi} e^{-i\mu\alpha} e^{-iS_z\alpha} | U \rangle = \langle U | e^{i\mu\varphi} | U \rangle$$

Cette relation doit être vérifiée quels que soient les états $|U\rangle$
 Nous pouvons donc écrire la relation entre opérateurs :

$$e^{iS_z\alpha} e^{i\mu\varphi} e^{-i\mu\alpha} e^{-iS_z\alpha} = e^{i\mu\varphi}$$

Dans notre cas particulier des états $|M_1\rangle$

$$\langle M_j | e^{iS_z\alpha} e^{i\mu\varphi} e^{-i\mu\alpha} e^{-iS_z\alpha} | M_1 \rangle = \langle M_j | e^{i\mu\varphi} | M_1 \rangle$$

$$\langle M_j | e^{iM_j\alpha} e^{i\mu\varphi} e^{-i\mu\alpha} e^{-iM_1\alpha} | M_1 \rangle = \langle M_j | e^{i\mu\varphi} | M_1 \rangle$$

$$e^{i\alpha(M_j - M_1 - \mu)} \langle M_j | e^{i\mu\varphi} | M_1 \rangle = \langle M_j | e^{i\mu\varphi} | M_1 \rangle$$

Cette relation doit être vérifiée quel que soit α

il faut donc

$$M_j = M_1 + \mu$$

ici $\mu = 3$

Les seuls éléments non nuls sont situés aux extrémités de la deuxième diagonale.

Par un raisonnement analogue en utilisant la symétrie trigonale, on peut montrer que les seuls éléments de matrice V_0 non nuls sont situés sur la diagonale principale ou aux extrémités de la deuxième diagonale.

Le principe de Kramers ⁽³⁴⁾ nous indique, d'autre part, que pour un spin $3/2$ il ne peut y avoir à champ nul que deux niveaux : il faut de toute évidence que les seuls éléments de matrice non nuls de V_{total}

le Fe^{+++} $S = 7/2$ ou Mn^{+++} $S = 5/2$). La symétrie cylindrique reste donc rigoureuse.

Méthode de calcul des niveaux et des probabilités de transitions (35)

Dans le cas de l'ion Cr^{+++} du rubis (36) la symétrie trigonale détermine un fondamental singulet orbital, dont la quadruple dégénérescence de spin est en partie levée à champ nul par le couplage spin-orbite et le champ électrique dû à l'environnement cristallin. Il reste alors un couple de niveaux deux fois dégénérés. L'Hamiltonien de spin du rubis fut donné pour la première fois par Manenkov et Prokhorov (31) qui précisèrent également les valeurs de D et de $g_{//}$ et g_{\perp} .

En choisissant l'axe Oz du cristal comme axe de quantification, il prend la forme suivante :

$$\mathcal{H} = D \left[S_z^2 - \frac{1}{3} S(S+1) \right] + \mu_B \left[g_{//} S_z H_z + g_{\perp} (S_x H_x + S_y H_y) \right] \quad \text{II,2}$$

où $S = 3/2$

$g_{//}$ et g_{\perp} les facteurs de décomposition spectrale respectivement parallèle et perpendiculaire à l'axe Oz .

$2D$ représente la séparation des deux doublets à champ nul
 $= 0,3830 \text{ cm}^{-1} = 11,493 \text{ KMHz}$ d'après Schulz Du Bois (30)
 $= 0,3824 \text{ cm}^{-1}$ d'après Prokhorov (31)
 $= 11,46 \text{ KMHz}$ sans plus de précision d'après Chang et Siegman (36)

soient situés sur la diagonale principale et que, de plus, ils soient égaux deux à deux.

En conclusion, la symétrie trigonale du potentiel cristallin entraîne pour un spin $3/2$ la symétrie cylindrique : l'application du champ continu ne modifie pas cette symétrie.

Puisque $g_{//}$ et g_{\perp} ont des valeurs très voisines, en leur donnant une valeur commune g , il est possible de simplifier l'expression de l'Hamiltonien :

$$\mathcal{H} = D \left[S_z^2 - \frac{1}{3} S(S+1) \right] + g \mu_B \vec{H} \cdot \vec{S} \quad \text{II,3}$$

Munis de cette expression, nous pouvons mettre cette équation sous forme matricielle

$$\mathcal{H} |E_j\rangle = E_j |E_j\rangle \quad \text{II,4}$$

si les $|E_j\rangle$ sont les divers états décrivant l'ion.

La solution de l'équation séculaire

$$\text{Det} \left[\mathcal{H} - E_j 1 \right] = 0 \text{ (ici du 4e degré) II,5}$$

nous donne les valeurs des divers niveaux

$$E_j = E_j(H, \theta)$$

En fait dès que $\theta \neq 0$ les états $|E_j\rangle$ sont décrits par des combinaisons linéaires des états $|M\rangle$ caractéristiques de la base choisie en prenant Oz comme axe de quantification. Ils peuvent se mettre sous la forme

$$|E_j\rangle = a_j |3/2\rangle + b_j |1/2\rangle + c_j |-1/2\rangle + d_j |-3/2\rangle \quad \text{II,6}$$

On trouve la valeur des coefficients a_j etc, en résolvant simultanément les quatre équations du groupe (II,4) après avoir remplacé les E_j par les valeurs trouvées et en utilisant les relations suivantes :

$$S_x = \frac{S_+ + S_-}{2}$$

$$S_z |M\rangle = M |M\rangle$$

et

$$S_+ |M\rangle = \sqrt{S(S+1) - M(M+1)} |M+1\rangle$$

$$S_y = \frac{S_+ - S_-}{2i}$$

$$S_- |M\rangle = \sqrt{S(S+1) - M(M-1)} |M-1\rangle$$

Les coefficients $a_j \dots$ sont évidemment fonction de la valeur du champ H_0 et de son orientation par rapport au cristal.

Des règles de sélection rigoureuses régissent les transitions entre les états $|M\rangle$ bien définis, ce sont

$$\left. \begin{aligned} \Delta M = 0 \\ \Delta M = \pm 1 \end{aligned} \right\} \text{ sont seules autorisées}$$

$$\Delta M = \pm 2 \quad \text{sont interdites.}$$

On détermine les probabilités de transitions induites entre les états $|E_j\rangle$ à partir de ces règles (sachant que les $|E_j\rangle$ sont des mélanges des états $|M\rangle$) et en calculant les carrés des éléments de la matrice fixée par l'opération $\vec{H} \cdot \vec{S}$:

$$W = \left| \langle E_i | 2 \mu_B \vec{H} \cdot \vec{S} | E_j \rangle \right|^2 \quad \text{II,7}$$

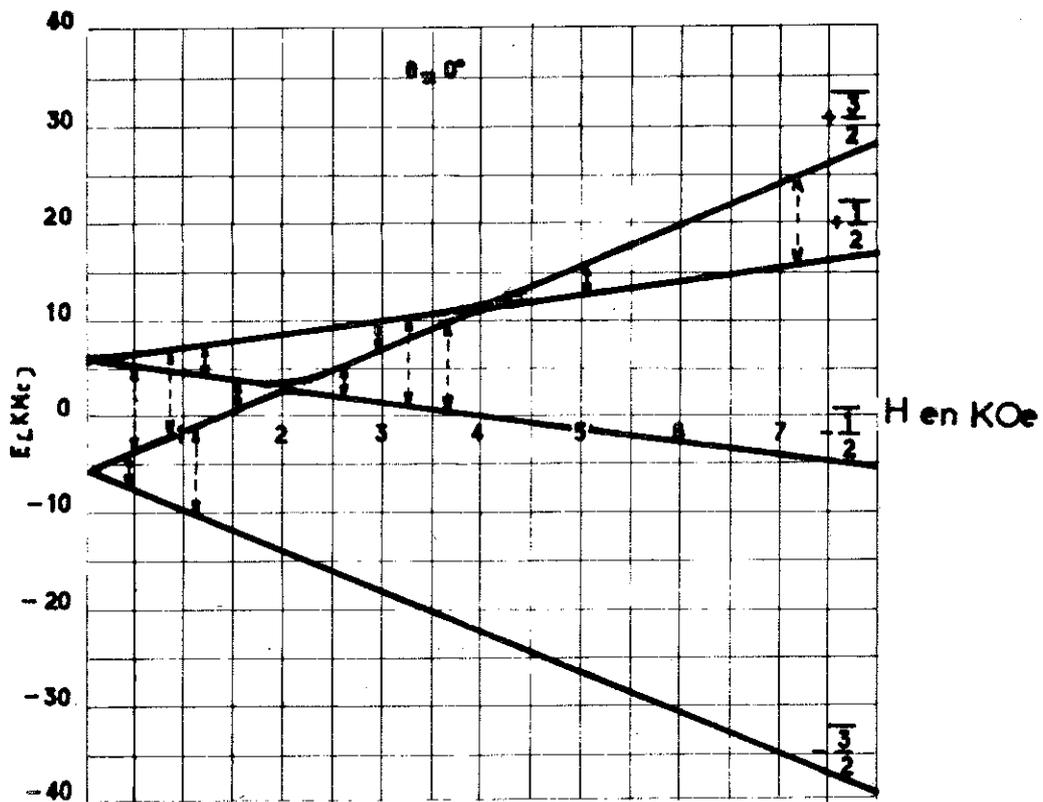
Ces calculs sont fort volumineux dans le cas général et ne peuvent être effectués que par une machine à calculer. Ils peuvent se mettre sous la forme

$$W = \left| (\zeta_1 \phi_1 + \zeta_3 \phi_3 + i \zeta_2 \phi_2) \mu_B H_{rf} \right|^2 \quad \text{II,8}$$

où $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ sont des éléments calculés pour chaque valeur de H_0 et de son orientation par rapport à l'axe cristallin et ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 les cosinus directeurs du champ H_{rf} .

Dans le cas de l'angle $\theta = 0^\circ$ entre H_0 et Oz l'équation II,7 se simplifie, car les états $|E_j\rangle$ sont décrits simplement dans la base $|M\rangle$ (un seul des $a_j \dots$ est $\neq 0$). De même à champ intense, si on choisit l'axe de quantification selon le champ qui régit alors la symétrie du problème, les $|E_j\rangle$ sont décrits directement par des $|\bar{M}\rangle$ (nous mettons la barre sur M pour les distinguer des précédents) qui est la nouvelle base relative au choix de la direction du champ comme axe de quantification.

Dans la suite de ce texte nous caractérisons même à champ faible chaque $|E_j\rangle$ par sa valeur à grand champ qui est $|\bar{M}\rangle$



↑ Raies 9000Mc
↓ Raies 3000Mc

Diagramme de niveaux d'énergie du rubi

Fig:16

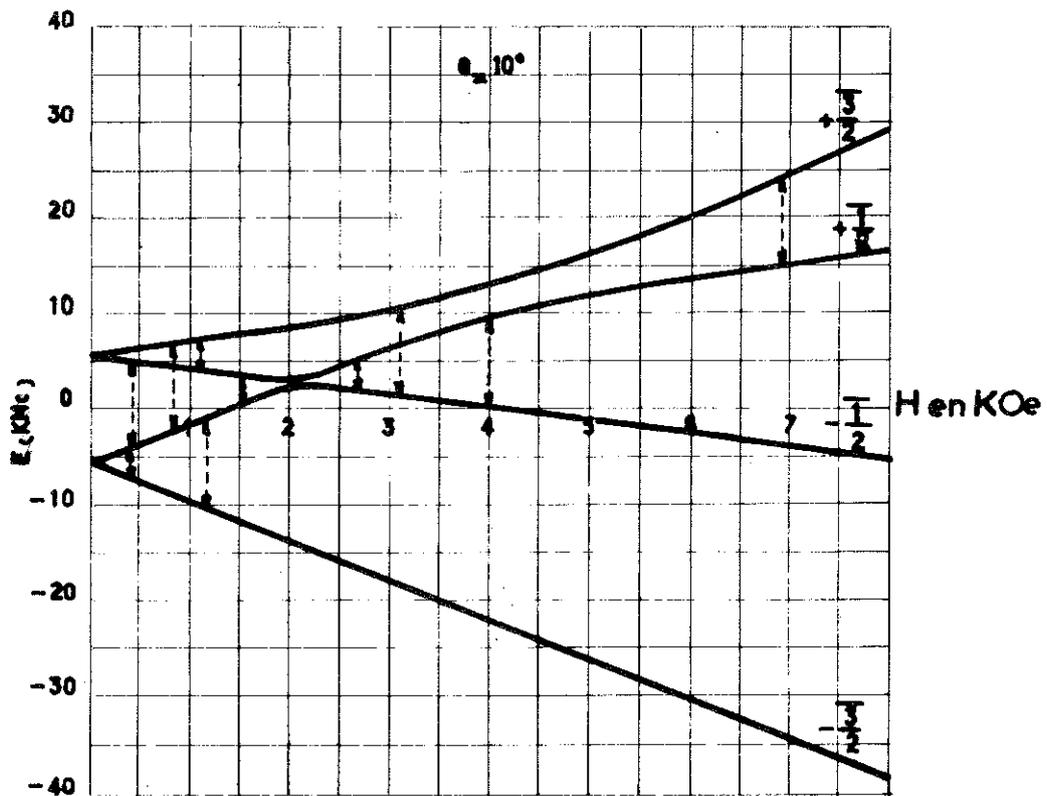


Diagramme de niveaux d'énergie

Fig:17

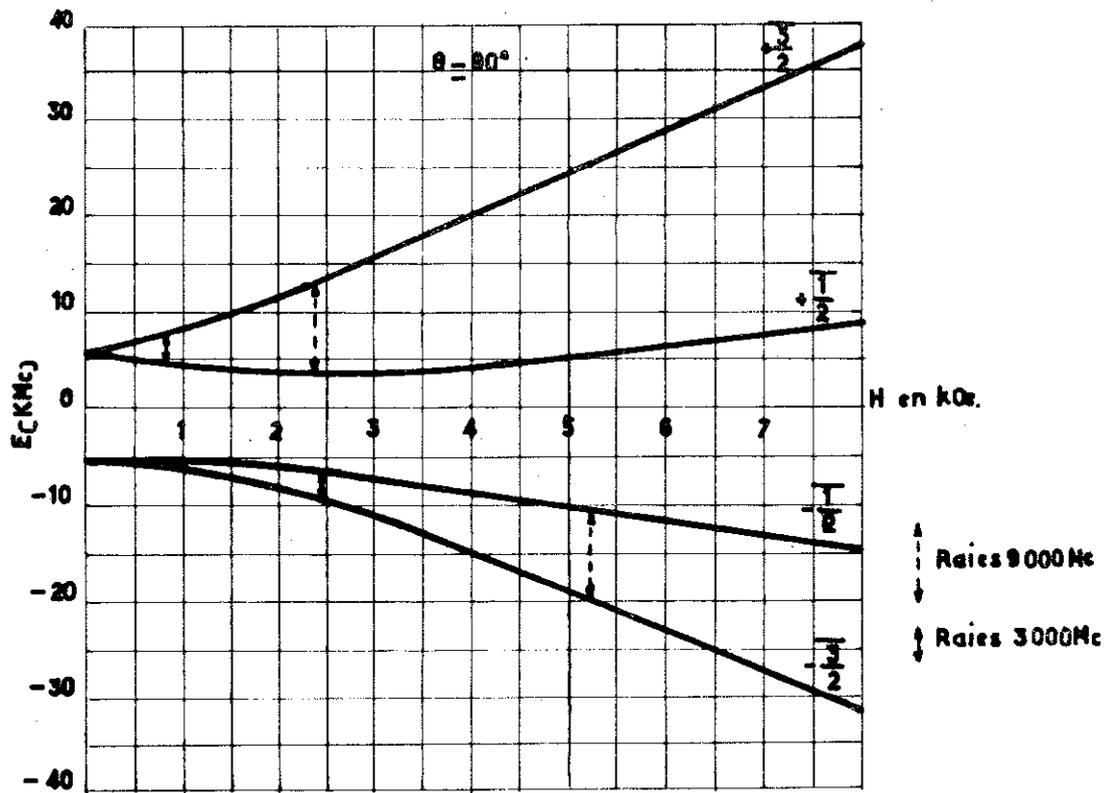


Diagramme de niveaux d'énergie
du rubi

Fig:18

Tracé des diagrammes de raies.

Nous n'avons reçu ces calculs numériques, effectués dans le rapport de Stanford⁽³⁶⁾ que fort tard. D'ailleurs, ils ne nous ont pas permis une grande précision dans le tracé des diagrammes des raies dans les régions qui nous ont intéressés. Nous avons donc tracé directement le diagramme des raies du rubis dans les deux bandes de fréquences 3 et 10 cm qui nous intéressaient (fig. 19).

Ce diagramme pouvait être tracé à température ambiante, car la position des niveaux d'énergie n'est que peu modifiée par la température dans le cas du rubis (Kikuchi et al.⁽³³⁾ donnent 1 % de variation sur D et 0,5 % sur g entre 300°K et 4,2°K).

Sur la figure 16 il pourrait paraître choquant de voir indiquées comme interdites des transitions $\Delta M = \pm 1$ à 0° (où on retrouve des états purs) ceci est dû au fait que la numérotation des niveaux a été faite arbitrairement selon la notation quantique $|\overline{M}\rangle$, alors que celle-ci, d'après notre choix, n'est valable que pour les champs intenses.

Ce diagramme a d'ailleurs été comparé aux diagrammes de niveaux déduits des valeurs numériques données dans le rapport de Stanford pour $\theta = (\vec{H}_0, \vec{Oz})$ variant de 10° en 10° (fig. 16, 17, 18). Les raies du 10 cm et du 3 cm y sont indiquées par des flèches verticales. L'accord entre les deux est excellent.

Points de fonctionnement.

Les points de fonctionnement Maser sont donnés par les intersections des raies correspondant aux deux fréquences de pompe et de signal (fig. 19), neuf croisements apparaissent A,B,C,D,E,F,G,H,I. Mais un examen attentif de la disposition des niveaux à chaque point nous en fait éliminer un certain nombre. Il faut, en effet, qu'il y ait un niveau commun au signal et à la pompe et que ce niveau commun se situe à l'extérieur de l'intervalle compris entre les deux autres niveaux intéressés, soit par le signal, soit par la pompe. La numérotation des niveaux $-\overline{3/2}, -\overline{1/2}, +\overline{1/2}, +\overline{3/2}$ étant faite par énergie croissante, il n'y a pas d'ambiguïté :

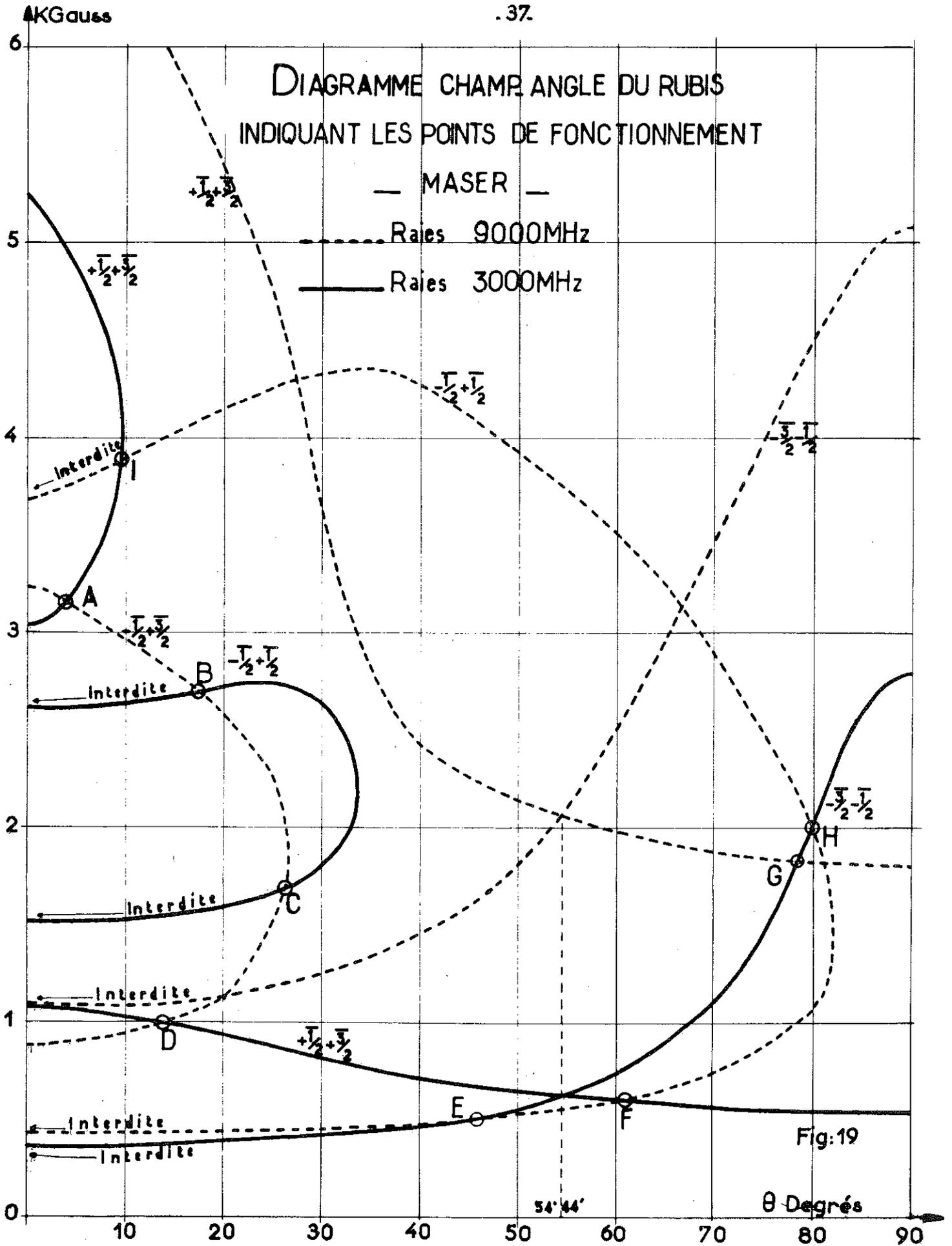


Fig:19

	Signal	Pompe	
Point A	$+ \sqrt{1/2}, + \sqrt{3/2}$	$- \sqrt{1/2}, + \sqrt{3/2}$	convient
Points B et C	$- \sqrt{1/2}, + \sqrt{1/2}$	$- \sqrt{1/2}, + \sqrt{3/2}$	conviennent
Point D	$+ \sqrt{1/2}, + \sqrt{3/2}$	$- \sqrt{1/2}, + \sqrt{3/2}$	convient
Points E et F	$- \sqrt{3/2}, - \sqrt{1/2}$	$- \sqrt{1/2}, + \sqrt{1/2}$	ne conviennent pas
Points F et I	$+ \sqrt{1/2}, + \sqrt{3/2}$	$- \sqrt{1/2}, + \sqrt{1/2}$	ne conviennent pas
Point G	$- \sqrt{3/2}, - \sqrt{1/2}$	$+ \sqrt{1/2}, + \sqrt{3/2}$	ne convient pas

Il ne reste que quatre points utilisables A,B,C,D situés tous les quatre entre les niveaux $\sqrt{3/2}$ et $-\sqrt{1/2}$ pour la pompe.

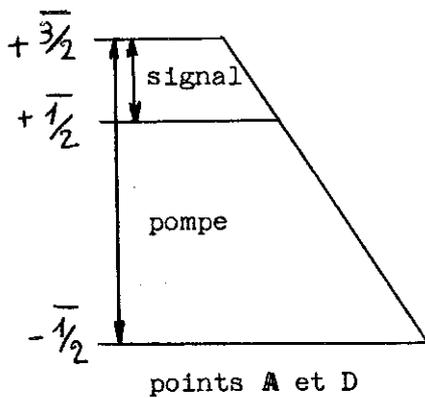


fig : 20

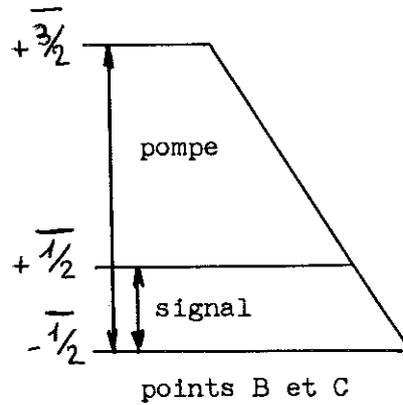


fig : 21

La disposition des niveaux aux points A et D est indiquée fig. 20. Celle des points B et C fig. 21. Dans cette région nous avons tracé les diagrammes expérimentaux des raies correspondant à trois fréquences déterminées dans chacune des deux bandes. Puis nous les avons interpolés de façon à obtenir un diagramme complet des raies de 100 MHz en 100 MHz pour les deux bandes. Nous donnons un extrait de ce diagramme fig. 22.

Aux environs du point D la raie $- \sqrt{3/2}, - \sqrt{1/2}$ en 3 cm n'apparaît pas contrairement au diagramme fig. 16, car elle est rigoureusement interdite pour $\theta = 0^\circ$ et n'est que difficilement observable pour des angles petits, d'autant plus qu'elle est masquée par la raie $- \sqrt{1/2}, + \sqrt{3/2}$ qui reste très voisine.

POINTS DE FONCTIONNEMENT MASER DANS LE RUBIS

SIGNAL BANDE S: 3000Mc
POMPE BANDE X: 9000Mc

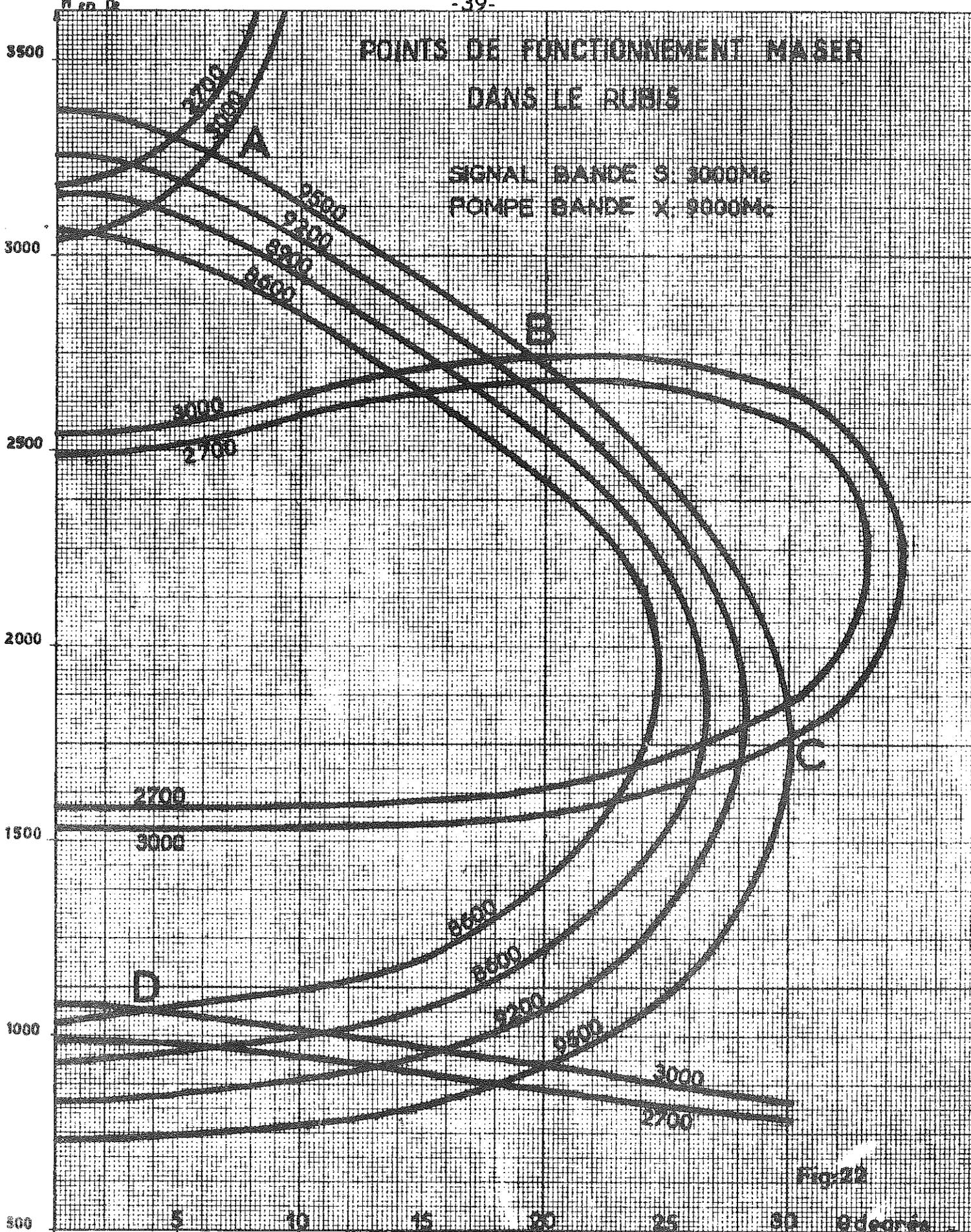


Fig:22

90degrees

En résumé, pour déterminer concrètement un point de fonctionnement Maser nous disposons de quatre paramètres: deux fréquences, la valeur du champ et l'angle θ entre celui-ci et l'axe du cristal. Mais deux seulement sont indépendants. Le plus souvent la fréquence signal est imposée par l'utilisateur et la fréquence de pompe par une résonance de la cavité (nous reparlerons de ce problème ultérieurement). On règle alors la valeur du champ et l'angle θ pour obtenir la coïncidence des raies.

Courbe de C.H.S.

Il n'en est pas de même si nous tirons profit du couplage harmonique de spin comme nous allons le voir dans un instant. En traçant d'après le rapport de Chang et Siegman⁽³⁶⁾ le diagramme complet des raies au voisinage du point D, y compris la raie interdite - $\sqrt{3}/2$, - $\sqrt{1}/2$ que nous appellerons fréquence image (fig. 23), nous nous apercevons qu'il existe toute une série de points pour lesquels la fréquence image est égale à celle de pompe, ils sont indiqués par la courbe en pointillé. Le schéma des niveaux est indiqué sur la figure. Nous nous trouvons donc dans les conditions du couplage harmonique de spin étudié théoriquement dans la première partie et plus précisément à titre de troisième exemple p. 21. La condition de fonctionnement en C.H.S. se traduit par une relation liant les deux fréquences de pompe et de signal si bien que, des quatre paramètres de départ, un seul reste indépendant. Nous verrons plus loin les difficultés concrètes de réalisation qu'il faut alors résoudre.

Pour trouver cette relation entre les fréquences, les données de Stanford n'étaient pas suffisamment précises. Aussi, avons nous été amenés à recalculer les valeurs propres de l'Hamiltonien dans le cas des petits angles selon une méthode suggérée par Y. Ayant et dont le détail figure en annexe II. Le résultat en est la courbe dite de C.H.S. fig. 24, dont nous avons pu vérifier l'exactitude expérimentalement (la courbe que nous avons primitivement tirée du rapport de Stanford était par trop erronée). La fréquence minimum de signal utilisable dans ces conditions est exactement 2 873 MHz. Il n'y a pas de limite proche du côté des fréquences élevées de la bande.

DÉTERMINATION DU POINT DE FONCTIONNEMENT MASER UTILISANT LE COUPLAGE HARMONIQUE DE SPIN

POINT D

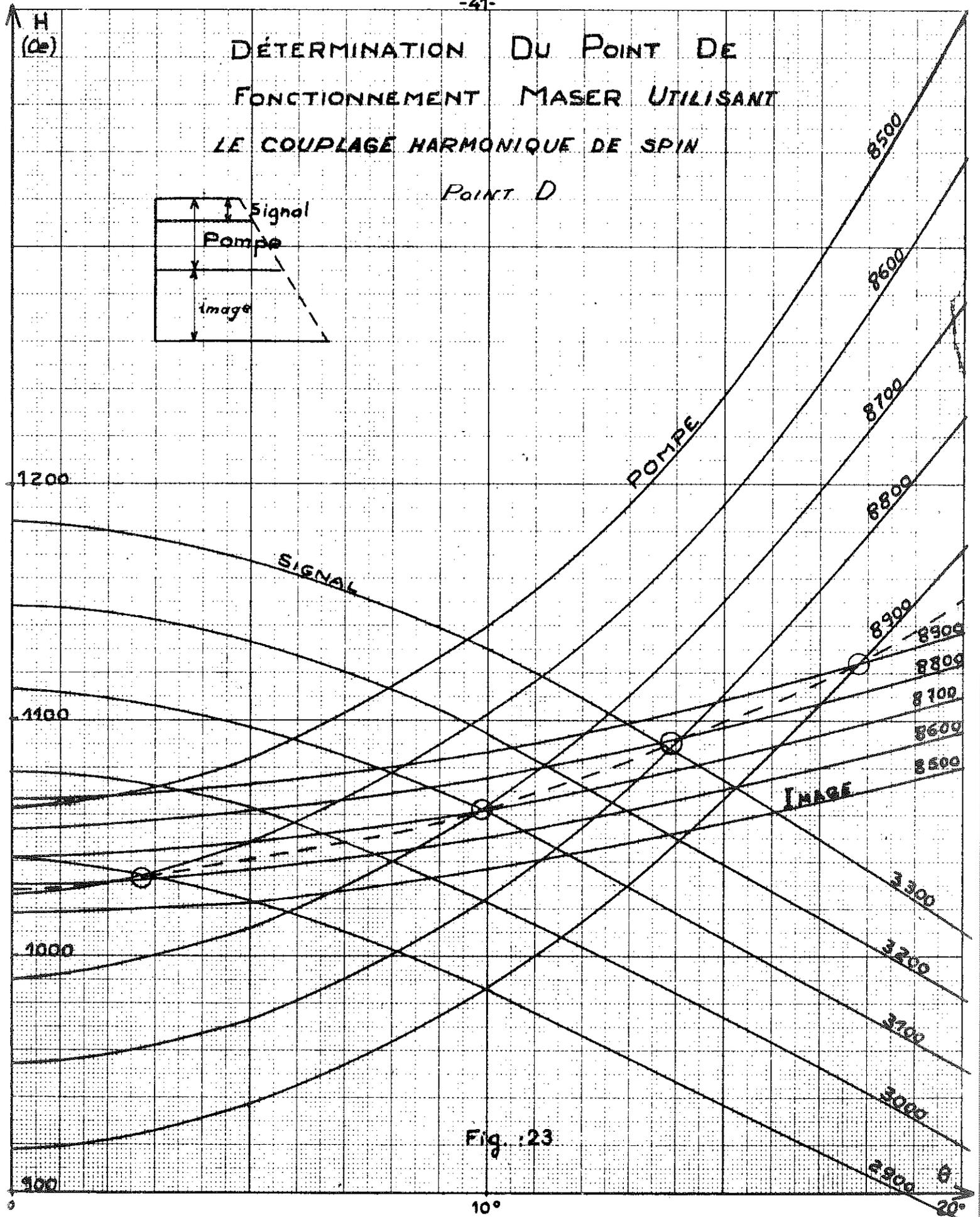
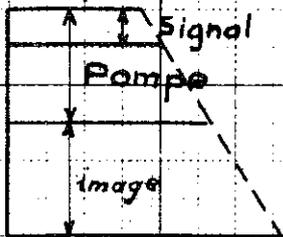


Fig. :23

COURBE DE FONCTIONNEMENT MASER EN UTILISANT LE COUPLAGE HARMONIQUE DE SPIN

$\theta = (\hat{0}_z, \hat{H}_0)$ est porté comme paramètre

Fréquence de
signal en Mhz

3200

3100

3000

2900

2800

8600

8700

8800

Fréquence de
pompe en Mhz

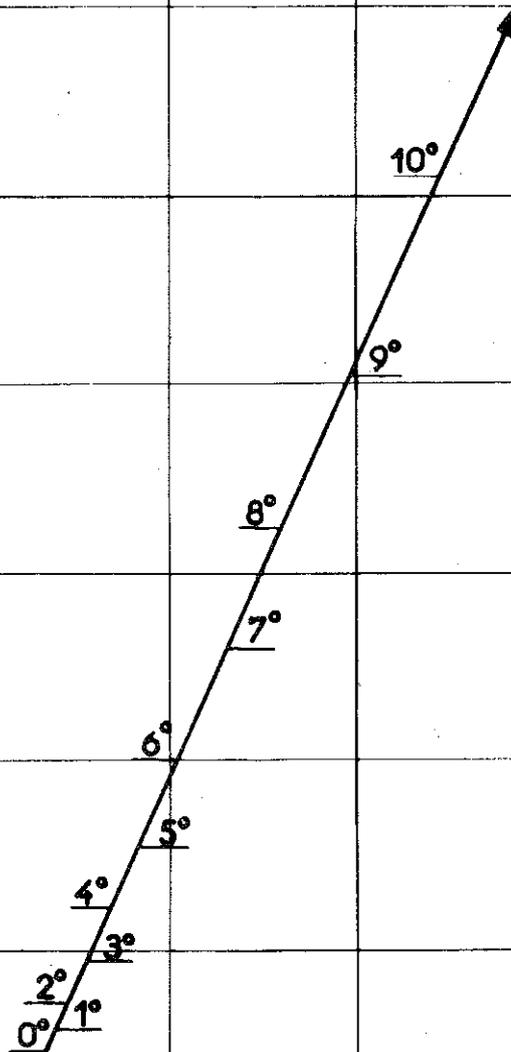
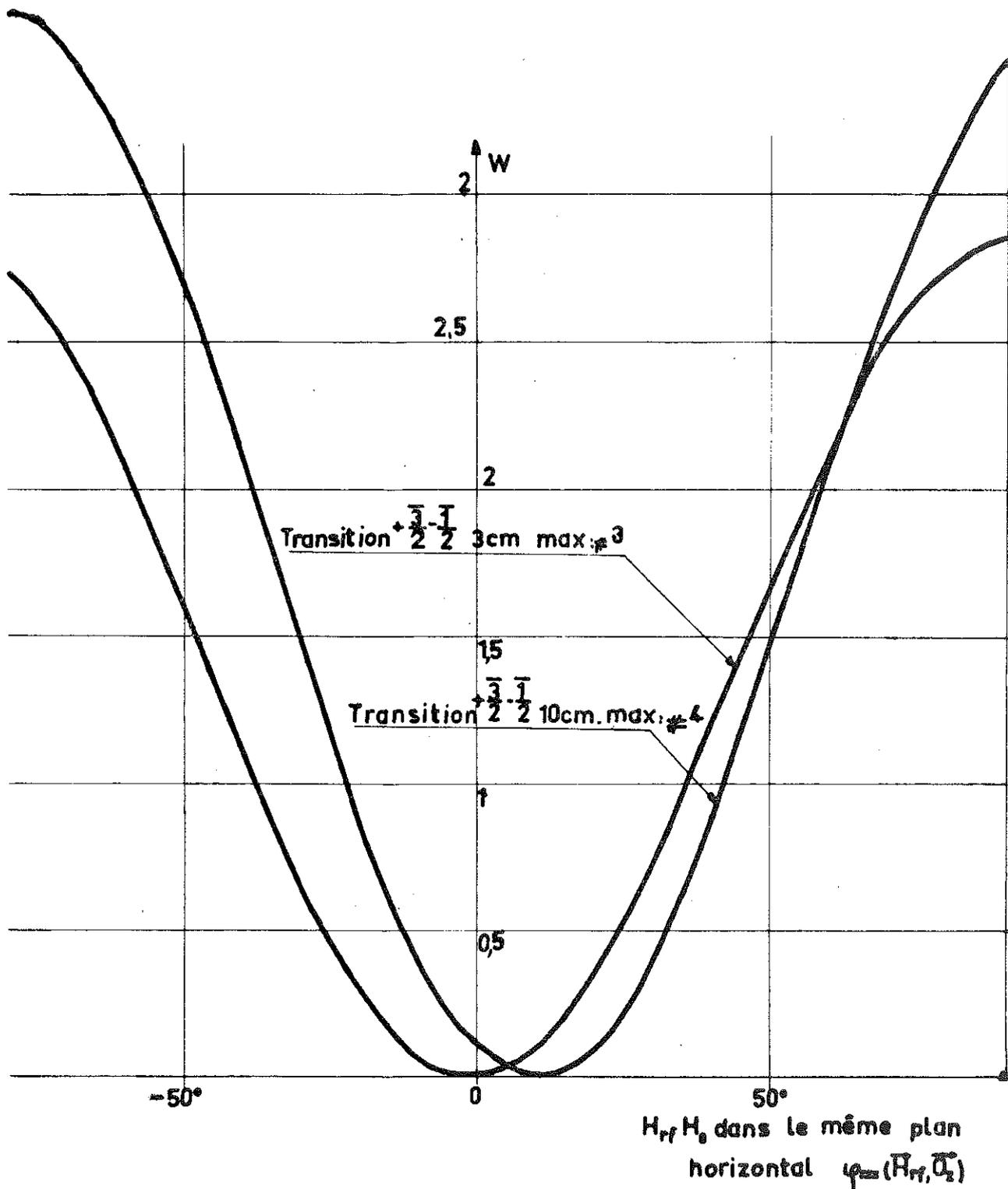
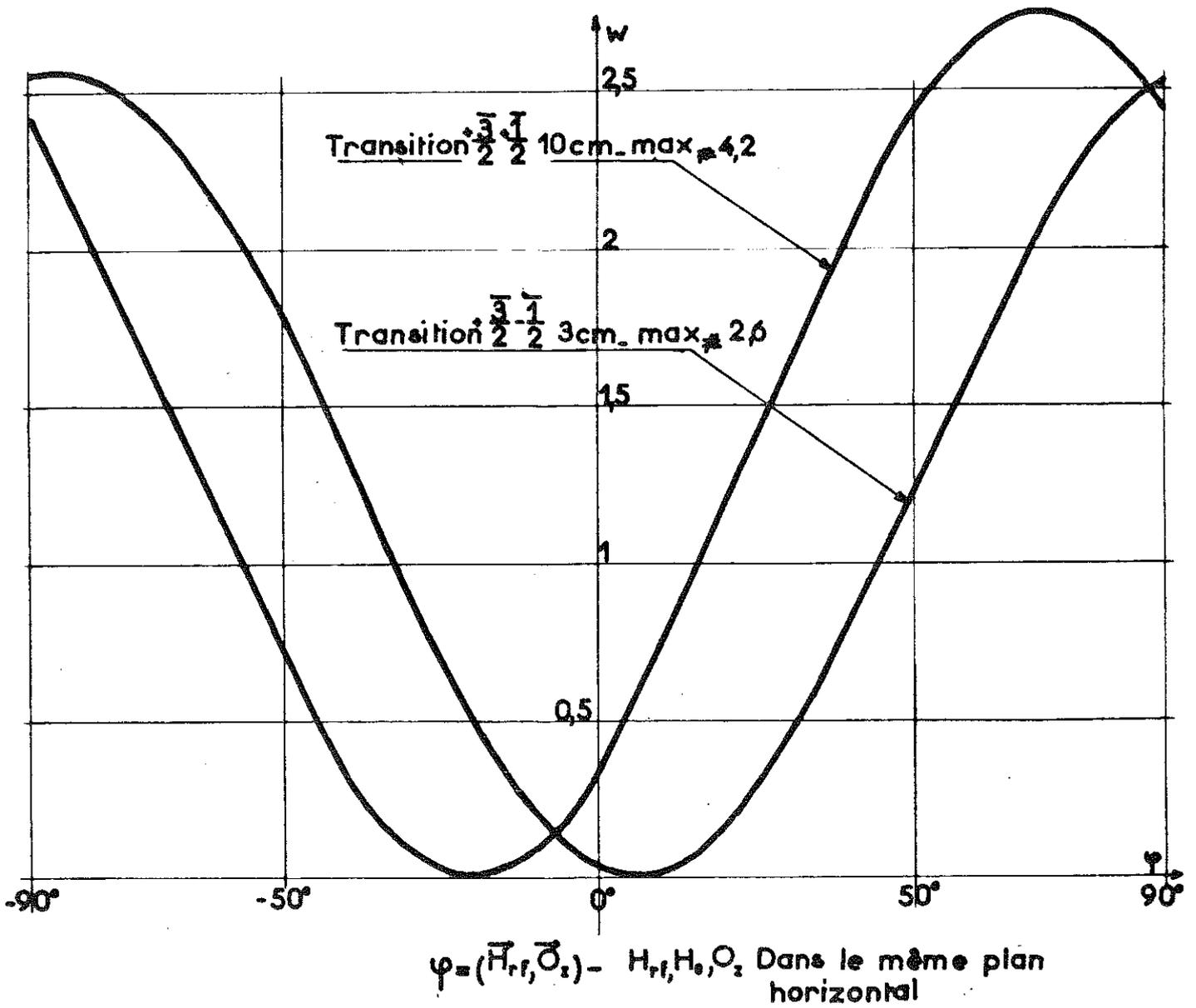


Fig:24



Point D probabilités de transitions pour $\theta = 10^\circ$

Fig:25



Point D. Probabilités de transitions pour: $\theta = 20^\circ$

Fig:26

Calcul des probabilités de transitions induites.

Un calcul théorique reste encore à faire avant de commencer la réalisation concrète du Maser : c'est la détermination de l'orientation du champ \vec{H}_{rf} (par rapport aux axes du cristal) nécessaire pour obtenir de bonnes probabilités de transitions à chacun des points de fonctionnement et pour les deux transitions utilisées.

Nous avons utilisé une polarisation rectiligne le problème était donc relativement simple. Ces calculs ont été conduits comme déjà indiqué p.33. Dans la plupart des cas (fig. 25, 26) nous avons placé arbitrairement \vec{H}_{rf} dans un plan horizontal, dans lequel se situaient déjà \vec{Oz} et \vec{H}_0 (ce dernier choix devait nous permettre d'atteindre l'angle $\theta = 0^\circ$). Cette position de \vec{H}_{rf} était déterminée par des conditions expérimentales. Le trièdre de référence est tel que \vec{H}_0 se trouve dans le plan xOz, la variable φ est l'angle entre \vec{H}_{rf} et \vec{Oz} son signe est indiqué sur la figure ci-dessous.

Dans le cas de la figure 28, point D, $\theta = 20^\circ$, nous n'avions plus besoin d'atteindre l'angle $\theta = 0^\circ$.

Aussi avons nous placé \vec{Oz} à 10° du plan horizontal contenant \vec{H}_0 et \vec{H}_{rf} , la variable φ est alors l'angle entre \vec{H}_{rf} et la projection de \vec{Oz} sur le plan horizontal.

L'écart avec les autres courbes du point D est minime. Les éléments de matrice n'étant pas normalisés les valeurs maximum sont données à titre indicatif. Elles sont valables également en valeur relative d'une transition à l'autre.

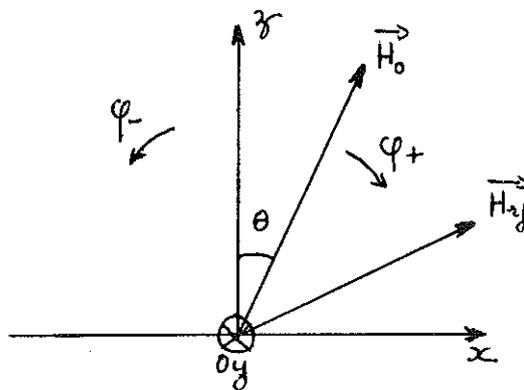
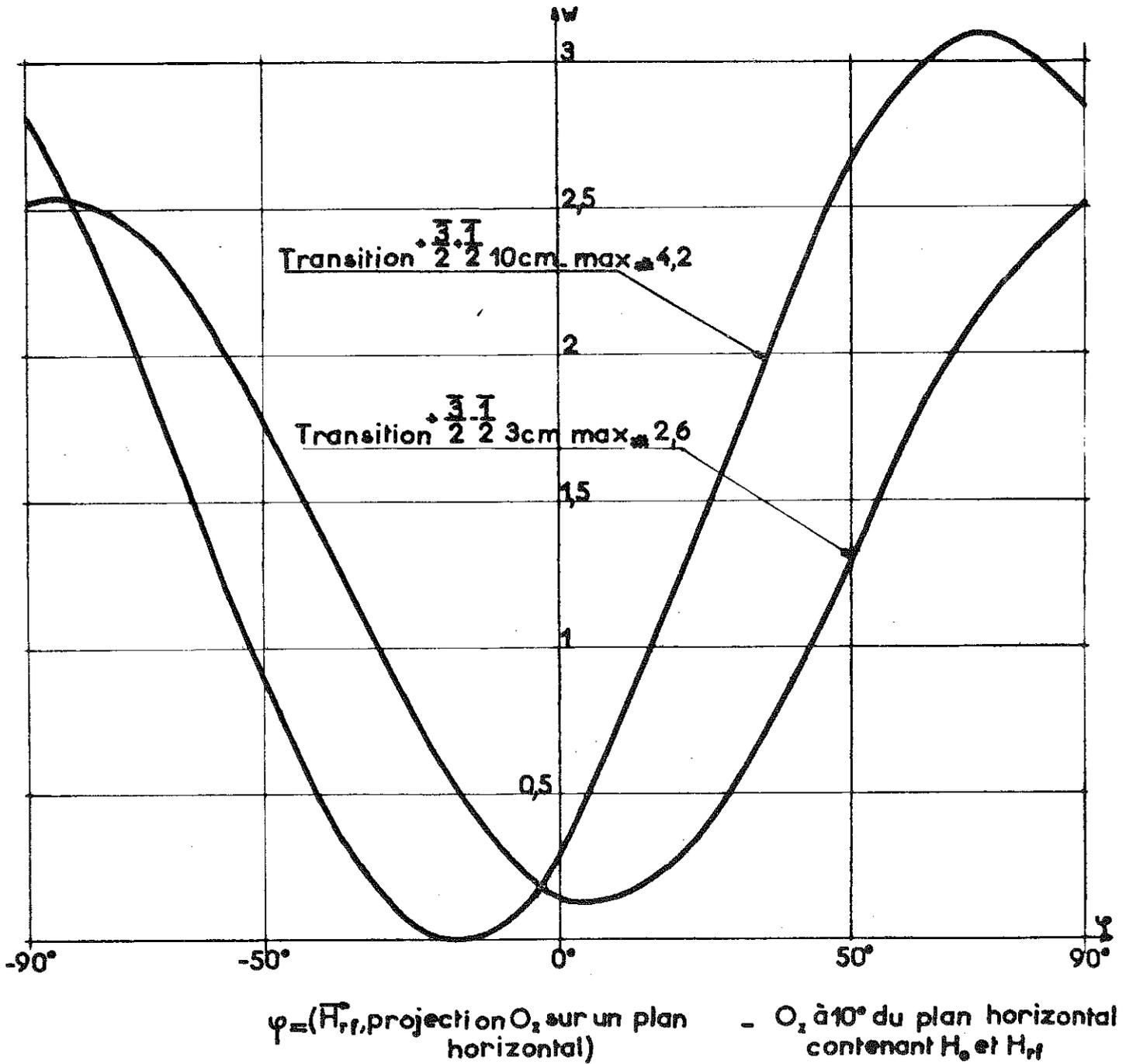


fig : 27



Point D. Probabilités de transitions pour $\theta = 20^\circ$

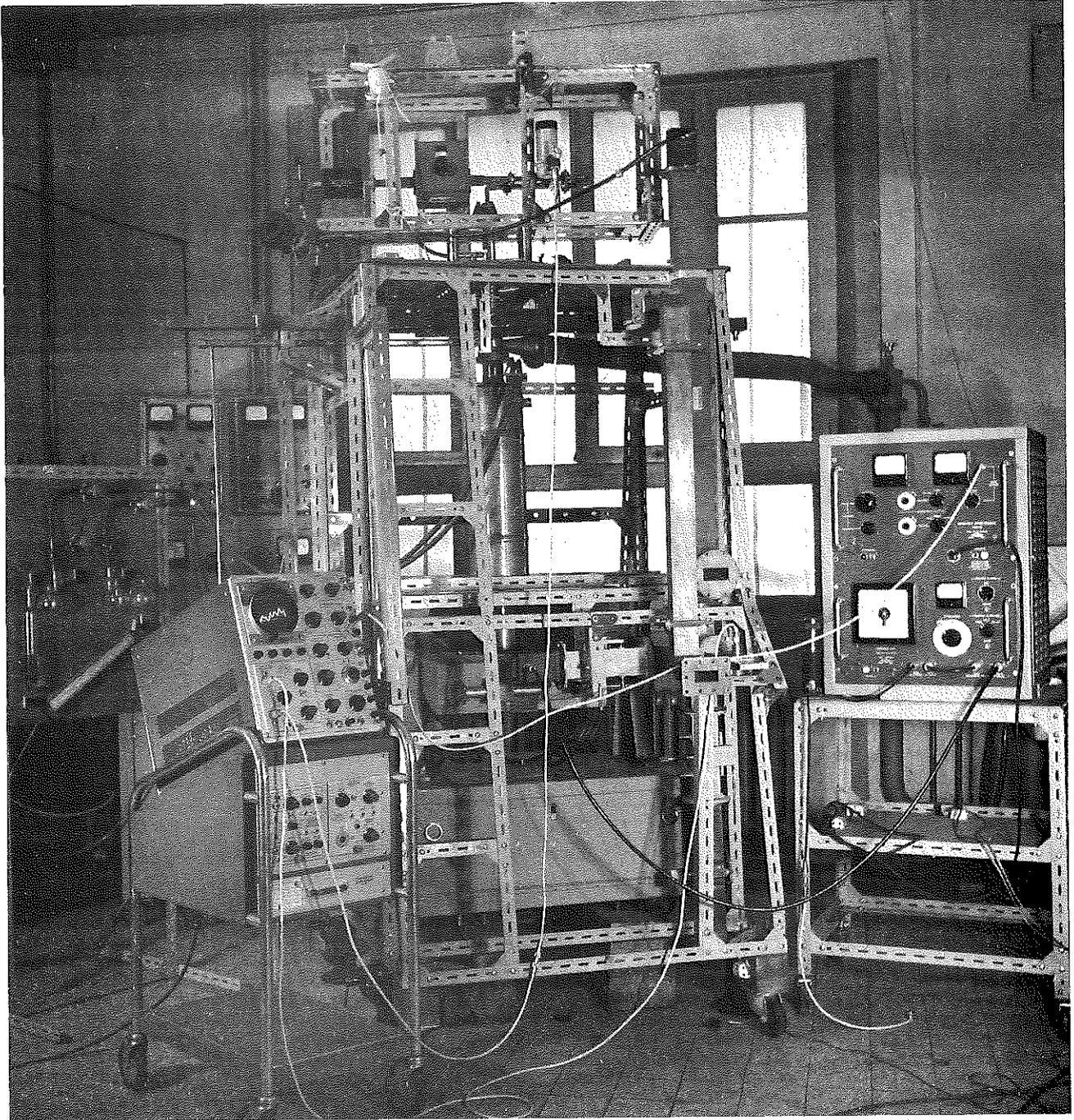
Fig. 28

Probabilités de transitions naturelles.

Il faudrait évidemment déterminer encore la valeur des probabilités naturelles w_{ij} , telles qu'elles apparaissent dans les formules écrites au chapitre I. Elles sont, en effet, primordiales pour le fonctionnement du Maser. Mais nous avançons là dans un domaine encore mal élucidé de la physique. On pourrait parvenir à en avoir un ordre de grandeur par le biais des temps de relaxation, dont elles sont des combinaisons des inverses. Mais des difficultés techniques apparaissent : il faudrait disposer de l'appareillage nécessaire aux mesures de temps de relaxation dans

$$N = \sum_0^{n-1} n' \text{ bandes de fréquences différentes}$$

si n est le nombre de niveaux considérés. Dans le cas de quatre niveaux $N = 6$, ce qui représente des difficultés sérieuses. D'autre part et surtout, la précision dans ce type de mesures est difficile à obtenir et les résultats auxquels on aboutirait sur les w_{ij} n'auraient plus beaucoup de signification.



Ensemble Montage M.A.S.E.R.

Fig: 29

CHAPITRE III

DISPOSITIFS EXPERIMENTAUX.

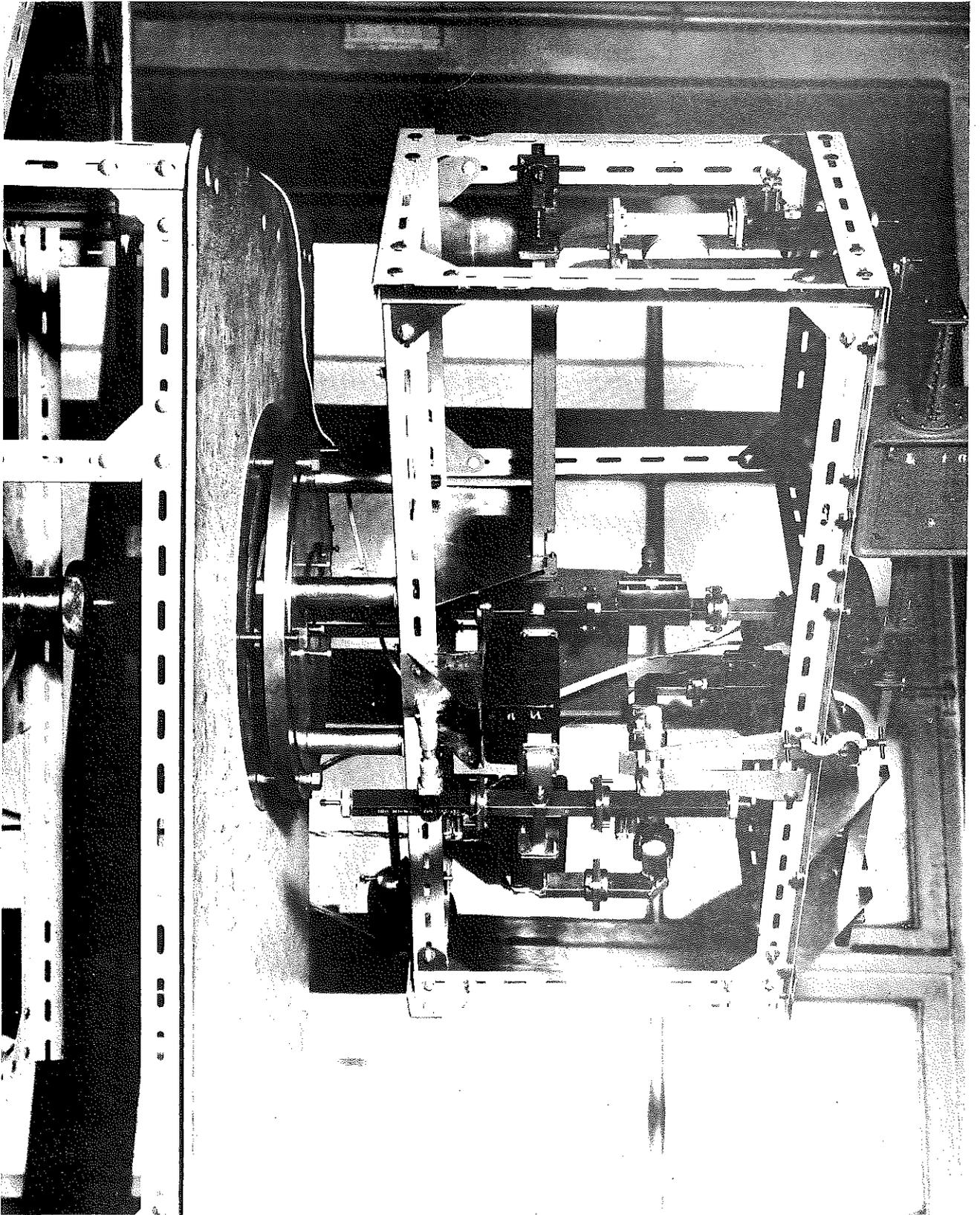
Montage d'ensemble.

Dans la plupart de nos manipulations nous avons utilisé un électro-aimant Varian de 6" (modèle V 4007) à haute impédance (1 350 volts d'alimentation pour un courant maximum de 1,4 ampères) permettant d'atteindre des champs de l'ordre de 5 000 oersteds avec un entrefer de 3"1/4 (83 mm) l'homogénéité étant au maximum du champ de l'ordre de 0,1 gauss dans un cercle de 3,5 cm de diamètre situé dans le plan médian des pièces polaires. Cette bonne homogénéité est due à des pièces polaires spécialement équipées de cales annulaires.

Son alimentation est assurée par une armoire du type V 2200 dont le principe est le suivant : le courant destiné aux bobines développe aux bornes d'une résistance de précision une tension comparée à celle d'une pile de référence. La différence est amplifiée en alternatif dans un amplificateur du type "chopper" puis appliquée à la grille des tubes ballast (804 TL). Le courant est rendu variable par l'introduction dans l'amplificateur d'une tension issue d'un héliopot alimenté par une pile au mercure très stable.

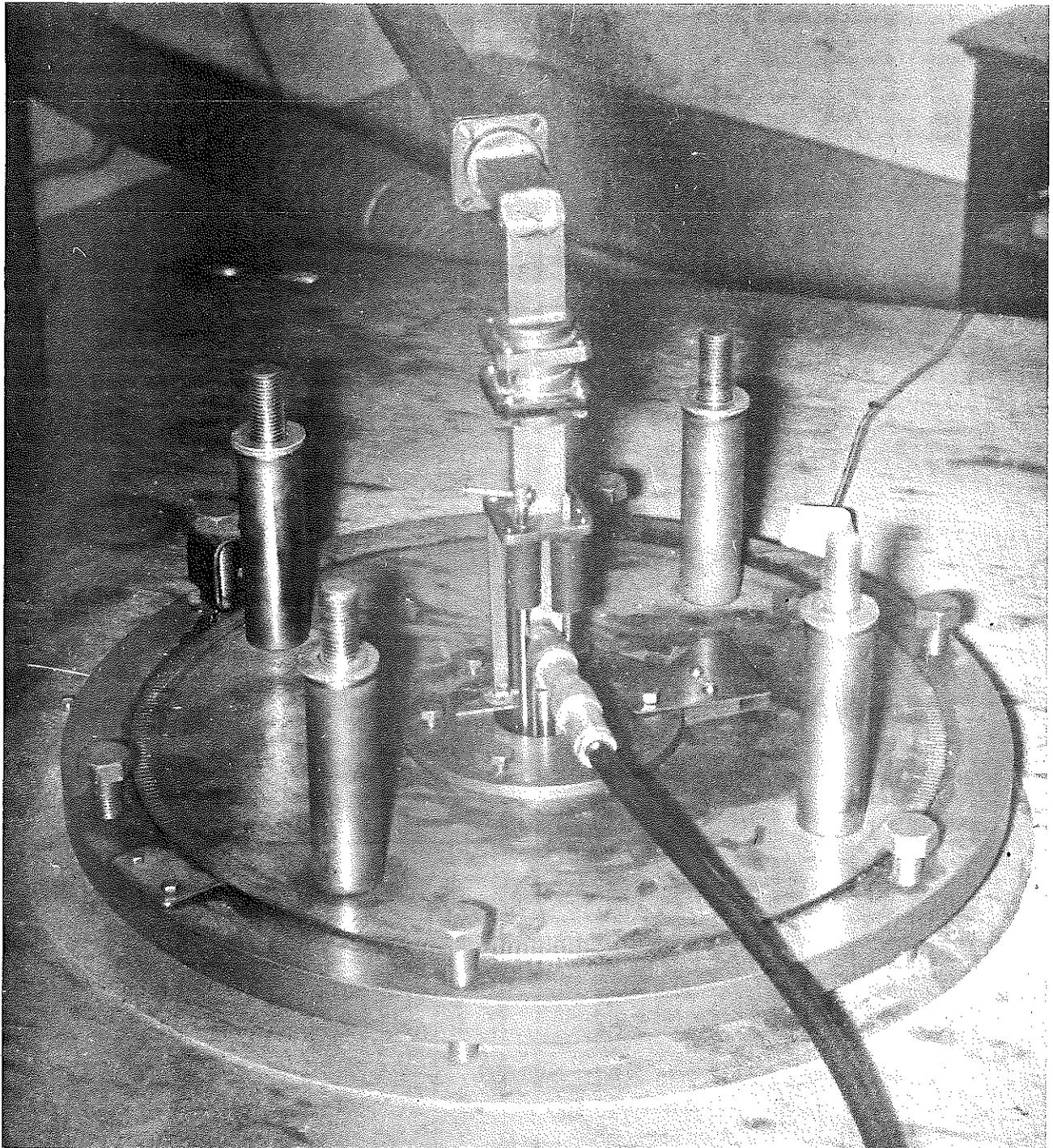
L'aimant dont nous disposions étant fixe par rapport au sol, nous avons fait un montage également fixé au sol durant les manipulations, mais qui permet une rotation et un repérage de l'angle. L'ensemble du montage est placé sur une tour mobile sur des roulettes (mais fixée sur cales au moment des manipulations) qu'on dispose sur l'aimant comme le montre la photo 29.

Sur la table de la tour est placé un plateau tournant sur roulement à billes et gradué (la précision utilisable est de l'ordre de 1/4 de degré). Sur le plateau est fixé tout le matériel hyperfréquence 3 cm (fig. 30). Les guides 10 cm sont solidaires de la tour,



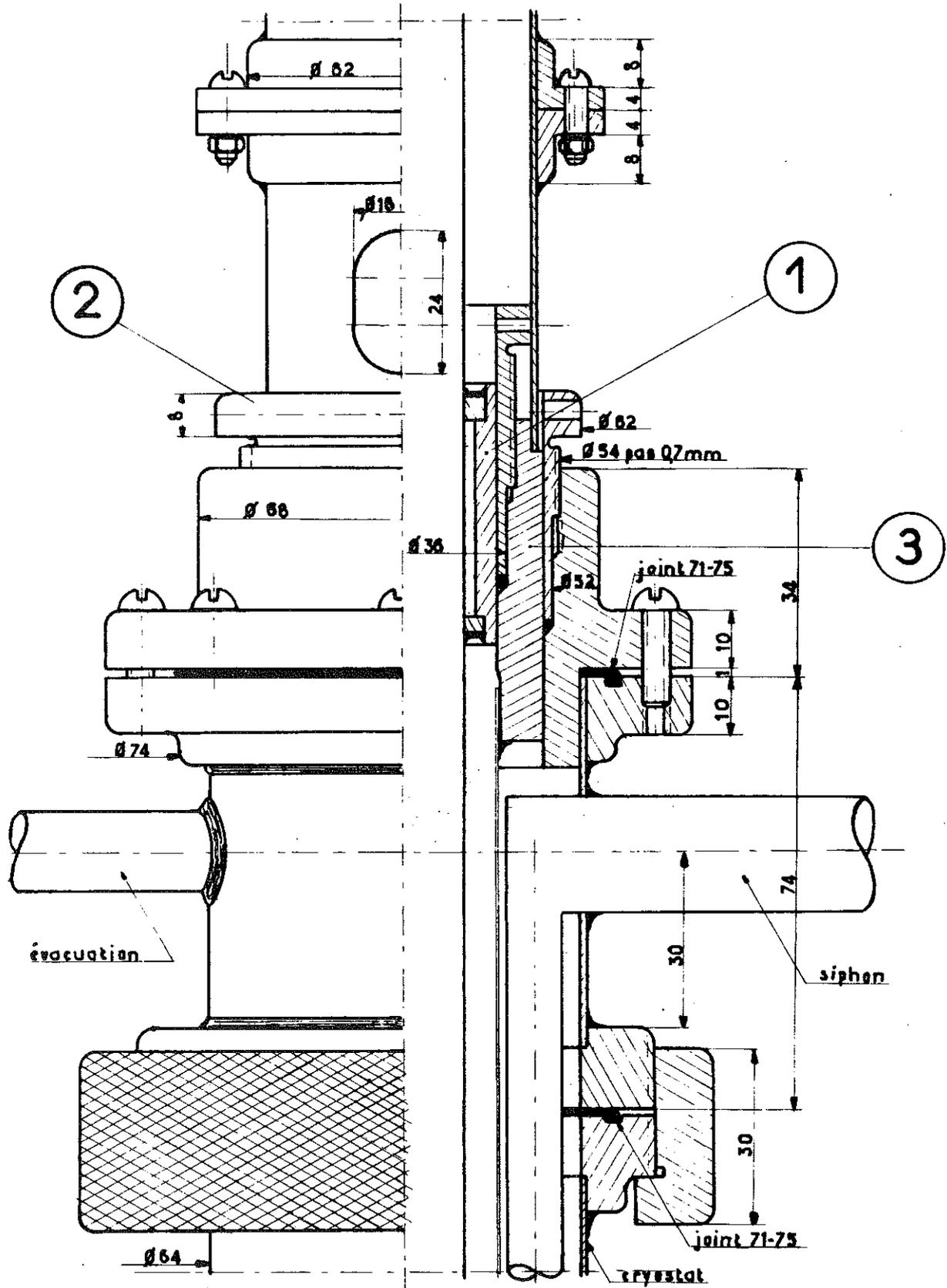
Montage de mesure des Temps de relaxation

Fig: 30



Ensemble du plateau de rotation
Le châssis supportant les guides 3cm a été enlevé
Les commandes de couplage sont visibles au milieu
Le coaxial assure l'arrivée du 10cm

Fig: 31



Dispositif d'Étanchéité

Fig:32

soit directement sous la table s'il s'agit du circulateur, soit sur le côté s'il s'agit du té magique. Le raccordement à la partie tournante est assuré par un coaxial souple.

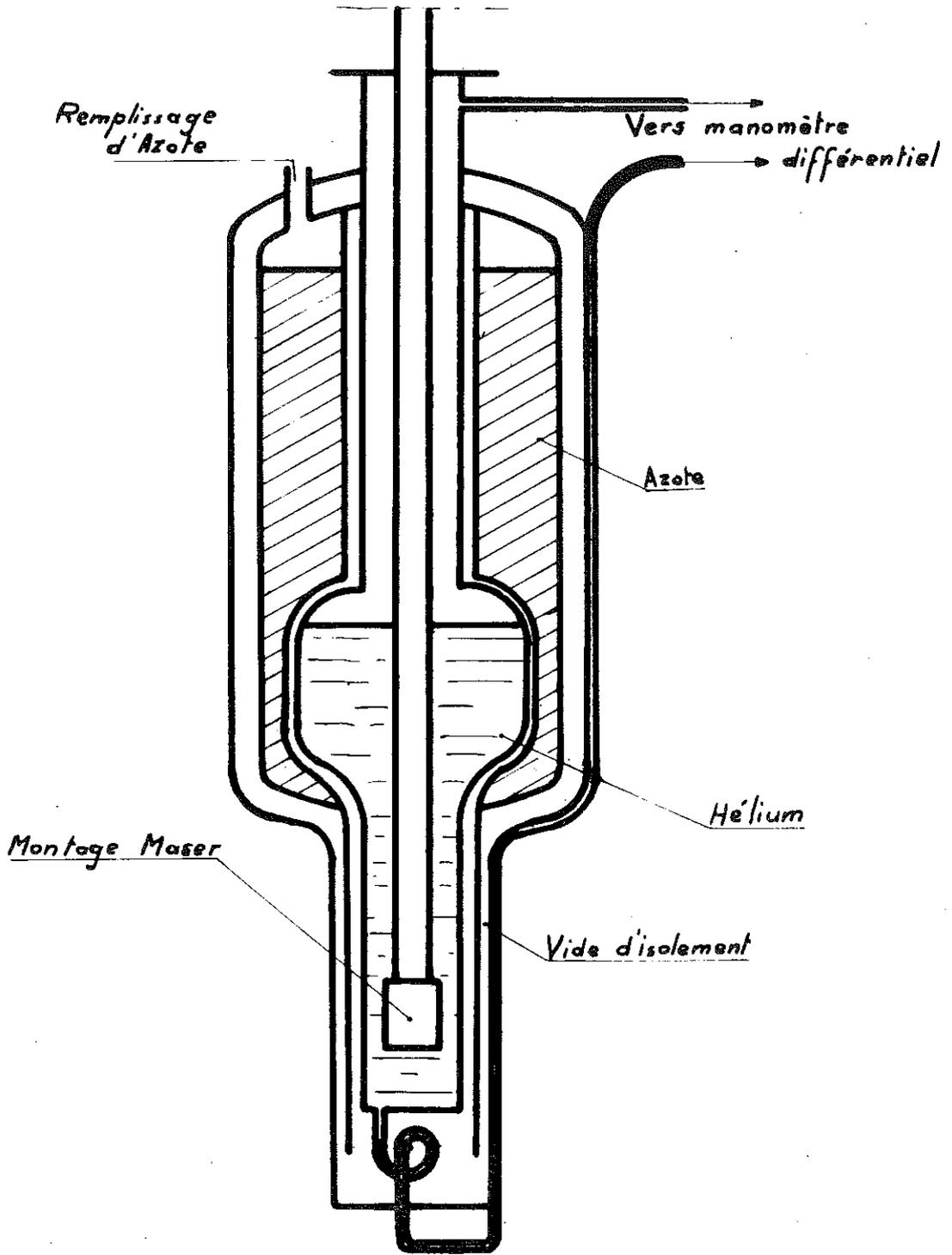
Le cryostat est fixé sous la table de la tour et en est solidaire. Le guide 3 cm, le coaxial 10 cm et diverses commandes de fréquence et de couplage (toutes en tube inox mince) y pénètrent comme on le voit sur la photo 31 (le châssis portant les guides 3 cm a été enlevé pour la circonstance). Il faut donc assurer la rotation de l'ensemble des guides par rapport au bâti fixe, tout en maintenant le cryostat étanche. L'étanchéité est assurée de la façon suivante : guide, coaxial et commandes passent à travers le fond d'un cylindre creux (1 de la fig. 32) et sont brasés sur celui-ci. Sur le cylindre vient s'appuyer un joint torique serré par la vis (2). Sur la figure apparaît un deuxième joint torique, il est destiné à permettre une deuxième rotation qui ne fut pas en fait utilisée dans le cadre de ces manipulations. L'étanchéité du guide 3 cm est assurée par une plaque de mica collée en travers du guide et celle du coaxial 10 cm par une perle de verre soudée au conducteur central et au conducteur externe. Soudé sur la pièce (3) un tube d'acier inox mince enveloppe le guide jusque dans le bas du montage pour isoler celui-ci du liquide cryostatique. Ceci est nécessité par le fait que la constante diélectrique de l'hélium ou de l'hydrogène n'est pas égale à l'unité. Il faut donc éviter que des bulles n'apparaissent dans la cavité ou les guides d'amenée et ne perturbent la fréquence d'accord de celle-ci.

Vers le bas de la figure 32 apparaissent le siphon et la tuyauterie d'évacuation des gaz. Le siphon reste donc fixé en permanence sur le montage, ce qui permet de remplir à nouveau le vase en cours de manipulation.

Cryostat*.

Le cryostat est destiné à recevoir aussi bien de l'hydrogène que de l'hélium (fig. 33). Il lui faut donc une garde d'azote. Celle-ci est prolongée le long de la queue de mesure par un écran de cuivre

* construit par la Société T.B.T. à Grenoble.



**- VASE CRYOSTATIQUE AVEC
MESURE DE NIVEAU D'HÉLIUM.**

Fig:33

rouge qui diminue les pertes par rayonnement au niveau de la cavité. Le diamètre extérieur de la queue est de 80 mm pour un diamètre utilisable de 60 . La mesure du niveau de liquide à l'intérieur du vase peut être faite en permanence : deux prises de pression, l'une en haut l'autre en bas du vase sont amenées à un manomètre différentiel à huile de silicone gradué pour les deux sortes de liquide.

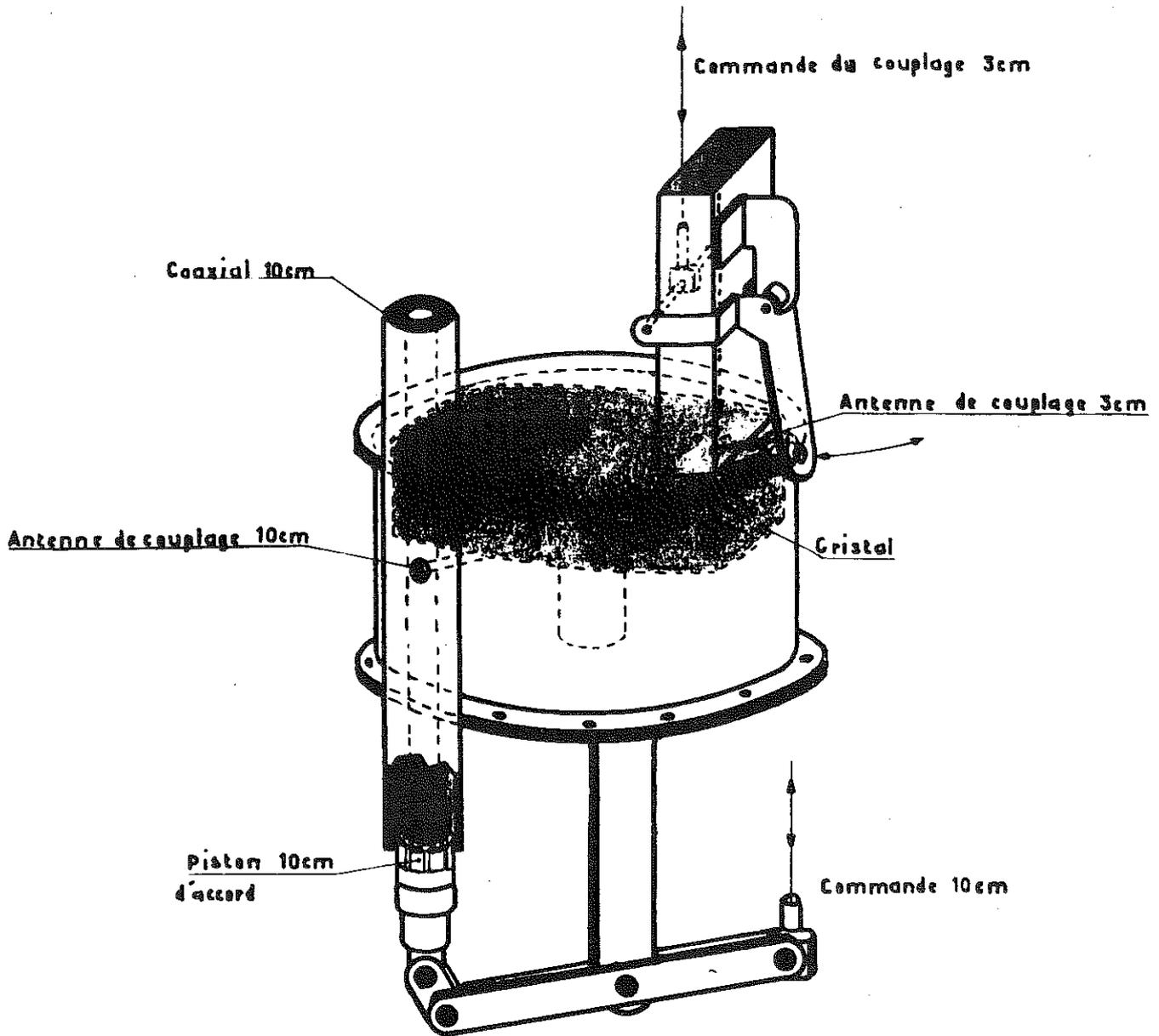
Le volume utile du cryostat est d'environ deux litres. Compte tenu des pertes au moment de la charge, provoquées par le refroidissement du montage et de l'enveloppe intérieure du vase (de 77°K à 4,2°K dans le cas de l'hélium) qui sont de l'ordre de 2,5 litres, c'est à 4 ou 5 litres que s'élève la consommation en hélium^{*}, ce qui nous permet de tenir entre 5 et 6 heures à 4,2°K. Il est également possible de descendre en température jusqu'à 1,5°K (correspondant à la pression de 4 mm de Hg) en pompant, à travers une tuyauterie de grand diamètre (70 mm), à l'aide d'une pompe ayant un débit de 100 m³/heure. En dessous du point λ (T = 2,173°K ; P = 38 mm Hg) du fait de la superfluidité de l'hélium, l'étanchéité du montage vis-à-vis du liquide devient superflue.

Cavité du Maser.

Il s'agissait de trouver une cavité résonnant à la fois dans la bande des 3 cm et des 10 cm et qui tienne dans un diamètre de 50 mm au maximum. Il fallait également y inclure le cristal de rubis, la rendre si possible accordable aux deux fréquences utilisées et rendre les deux couplages variables. Toutes ces exigences sont en fait difficiles à tenir en même temps et nécessitent de nombreuses commandes : sources de pertes thermiques et de fuites.

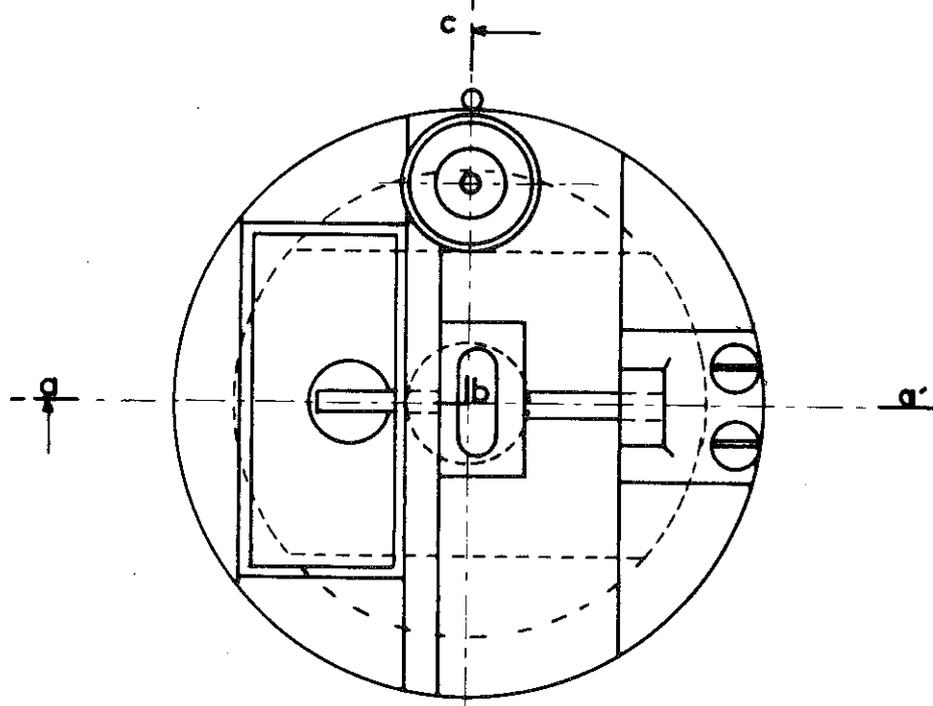
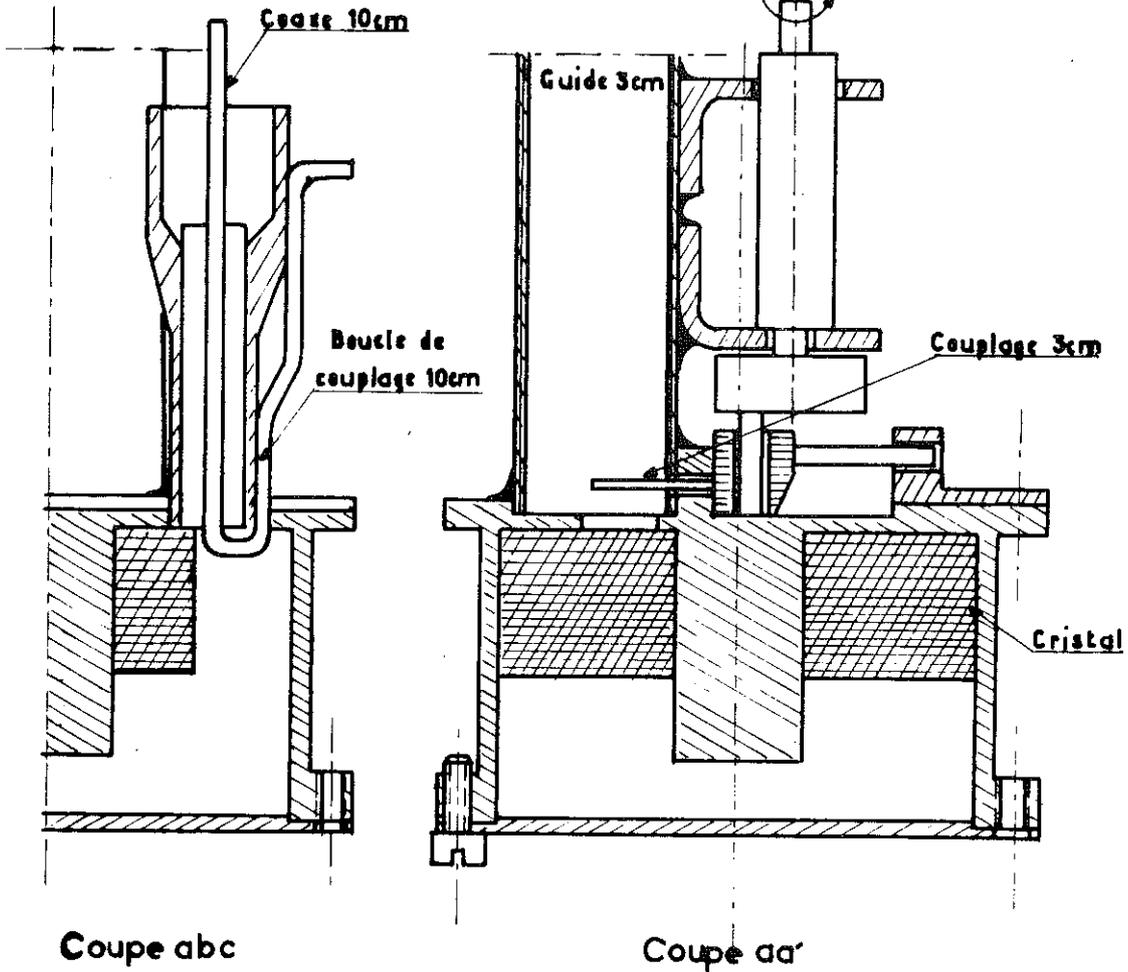
Après avoir étudié de nombreuses cavités nous nous sommes décidés à construire une cavité réentrante (fig. 34) du type klystron. Le mode fondamental (10 cm) présente l'avantage d'être T.E.M. (champ H circulaire et E radial) dans la partie coaxiale de la cavité.

* Les liquides cryogéniques nous ont été fournis par le service de Basses Températures de l'Institut Fourier.



Cavité Maser T manière

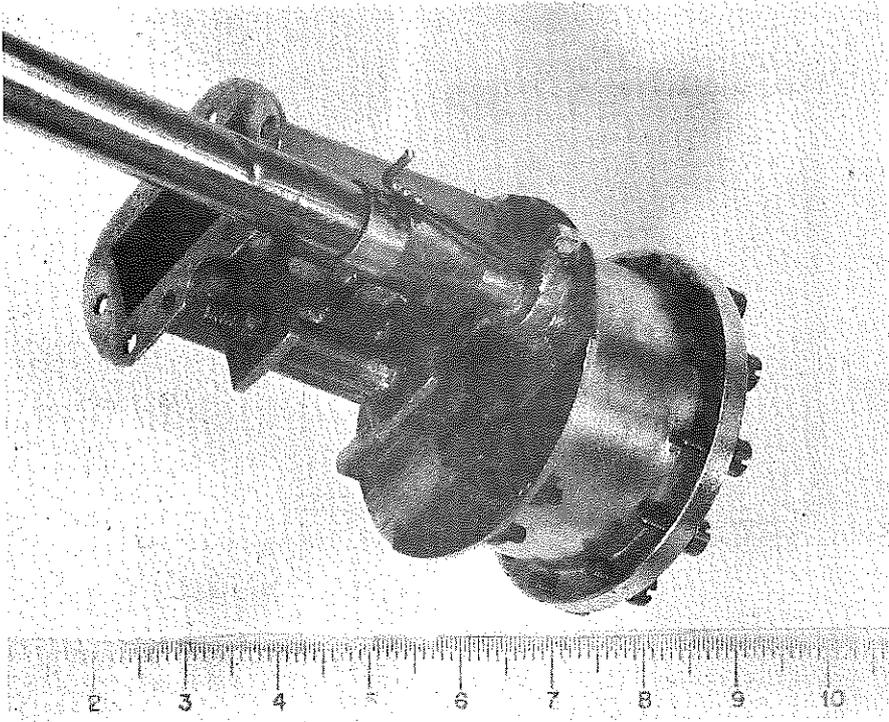
Fig:34



Echelle 2

CAVITE DU MASER (2^e manière)

Fig: 35



Cavité du Maser
Vue de dessus montrant les
couplages du 3cm et du 10cm

Fig:36

Intérieur de la cavité du
Maser montrant le cristal
et la boucle de couplage du
10cm

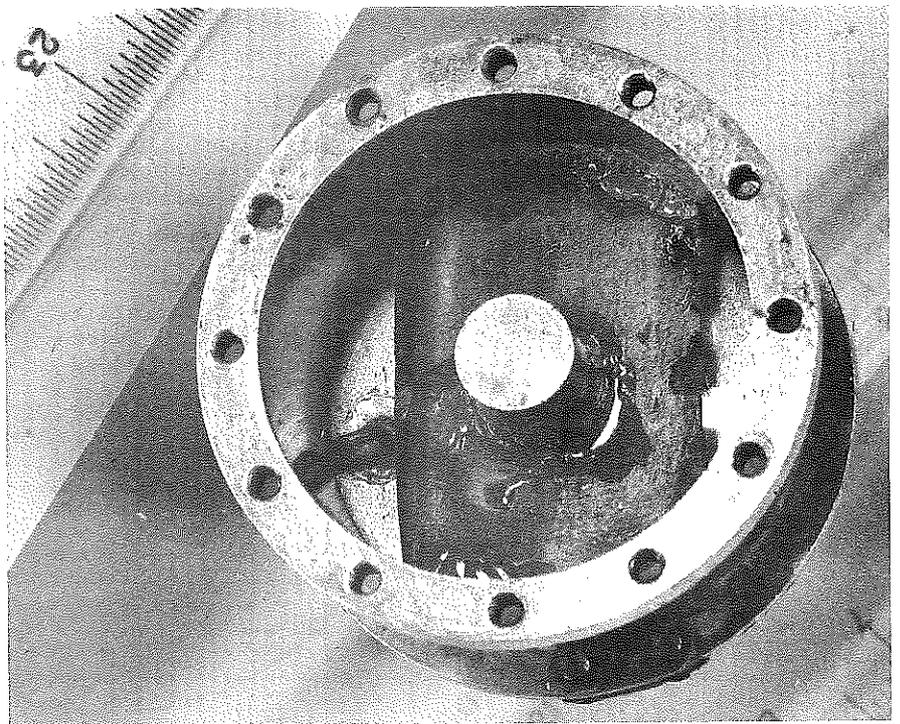


Fig:37

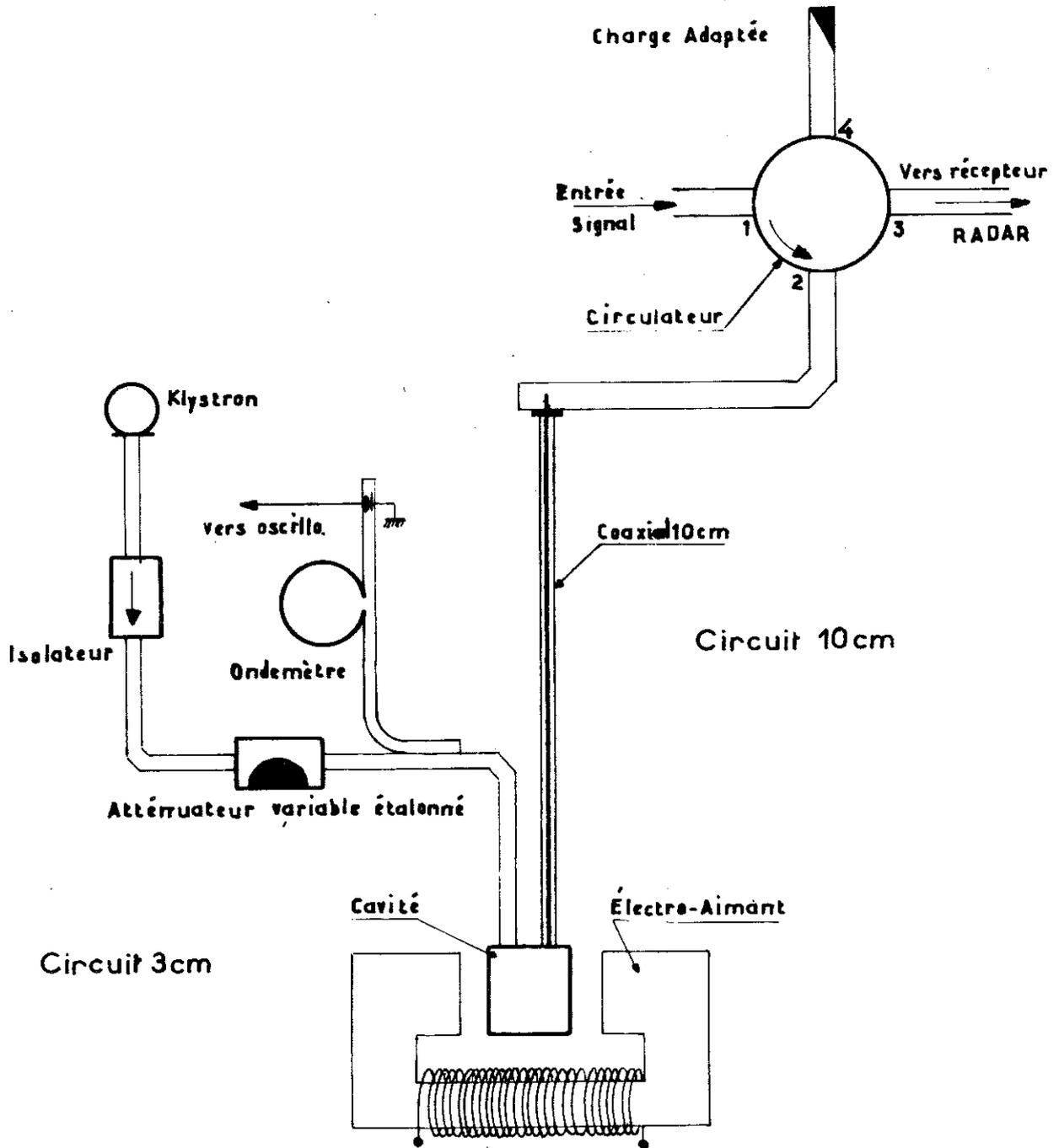
L'accord en fréquence peut être assuré par déplacement du piston central. A fréquence de résonance égale une cavité de ce type est moins longue qu'une coaxiale pure : le volume compris entre l'extrémité du piston central et le fond de la cavité jouant le rôle de capacité de charge de la ligne coaxiale.

Le couplage du guide 3 cm est assuré par un trou au fond du guide traversé par une antenne mobile en translation horizontale, transformée en translation verticale par une équerre. Dans cette première version le couplage du 10 cm est effectué par une antenne radiale qui est fixée au conducteur central du coaxial et pénètre dans la cavité. Le couplage est rendu variable par le mouvement d'un piston de court-circuit à l'extrémité inférieure du coaxial.

Les difficultés mécaniques de déplacement du piston nous ont fait abandonner ce mode de couplage. Dans la version définitive (fig. 35 et 36) il fut remplacé par une simple boucle qui coulisse dans le conducteur central du coaxial et qu'on commande de l'extérieur du coaxial par un simple mouvement de translation. Ce déplacement rend très net le surcouplage ou le sous-couplage de la cavité. Le mouvement de translation de l'antenne du 3 cm fut d'autre part converti en rotation par un excentrique.

Le cristal est percé en son centre au diamètre du piston central et placé à cheval sur celui-ci de façon que l'axe du cristal soit parallèle au fond de la cavité, c'est-à-dire horizontal (fig. 37). Le rubis ayant une constante diélectrique ϵ importante - elle varie entre 9,53 mesurée parallèlement à l'axe Oz et 11,53 mesurée perpendiculairement - ⁽³⁷⁾ il est évident que l'introduction du cristal dans la cavité modifie considérablement ses fréquences de résonance. Aussi avons nous joué sur le piston central pour ramener le mode fondamental dans la zone désirée : entre 2 900 et 3 100 MHz.

Dans les versions basses températures la nécessité de limiter le poids au maximum nous a fait abandonner la mobilité du piston. Il reste pourtant la possibilité de jouer sur la fréquence 3 cm, indépendamment du 10 cm, en faisant tourner le cristal autour du piston central. En effet le mode fondamental est de symétrie parfaitement circulaire. Par contre le mode 3 cm utilisé est loin d'avoir cette



Appareillage Hyperfréquence du MASER

Fig:38

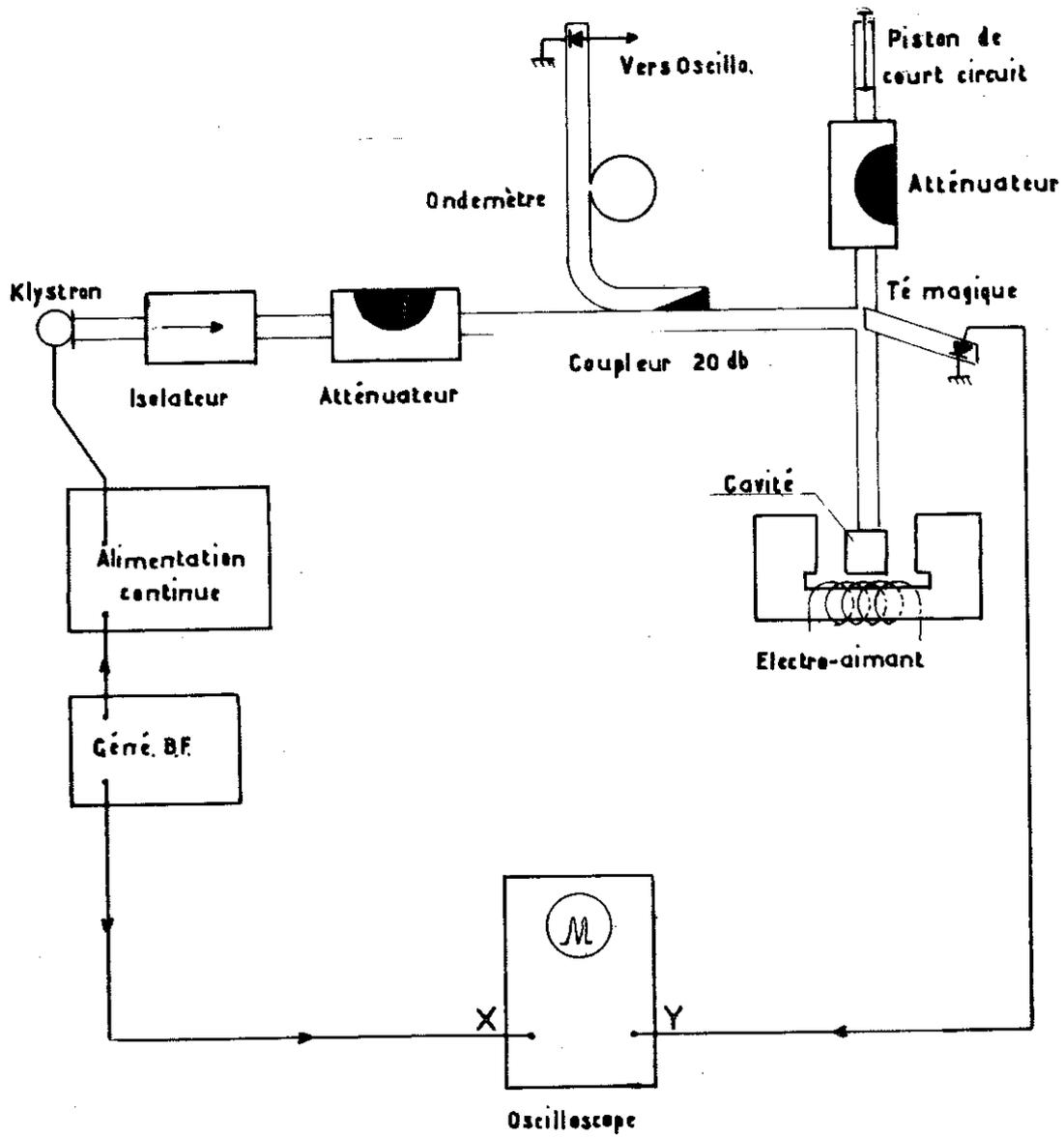
symétrie ; du fait de sa constante diélectrique variable suivant la direction, et de sa géométrie (il n'est pas tout à fait assez gros pour tapisser entièrement le fond de la cavité), le cristal non plus ne présente pas cette symétrie circulaire. La position du cristal réagit donc sur la fréquence.

En acceptant de conserver fixe le couplage de 10 cm, il est quand même possible de faire varier les deux fréquences à la fois : nous fixons sur la tige de commande, désaffectée, du couplage 10 cm un morceau de téflon qui se déplace dans la cavité. Dans un diagramme fréquence de signal, fréquence de pompe, le déplacement du téflon engendre une certaine courbe. En faisant se croiser la courbe ainsi obtenue avec celle de C.H.S. (fig. 24) nous avons pu vérifier le rôle joué par le couplage harmonique de spin dans les performances du Maser.

La surtension de la cavité a été nettement améliorée par un premier polissage suivi d'un dépôt électrolytique d'argent puis d'un repolissage très soigné. La surtension propre (que nous définirons au chapitre IV) obtenue est de l'ordre de 8 000 à température ambiante et de 12 000 à basse température.

Montage hyperfréquence pour le fonctionnement en Maser.

Il est extrêmement simplifié (fig. 38). Pour la saturation en 3 cm un klystron Varian (V 58) qui débite quelques centaines de milliwatts suivi d'un isolateur à ferrite et d'un atténuateur étalonné, a été utilisé. Un coupleur directif à 30 db suivi d'un ondemètre et d'un cristal détecteur permet l'observation de la résonance et la mesure de la fréquence. Le circuit signal est constitué autour d'un circulateur dont l'entrée 1 est alimentée par un générateur Hewlett Packard. La cavité Maser est branchée sur la sortie 2. Un récepteur radar à tête symétrique ou un analyseur de spectre suivant le cas, sur la sortie 3. La charge adaptée fixée sur le bras 4 a pour but de découpler le récepteur du circuit d'entrée.



Montage Hyperfréquence pour l'observation
de raies

Fig. 39

Observation des raies.

Nous avons utilisé un montage tout à fait classique schématisé fig. 39. Il comprend un klystron, un isolateur à ferrite, un atténuateur, un coupleur directif, un ondemètre et un cristal détecteur dans la branche d'amenée de l'énergie. Le té magique répartit la puissance entre la cavité de mesure et la branche de compensation comprenant un atténuateur et un court-circuit mobile. La détection s'effectue dans la quatrième branche par une diode semi-conductrice. Comme nous disposions le plus souvent de cristaux suffisamment gros, nous pouvions observer les raies directement sur un oscilloscope en balayant en fréquence le lobe du klystron et en faisant varier lentement le champ continu.

Il a parfois été nécessaire de disposer d'une plus grande sensibilité : dans ce cas pour le 3 cm uniquement, nous disposions d'un spectromètre à résonance électronique Varian (type V 4500), les bobines de balayage du champ magnétique à 400 Herz étaient disposées dans les pièces polaires de l'aimant.

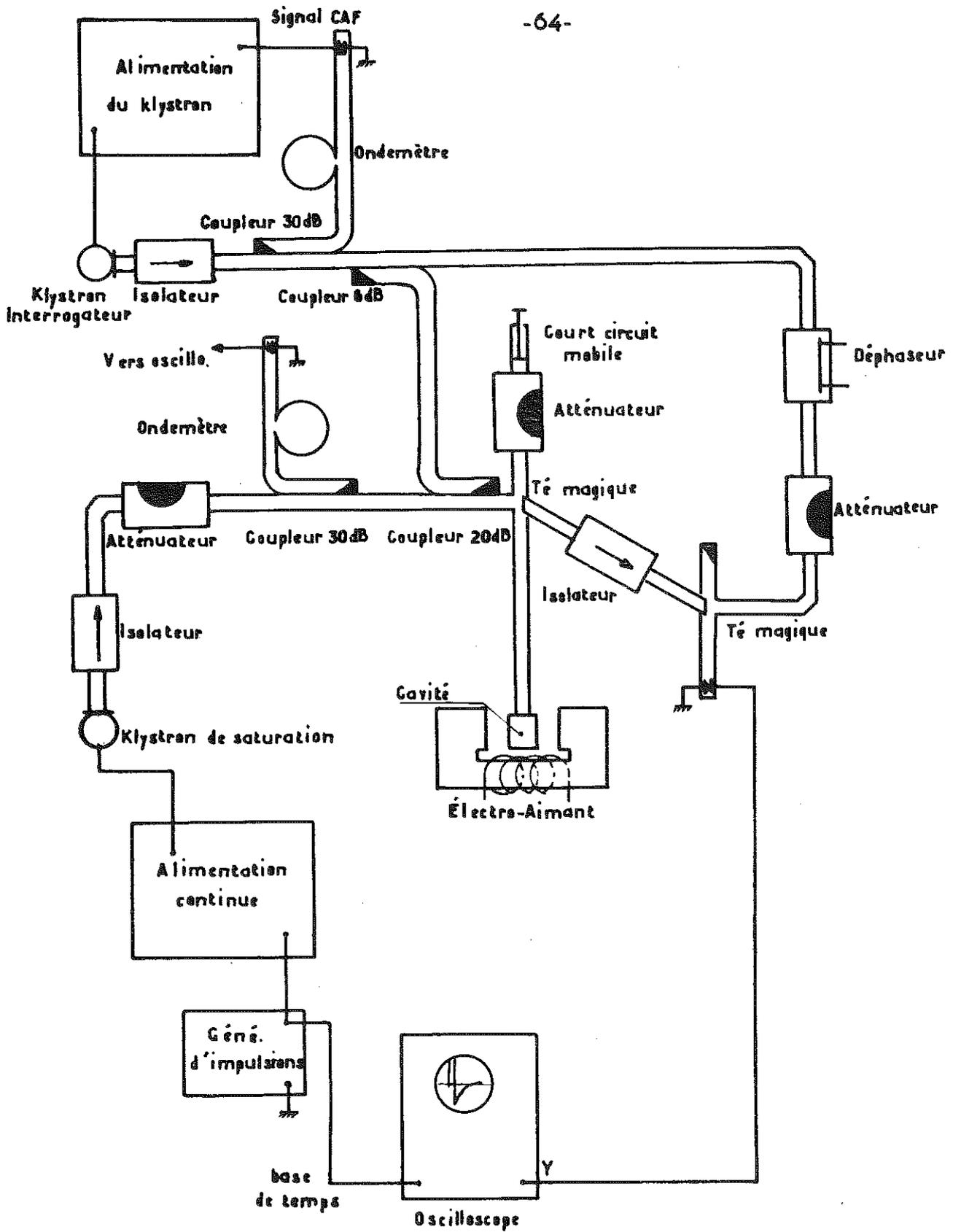
Mesure des temps de relaxation.

Le circuit n'a été conçu que dans la bande des 3 cm. L'observation peut toutefois être effectuée également sur le circuit signal en utilisant le dispositif décrit dans le paragraphe précédent.

Le principe de la mesure consiste à envoyer en impulsion une puissance suffisante pour saturer la raie et d'observer le retour à l'équilibre à la fin de l'impulsion. Deux circuits distincts sont donc utilisés (fig. 40 et photo 30).

Le klystron de puissance alimenté en impulsion sur le réflecteur est suivi d'un appareillage identique à la branche d'alimentation du montage précédent, il débouche sur le té magique.

Le klystron dit d'interrogation est stabilisé en fréquence par l'intermédiaire d'un circuit C.A.F. guidé par un ondemètre dont la fréquence d'accord est égale à celle de la cavité de mesure. Il est ensuite branché sur le circuit principal par un coupleur à 20 db.



Montage Hyperfréquence pour la mesure des temps de Relaxation

Fig:40

La dérivation du circuit d'interrogation qui débouche sur un deuxième té magique, est destinée à assurer une polarisation du cristal détecteur. En effet, la puissance d'interrogation doit être très faible et elle ne suffit pas à polariser le cristal. Un atténuateur et un déphaseur en série dans la dérivation permettent de doser la polarisation en phase et en amplitude.

L'observation se fait directement sur un oscilloscope ; il faut que le temps de récupération de l'ensemble récepteur et spécialement du cristal détecteur après les impulsions soit petit devant le temps de relaxation à mesurer.

DISPOSITIFS ANNEXES .

Orientation et taille des cristaux.

Toutes les mesures que nous avons effectuées supposent un repérage précis de la position de l'axe du cristal. Nous avons d'abord songé aux méthodes optiques. Elles étaient relativement commodes pour le chromicyanure, mais en tout cas plus délicates pour le rubis. Il était nécessaire de polir optiquement les surfaces ou de trouver un liquide d'indice voisin. Par ailleurs, la précision semblait bien moins bonne (quelques degrés au mieux) que celle à laquelle on pouvait s'attendre en utilisant les propriétés de directivité de la résonance magnétique.

Le dispositif consiste essentiellement en une cavité cylindrique résonnant dans la gamme des 3 cm sur un mode élevé (\varnothing 54 mm, L = 95 mm) de façon que l'introduction du cristal ne perturbe pas trop la fréquence de résonance (fig. 41). Elle est couplée le long d'une génératrice à un guide 3 cm. Comme on peut le voir sur la photo 42 la cavité est taillée dans la masse et deux surfaces planes sont ménagées sur les côtés extérieurs. Il est ainsi possible de la serrer dans les pièces polaires de l'aimant : ceci est important pour assurer la validité du repérage angulaire. Deux bobines de balayage en champ sont également prévues si une grande sensibilité est nécessaire.

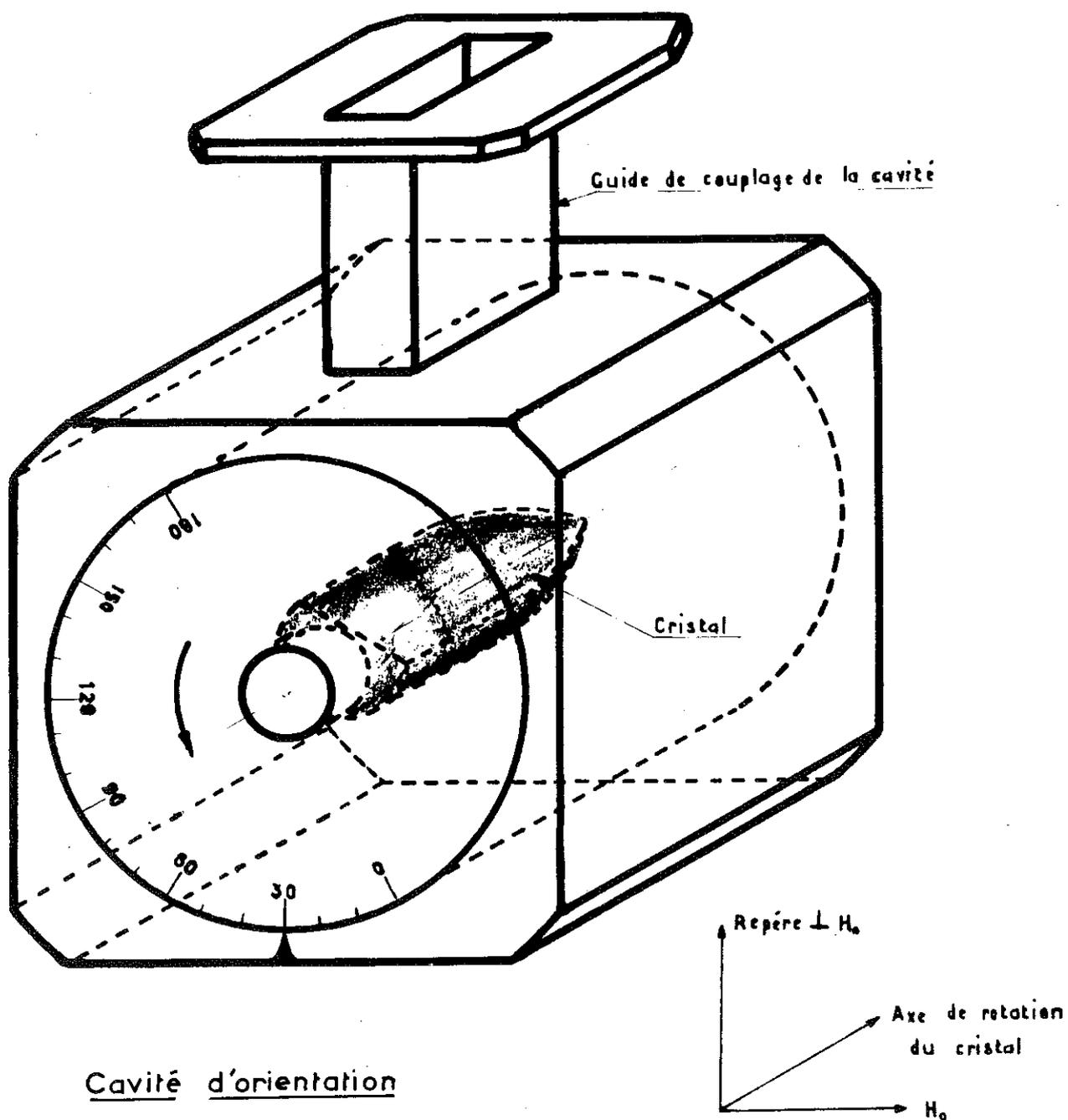
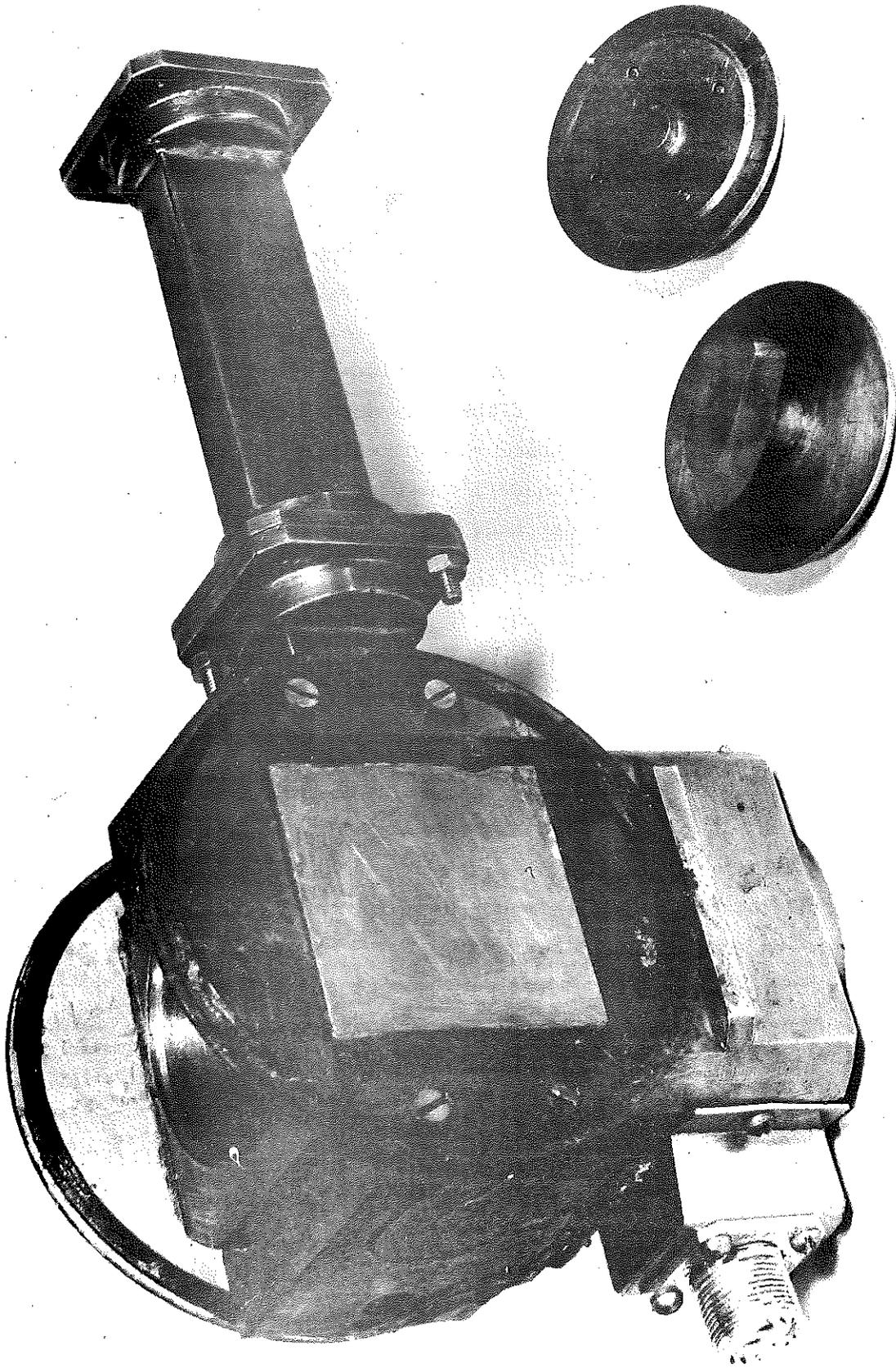


Fig:41



Cavité d orientation

Fig:42

Le cristal est fixé sur le couvercle circulaire gradué de degré en degré et repéré selon une direction parallèle aux surfaces planes latérales, donc perpendiculaires au champ continu H_0 . Même si l'axe cristallin Oz n'est pas perpendiculaire à l'axe de rotation, le diagramme des raies présente une périodicité de 180° . Au vu de ce diagramme il est aisé de distinguer le plan de symétrie contenant l'axe Oz. Le couvercle et le cristal sont alors portés sur une équerre placée sur un marbre et le cristal est fixé dans un bac où l'on coule de la cire. On désolidarise alors le couvercle du cristal et ce dernier est reporté sur une rectifieuse qui surface un plan contenant Oz. En recommençant toute la suite des opérations avec, cette fois, le plan déjà tracé perpendiculaire à l'axe de rotation du couvercle, on peut atteindre l'axe Oz et matérialiser dans le cristal une arête parallèle à cet axe.

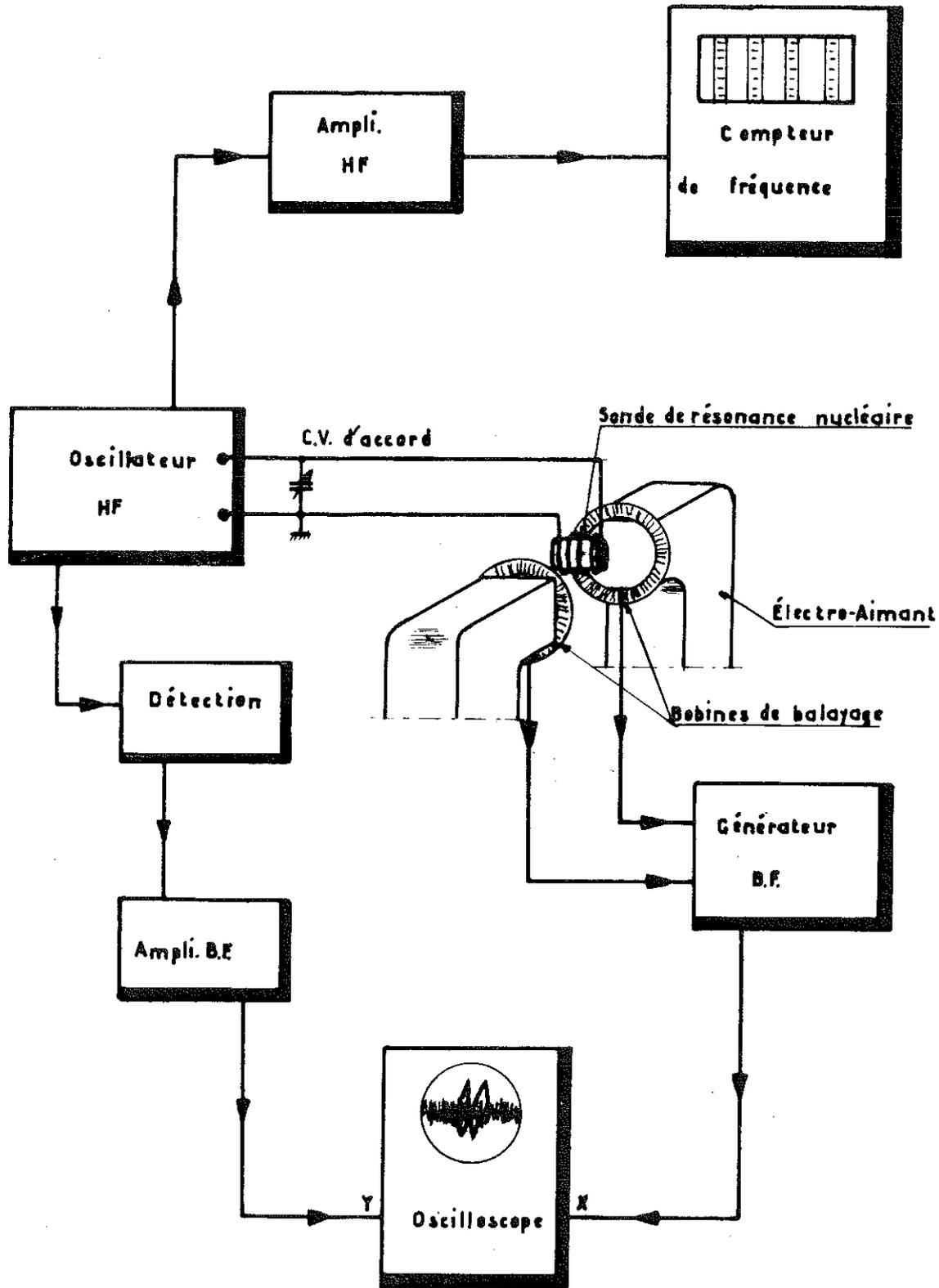
Les avantages de cette méthode sont

- Sa bonne précision (de l'ordre du $1/2$ degré)
- l'orientation même de tout le cristal qui sera utilisé et ceci quelles que soient ses dimensions. Pour le rubis, les cristaux reçus présentaient la forme de demi-cylindres de 40 mm de hauteur et de 20 mm de diamètre environ.

Mesure de champ.

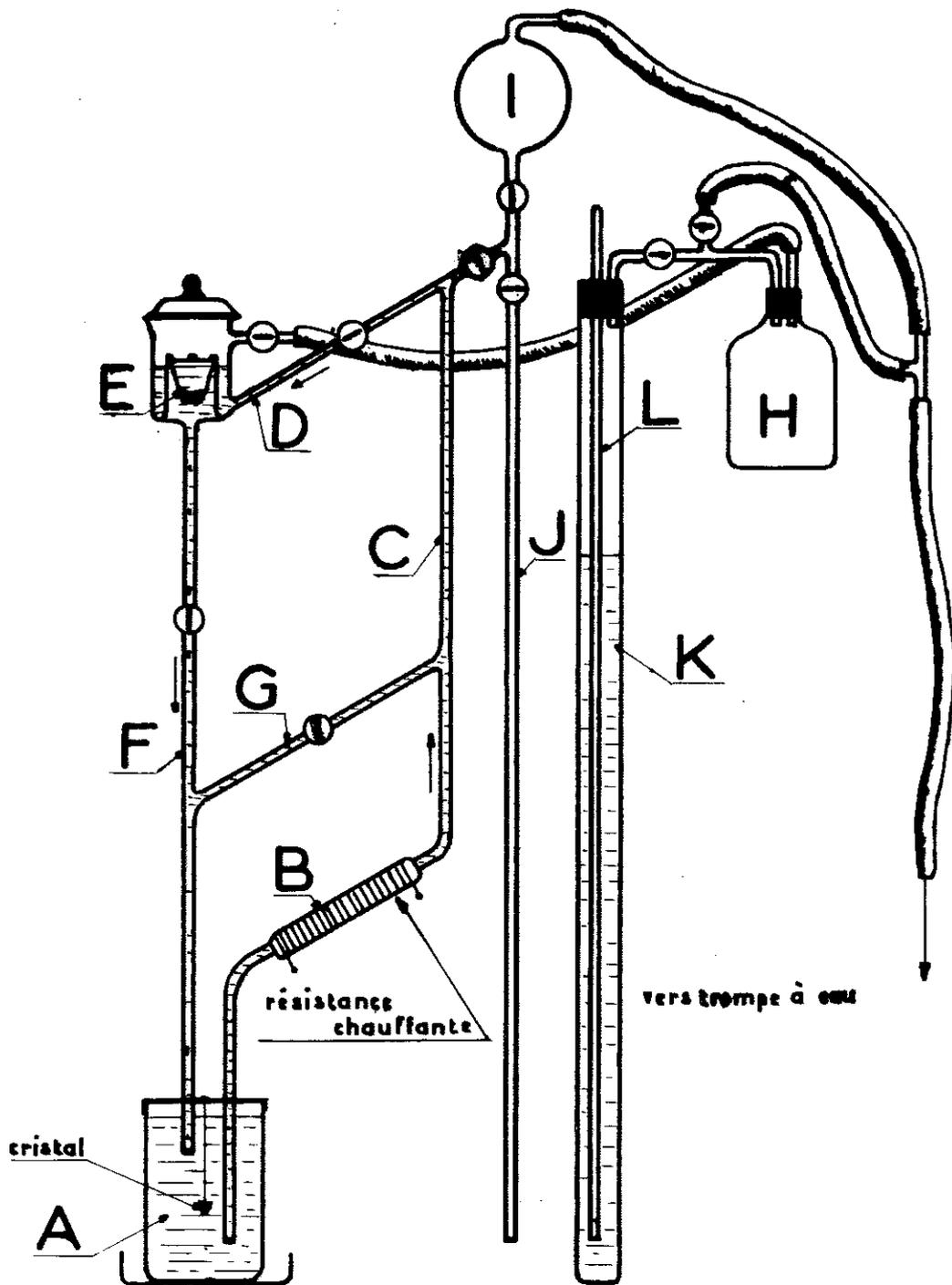
Un étalonnage en champ de l'électro-aimant en fonction du courant qui traverse les bobines était nécessaire. A l'époque où nous avons commencé ce travail, les gaussmètres à résonance nucléaire n'étaient pas encore commercialisés. Aussi, avons nous construit un tel gaussmètre suivant le schéma fig. 43.

Il se compose d'un oscillateur H.F. qui délivre une fréquence variable entre 2 et 30 MHz (en plusieurs gammes) et dont le circuit oscillant est composé d'un condensateur variable et d'une bobine placée dans l'entrefer de l'aimant. La bobine entoure une capsule contenant un peu de sulfate de cuivre dissous dans l'eau (N/50 environ). On observe la résonance du proton H^+ dont la constante est 4,2577 MHz pour 1 000 oersted. Autour de la bobine et perpendiculairement à elle



Mesureur de champ

Fig:43



Appareil de formation des cristaux de
 $K_2Co(CN)_6$

Fig:44

sont situés des enroulements de balayage en champ. La manipulation consiste à repérer le signal sur le centre de la trace de l'oscilloscope et à mesurer à ce moment la fréquence sur un compteur

Hewlett Packard. La mesure ne peut être effectuée qu'à partir de 500 oersteds environ, car l'amplitude du signal varie avec la fréquence et vers 500 oersteds il est à peu près au niveau du bruit.

Formation des cristaux de $K_3Cr(CN)_6$, $K_3Co(CN)_6$.

Nous les avons formés par voie aqueuse à l'aide de l'appareil schématisé fig. 44 : le circuit principal comprend le bac A, la résistance B, les tubes C, D et F. La circulation du liquide s'effectue dans le sens des flèches sous l'influence de la résistance chauffante B. Dans le bac A se trouve le germe de cristal qu'on se propose de faire croître, le liquide y est à saturation complète (309 g/litre à 20°C pour le $K_3Cr(CN)_6$). Après passage sous la résistance chauffante, il n'est plus saturé et peut alors dissoudre une partie de la poudre située dans un sachet E étanche (à la poudre). En se refroidissant de nouveau dans la cuve A le liquide libère une partie du cobalticyanure sur le germe.

La dépression est réglée en permanence par le baromètre rempli d'un liquide plus dense que l'eau. Si au moment du remplissage la dépression augmente, de l'air pénètre immédiatement par l'intermédiaire du tuyau L. Le tube G sert de dérivation pour ralentir la circulation du liquide autour du sachet E. La tuyauterie I, J, H est utilisée au remplissage.

L'opération est assez délicate : il faut que la circulation soit très lente, que le diamètre des tubes y compris au passage des robinets soit constant pour éviter les remous. Il ne faut pas trop chauffer pour éviter la décomposition du produit qui est fort instable. Il faut également nettoyer très proprement la tuyauterie et spécialement le bac A, sous peine de voir se former des cristaux un peu partout. Nous nous sommes également aperçus que la concentration en ions Cr^{+++} dans le cristal formé était de l'ordre du 1/10 de celle de la poudre mère.

CHAPITRE IV

THEORIE ET TECHNIQUE DES MESURES EN HYPERFREQUENCES

Q_m, LARGEUR DE RAIES, TEMPS DE RELAXATION

RESULTATS EXPERIMENTAUX.

L'optique de nos mesures hyperfréquences était un peu différente de celle des spectroscopistes. En effet, ceux-ci disposent en général de très petits échantillons et les phénomènes magnétiques qu'ils observent ne modifient que très peu leurs circuits. Les signaux variables sont toujours petits devant la composante continue. Ainsi peuvent-ils admettre la linéarité de la réponse des diodes hyperfréquences dans le petit domaine de variation du signal.

Notre problème était bien différent : nous disposions presque toujours de cristaux volumineux par rapport aux dimensions de la cavité. Les signaux observés étaient intenses, de l'ordre de grandeur de la puissance envoyée, sauf à température ambiante. Aussi, avons nous été obligés de reprendre au début la théorie des mesures en hyperfréquences pour interpréter convenablement les phénomènes observés.

Mesure des coefficients de surtension.

On sait qu'il est possible d'assimiler une cavité résonnante en réflexion à un circuit oscillant soit série, soit parallèle, suivant le plan dans lequel on observe l'impédance ramenée par la cavité : en observant la cavité en un noeud de champ électrique à une fréquence éloignée de la fréquence d'accord, nous choisissons le schéma équivalent parallèle et l'impédance réduite ramenée par la cavité peut s'écrire (38)(39)

$$\frac{Z(\nu)}{Z_c} = z(\nu) = \frac{\frac{1}{Q_c}}{\frac{1}{Q_o} + j\nu} \quad \text{IV,1}$$

où Z_c est l'impédance caractéristique de la ligne

Q_o est le coefficient de surtension propre de la cavité

$$= 2\pi \cdot \frac{\text{énergie emmagasinée dans la cavité}}{\text{pertes dans les parois/cycle}}$$

Q_c est le coefficient de surtension de couplage

$$= 2\pi \cdot \frac{\text{énergie emmagasinée dans la cavité}}{\text{pertes de couplage/cycle}}$$

$$\nu = \left(\frac{\nu}{\nu_o} - \frac{\nu_o}{\nu} \right) = \frac{2\Delta\nu}{\nu_o} \quad \text{si } \nu_o \text{ est la fréquence d'accord de la cavité.}$$

En passant aux coefficients de réflexion

$$R(\nu) = \frac{z - 1}{z + 1} = \frac{\frac{1}{Q_c} - \frac{1}{Q_o} - j\nu}{\frac{1}{Q_c} + j\nu} \quad \text{IV,2}$$

si Q_L est le Q apparent tel que $\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_o} + \frac{1}{Q_c}$

Sur l'abaque de Smith (plan complexe du coefficient de réflexion, donc limité par un cercle de rayon 1) le lieu de $R(\nu)$ est un cercle centré sur l'axe réel et tangent au cercle extérieur en $R = -1$ (fig. 45). Le cercle peut être gradué en fréquence : la fréquence ν_o correspond à l'axe réel. En posant $\beta = \frac{Q_o}{Q_c}$ appelé coefficient

de couplage, à la résonance il vient :

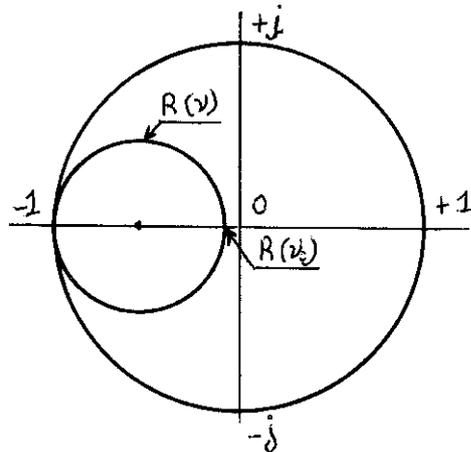


fig. 45

$$R(\nu_0) = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \quad \text{IV,3}$$

- Si $\beta < 1$ la cavité est dite sous-couplée $R(\nu_0) < 0$
 $\beta = 1$ la cavité est dite bien adaptée $R(\nu_0) = 0$
 $\beta > 1$ la cavité est dite surcouplée $R(\nu_0) > 0$

Sur l'abaque de Smith le cercle de la cavité englobe ou non l'origine.

Il est possible d'atteindre les valeurs de Q_o et Q_c à l'aide de deux mesures distinctes, d'une part Q_L et d'autre part β .

Si l'on dispose d'un détecteur quadratique la puissance réfléchie détectée est donnée par la formule IV,2 élevée au carré et transformée

$$\frac{P_{\text{réfléchi}}}{P_{\text{incident}}} = 1 - \frac{1 - \left(\frac{P_r}{P_i}\right)_{\text{max}}}{1 + v^2 Q_L^2} \quad \text{IV,4}$$

Il s'agit de mesurer d'une part $\left(\frac{P_r}{P_i}\right)_{\text{max}}$ (dans le fond de la courbe d'absorption de la cavité) et d'autre part $\Delta\nu$ pour une atténuation donnée

Sur un oscilloscope on fait apparaître la courbe d'absorption de la cavité et on la gradue en fréquence à l'aide d'un ondemètre. Puis l'on prend des photos pour diverses atténuations soigneusement repérées de la puissance d'entrée. En superposant les photos

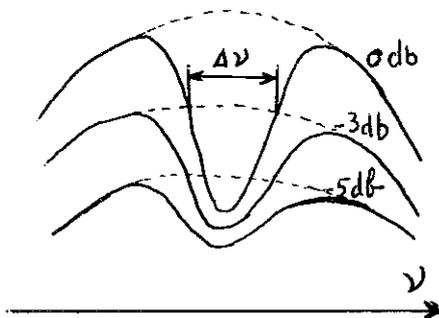


fig : 46

(fig. 46) et en graduant les courbes d'après leurs atténuations, il est possible de s'abstraire de la courbe de détection du cristal.

Ceci nous permet également de mieux évaluer la puissance incidente au maximum d'absorption ce qui n'est pas toujours commode si la surtension est mauvaise et le

lobe du klystron étroit en fréquence.

En mesurant $\left(\frac{P_r}{P_i}\right)_{\max} = \gamma_m$ donné directement en décibels et en évaluant $\Delta\nu$ pour une atténuation arbitraire donnée : $\gamma = \frac{P_r}{P_i}$ la formule IV,4 donne directement Q_L

$$Q_L = \frac{\nu}{\Delta\nu} \cdot \sqrt{\frac{\gamma - \gamma_m}{1 - \gamma}} \quad \text{IV,5}$$

où γ et γ_m sont des rapports de puissance.

Dans le cas où $\gamma_m = 0$ (cavité bien adaptée) et γ pris à 3 db = 0,5 en rapport, on retrouve la formule classique

$$Q_L = \frac{\nu_0}{\Delta\nu} \quad \text{IV,6}$$

$$\beta \text{ est donné par } \beta = \frac{R(\nu_0) + 1}{R(\nu_0) - 1} = \frac{\pm\sqrt{\gamma_m} + 1}{\pm\sqrt{\gamma_m} - 1} \quad \text{IV,7}$$

en prenant le signe + si la cavité est surcouplée et le signe - dans le cas contraire. (Nous verrons un moyen simple de se rendre compte du surcouplage ou sous-couplage de la cavité).

Rôle du té magique.

Les mesures précédentes sont effectuées sur un coupleur directif en l'absence de té : avec un montage analogue à la partie 3 cm du montage Maser (fig. 38 par exemple). Le rôle du té magique est de permettre la mesure de l'absorption magnétique comme nous le verrons bientôt. Son effet découle directement de ses propriétés : fig. 47 Il divise symétriquement l'onde qui arrive du bras 1 entre les bras 2 et 3 et les ondes réfléchies dans chacun des bras latéraux se recombinent dans le bras 4. Ceci se traduit dans les équations suivantes :

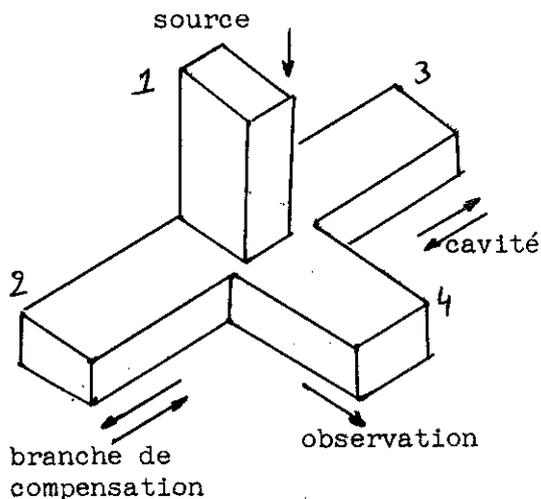


fig : 47

$$E_{01} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{i2} - E_{i3})$$

$$E_{02} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{i1} + E_{i4})$$

$$E_{03} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-E_{i1} + E_{i4})$$

$$E_{04} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{i2} + E_{i3})$$

IV,8

où

E = amplitude de l'onde

E_0 = E sortie

E_i = E entrée

en remarquant que

$$E_{i4} = 0$$

et en posant

$$E_{i3} = R_3 E_{03}$$

et
$$E_{i2} = R_2 E_{02}$$

on obtient

$$E_{04} = \frac{E_{i1}}{2} (R_2 - R_3) \quad \text{IV,9}$$

R_3 représente le coefficient de réflexion de la cavité $R(\nu)$ déjà étudié dans les pages précédentes. L'effet du té est donc d'ajouter un deuxième coefficient de réflexion. Cela se traduit sur l'abaque de Smith par un déplacement de $-R_2$ de l'origine, fig. 48 (en faisant

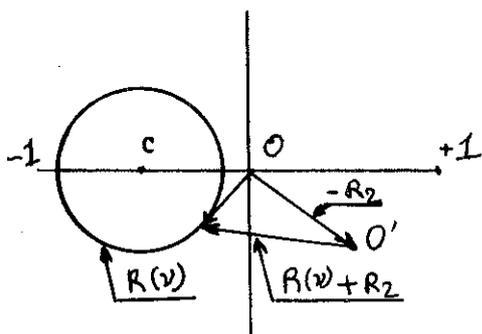


fig : 48

alors abstraction du quadrillage d'impédance usuel, nous ne nous préoccupons ici que des coefficients de réflexion).

O' est considéré comme fixe en fonction de la fréquence (dans une petite plage) car la branche de compensation ne comprend qu'un atténuateur et un piston de court-circuit.

Le pont est dit accordé lorsque O' est situé sur l'axe réel : soit à droite soit à gauche du point $R(\nu_0)$; la courbe d'absorption de la cavité apparaît soit en creux (O' à droite du centre C du cercle de la cavité) soit en bosse (O' à gauche de C) mais toujours bien symétrique fig. 49.

Le plus couramment on choisit de faire apparaître la cavité en creux en plaçant en outre O' à droite de $R(\nu_0)$. Concrètement il s'agit de maintenir la fréquence d'absorption maximum constante lorsqu'on désatténue la branche de compensation ou tout au moins, de retrouver la fréquence d'accord au minimum d'absorption qu'on s'est fixé.

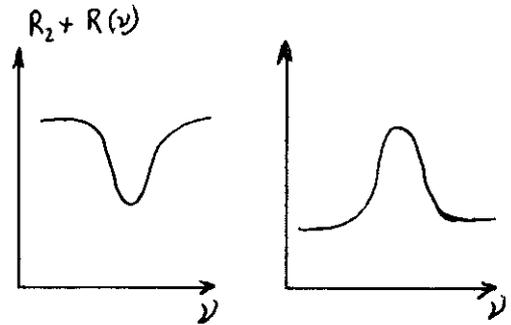


fig : 49

Effet hyperfréquence du cristal paramagnétique : Q_m

L'introduction du cristal dans la cavité, si on se place au centre de la raie peut se caractériser par l'apparition d'une susceptibilité magnétique χ'' définie de la façon suivante :

$$\text{puissance perdu dans le cristal} = \frac{1}{2} \omega \chi'' \int_{\text{cristal}} H_{\text{rf}}^2 dV \quad \text{IV,10}$$

En hyperfréquence il est plus commode de définir un coefficient de surtension magnétique de la façon suivante :

$$Q_m = 2\pi \cdot \frac{\text{énergie emmagasinée dans la cavité}}{\text{puissance perdue/cycle dans le cristal}}$$

Q_m s'exprime alors simplement en fonction de χ'' .

Si l'énergie emmagasinée dans la cavité est $\frac{\int_{\text{cavité}} H_{\text{rf}}^2 dV}{8\pi}$ en U.E.M.

$$Q_m = \frac{1}{4\pi \eta \chi''} \quad \text{IV,11}$$

$$\text{si } \eta = \frac{\int_{\text{cristal}} H_{\text{rf}}^2 dV}{\int_{\text{cavité}} H_{\text{rf}}^2 dV} = \text{facteur de remplissage}$$

L'expression de χ'' s'obtient en écrivant la formule (I,3) donnant la puissance dissipée dans le cristal

$$h\nu.W.\Delta N = \frac{1}{2} \omega \chi'' \int_{\text{cristal}} H_{\text{rf}}^2 dV \quad \text{IV,12}$$

$$\text{avec } W = \frac{1}{\hbar^2} \langle c \rangle^2 g(\nu_0) \int_{\text{cristal}} H_{\text{rf}}^2 dV \quad \text{IV,13}$$

d'après (41) et Bloembergen⁽⁹⁾

où $\langle c \rangle^2$ = le carré de l'élément de matrice dipolaire magnétique caractéristique de la transition

$g(\nu)$ = la forme de la raie ; $g(\nu_0)$ en étant le maximum

ΔN = différence de population entre les niveaux

$$\text{d'où } \chi'' = \frac{2}{\hbar} \langle c \rangle^2 g(\nu_0) \Delta N \quad \text{IV,14}$$

$$\text{et } Q_m = \frac{\hbar}{8\pi \eta \langle c \rangle^2 g(\nu_0) \Delta N} \quad \text{IV,15}$$

Ceci suppose que le champ H_{rf} a une direction constante dans tout le volume du cristal. En effet, comme nous l'avons vu au chapitre II p. 33, la probabilité de transition est aussi fonction de l'orientation du champ radio-fréquence.

En fait, dans notre cas le champ H_{rf} à polarisation rectiligne est tangent à un cercle dans le volume du cristal. Il faut donc introduire $\langle c \rangle^2$ dans l'intégrale de la formule IV,13 et écrire :

$$W = \frac{1}{\hbar^2} g(\nu_0) \int_{\text{cristal}} \langle c \rangle^2 H_{\text{rf}}^2 dV \quad \text{IV,16}$$

on trouve ainsi une nouvelle valeur de χ''

$$\chi'' = \frac{2}{\hbar} g(\nu_0) \Delta N \frac{\int_{\text{cristal}} \langle c \rangle^2 H_{\text{rf}}^2 dV}{\int_{\text{cristal}} H_{\text{rf}}^2 dV} \quad \text{IV,17}$$

qui tient compte en quelque sorte de l'efficacité du champ radio-fréquence

$$\text{et } Q_m = \frac{\kappa \int_{\text{cavité}} H_{\text{rf}}^2 dV}{8\pi g(\nu_0) \Delta N \int_{\text{cristal}} \langle c \rangle^2 H_{\text{rf}}^2 dV} \quad \text{IV,18}$$

Le Q_m ainsi défini caractérise les pertes magnétiques et se traite de la même façon que Q_0 .

$$\text{Il est tel que } \frac{1}{Q_0'} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_m}$$

Q_0' étant le nouveau coefficient de surtension propre de la cavité contenant le cristal.

$\frac{1}{Q_m}$ étant proportionnel à ΔN , différence de population, est positif s'il y a absorption, et négatif s'il y a émission.

Passage sur la raie.

Si nous étudions maintenant le phénomène de résonance au cours du passage sur la raie soit en champ soit en fréquence, il faut alors considérer une susceptibilité complexe :

$$\chi = \chi'(\nu, H_0) - j\chi''(\nu, H_0) \quad \text{IV,19}$$

qui joue dans les formules le même rôle que $\chi''(\nu)$ considéré précédemment. χ' représente la dispersion et χ'' l'absorption. Il est possible de passer de la variable ν

à H_0 par simple proportionnalité. L'allure des courbes $\chi'(\nu, H_0)$ et $\chi''(\nu, H_0)$ est indiquée fig. 50. Les relations de Kronig et Kramers⁽⁴²⁾⁽⁴³⁾ permettent de passer de χ'' à χ' ou inversement connaissant l'un des deux pour toutes les fréquences

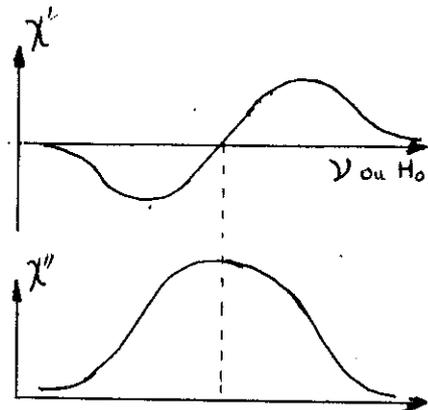


fig : 50

$$\chi'(\nu_1) = \frac{2}{\pi} \int \frac{\nu \chi'(\nu)}{\nu^2 - \nu_1^2} d\nu \quad \text{IV,20}$$

$$\chi''(\nu_1) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\nu_1 \chi'(\nu)}{\nu^2 - \nu_1^2} d\nu \quad \text{IV,21}$$

L'expression analytique de ces courbes $\chi''(\nu)$ et $\chi'(\nu)$ varie suivant le modèle choisi pour expliquer la largeur de raie (interaction spin spin, spin-réseau, interaction d'échange etc.) Habituellement, on peut considérer que χ décrit un cercle dans le plan complexe lorsque ν varie ⁽⁴⁴⁾. De toute façon, même si cela n'était pas tout à fait vrai, le raisonnement qualitatif et la mesure de Q_m qui suit resteraient exacts : on mesure toujours l'absorption sur l'axe réel.

On peut continuer à traiter formellement $\chi(\nu)$ comme $\chi''(\nu)$ précédemment, on en vient alors à définir un Q_m complexe tel que

$$\frac{1}{Q_m}(\nu) = \frac{1}{|Q_m(\nu_0)|} (g(\nu) + ib(\nu)) \quad \text{IV,22}$$

où $g(\nu)$ est de la forme de la raie déjà définie : $\sim \chi''(\nu)$
 et normalisée $g(\nu_0) = 1$
 et $b(\nu)$ est proportionnel à $\chi'(\nu)$

En introduisant ce Q_m dans la formule du coefficient de réflexion de la cavité, $R(\nu)$ devient :

$$R(\nu) = \frac{\frac{1}{Q_c} - \frac{1}{Q_o} - \frac{1}{Q_m}(\nu) - j\nu}{\frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_m}(\nu) + j\nu} \quad \text{IV,23}$$

Si en passant en champ sur la raie à fréquence fixe $\frac{1}{Q}$ (H) décrit un cercle

$$R(\nu_0, H) \text{ est de la forme } \frac{z_1 + z_2(H)}{z_3 + z_2(H)}$$

où z_1 et z_3 sont des nombres complexes fixes,

$z_2(H)$ décrit un cercle, $R(\nu_0, H)$ également.

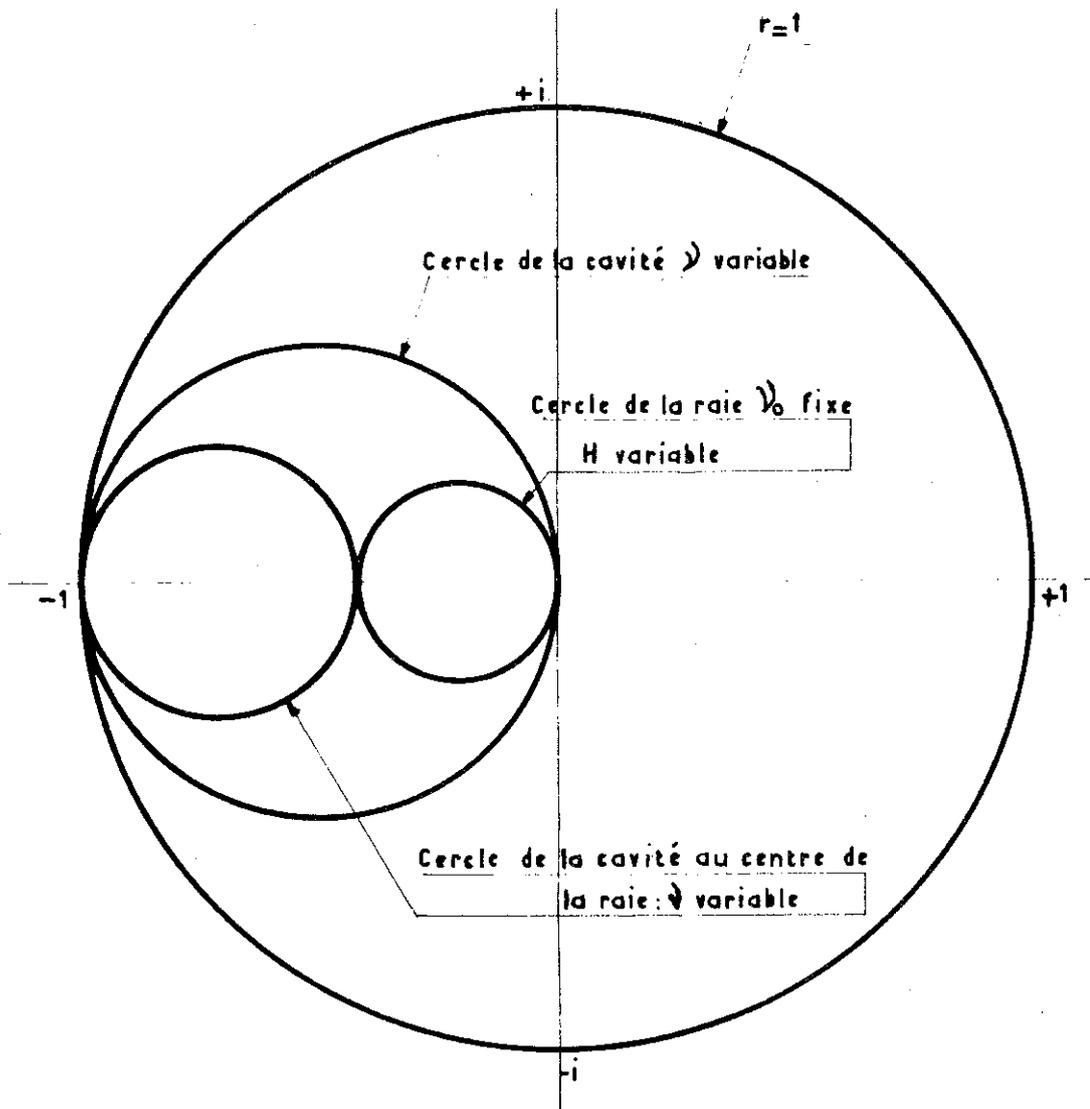
Sur l'abaque de Smith $R(\nu_0, H)$ sera un cercle centré sur l'axe réel et tangent au cercle de la cavité (fig. 51).

Dans la suite de l'exposé nous l'appellerons cercle de la raie. L'absorption est mesurée sur l'axe réel, la dispersion sur l'axe imaginaire.

En résumé :

Le passage en champ sur la raie provoque un rétrécissement du cercle de la cavité et un glissement de la graduation en fréquence le long de ce cercle. Si la raie est intense, le cercle de la raie est grand. On comprend alors le rôle du té magique. Il a pour but de "prendre ses distances" vis-à-vis du cercle de la raie de façon à éliminer la dispersion. Il faut en effet qu'on puisse confondre le module du coefficient de réflexion avec sa projection sur l'axe réel, projection dont la variation représente l'absorption.

Il arrive parfois que le té ne suffise pas lorsque la raie est très intense. Elle fait, par exemple, disparaître le cercle de la cavité (ce qui se produit pour nous à la température de l'hélium). Il faut alors une puissance de polarisation plus importante : de l'ordre de 10 fois au moins la variation enregistrée. Ce qui explique notre montage de temps de relaxation p.64. utilisé également pour mesurer des largeurs de raies lorsque celles-ci sont très intenses.



Abaque de Smith montrant l'effet de passage sur la raie
Plan du coefficient de réflexion

Fig:51

Mesure de Q_m .

La détermination de Q_m se déduit de Q_L par la mesure de

R = coefficient de réflexion en dehors de la raie

R_m = coefficient de réflexion au centre de la raie

Q_L et R se mesurent comme indiqué plus haut p. 72 sur un coupleur directif situé avant le té magique.

R_m se mesure à l'aide d'un té : en effet, à basse température la saturation apparaît pour des puissances même faibles (de l'ordre du microwatt) qui vues à travers un coupleur à 20 db ne se détectent pas très bien sur une diode hyperfréquence. On gagne les 20 db du coupleur en observant sur un té , on a également la possibilité de polariser la diode.

Nous supposons le té bien accordé. R_2 et R sont donc bien en phase (ou en opposition).

R_2 est négatif si on fait apparaître la cavité en creux sur le pont : (cf fig. 49). Le signal reçu dans la branche de détection à la fréquence d'accord de la cavité est

$$E_{04} = \frac{E_{11}}{2} (R_2 + R) \quad \text{IV,24}$$

et loin de celle-ci

$$E_{04 \text{ max}} = \frac{E_{11}}{2} (R_2 + 1) \quad \text{IV 25}$$

Sur le pont on mesure donc (fig. 52)

$$x = \frac{E_{04}}{E_{04 \text{ max}}} = \frac{R_2 + R}{R_2 + 1} \quad \text{IV,26}$$

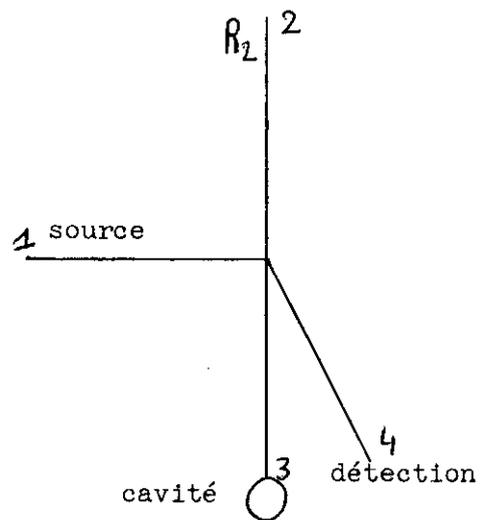


fig : 52

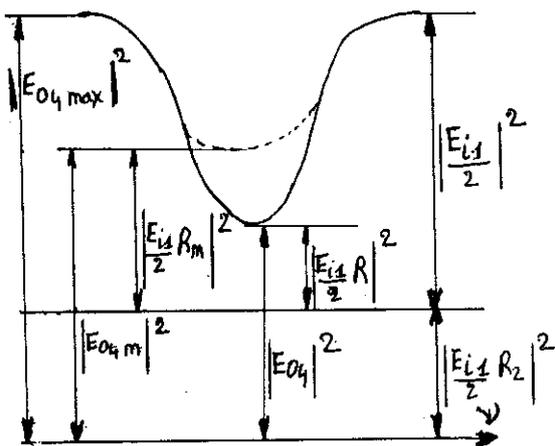


fig : 53

En passant sur la raie le signal reçu est

$$E_{04m} = \frac{E_{i1}}{2} (R_2 + R_m) \quad \text{IV,27}$$

et on mesure le rapport entre les coefficients de réflexion apparents sur la raie et en dehors de la raie

$$y = \frac{E_{04}}{E_{04m}} = \frac{R_2 - R}{R_2 + R_m} \quad \text{IV,28}$$

x et y sont des rapports d'amplitude.

En éliminant R_2 entre les deux équations donnant x et y on trouve :

$$R_m = \frac{R}{y} + \left(\frac{x + R}{1 - x} \right) \left(\frac{1}{y} - 1 \right) \quad \text{IV,29}$$

La valeur de Q_m se déduit de la définition des coefficients de réflexion à la fréquence d'accord de la cavité :

$$R = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} = \frac{\frac{1}{Q_c} - \frac{1}{Q_o}}{\frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_o}} \quad \text{IV,30}$$

$$R_m = \frac{\beta_m - 1}{\beta_m + 1} = \frac{\frac{1}{Q_c} - \frac{1}{Q_o} - \frac{1}{Q_m}}{\frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_o} + \frac{1}{Q_m}} \quad \text{IV,31}$$

En combinant on obtient

$$Q_m = Q_L \cdot \frac{1 + R_m}{1 - R_m} \quad \text{IV,32}$$

R et R_m étant > 0 si la cavité est surcouplée au moment de la mesure

< 0 si la cavité est sous-couplée.

Dans le cas du fonctionnement en Maser on peut toujours définir une quantité R_m qui, s'il y a amplification, sera > 1 . On voit qu'à la limite d'oscillation (R_m grand) $Q_m = -Q_L$, l'émission due au cristal compense les pertes de la cavité et du couplage. Ceci nous fournit un deuxième moyen de mesurer Q_m : il suffit de régler le couplage de la cavité pour être à la limite d'oscillation et de mesurer Q_L .

RESULTATS EXPERIMENTAUX .

Largeur de raies.

Nous les avons mesurées aux divers points de fonctionnement Maser en photographiant directement la raie sur un oscilloscope fig. 54 (le montage était celui de la fig. 39), la fréquence étant fixe et le champ continu lentement variable. Il fallait convertir en fréquence la largeur mesurée en gauss^x. La formule classique

$$\nu = \frac{g \mu_B H}{h} \quad \text{IV,33}$$

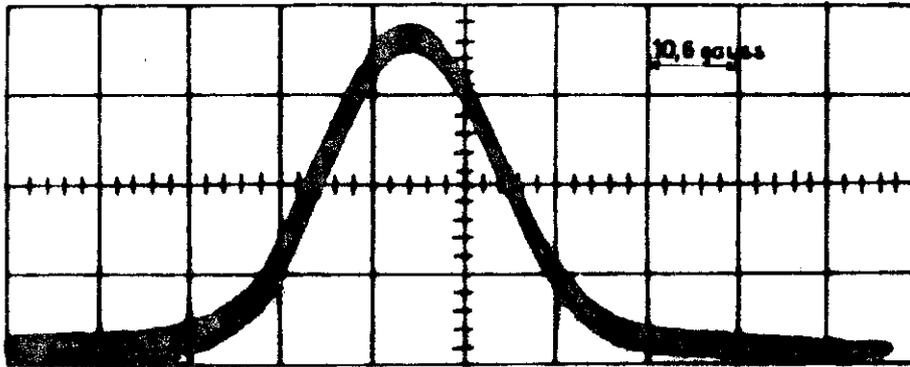
n'est valable que pour des raies comprises entre des niveaux variant linéairement avec le champ, ce qui n'est pas notre cas. A chaque point de mesure nous avons simplement déterminé la tangente de la courbe représentant la position de la raie dans un diagramme fréquence-champ.

Les raies ont été observées à 10 cm uniquement pour une fréquence de l'ordre de 2 950 MHz. Les largeurs sont déterminées à mi-puissance.

La forme des raies observées est intermédiaire entre une forme de Gauss et de Lorentz. Ceci a été déterminé d'après la valeur du produit

$$\begin{aligned} \frac{\text{Intensité} \times \text{largeur à mi-puissance}}{\text{surface}} &= 0,936 \text{ pour une gaussienne} \\ &= 0,637 \text{ pour une courbe de Lorentz} \end{aligned}$$

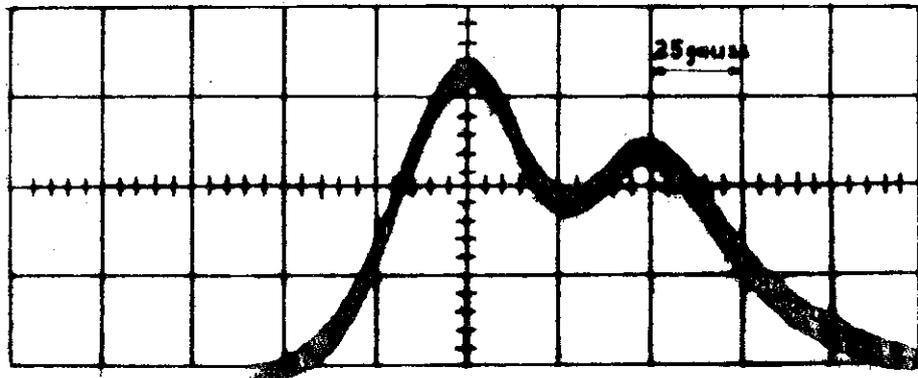
^x selon l'usage des spectroscopistes.



Rubis Raie au point D: $\theta = 25^\circ$
 $\Delta H = 24$ gauss

Fig:54

- $T = 77^\circ K$
- $\nu = 2960 MHz$
- Concentration = 0,07%



Rubis raie au point A: $\theta = 5^\circ$
 $\Delta H = 48$ gauss et 56 gauss - écart des raies 50 gauss

Fig:55

Largeurs de raies en MHz

: Concentration	: 0,07 % en ion Cr ⁺⁺⁺ /Al ⁺⁺⁺	:: 0,2 % :
: Température	: 300°K	: 77°K
		: 4,2°K
		:: 77°K :
: Point A, $\theta = 0^\circ$: 64	: 106
		: 135
: Point B, $\theta = 20^\circ$: 88	: 154
		: 160
: Point C, $\theta = 30^\circ$: 90	: 96
		: 172
: Point D, $\theta = 5^\circ$: 45	: 61
		: 125
		:: 114 :
: $\theta = 15^\circ$: 62	: 71
		: 125
		:: 136 :
: $\theta = 25^\circ$: 74	: 84
		: 112
		:: 136 :

Nous notons un élargissement net de la raie avec la concentration entre 0,07 % et 0,2 % . A cette dernière, nous sommes déjà dans la largeur inhomogène de la raie (due à l'interaction spin-spin). Cette concentration est trop forte pour le fonctionnement Maser(cf Maiman⁽²⁶⁾)

Notons également un élargissement assez considérable lorsque la température décroît, contrairement à ce que Fédorov et Manenkov ont observé⁽⁴⁶⁾. Ceci ne peut être dû à une polarisation insuffisante à l'hélium (où les raies sont intenses) car elle aurait, au contraire, pour effet de diminuer apparemment la largeur.

Nous avons également observé des anomalies encore inexplicées au point A en s'éloignant de l'axe et au point C : les raies sont dédoublées pour les deux concentrations et uniquement à température de l'azote (fig. 55)

Temps de relaxation :

On suppose que c'est la différence de populations qui varie exponentiellement (fig. 56)

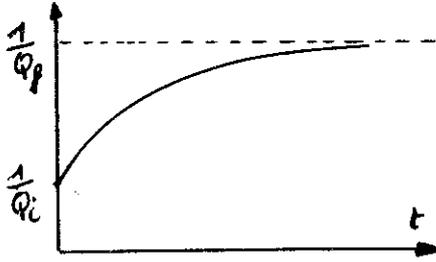


fig : 56

$$\frac{1}{Q_m}(t) = \frac{1}{Q_{\text{final}}} + \left(\frac{1}{Q_{\text{initial}}} - \frac{1}{Q_{\text{final}}} \right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

IV,34

Q_{initial} étant celui qui se mesurerait juste après l'impulsion de saturation (si la saturation est totale $\frac{1}{Q_i} = 0$).

Q_{final} étant le Q_m mesuré par ailleurs.

Le signal observé dans la branche de détection est toujours

$$E_{04} = \frac{E_{11}}{2} (R_2 + R(t)) \quad \text{IV,35}$$

Nous pouvons abandonner le coefficient $\frac{E_{11}}{2}$ et R_2 qui sont fixes

$$E_{04} \sim R(t) = \frac{\frac{1}{Q_c} - \frac{1}{Q_o} - \frac{1}{Q_f} - \left(\frac{1}{Q_i} - \frac{1}{Q_f} \right) e^{-\frac{t}{\tau}}}{\frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_f} + \left(\frac{1}{Q_i} - \frac{1}{Q_f} \right) e^{-\frac{t}{\tau}}} \quad \text{IV,36}$$

Si $\frac{1}{Q_f}$ est important et la cavité mal adaptée, la fonction observée n'est donc pas directement une exponentielle comme on l'admet généralement. Toutefois si $Q_c = Q_o$ (cavité bien adaptée) et si la saturation est complète $\frac{1}{Q_i} = 0$

$$R(t) = \frac{-\frac{1}{Q_m} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}{\frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_m} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})} \quad \text{IV,37}$$

et si de plus on est à température élevée ou si on n'observe qu'un petit nombre de centres $\frac{1}{Q_m} \ll \frac{1}{Q_L}$ on retrouve la formule donnant de l'exponentielle simple

$$R(t) = - \frac{Q_L}{Q_m} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad \text{IV,38}$$

Si la saturation n'est pas complète et si $\frac{1}{Q_m}(t)$ est très petit (à température de l'azote par exemple) la formule devient

$$R(t) = - \frac{Q_L}{Q_m} \left[1 + \left(\frac{Q_m}{Q_1} - 1 \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \quad \text{IV,39}$$

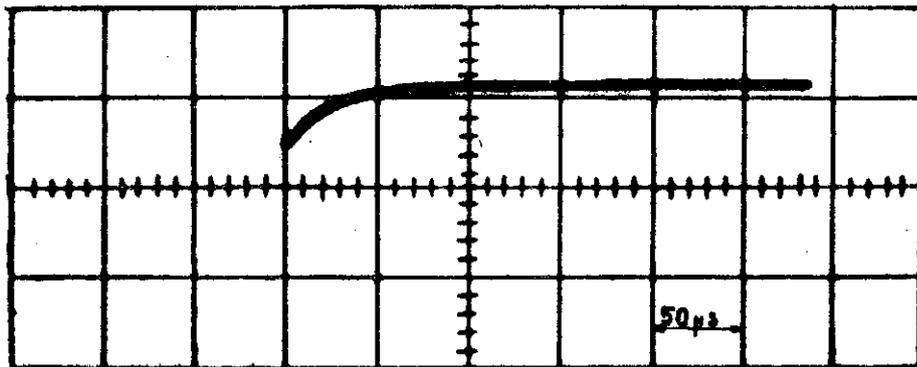
Le montage utilisé a été décrit p. 63. Sur l'oscilloscope on observe en 3 cm une grande impulsion (elle déborde largement l'écran) qui correspond à la puissance de saturation, suivie d'une courbe qui est proprement R(t) (fig. 57 et 58).

Si on se place à un point de fonctionnement Maser, on peut également observer un temps de relaxation à la fréquence correspondant au 10 cm (il n'est pas forcément égal à celui mesuré en 3 cm). Sur la photo 59 apparaît d'abord l'exponentielle correspondant à la saturation de la raie à 3 cm. La deuxième exponentielle représente la relaxation de la raie à 10 cm après qu'on ait coupé la puissance de saturation à 3 cm.

La constante de temps de l'établissement de l'équilibre de la raie à 10 cm est fonction du carré de l'amplitude du champ radio-fréquence (cf formules I,11 et II,8) : la courbe fig. 60 donne ce temps mesuré à 4,2°K en fonction de la puissance de pompe.

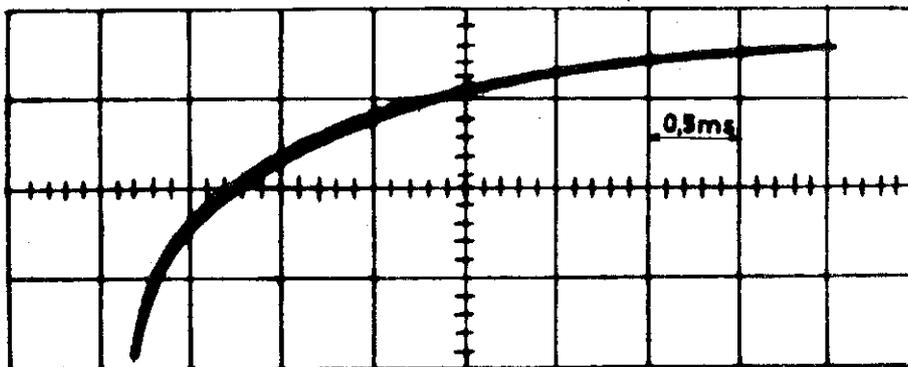
Temps de Relaxation

Rubis point D



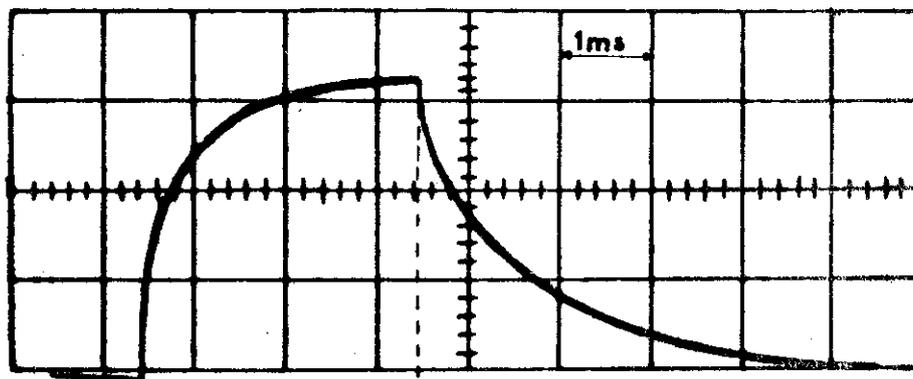
T=77°K - Vu en 3cm

Fig:57



T=20°K - Vu en 3cm

Fig:58

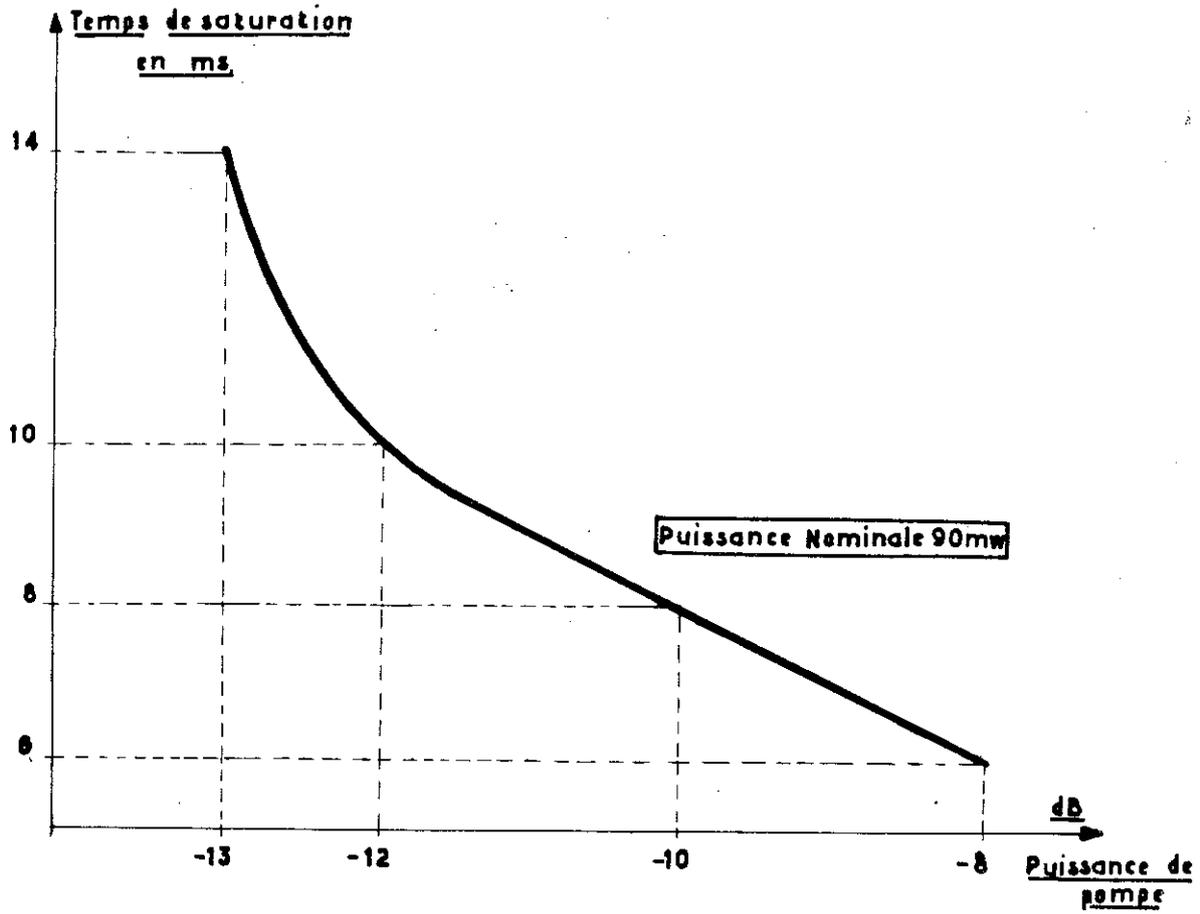


Impulsions de saturation

Relaxation

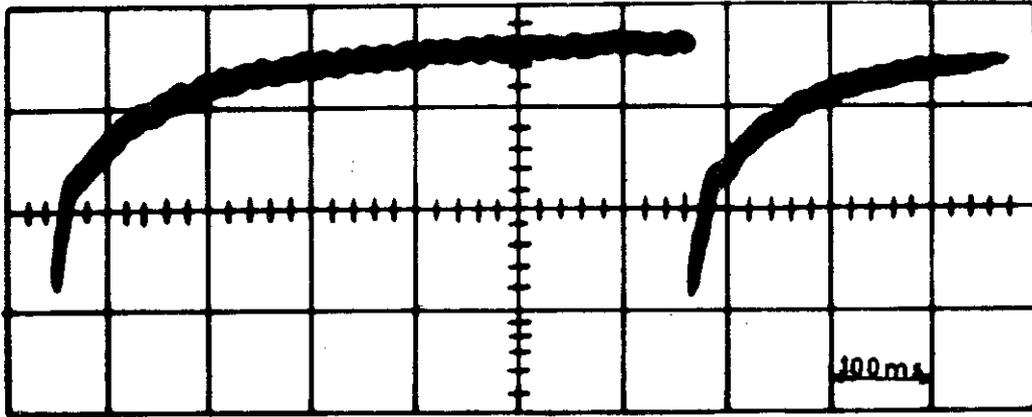
T=20°K - Vu en 10cm

Fig:59



Temps de saturation de la raie 10cm au point D
en fonction de la puissance de pompe
 $T=4,2^{\circ}K$

Fig:60

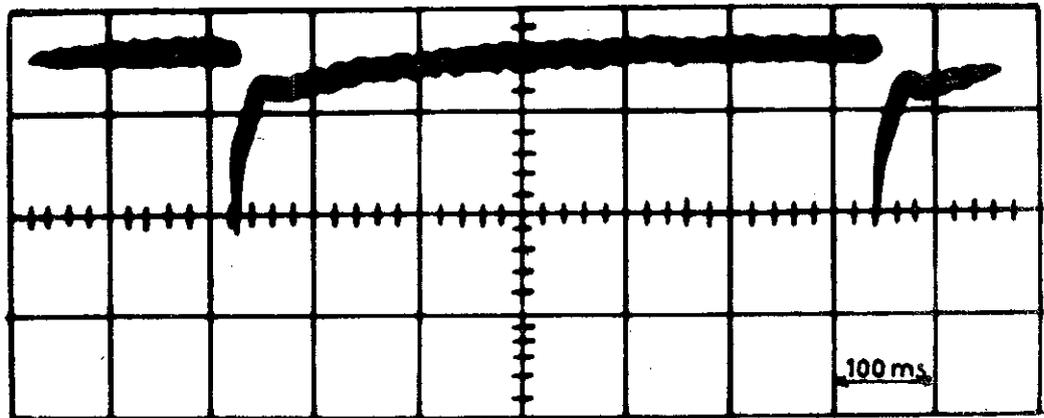


A 4° du couplage harmonique de spin

$T_1 \approx 160\text{ms}$

Fig:61

3cm Point D temps de relaxation



Au couplage harmonique de spin

$T_1 \approx 20\text{ms}$ et 100ms

Fig:62

Voici quelques temps de relaxation mesurés sur le rubis à 0,07 % de $\text{Cr}^{+++}/\text{Al}^{+++}$ au point D à 9 000 MHz environ

<u>Température</u>	<u>Temps de relaxation</u>
300°K	non mesurable avec notre méthode
77°K	30 μs
20°K	1,4 ms
(mesuré sur le 10 cm fig. 59)	1,2 ms
4,2°K	150 ms

la variation est en $\frac{1}{T^3}$ de 77°K à 4,2°K.

Point D au couplage harmonique de spin.

En nous plaçant au point de C.H.S. déjà déterminé p. 40, nous avons fait quelques mesures, mais uniquement à température de l'hélium, à 3 cm et avec un cristal de 0,07 % de concentration, la fréquence était de 9 145 MHz, d'où l'angle $\theta = 23,5^\circ$. La raie est bien plus large que loin du C.H.S. : $\Delta H = 146$ gauss au lieu de 62 gauss dans le voisinage en l'absence de C.H.S.

D'autre part, au point précis de C.H.S. nous avons observé deux temps de relaxation bien distincts, puis en nous éloignant nous avons retrouvé le temps mesuré par ailleurs (fig. 61 et 62).

Au C.H.S.	$T_1 = 100$ ms	et 20 ms
à 2°	$T_1 = 130$ ms	et 43 ms
à 4°	$T_1 = 160$ ms	

Ces mesures ne sont que fragmentaires et demanderaient des développements ultérieurs : il serait intéressant d'observer le temps de relaxation en 10 cm au C.H.S. par exemple et de faire varier la concentration.

CHAPITRE V

PERFORMANCES DU MASER

THEORIE, METHODES DE MESURES

ET RESULTATS EXPERIMENTAUX.

Les deux grandeurs caractéristiques du Maser, comme de tout amplificateur, sont essentiellement le produit gain en tension x largeur de bande $\sqrt{G.B.}$ et le facteur de bruit

$$F = \frac{\left(\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}\right) \text{ entrée}}{\left(\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}\right) \text{ sortie}} \quad \text{V,1}$$

qu'on mesure soit en décibels soit en température équivalente de bruit.

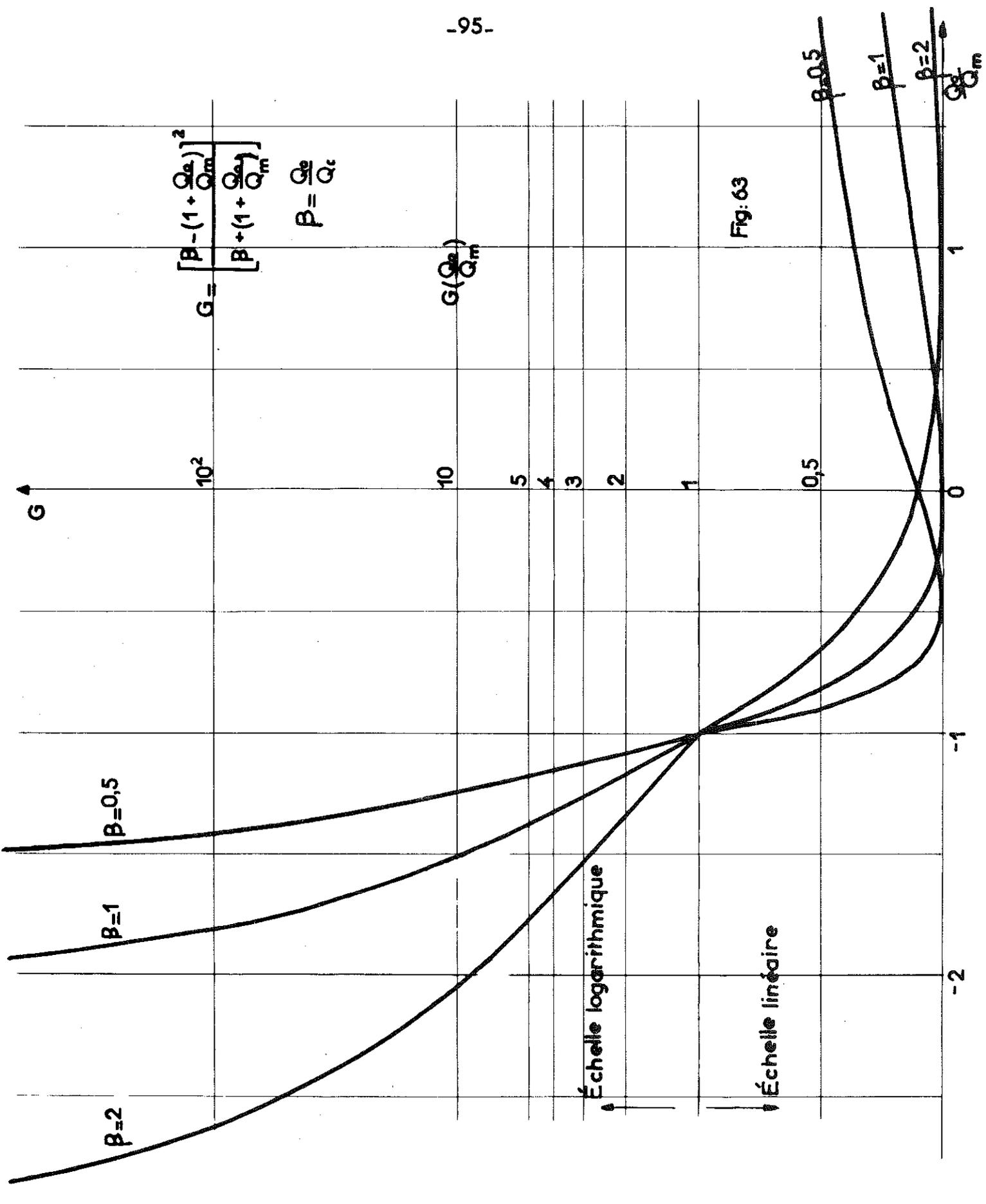
Produit $\sqrt{G.B.}$

Pour un Maser utilisant une cavité en réflexion, le gain maximum en puissance est donné simplement par le carré du coefficient de réflexion de la cavité à la fréquence d'accord de celle-ci et au centre de la raie : (cf formule IV,31)

$$G = \left| R(\nu_0) \right|^2 = \left| \frac{\frac{1}{Q_c} - \frac{1}{Q_0} - \frac{1}{Q_m}}{\frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_m}} \right|^2 \quad \text{V,2}$$

$$\text{ou encore } G = \left| \frac{\beta - 1 - \frac{Q_0}{Q_m}}{\beta + 1 + \frac{Q_0}{Q_m}} \right|^2 \quad \text{V,3}$$

Cette fonction est représentée fig. 63 avec $\frac{Q_0}{Q_m}$ en abscisse et β comme paramètre.



On voit que G sera supérieur à 1 si $\left| \frac{Q_o}{Q_m} \right| > 1$, Q_m étant évidemment négatif, c'est-à-dire si l'apport de puissance par le cristal $\left(\frac{1}{Q_m} \right)$ compense et au-delà les pertes propres à la cavité caractérisée par $\frac{1}{Q_o}$, d'où la nécessité d'obtenir la meilleure surtension propre de la cavité.

Le gain devient infini, c'est-à-dire il y a oscillation si

$$\left| \frac{1}{Q_m} \right| \geq \frac{1}{Q_L} \quad \text{V,4}$$

c'est-à-dire si l'émission du cristal compense les pertes de l'ensemble de la cavité et du circuit d'utilisation $\left(\frac{1}{Q_c} \right)$.

Dans la pratique on règle le gain en jouant sur le couplage de la cavité, c'est-à-dire sur β .

Ceci n'est valable qu'à la fréquence d'accord, si on s'en écarte, on peut considérer que Q_m , de réel qu'il était, devient complexe⁽⁴⁵⁾ conformément à la formule IV,22

$$\frac{1}{Q_m} = \frac{1}{|Q_m|} (g(\nu) + j b(\nu)) \quad \text{V,5}$$

$g(\nu)$ est positif s'il y a absorption et négatif s'il y a émission.

Le coefficient de réflexion est également complexe

$$R = \frac{\frac{1}{Q_c} - \frac{1}{Q_o} - \frac{g(\nu)}{|Q_m|} - j \left(v + \frac{b(\nu)}{|Q_m|} \right)}{\frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_o} + \frac{g(\nu)}{|Q_m|} + j \left(v + \frac{b(\nu)}{|Q_m|} \right)} \quad \text{V,6}$$

Le gain s'écrit

$$G(\nu) = |R|^2 = \frac{\left(\frac{1}{Q_c} - \frac{1}{Q_o} - \frac{g(\nu)}{|Q_m|} \right)^2 + \left(v + \frac{b(\nu)}{|Q_m|} \right)^2}{\frac{1}{Q_L^2} \left[(1 + g(\nu)\sigma)^2 + (vQ_L + b(\nu)\sigma)^2 \right]} \quad \text{V,7}$$

$$\text{où } \sigma = \frac{Q_L}{|Q_m|}$$

en posant $d = (1 + g(\nu) \sigma)^2 + (vQ_L + b(\nu) \sigma)^2$

Il est possible de simplifier

$$G(\nu) = 1 - \frac{4Q_L^2}{Q_c} \frac{\left(\frac{1}{Q_o} + \frac{g(\nu)}{|Q_m|}\right)}{d} \quad \text{V,8}$$

Pour des gains assez grands

$$G \approx G - 1 = - \frac{4Q_L^2}{Q_c} \frac{\left(\frac{1}{Q_o} + \frac{g(\nu)}{|Q_m|}\right)}{d} \quad \text{V,9}$$

La raie mesurée en fréquence étant bien plus large que la largeur de la courbe d'absorption de la cavité (quelques dizaines de MHz cf p. 87, contre 1 MHz par exemple si à 3 000 MHz la surtension apparente est de 3 000), nous pouvons supposer que $g(\nu)$ est constant et $= -1$ et que le seul dénominateur $d(\nu)$ est responsable de la variation du gain.

$$d = \left(1 - \frac{Q_L}{|Q_m|}\right)^2 + \left[\frac{2(\nu - \nu_o)}{\Delta \nu_o} + \frac{2(\nu - \nu_m)}{\Delta \nu_m} \frac{Q_L}{|Q_m|}\right]^2 \quad \text{V,10}$$

en effet $vQ_L = 2 \frac{\nu - \nu_o}{\nu_o} \cdot \frac{\nu_o}{\Delta \nu_o}$ si $\Delta \nu_o$ est la largeur de la cavité à 3 db.

$b(\nu) = 2 \left(\frac{\nu - \nu_m}{\Delta \nu_m}\right)$ car $b(\nu)$ varie linéairement au voisinage de la fréquence de résonance (cf fig. 50.)

$\Delta \nu_m$ étant la largeur de la raie magnétique mesurée à mi-hauteur.

Nous supposons que le champ magnétique est réglé de telle façon que l'accord de la cavité et le centre de la raie coïncident

$$\nu_o = \nu_m$$

La bande passante B est définie par $d = 2 d_{\min} = 2 \left(1 - \frac{Q_L}{|Q_m|}\right)^2$

$$B = 2(\nu - \nu_0) = \left(1 - \frac{Q_L}{|Q_m|}\right) \frac{1}{\left(\frac{1}{\Delta\nu_0} + \frac{Q_L}{|Q_m|} \frac{1}{\Delta\nu_m}\right)} \quad \text{V,11}$$

D'après V,9 à la résonance

$$G \simeq \frac{4 \frac{Q_L^2}{Q_c} \left(\frac{1}{|Q_m|} - \frac{1}{Q_0}\right)}{\left(1 - \frac{Q_L}{|Q_m|}\right)^2} \quad \text{V,12}$$

$$\text{d'où } \sqrt{G.B} = 2 \frac{Q_L}{\sqrt{Q_c}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{|Q_m|} - \frac{1}{Q_0}}}{\left(\frac{1}{\Delta\nu_0} + \frac{Q_L}{|Q_m|} \frac{1}{\Delta\nu_m}\right)} \quad \text{V,13}$$

Si le gain est très grand : $\frac{Q_L}{|Q_m|} \simeq 1$ et $\frac{1}{Q_0} \ll \frac{1}{|Q_m|}$

et comme $\Delta\nu_0 \ll \Delta\nu_m$ il est possible de simplifier :

$$\sqrt{G.B} = 2\Delta\nu \frac{Q_L}{Q_c} = \frac{2\nu_0}{Q_c} \quad \text{V,14}$$

Si les performances du Maser sont bonnes, c'est-à-dire si on est obligé de surcoupler fortement pour éviter les oscillations :

$Q_c \simeq Q_L$, on retrouve la formule classique

$$\sqrt{G.B} = \frac{2\nu_0}{|Q_m|} \quad \text{V,15}$$

Facteur de bruit.

C'est le rapport

$$F = \frac{\left(\frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{bruit}}}\right)_{\text{entrée}}}{\left(\frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{bruit}}}\right)_{\text{sortie}}} \quad \text{V,16}$$

Il peut se mesurer soit directement en rapport de puissance ou mieux en décibels, soit encore en température équivalente de bruit selon la formule

$$T_b = T_0 (F - 1) \quad \text{v,17}$$

qui traduit le fait que si T_0 est la température ambiante à l'entrée de l'amplificateur, celui-ci ramène à l'entrée une puissance de bruit supplémentaire qui vaut $kT_0 \Delta \nu$, $\Delta \nu$ étant la bande totale de l'amplificateur.

Pour faire ce calcul nous allons attribuer à chaque source de bruit (caractérisée par un coefficient de surtension qui représente des pertes) un couplage ⁽⁴⁵⁾ et nous calculerons la puissance transmise de chacun de ces couplages à la sortie.

Le coefficient de transmission d'une cavité à deux couplages (fig. 64) est donné par ⁽³⁹⁾

$$J_{12} = \frac{4Q_0^2}{Q_1 Q_2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{Q_0}{Q_1} + \frac{Q_0}{Q_2}\right)^2 + Q_0^2 v^2} \quad \text{V,18}$$

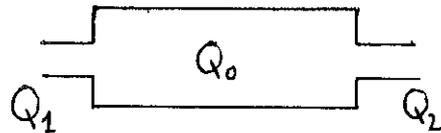


fig : 64

Dans notre cas nous considérons trois couplages conformément à la figure 65.

Par exemple de Q_0 à Q_c le coefficient de transmission est

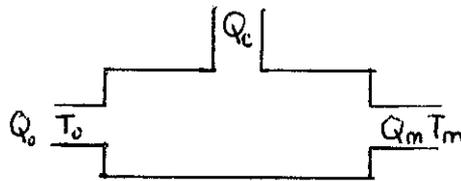


fig : 65

$$J = \frac{4Q_L^2}{Q_0 Q_L (1 + g(\nu)\sigma)^2 + (vQ_L + b(\nu)\sigma)^2} = \frac{4Q_L^2}{Q_0 Q_c d} \quad \text{V,19}$$

Les lettres ayant la même signification que précédemment.

La puissance de bruit par cycle à la sortie de la cavité due aux parois et au cristal respectivement aux températures T_0 et T_m ($T_m < 0$ car le cristal est émissif) est

$$P_b/\text{cycle} = \frac{4Q_L^2}{Q_c d} \left(\frac{kT_0}{Q_0} + \frac{kT_m g(\nu)}{|Q_m|} \right) \quad \text{V,20}$$

La température de bruit peut également être définie comme correspondant à la puissance qui, mise à l'entrée de l'amplificateur (ajoutée au bruit thermique dû à la température même de l'entrée T_0) double la puissance de bruit à la sortie : $P_b/\text{cycle} = kT_b G$

$$T_b = \frac{4Q_L^2}{Q_c (1 - \sigma)^2} \left(\frac{T_0}{Q_0} + \left| \frac{T_m}{Q_m} \right| \right) \frac{1}{G} \quad V,21$$

En transformant à l'aide de V,9

$$T_b = \frac{G - 1}{G} \left(\frac{\frac{T_0}{Q_0} + \left| \frac{T_m}{Q_m} \right|}{\frac{1}{|Q_m|} - \frac{1}{Q_0}} \right) \quad V,22$$

$$T_b \simeq \frac{\frac{T_0}{Q_0} + \left| \frac{T_m}{Q_m} \right|}{\frac{1}{|Q_m|} - \frac{1}{Q_0}} \quad V,23$$

Dans ce calcul nous avons supposé que $\frac{1}{|Q_m|} > \frac{1}{Q_0}$.

$$T_b \simeq \left(T_0 \frac{|Q_m|}{Q_0} + |T_m| \right) \quad V,24$$

Pour que le bruit du Maser soit faible, il faut donc que l'inversion de populations soit importante, c'est-à-dire que $|T_m|$ soit petit et que la surtension magnétique soit bien plus petite que Q_0 .

Cette formule montre également qu'il est possible d'obtenir une température de bruit inférieure à la température du bain T_0 . Par exemple, on peut théoriquement faire fonctionner un Maser à l'azote dont la température équivalente de bruit soit inférieure à $77^\circ K$.

Jusqu'à présent nous n'avons considéré que le bruit d'origine thermique, c'est-à-dire dû à la température soit des spins, soit de la cavité, sans tenir compte de l'émission spontanée. En dernier ressort toutefois, si les deux premières sources de bruit sont rendues négligeables, il n'est pas possible d'agir sur l'émission

spontanée, et c'est elle qui représente la limite théorique du bruit.

La température équivalente se détermine ainsi⁽⁴¹⁾⁽⁴⁷⁾:

Supposons un corps possédant deux niveaux $E_1 > E_2$ et considéré comme un corps noir, c'est-à-dire soumis à son seul rayonnement. Le nombre de transitions par seconde de $1 \rightarrow 2$ est

$$\dot{N}_1 = N_1 [A + BU(\nu)]$$

Si A et B sont respectivement les coefficients d'émissions spontanée et induite d'Einstein (cf p. 5)

et $U(\nu)$ la densité de radiation par unité de volume et par unité de bande de fréquence .

La température équivalente de bruit due à A est celle qui double ce bruit, donc telle que

$$BU(\nu) = A$$

Or on sait que

$$BU(\nu) = \frac{A}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad \text{V,25}$$

Il faut donc que $e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 = 1$

$$\text{d'où} \quad T_b = \frac{h\nu}{k \text{ Log } 2} \quad \text{V,26}$$

La température minimum théorique de bruit d'un Maser est donc très faible pour les hyperfréquences (à 3 MHz $T_b \simeq 0,15^\circ\text{K}$), mais augmente considérablement dans l'infra-rouge et surtout en optique : pour $\lambda = 0,8 \mu$, $T_b \simeq 18\ 000^\circ\text{K}$.

Maser à cavité en réflexion ou en transmission.

Les calculs précédents se réfèrent à une cavité en réflexion que nous avons effectivement utilisée de préférence à une cavité en transmission. En effet :

D'une part, les difficultés technologiques de réalisation dans le fond d'un vase d'un double couplage variable sont accrues,

D'autre part, et surtout, les calculs que nous ne développerons pas ici (cf Stinch⁽⁴⁸⁾) montrent que si le double couplage permet une utilisation plus souple du Maser, on ne peut obtenir à Q_m , Q_o

et G égaux, à la fois un facteur de bruit aussi faible et une bande aussi large qu'avec une cavité en réflexion.

MESURES EFFECTUEES.

Nous avons étudié successivement les quatre points de fonctionnement A, B, C, D déterminés fig. 22 et p. 36 avec des fortunes diverses. Aucune inversion de populations même à 4,2°K n'a été observée aux points A et C. Une inversion simple à la fréquence de signal désirée sans gain > 1 fut observée au point B avec un cristal de 0,07 % de concentration.

Après la découverte du phénomène de couplage harmonique de spin l'exploitation du point D fut des plus fructueuses. En effet, loin du C.H.S. nous ne parvenions pas davantage à obtenir l'inversion.

Fixation des fréquences.

La courbe de C.H.S. nous fixe les deux fréquences de signal et de pompe, l'une par rapport à l'autre. La manipulation préliminaire consiste donc à faire tourner le cristal à l'intérieur de la cavité (ce qui n'agit que sur la fréquence de pompe cf p. 59) de façon à se trouver sur la courbe de C.H.S. (fig. 24). Ceci ne peut s'effectuer qu'à température ambiante, il faut donc prévoir lors du réglage la variation de fréquence avec la température de 300°K à 4,2°K (insensible pour le 10 cm, elle est de l'ordre de 20 à 30 MHz pour le 3 cm).

Détermination du point de fonctionnement.

Le point de fonctionnement se détermine très exactement en traçant rapidement le diagramme des raies pour les deux fréquences au voisinage de l'intersection. Une fois l'angle déterminé, il suffit d'amener le champ à la bonne valeur et d'envoyer une puissance de pompe suffisante pour observer l'effet Maser. Le plus souvent, on observe l'oscillation, car la cavité vue en 10 cm est bien adaptée pour l'observation des raies. Il faut donc largement surcoupler

pour obtenir la condition $Q_m \gg Q_L$, c'est-à-dire avoir un gain suffisamment grand sans oscillation .

Les figures 66 à 68 illustrent l'effet Maser observé sur l'oscilloscope, la fréquence de signal est portée en abscisse et la puissance réfléchie par la cavité en ordonnée.

Nous voyons d'abord la cavité bien adaptée (en dehors de la raie) fig. 66, puis le champ est appliqué à la bonne valeur fig. 67, la courbe d'absorption de la cavité disparaît complètement, le coefficient de réflexion est voisin de - 1. En appliquant progressivement la pompe, nous parvenons à réadapter la cavité (compensation des pertes) l'image obtenue est celle de la fig. 66. En augmentant la puissance de pompe on commence à amplifier (fig. 68) : à l'échelle le maximum d'amplification obtenue dépasserait évidemment l'écran.

Sauf indication contraire, les mesures dont nous ferons état dans ce chapitre ont été faites :

- Avec un cristal de 0,07 % de concentration en ions et de 6 mm d'épaisseur (environ 4 cm³ de volume),
- Le signal était à 2 943 MHz et la pompe à 8 651 MHz,
- L'angle $\theta = 5^{\circ}30'$,
- La température de 4,2°K.

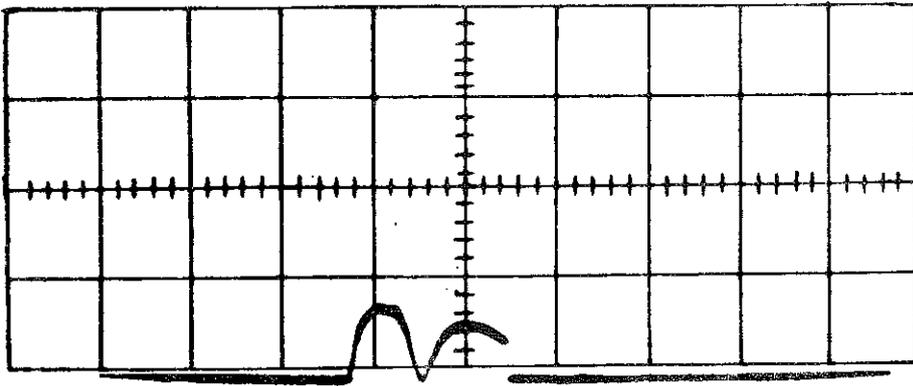
Mesure du $\sqrt{G.B}$.

On utilise le montage fig. 38. Le couplage de 3 cm est bien adapté pour que toute la puissance fournie par le klystron soit bien utilisée. Le circulateur a pour but d'assurer un bon découplage dans le sens inverse 3 → 2 → 1 (25 db) et une transmission excellente dans le sens direct (au centre de la bande) 1 → 2 → 3. Pertes à 0,4 db entre deux portes consécutives.

- Mesure de la bande passante .

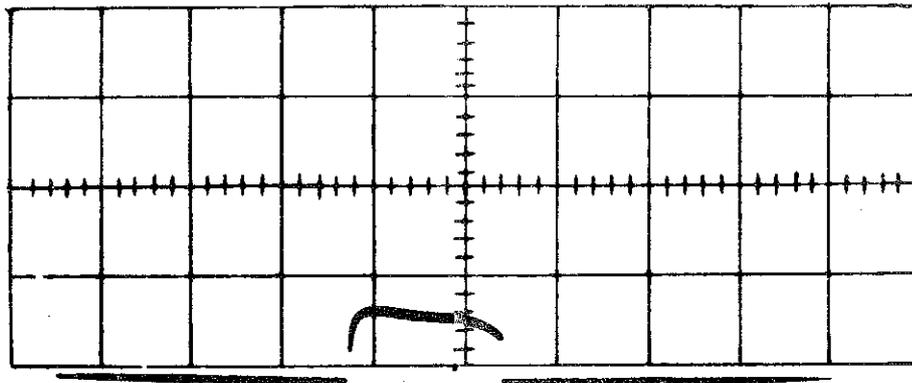
Le signal fourni par un générateur de fréquence stable est observé dans le bras 3 sur un analyseur de spectre , la fréquence est ajustée au maximum du gain G . On dérègle la fréquence de part et d'autre après avoir augmenté le signal à l'entrée de 3 db

Visualisation de l'effet M.A.S.E.R.



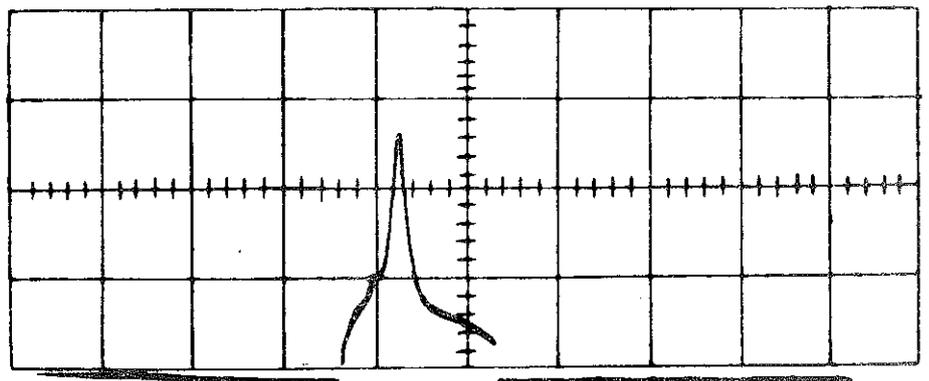
Courbe d'absorption de la cavité sans champ

Fig:66



Sur la raie

Fig:67



Sur la raie avec pompe

Fig:68

et on mesure l'écart de fréquence B entre les deux points où on retrouve la même amplitude du signal.

- Mesure du gain :

On ajuste la fréquence au maximum du gain et on observe le signal amplifié par le Maser. On déconnecte alors le générateur du Maser pour envoyer directement le signal sur le récepteur. Le gain de l'ensemble du montage est alors mesuré par l'augmentation de puissance J' (db) du signal d'entrée nécessaire pour retrouver le même niveau.

Le gain propre du Maser est déduit de celui qu'on vient de trouver en ajoutant les pertes du circuit d'entrée et du circulateur : J'' (db). On mesure celles-ci de la même façon que le gain en ayant soin de court-circuiter le couplage du circuit signal à la cavité et de couper le champ continu (pour être assuré d'avoir un coefficient de réflexion = - 1 au niveau de la cavité).

Nous avons obtenu (à 4,2°K)

- Un $\sqrt{G.B.} = 3,5$ MHz pour l'ensemble du montage

L'atténuation $J'' = -3$ db

- $\sqrt{G.B.}$ pour le Maser seul = 5 MHz

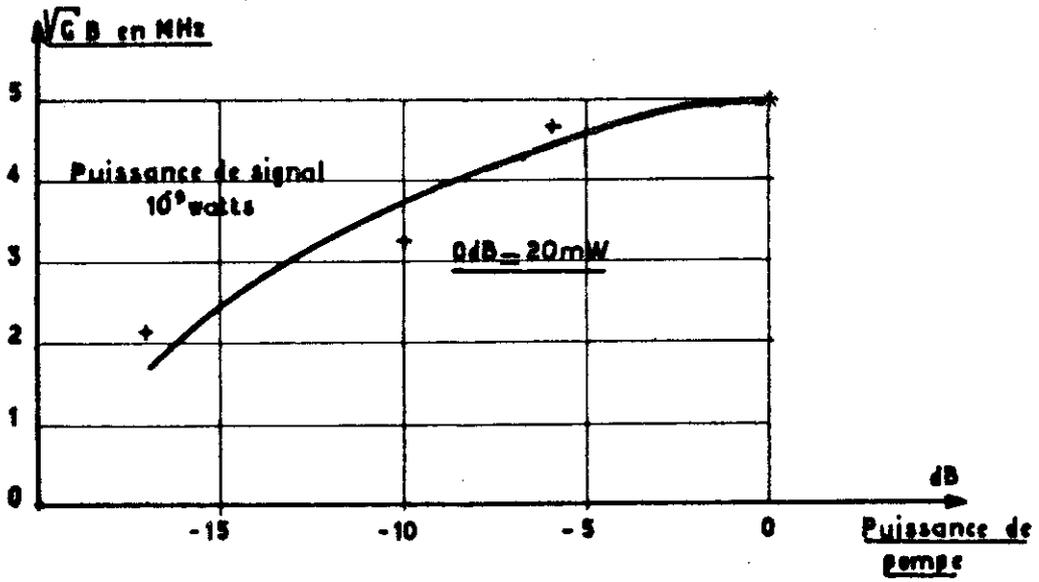
$$\text{d'où } |Q_m| = \frac{6000}{5} = 1200$$

A titre indicatif la puissance d'oscillation obtenue lorsque la cavité est bien adaptée est de 0,25 μ W

A 1,5°k $\sqrt{G.B.} = 6,5$ MHz pour l'ensemble du montage

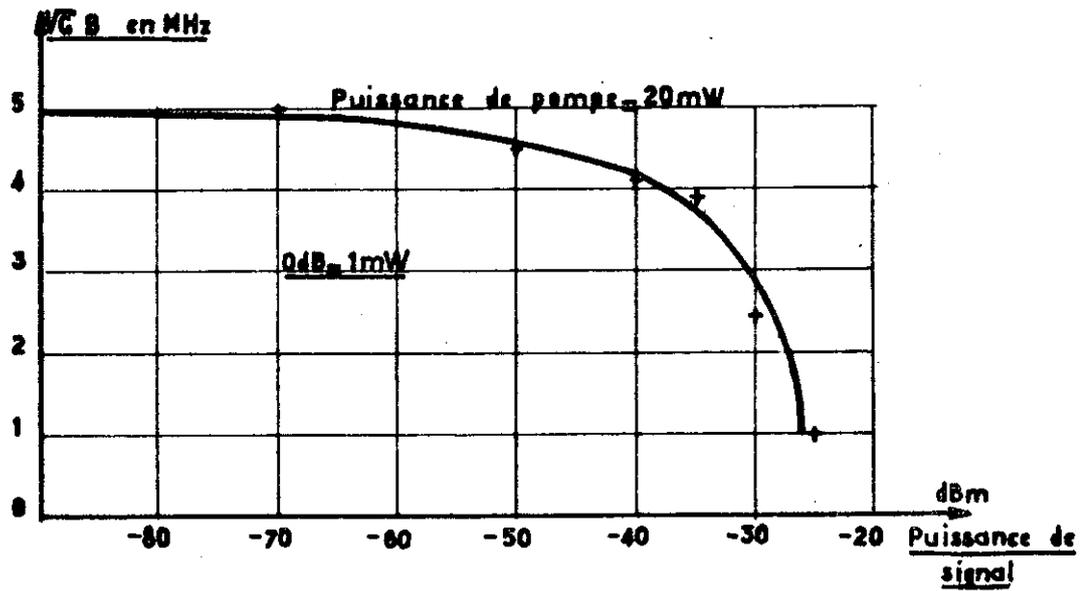
d'où $\sqrt{G.B.} = 9$ MHz pour le Maser seul.

En diminuant la bande, le gain stable maximum admissible avant l'oscillation est de l'ordre de 21 db = 125 en puissance pour le Maser seul; cela correspond à une bande d'environ 0,2 MHz.



\sqrt{GB} en fonction de la puissance de pompe

Fig: 69



\sqrt{GB} en fonction de la puissance de signal

Fig:70

Variation de $\sqrt{G.B.}$ avec la puissance de pompe et de signal.

La puissance de pompe utilisée pour les mesures précédentes était de 20 mW au niveau de la cavité. La courbe fig. 69 représente la diminution du $\sqrt{G.B.}$ en fonction de la puissance de pompe, le niveau de signal étant maintenu très bas à 60 dbm = 10^{-9} watts.

La courbe fig. 70 représente la saturation de l'effet Maser par le signal : c'est la limite supérieure de la dynamique de l'amplification. La saturation commence à apparaître pour une puissance signal de 50 dbm c'est-à-dire 10^{-8} watts. Il est à noter qu'à partir de cette valeur la largeur de bande augmente avec la puissance de signal (sans modification du couplage de la cavité) conformément à la formule V,11. La source que nous avons utilisée (Hewlett Packard type 616 A) est équipée d'un bolomètre qui nous a permis de calibrer à 1 mW la puissance utilisable du klystron. A partir de cette référence un atténuateur étalonné solidaire de la source nous a donné une mesure de la puissance.

Mesure de la température équivalente de bruit du Maser.

La température équivalente de bruit T_{eq} est une notion plus précise que celle de facteur de bruit : elle correspond exactement à la puissance de bruit amenée par l'amplificateur considéré, telle que, si l'entrée de l'amplificateur est à la température T_0 , la puissance de bruit mesurée à la sortie et divisée par le gain est

$$P = k(T_0 + T_{eq}) \Delta \nu \quad V,27$$

Pour effectuer cette mesure, il importe de définir la bande passante de l'ensemble par celle du récepteur qui suit le Maser et non par celle du Maser, de façon que dans cette bande le Maser travaille au maximum de ses caractéristiques. Le récepteur ayant une bande de 0,6 MHz, nous avons fixé la bande du Maser à 0,9 MHz ce qui donnait un gain de 10 db pour l'ensemble du Maser, circulateur et coaxial compris.

Plusieurs méthodes peuvent être employées, les plus précises sont celles qui font directement appel à des sources de bruit émettant un spectre blanc. Cela suppose qu'on dispose d'un détecteur final dont la réponse soit quadratique, c'est-à-dire que, si on augmente le signal de 3 db à l'entrée, la déviation de l'appareil de lecture soit doublée.

Nous avons principalement utilisé deux méthodes en plaçant à l'entrée

- 1) Une diode de bruit allumée ou éteinte
- 2) une charge adaptée à température ambiante ou à température de l'azote : 77°K.

Ces deux méthodes sont équivalentes, mais comme la deuxième nous a donné des résultats plus constants, c'est celle dont nous détaillerons les calculs, qui sont d'ailleurs très voisins de ceux de la première.

Méthode de la charge adaptée.

La méthode consiste à placer une charge adaptée à l'entrée du circulateur et un récepteur radar, dont la température équivalente de bruit est connue, à la sortie du circulateur, puis un appareil de lecture quadratique.

Nous allons d'abord déterminer la température équivalente de bruit de l'ensemble Maser, coaxial et circulateur, puis de proche en proche, nous en arriverons au Maser proprement dit.

Température de bruit du récepteur.

Nous disposons d'un récepteur radar superhétérodyne classique qui possède donc deux voies d'amplification : à la fréquence signal et à la fréquence image. On place une diode de bruit qui émet un spectre blanc assez large pour englober les deux fréquences signal et image du récepteur.

Le montage est indiqué fig. 71.

En un premier temps la diode est

éteinte, la lecture L_o est :

$$L_o \sim (2T_o + T_r)k \Delta\nu \quad \text{V,28}$$

$2T_o$, car il y a deux canaux, chacun de largeur $\Delta\nu$, qui recueillent le bruit.

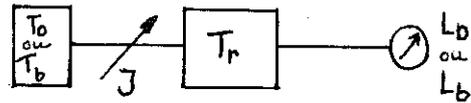


fig : 71

En allumant la diode et en plaçant un atténuateur dont le coefficient de transmission est J

$$L_b \sim 2(T_b J + (1 - J)T_o) + T_r \quad \text{V,29}$$

Pour le récepteur dont nous disposons, il fallait $J = - 8,7$ db pour obtenir $\frac{L_b}{L_o} = 2$

$$\text{d'où } \frac{T_r}{T_o} = 2 \left(\frac{T_b - T_o}{T_o} \right) J - 2 \quad \begin{cases} T_b = 11\,000^\circ\text{K} \\ T_o = 290^\circ\text{K} \end{cases}$$

$$T_r = 2\,320^\circ\text{K}$$

Température de bruit du Maser.

Nous devons tenir compte du deuxième canal du récepteur, car le gain du Maser n'est pas très grand. Le schéma du montage est alors le suivant :

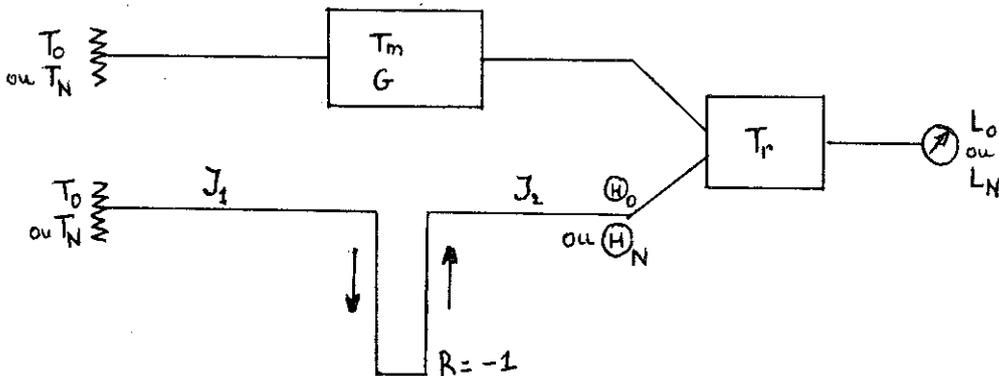


fig : 72

Le premier canal comprenant le Maser est à la fréquence signal. Dans le Maser nous incluons ici le circulateur et le coaxial. Dans le canal image nous devons tenir compte de l'atténuation du circulateur et du coaxial, ainsi que de la variation de température le long du coaxial. Nous détaillerons plus loin les méthodes de calcul relatives à cette variation de température. Disons tout de suite que les températures équivalentes à la sortie du circulateur sont Θ_0 et Θ_N si on place à l'entrée une charge adaptée respectivement à l'ambiante ou dans l'azote.

Techniquement, la manipulation consiste à construire une charge adaptée en guide 10 cm, rendue étanche, qu'on plonge dans l'azote liquide après en avoir chassé l'air par une circulation d'hydrogène (pour éviter les condensations d'oxygène ou de glace qui provoqueraient des désadaptations).

Si la charge est à T_0 .

$$L_0 \sim (T_0 + T_m)G + T_r + \Theta_0 \quad V,30$$

Si la charge est à T_N .

$$L_N \sim (T_N + T_m)G + T_r + \Theta_N \quad V,31$$

$$T_m = \frac{T_0 \delta}{1 - \delta} - \frac{T_N}{1 - \delta} - \frac{T_r}{G} - \frac{\Theta_N}{G(1 - \delta)} + \frac{\delta \Theta_0}{G(1 - \delta)} \quad V,32$$

$$\text{Si } \delta = \frac{L_N}{L_0} \quad \left\{ \begin{array}{l} T_0 = 290^\circ \text{K} \\ T_N = 77^\circ \text{K} \\ T_r = 2320^\circ \text{K} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} G = 10 \\ \delta = \frac{93}{140} \end{array}$$

En supposant une loi de variation linéaire de la température le long du coaxial de 290°K à 4°K on trouve :

$$\Theta_0 = 241^\circ \text{K}$$

$$\Theta_N = 135^\circ \text{K}$$

$$\text{d'où } T_m = 125^\circ \text{K}$$

Pour éliminer le bruit dû au circulateur, nous remarquerons que le coefficient de transmission de la branche 1 à 2 est $J_1 = - 0,65$ db (0,5 db dû au circulateur (à la fréquence de travail) + 0,15 db = résiduelle d'un atténuateur en série).

Du bras 2 à 3 $J_2 = - 0,35$ db (ces deux atténuations ont lieu dans des guides portés à température ambiante).

Pour trouver T'_m dû au Maser + coaxial on calcule d'après le schéma fig. 73 la température de bruit de l'ensemble qui est T'_m

$$T'_m = \frac{[(1 - J_1)T_0 + T'_m] G' J_2 + (1 - J_2)T_0}{G} \quad \text{V,33}$$

où $G = G' J_1 J_2$

$$T'_m = J_1 T'_m + (J_1 - 1 + \frac{1}{G'} - \frac{1}{G' J_2}) T_0 \quad \text{V,34}$$

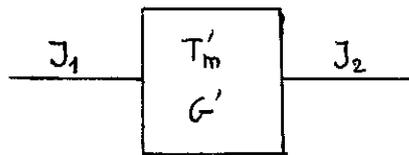


fig : 73

Avec les valeurs numériques déjà données nous trouvons

$$T'_m = 67^\circ \text{K}$$

Pour atteindre la température de bruit propre au Maser, il faut tenir compte de l'atténuation dans le coaxial d'entrée, sachant que la température varie le long de celui-ci.

Soit \textcircled{H}_0 la température à l'entrée, $T(x)$ la température le long du coaxial de longueur L (fig. 74) et

$\textcircled{H}(x)$ la température de bruit à l'abscisse x . En supposant l'atténuation régulièrement répartie le long du coaxial

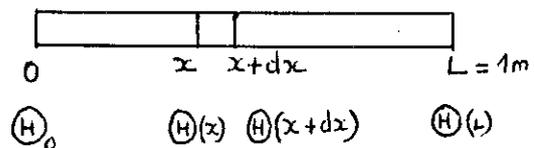


fig : 74

(α coefficient linéique d'atténuation = cte)

Le coefficient de transmission d'un petit tronçon de longueur dx est $e^{-\alpha dx}$

$$\textcircled{H}(x + dx) = \textcircled{H}(x) e^{-\alpha dx} + (1 - e^{-\alpha dx}) T(x) \quad \text{V,35}$$

d'où l'équation différentielle :

$$\frac{d\Theta(x)}{dx} + \alpha\Theta(x) = T(x) \cdot \alpha \quad V,36$$

si $\alpha = \text{cte}$, elle s'intègre ainsi :

$$\Theta(x) = \alpha e^{-\alpha x} \int T(x) e^{\alpha x} dx + e^{-\alpha x} \cdot \text{Cte} \quad V,37$$

Nous sommes maintenant obligés de nous donner la loi de répartition de la température $T(x)$. Nous la supposons linéaire partant de $T_0 = 290^\circ$ en haut à $T'_0 = 4^\circ\text{K}$ en bas.

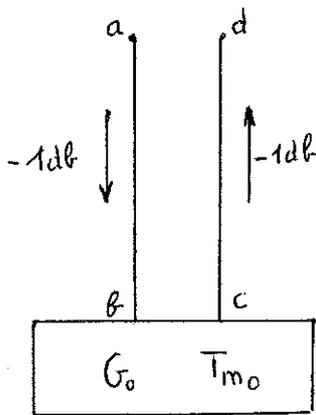


fig : 75

Nous reprenons le même processus que précédemment :

Soit T'_m la température de bruit de l'ensemble et Θ_d la température de bruit obtenue à la sortie (fig. 75), on écrit :

$$G'_m T'_m = \Theta_d$$

Nous supposons $\Theta_a = 0$

A l'aller la loi de répartition est

$$T(x) = T_0 - \frac{(T_0 - T'_0)x}{L} \quad V,38$$

En intégrant l'équation V,37 nous obtenons

$$\Theta_b = T_0 - \left(\frac{T_0 - T'_0}{L} \right) \left(L - \frac{1}{\alpha} \right) - \left(T_0 + \frac{T_0 - T'_0}{\alpha L} \right) e^{-\alpha L} \quad V,39$$

sachant que $e^{-\alpha L} = -1 \text{ db} = 0,795$ $\alpha L = 0,23$ et avec les valeurs numériques déjà données nous trouvons

$$\Theta_b = 29^\circ\text{K}$$

à la sortie du Maser $\Theta_c = (\Theta_b + T_{m0})G_0$

en remontant le coaxial

$$T(x) = T'_0 + \left(\frac{T_0 - T'_0}{L} \right) x \quad V,40$$

L'équation V,37 intégrée donne :

$$\Theta_d = T'_0 + \left(\frac{T_0 - T'_0}{L} \right) \left(L - \frac{1}{\alpha} \right) + \left(\Theta_c - T'_0 + \frac{T_0 - T'_0}{\alpha L} \right) e^{-\alpha L} \quad V,41$$

avec les valeurs numériques déjà données

$$\text{et } G_0 = 13 \text{ db} = 20 \quad G' = 11 \text{ db} = 12,6$$

on trouve

$$\textcircled{H}_d = 492^\circ + 15,88 T_{m_0}$$

$$G'T'_m = 67.12,6 = 841 = 492 + 15,88 T_{m_0}$$

$$\text{d'où } T_{m_0} = 22^\circ\text{K}$$

Mesure du signal minimum détectable.

Le signal minimum détectable se définit comme celui qui est juste égal au bruit à l'entrée, il se mesure à l'aide d'un récepteur quadratique en doublant par le signal la déviation primitive due au seul bruit.

Nous l'avons mesuré dans les mêmes conditions que la température de bruit, c'est-à-dire pour le Maser avec un gain global de 10 db et une bande de 0,9 MHz et pour l'ensemble une bande de 0,6 MHz. L'entrée étant par ailleurs à température ambiante .

$$\begin{aligned} \text{Le résultat trouvé a été de : } & 113,5 \text{ dbm} \\ \text{c'est-à-dire; signal minimum} & = 4,5.10^{-15} \text{ watts} \end{aligned}$$

Nous pouvons faire un recouplement avec la température de bruit globale du Maser + récepteur qu'on déduit des valeurs mesurées indiquées p. 110. En supposant l'ensemble comme un amplificateur de température de bruit T, nous calculons celle-ci en écrivant :

$$\begin{aligned} T_N + T & \sim L_N \\ T_0 + T & \sim L_0 \end{aligned} \quad \frac{L_N}{L_0} = \frac{93}{140}$$

$$\text{d'où } T = 349^\circ\text{K}$$

Le bruit à l'entrée, si celle-ci est à T₀, est alors :

$$(T_0 + T)k \Delta\nu = (290 + 349) \frac{1,38}{10^{23}} 0,6.10^6 = 5,3.10^{-15} \text{ watts}$$

Le résultat est proche de celui mesuré directement.

Il est certain que, d'une part, la diminution des pertes du circulateur et surtout du coaxial et, d'autre part, l'augmentation du gain du Maser qui éliminerait le bruit du récepteur, diminueraient grandement ce signal minimum détectable : il serait possible de ramener la température de bruit à quelques dizaines de °K pour l'ensemble. Comme le signal minimum est proportionnel à $T + T_0$, on voit que les qualités de faible bruit propre du Maser ne sont mises en valeur que si on pointe l'antenne vers des sources peu bruyantes, le ciel par exemple, avec un site supérieur à 30° , où la température T_0 est alors de quelques dizaines de degrés K. ⁽⁴⁹⁾.

Amélioration des performances.

De façon immédiate, en cherchant à minimiser les pertes dues au coaxial et en éliminant l'atténuateur que nous avons laissé à l'entrée du circulateur sans même escompter une augmentation du $\sqrt{G.B.}$, nous aurions pu diminuer la température de bruit de façon assez nette. Voici une évaluation des résultats auxquels nous aurions pu nous attendre : le coaxial en acier inox est de 50Ω ($\varnothing_{ext} = 7,8$ mm). Le conducteur intérieur est centré par des rondelles de téflon. En faisant le calcul théorique à partir d'une résistivité de $60.10^{-6} \Omega cm$ pour l'acier inox, nous trouvons une atténuation dans un sens de 0,5 db : nous l'avons mesurée égale à 1 db, il est raisonnable d'attribuer les 0,5 db supplémentaires à la perle de verre qui assure l'étanchéité et aux bagues de centrage. En argentant le conducteur intérieur, ce qui est facilement réalisable, ($\rho_{argent} = 1.10^{-6} \Omega cm$ en moyenne) et en calculant le rapport des diamètres à \varnothing extérieur constant de façon à minimiser les pertes on trouve $\frac{r_2}{r_1} = 7,5$. Ce qui nous donne une impédance de 120Ω . L'atténuation est alors de 0,1 db environ. Nous pouvons donc raisonnablement nous fixer une atténuation de 0,6 db pour un sens de parcours du coaxial.

En reprenant à l'envers le calcul des températures de bruit, compte tenu également d'une atténuation de 0,5 db simplement entre les portes 1 et 2 du circulateur, car nous pouvons supprimer les 0,15 db de l'atténuateur (cf p.111) nous trouvons successivement :

$T_{m_0} = 22^\circ\text{K}$ pour le Maser seul

$T'_m = 50^\circ\text{K}$ pour le Maser + coaxial

$T_m = 92^\circ\text{K}$ pour l'ensemble Maser + coaxial + circulateur
(de la porte 1 à la porte 3).

Le gain est alors de 11 db et la température de bruit de l'ensemble Maser + récepteur est

$$T = T_m + \frac{T_r}{G} = 92 + \frac{2320}{12,5} = 277^\circ\text{K}$$

au lieu des 349°K trouvés précédemment.

Dynamique de l'amplification.

Les deux mesures de signal minimum détectable et de la saturation par le signal nous donnent la dynamique de l'amplification. de $5 \cdot 10^{-15}$ à 10^{-8} watts la dynamique est donc de 63 db.

Plage en angle et en champ.

Nous définissons les plages en angle et en champ comme les variations de ces deux paramètres qui maintiennent un gain

$$G \gg \frac{G_{\max}}{2}$$

Nous les avons trouvées respectivement de :

2° pour la plage en angle

et 7,5 oersteds pour la plage en champ.

Ceci a été mesuré au point D et en utilisant le couplage harmonique de spin. Il est certain que ces plages dépendent du point de fonctionnement : la plage en champ dépend des pentes relatives des deux raies de pompe et de signal utilisées. Elle sera plus large si on travaille au voisinage de $\theta = 0^\circ$ qu'en s'éloignant de l'axe (cf fig. 23)

CONCLUSION.

L'étude de cette maquette nous a permis d'entrevoir les qualités inhérentes aux Masers : faible bruit propre et dynamique très importante : il doit être possible de diminuer son facteur de bruit jusqu'à 1 ou 2 db, ce qui améliorerait assez nettement les performances des têtes de détection classiques et permettrait d'augmenter la portée du radar dans des proportions notables : de 7 db pour la bande S à 2 db de facteur de bruit, la portée est multipliée par 1,4.

Mais il est bien certain que les qualités de faible bruit seraient surtout mises en valeur si la température d'entrée du Maser était très faible, c'est-à-dire du même ordre que sa température de bruit propre (quelques dizaines de degrés) ce qui est le cas des radiotélescopes utilisés pour étudier les radiosources de l'espace ou communiquer avec les satellites artificiels. Une amélioration de la technologie jointe à une augmentation de la fréquence de pompe du Maser déjà étudiée devrait permettre une amélioration sensible des performances et d'abaisser la température de bruit déjà obtenue.

D'un point de vue plus physique, nos manipulations ont permis de mettre en valeur le rôle du couplage harmonique de spin. Il serait fort intéressant de poursuivre cette étude à l'aide d'une cavité accordable séparément sur les deux fréquences et de ne point la borner à un rapport simple : 1/1 comme nous l'avons fait. En effet, ce phénomène fort intéressant en lui-même peut être à la base d'améliorations sensibles des performances d'un Maser.

NOTATIONS.

- Points A, B, C, D, E, F, G, H, I : points de croisement de raies
3 cm et 10 cm.
- A, A_{12} = coefficient d'émission spontanée d'Einstein.
- $b(\nu)$ = partie imaginaire de l'inverse de la surtension magnétique.
- B_{12} = coefficient d'émission induite d'Einstein.
- B = bande passante du Maser.
- c = vitesse de la lumière .
- $\langle c \rangle^2$ = carré de l'élément de matrice dipolaire magnétique.
- C = probabilité de transition de C.H.S.
- d = dénominateur de la formule V,7.
- D, E = constantes de l'Hamiltonien de spin.
- E_i = énergie d'un niveau.
- E_{i1}, E_{01} = respectivement amplitude d'onde incidente, ou émergente
- F = facteur de bruit.
- $g, g_{//}, g_{\perp}$ = facteur de décomposition spectrale (dit facteur de Landé dans certains cas).
- $q(\nu)$ = partie réelle de l'inverse de la surtension magnétique.
- $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ = constante de Planck.
- H, H_0 = champ magnétique continu.
- H_{rf} = amplitude du champ radiofréquence.
- \mathcal{H} = opérateur Hamiltonien.
- J, J', J'', J_{12} = coefficient de transmission de puissance.
- k = constante de Boltzmann.
- $K = \frac{CN}{4}$ (dans le calcul de C.H.S.)
- L_0, L_b = lectures de l'appareil de mesure de bruit.
- L = longueur du coaxial.
- M, $|M\rangle$ = valeur propre et état quantique.
- N_i = population du niveau d'énergie E_i
- P, $P_{max}, P_{magn}, P_r, P_i$ = puissance hyperfréquence
- Q_0, Q_c, Q_L, Q_m = coefficient de surtension respectivement propre d'une cavité, de couplage, apparent, magnétique.
- R, R_m = coefficient de réflexion.

S et \vec{S} = respectivement spin effectif et opérateur spin.

S_x, S_y, S_z = composantes de l'opérateur spin.

t = variable temps.

T, T_s, T_b = température respectivement absolue, de spin, de bruit.

T_o, T_N, T_o' = respectivement température ambiante = 300°K

T_1 = temps de relaxation. de l'azote = 77°K

de l'hélium = 4,2°K

$U(\nu)$ = densité d'énergie d'une onde.

$$\nu = \left(\frac{\nu}{\nu_o} - \frac{\nu_b}{\nu} \right) = \frac{2\Delta\nu}{\nu_o}$$

V = volume

w_{ij} = probabilité de transitions dites naturelles.

W_s, W_p = probabilités de transitions induites, respectivement à la fréquence signal ou de pompe.

x_i = écart normalisé de la population du niveau i par rapport à l'équilibre de Boltzmann.

$$y_i = x_i - x_o$$

Ox, Oy, Oz = axes d'un trièdre trirectangle.

x et y = rapport d'amplitude d'onde (mesure des Q).

Z = impédance.

Z_c = impédance caractéristique.

$$z = \frac{Z}{Z_c} = \text{impédance réduite.}$$

α = angle de rotation
au chapitre V = coefficient d'atténuation linéique.

$$\beta = \frac{Q_o}{Q_c} = \text{coefficient de couplage.}$$

γ, γ_m = rapport de puissances (carré de coefficient de réflexion)

$$\delta = \frac{L_N}{L_o} = \text{rapport des lectures (mesure de bruit).}$$

Δ = indique des différences.

ϵ = constante diélectrique.

$\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3$ = éléments de probabilités de transitions induites.

η = facteur de remplissage.

θ = angle entre l'axe Oz du cristal et le champ magnétique continu.

(H) = température de bruit (en °K)

λ = longueur d'onde.

μ_B = magnéton de Bohr

ν, ν_{ij} = fréquence

ρ = résistivité

$$\sigma = \frac{Q_L}{Q_m}$$

τ = constante de temps de relaxation.

φ = angle de rotation.

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 = cosinus directeurs du champ radiofréquence.

$\chi = \chi' - j\chi''$ = susceptibilité magnétique.

ω = pulsation.

BIBLIOGRAPHIE.

- (1) L.E. ALSOP, J.A. GIORDMAINE, C.H. TOWNES, T.C. WANG.- Note dans Measurements of noise in a Maser amplifier, Phys. Rev. 107, 1450 (1957).
- (2) J. WEBER.- Amplification of microwave radiation by substances not in thermal equilibrium. I.R.E. on Electron. devices 3 (1953)
- (3) N. G. BASOV, A.M. PROKHOROV.- Application des faisceaux moléculaires à l'étude en spectroscopie herzienne du spectre de rotation des molécules. J.E.T.P. 27, 431(1954).
- (4) N.G. BASOV, A.M. PROKHOROV.- Théorie d'un générateur moléculaire et d'un amplificateur moléculaire de puissance. Doklady A.K. Nauk.S.S.S.R. 101, 47(1955).
- (5) J.P. GORDON, H.J. ZEIGER, C.H. TOWNES.- Molecular microwave oscillator : a new hyperfine structure in microwave spectrum of NH₃. Phys. Rev. 95, 282 (1954).
- (6) J.P. GORDON, H.J. ZEIGER, C.H. TOWNES.- The Maser: new type of microwave amplifier, frequency standard and spectrometer. Phys. Rev. 99, 264 (1955).
- (7) J. COMBRISSE, A. HONIG, C.H. TOWNES.- Utilisation de la résonance de spins électroniques pour réaliser un oscillateur ou un amplificateur en hyperfréquence. C.R. A.S. 242, 2451 (1956).
- (8) J. COMBRISSE, C.H. TOWNES.- Création et amplification de microondes par processus atomiques. Onde Electr. 36, 989 (1956).
- (9) N. BLOEMBERGEN.- Proposal for a new type solid state Maser. Phys. Rev. 104, 324(1956).
- (10) H.E.D. SCOVIL, G. FEHER, H. SEIDEL.- Operation of a solid state Maser. Phys. Rev. 105, 762 (1957).
- (11) A.L. MCWHORTER, J.W. MEYER.- Solid state Maser amplifier. Phys. Rev. 109, 312 (1958).
- (12) A.L. MCWHORTER, J.W. MEYER, P.D. STURM.- Noise temperature measurement on a solid state Maser. Phys. Rev. 108, 1642 (1957).

- (13) J.A. GIORDMAINE, L.E. ALSOP, C.H. MAYER, C.H. TOWNES.-
A Maser amplifier for radioastronomy at X Band.
P.I.R.E. 47, 1062 (1959).
- (14) A. EINSTEIN.- Zur Quantentheorie der Strahlung.-
Phys. Zeitung 18, 121 (1917).
- (15) M.W.P. STRANDBERG.- Inherent noise of quantum mechanical
amplifiers. Phys. Rev. 106, 617 (1957).
- (16) J.R. SINGER.- Masers.
John Wiley ed. (New York).
- (17) F. BLOCH.- Nuclear induction.
Phys. Rev. 70, 460 (1946).
- (18) P.F. CHESTER, P.E. WAGNER, J.G. CASTLE.- Two level solid
state Maser. Phys. Rev. 110, 281 (1958).
- (19) A.A. MANENKOV, A.M. PROKHOROV.- Spin lattice relaxation
in chromium corundum.
Sov. Phys. J.E.T.P. 11, 527 (1960).
- (20) R. BUISSON, D. DESCAMPS.- Procédé d'amélioration des perfor-
mances des amplificateurs du type Maser.
Brevet Français P.V. n° 859-003.
- (21) Y. AYANT, R. BUISSON, D. DESCAMPS, M. SOUTIF.- Etude d'un
Maser utilisant la transrelaxation.
C.R.A.S. 252, 2081 (1961).
- (22) Y. AYANT, R. BUISSON, D. DESCAMPS, M. SOUTIF.- Utilisation de
la transrelaxation pour l'amélioration des performances
d'un Maser.
A paraître dans le J. de Phys. et le Radium.
- (23) N. BLOEMBERGEN, S. SHAPIRO, P.S. PERSHAN, J.O. ARTMAN.-
Cross relaxation in spin systems.
Phys. Rev. 114, 445 (1959).
- (24) W.B. MIMS, J.D. MCGEE,- Cross relaxation in ruby.
Phys. Rev. 119, 1233 (1960).
- (25) R.W. ROBERTS, J.H. BURGESS, H.D. TENNEY.- Cross relaxation
and concentration effects in ruby.
Phys. Rev. 121, 997 (1961).
- (26) T.H. MAIMAN.- Temperature and concentration effects in a ruby
Maser. Quantum Electronics, 324 (1960)
(C.H. Townes ed.).

- (27) B. BLEANEY, K.W.H. STEVENS.- Paramagnetic resonance.
R.P.P. 16, 108 (1953).
- (28) GROTH.- Chemische Kristallographie. Tome 1, 422 (1906).
- (29) J.M. BAKER, B. BLEANEY, K.D. BOWERS.- Paramagnetic resonance in some complex cyanides of the iron group.
Proc. of the Phys. Soc. B 69, 1205 (1956).
- (30) E.O. SCHULZ DU BOIS.- Paramagnetic spectra of substituted sapphires. Part. I. Ruby.
B.S.T.J. 38, 271 (1959).
- (31) A.A. MANENKOV, A.M. PROKHOROV.- The fine structure of the spectrum of the paramagnetic resonance of the ion Cr^{+++} in chromium corundum.
Sov. Phys. J.E.T.P. 1, 611 (1955).
- (32) P.P. EWALD, C. HERMANN.- Strukturbericht. Tome 1, 240.
- (33) C. KIKUCHI, J. LAMBE, G. MAKHOV, R.W. TERHUNE.- Ruby as Maser material.
J.A.P. 30, 1061 (1959).
- (34) W. LOW.- Paramagnetic resonance in solids.
Supplement 2 of Solid State Physics (Academic Press).
- (35) K.D. BOWERS, J. OWEN.- Paramagnetic resonance II.
R.P.P. 18, 304 (1955).
- (36) W.S. CHANG, A.E. SIEGMAN.- Characteristics of ruby for Maser applications.
Techn. Rep. 156 - 2 - Stanford Electr. Lab. (1959).
- (37) R.L. KYHL, R.J. MORRIS, M.W.P. STRANDBERG.- A tunable Maser amplifier with large bandwidth.
P.I.R.E. 47, 80 (1959).
- (38) J. BENOIT.- Cours de propagation. E.N.S.R.G.
- (39) J.C. SLATER.- Microwave electronics.
Rev. of Mod. Phys. 18, 441 (1946).
- (40) C.G. MONTGOMERY.-
M.I.T. 11, 519, (Mc Graw Hill).
- (41) J. WEBER.- Masers. Rev. of Mod. Phys. 31, 681 (1959).
- (42) C.J. GORTER.- Paramagnetic relaxation. Elsevier Publishing.
- (43) J.H. VAN VLECK.- In "Propagation of short radiowaves."
M.I.T. 13, 642 (Mc Graw Hill).

- (44) N. BLOEMBERGEN, E.M. PURCELL, R.V. POUND.- Relaxation effects
in nuclear magnetic resonance absorption.
Phys. Rev. 73, 679 (1948).

- (45) J.P. GORDON, L.D. WHITE.- Noise in Maser amplifiers.
Theory and experiment .
P.I.R.E. 46, 1588 (1958).

- (46) A.A. MANENKOV, V.B. FEDOROV.- Investigation of the line
width and shape in the paramagnetic resonance spectrum of
the Cr⁺⁺⁺ ion in corundum single crystals.
Sov. Phys. J.E.T.P. 11, 751 (1960).

- (47) J. WEBER.- Maser noise considerations.
Phys. Rev. 108, 537 (1957).

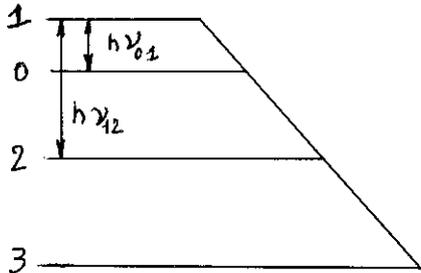
- (48) M.L. STITCH.- Maser amplifier characteristics for transmission
and reflexion cavities.
J.A.P. 29, 782 (1958).

- (49) H.R. SENF.- Maser for systems applications.
I.R.E. Wescon Convention Record Part I, 43 (1960).

ANNEXE 1

EVOLUTION DES POPULATIONS DANS LE CAS DE QUATRE NIVEAUX

d'après les indications de Y. AYANT.



Les équations complètes relatives aux quatre niveaux s'écrivent :

$$\dot{N}_1 = N_0 w_{0 \rightarrow 1} - N_1 w_{1 \rightarrow 0} + (N_0 - N_1) W_s + N_2 w_{2 \rightarrow 1} - N_1 w_{1 \rightarrow 2} + (N_2 - N_1) W_P + N_3 w_{3 \rightarrow 1} - N_1 w_{1 \rightarrow 3}$$

$$\dot{N}_0 = N_1 w_{1 \rightarrow 0} - N_0 w_{0 \rightarrow 1} + (N_1 - N_0) W_s + N_2 w_{2 \rightarrow 0} - N_0 w_{0 \rightarrow 2} + N_3 w_{3 \rightarrow 0} - N_0 w_{0 \rightarrow 3}$$

$$\dot{N}_2 = N_1 w_{1 \rightarrow 2} - N_2 w_{2 \rightarrow 1} + (N_1 - N_2) W_P + N_0 w_{0 \rightarrow 2} - N_2 w_{2 \rightarrow 0} + N_3 w_{3 \rightarrow 2} - N_2 w_{2 \rightarrow 3}$$

$$\dot{N}_3 = N_1 w_{1 \rightarrow 3} - N_3 w_{3 \rightarrow 1} + N_0 w_{0 \rightarrow 3} - N_3 w_{3 \rightarrow 0} + N_2 w_{2 \rightarrow 3} - N_3 w_{3 \rightarrow 2}$$

En éliminant les termes rendus négligeables par

$$W_P \gg w_{i \rightarrow j} \gg W_s$$

nous pouvons réécrire :

$$\dot{N}_1 = N_0 w_{0 \rightarrow 1} - N_1 w_{1 \rightarrow 0} + (N_2 - N_1) W_P + N_3 w_{3 \rightarrow 1} - N_1 w_{1 \rightarrow 3}$$

$$\dot{N}_0 = N_1 w_{1 \rightarrow 0} - N_0 w_{0 \rightarrow 1} + N_2 w_{2 \rightarrow 0} - N_0 w_{0 \rightarrow 2} + N_3 w_{3 \rightarrow 0} - N_0 w_{0 \rightarrow 3}$$

$$\dot{N}_2 = (N_1 - N_2) W_P + N_0 w_{0 \rightarrow 2} - N_2 w_{2 \rightarrow 0} + N_3 w_{3 \rightarrow 2} - N_2 w_{2 \rightarrow 3}$$

$$\dot{N}_3 = N_1 w_{1 \rightarrow 3} - N_3 w_{3 \rightarrow 1} + N_0 w_{0 \rightarrow 3} - N_3 w_{3 \rightarrow 0} + N_2 w_{2 \rightarrow 3} - N_3 w_{3 \rightarrow 2}$$

En développant : $N_i = \frac{N}{4} e^{-\beta E_i} (1 + x_i) = \frac{N}{4} (1 - \beta E_i + x_i)$

si $\beta = \frac{1}{kT}$

et x_i est l'écart (réduit) de la population du niveau i par rapport à la répartition de Boltzmann.

(Pour justifier ce développement il suffit de prendre l'origine des énergies telle que $\sum E_i = 0$).

Et en symétrisant les probabilités de transitions :

$$w_{i \rightarrow j} = w_{ij} e^{\frac{1}{2} \beta (E_i - E_j)} = w_{ij} \left[1 + \beta \left(\frac{E_i - E_j}{2} \right) \right]$$

nous simplifions les termes suivants :

$$\begin{aligned} N_i w_{i \rightarrow j} - N_j w_{j \rightarrow i} &= \frac{N}{4} w_{ij} \left[(1 - \beta E_i + x_i) \left(1 + \frac{\beta E_i}{2} - \frac{\beta E_j}{2} \right) - (1 - \beta E_j + x_j) \left(1 + \frac{\beta E_j}{2} - \frac{\beta E_i}{2} \right) \right] \\ &= \frac{N}{4} w_{ij} (x_i - x_j) \end{aligned}$$

En remarquant qu'à l'équilibre $\dot{N}_i = 0$, nous réécrivons les équations relatives aux niveaux 1, 2 et 3 :

$$\frac{N}{4} w_{01} (x_0 - x_1) + \frac{N}{4} w_{13} (x_3 - x_1) + \frac{N}{4} w_P \left[\beta (E_1 - E_2) + (x_2 - x_1) \right] = 0$$

$$\frac{N}{4} w_{02} (x_0 - x_2) + \frac{N}{4} w_{32} (x_3 - x_2) + \frac{N}{4} w_P \left[\beta (E_2 - E_1) + (x_1 - x_2) \right] = 0$$

$$\frac{N}{4} w_{13} (x_1 - x_3) + \frac{N}{4} w_{03} (x_0 - x_3) + \frac{N}{4} w_{23} (x_2 - x_3) = 0$$

En remarquant que $E_2 - E_1 = h\nu_{12}$ et en posant $y_1 = x_1 - x_0$

nous symétrisons :

$$- w_{01} y_1 + w_{13} (y_3 - y_1) + w_P (y_2 - y_1) = - w_P \beta h \nu_{12}$$

$$- w_{02} y_2 + w_{32} (y_3 - y_2) + w_P (y_1 - y_2) = w_P \beta h \nu_{12}$$

$$+ w_{03} y_3 - w_{13} (y_3 - y_1) + w_{23} (y_2 - y_3) = 0$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{vmatrix} -(W_P + w_{01} + w_{13}) & + W_P & w_{13} \\ W_P & -(W_P + w_{02} + w_{03}) & w_{23} \\ w_{13} & w_{22} & -(w_{03} + w_{13} + w_{32}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix} = W_P \beta h \nu_{12} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Nous recherchons la différence de population entre les niveaux 1 et 0 donc

$$y_1 = \frac{\text{Numérateur}}{\text{Dénominateur}}$$

$$\frac{\text{Num.}}{W_P \beta h \nu_{12}} = \text{Dét.} \begin{vmatrix} -1 & W_P & w_{13} \\ +1 & -(W_P + w_{02} + w_{23}) & w_{23} \\ 0 & w_{32} & -(w_{03} + w_{13} + w_{23}) \end{vmatrix}$$

$$\frac{\text{Num.}}{W_P \beta h \nu_{12}} = - \left[w_{03} (w_{02} + w_{23}) + w_{02} (w_{23} + w_{13}) \right]$$

$$\text{Dén.} = \text{Dét.} \begin{vmatrix} -(W_P + w_{01} + w_{13}) & W_P & w_{13} \\ -(w_{01} + w_{13}) & -(w_{02} + w_{23}) & w_{13} + w_{23} \\ w_{13} & w_{23} & -(w_{03} + w_{13} + w_{23}) \end{vmatrix}$$

sachant que $W_P \gg w_{ij}$ et que W_P n'apparaît que sur une ligne, nous pouvons éliminer certains termes

$$\text{Dén.} = W_P \cdot \begin{vmatrix} -1 & +1 & 0 \\ -(w_{01} + w_{13}) & -(w_{02} + w_{23}) & (w_{13} + w_{23}) \\ w_{13} & w_{23} & -(w_{03} + w_{13} + w_{23}) \end{vmatrix}$$

$$\text{Dén.} = - W_P \left[(w_{01} + w_{02})(w_{03} + w_{13} + w_{23}) + w_{03}(w_{13} + w_{23}) \right]$$

la valeur de y_1 est alors

$$y_1 = \beta h \nu_{12} \left[\frac{w_{03}(w_{02} + w_{23}) + w_{02}(w_{13} + w_{23})}{w_{03}(w_{01} + w_{02} + w_{13} + w_{23}) + (w_{02} + w_{01})(w_{13} + w_{23})} \right]$$

En revenant aux variables primitives :

$$\begin{aligned} y_1 = x_1 - x_0 &= \frac{4N_1}{N} - 1 + \beta E_1 - \frac{4N_0}{N} + 1 - \beta E_0 \\ &= \frac{4}{N} (N_1 - N_0) + \beta h \nu_{01} \end{aligned}$$

d'où, en remarquant que $\nu_{12} = \nu_{\text{Pompe}}$ $\nu_{10} = \nu_{\text{signal}}$

$$N_1 - N_0 = \frac{N}{4} \beta h \nu_s \left[\frac{\nu_P}{\nu_s} \cdot \frac{w_{03}(w_{02} + w_{23}) + w_{02}(w_{13} + w_{23})}{w_{03}(w_{01} + w_{02} + w_{13} + w_{23}) + (w_{01} + w_{02})(w_{13} + w_{23})} - 1 \right]$$

et si les w_{ij} sont égaux

$$N_1 - N_0 = \frac{N}{4} \beta h \nu_s \left[\frac{\nu_P}{2\nu_s} - 1 \right]$$

ANNEXE 2

CALCUL DE L'HAMILTONIEN DE SPIN DU RUBIS

DANS LE CAS DES PETITS ANGLES

APPLICATION A UN CAS DE COUPLAGE HARMONIQUE DE SPIN

d'après les indications de Y. AYANT.

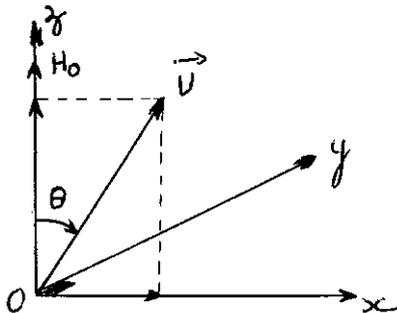
En prenant l'axe Oz du cristal comme axe de quantification, l'Hamiltonien de spin prend la forme :

$$\mathcal{H} = D \left[S_z^2 - \frac{1}{3} S(S+1) \right] + \mu_B \left[g_{\parallel} S_z H_z + g_{\perp} (S_x H_x + S_y H_y) \right]$$

en fait $g_{\parallel} \approx g_{\perp} = g$

$$\text{d'où } \mathcal{H} = D \left[S_z^2 - \frac{1}{3} S(S+1) \right] + g \mu_B \vec{S} \cdot \vec{H}$$

Pour simplifier le calcul, nous changeons de référentiel : l'axe de quantification appelé Oz est pris selon \vec{H}_0 et nous appelons \vec{U} l'axe du cristal qu'on choisit de placer dans le plan xOz.



L'Hamiltonien de spin peut alors s'écrire :

$$\mathcal{H} = D \left(\vec{S}_u^2 - \frac{S(S+1)}{3} \right) + g \mu_B H_0 S_z$$

$$\text{avec } \vec{S}_u = S_x \sin \theta + S_z \cos \theta$$

$$\vec{S}_u^2 = S_x^2 \sin^2 \theta + S_z^2 \cos^2 \theta + (S_x S_z + S_z S_x) \sin \theta \cos \theta$$

$$\mathcal{H} = D \left[S_x^2 \sin^2 \theta + S_z^2 \cos^2 \theta + S_x S_z + S_z S_x \right] \sin \theta \cos \theta - \frac{S(S+1)}{3} + g H_0 S_z$$

ici $S = 3/2$

Nous écrivons les valeurs propres des opérateurs S_x , S_y , S_z :

$$\langle M | S_z | M' \rangle = M \delta_{M,M'} \quad \text{ou sous forme matricielle}$$

si $\delta_{M,M'}$ est le symbole de Kroneker

$$S_z^2 = \begin{vmatrix} 9/4 & . & . & . \\ . & 1/4 & . & . \\ . & . & 1/4 & . \\ . & . & . & 9/4 \end{vmatrix}$$

et $\langle M | S_z^2 | M' \rangle = M^2 \delta_{M,M'}$

$$\langle M | S_{\pm} | M' \rangle = \sqrt{S(S+1) - M.M'} \cdot \delta_{M,M' \mp 1}$$

$$\text{si } S_{\pm} = S_x \pm iS_y$$

$$\text{d'où } S_{+} = \begin{vmatrix} . & \sqrt{3} & . & . \\ . & . & 2 & . \\ . & . & . & \sqrt{3} \\ . & . & . & . \end{vmatrix} \quad S_{-} = \begin{vmatrix} . & . & . & . \\ \sqrt{3} & . & . & . \\ . & 2 & . & . \\ . & . & \sqrt{3} & . \end{vmatrix}$$

$$S_x = \begin{vmatrix} . & \sqrt{3}/2 & . & . \\ \sqrt{3}/2 & . & 1 & . \\ . & 1 & . & \sqrt{3}/2 \\ . & . & \sqrt{3}/2 & . \end{vmatrix} \quad S_x^2 = \begin{vmatrix} 3/4 & . & \sqrt{3}/2 & . \\ . & 7/4 & . & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & . & 7/4 & . \\ . & \sqrt{3}/2 & . & 3/4 \end{vmatrix}$$

Pour calculer $\langle M | S_x S_z + S_z S_x | M' \rangle = [S_x, S_z]_{+}$

on remarque que $\langle M | S_x S_z | M' \rangle = M' \langle M | S_x | M' \rangle$

et que $\langle M | S_z S_x | M' \rangle = M \langle M | S_x | M' \rangle$

donc $[S_x S_z]_{+} = (M + M') \langle M | S_x | M' \rangle$

et sous forme matricielle

$$[S_x S_z]_{+} = \begin{vmatrix} . & \sqrt{3} & . & . \\ \sqrt{3} & . & . & . \\ . & . & . & -\sqrt{3} \\ . & . & -\sqrt{3} & . \end{vmatrix}$$

La matrice complète s'écrit :

$$\begin{array}{c}
 \left(\frac{3}{4} \sin^2 \theta + \frac{9}{4} \cos^2 \theta - \frac{5}{4} \right) D + \frac{3}{2} g \mu_B H_0 \quad D \sqrt{\frac{3}{2}} \sin^2 \theta \quad \cdot \\
 \hline
 D \sqrt{\frac{3}{2}} \sin \theta \cos \theta \quad \left(\frac{7}{4} \sin^2 \theta + \frac{1}{4} \cos^2 \theta - \frac{5}{4} \right) D + \frac{g \mu_B H_0}{2} \quad \cdot \\
 \hline
 D \sqrt{\frac{3}{2}} \sin^2 \theta \quad \cdot \quad \left(\frac{7}{4} \sin^2 \theta + \frac{1}{4} \cos^2 \theta - \frac{5}{4} \right) D - \frac{g \mu_B H_0}{2} \quad \cdot \\
 \hline
 \cdot \quad \cdot \quad D \sqrt{\frac{3}{2}} \sin^2 \theta \quad \cdot \quad -D \sqrt{\frac{3}{2}} \sin \theta \cos \theta \quad \cdot \\
 \hline
 \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \left(\frac{3}{4} \sin^2 \theta + \frac{9}{4} \cos^2 \theta - \frac{5}{4} \right) D - \frac{3}{2} g \mu_B H_0 \cdot
 \end{array}$$

En supposant θ petit, on développe les lignes trigonométriques en négligeant les termes d'ordre supérieur à deux. Nous posons

$$\nu = \frac{g \mu_B H_0}{D} \quad \text{si } D \text{ est en énergie}$$

$$= \frac{g \mu_B H_0}{D h} \quad \text{si } D \text{ est en fréquence}$$

$$\mathcal{H} = D \begin{vmatrix} 1 - \frac{3}{2} \theta^2 + \frac{3}{2} v & \sqrt{3} \theta & \frac{\sqrt{3}}{2} \theta^2 & \cdot \\ \sqrt{3} \theta & -1 + \frac{3}{2} \theta^2 + \frac{v}{2} & \cdot & \frac{\sqrt{3}}{2} \theta^2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \theta^2 & \cdot & -1 + \frac{3}{2} \theta^2 - \frac{v}{2} & -\sqrt{3} \theta \\ \cdot & \frac{\sqrt{3}}{2} \theta^2 & -\sqrt{3} \theta & 1 - \frac{3}{2} \theta^2 - \frac{3}{2} v \end{vmatrix}$$

Pour trouver les niveaux d'énergie il faut résoudre l'équation en λ

$$\text{Det. } | \mathcal{X} - \lambda . 1 | = 0$$

Une remarque permet de simplifier cette équation qui est en principe du quatrième degré. Les termes en θ^2 entourés d'un cercle sont disposés de telle façon que dans le développement du déterminant ils apparaissent toujours multipliés par θ , θ^2 etc ..., ils donnent donc des termes en θ^3 , θ^4 qu'on néglige. Pour s'en rendre compte il suffit de regarder les mineurs de ces éléments.

L'équation ainsi simplifiée s'écrit :

$$\text{Det. } \begin{vmatrix} 1 - \frac{3}{2} \theta^2 + \frac{3}{2} v - \lambda & \sqrt{3} \theta & \cdot & \cdot \\ \sqrt{3} \theta & -1 + \frac{3}{2} \theta^2 + \frac{v}{2} - \lambda & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 + \frac{3}{2} \theta^2 - \frac{v}{2} - \lambda & -\sqrt{3} \theta \\ \cdot & \cdot & -\sqrt{3} \theta & 1 - \frac{3}{2} \theta^2 - \frac{3}{2} v - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

L'équation séculaire se divise en deux :

$$(1 - \frac{3}{2} \theta^2 + \frac{3}{2} v - \lambda) (-1 + \frac{3}{2} \theta^2 + \frac{v}{2} - \lambda) - 3 \theta^2 = 0$$

$$(-1 + \frac{3}{2} \theta^2 - \frac{v}{2} - \lambda) (1 - \frac{3}{2} \theta^2 - \frac{3}{2} v - \lambda) - 3 \theta^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda v - 1 - v + \frac{3}{2}\theta^2 v + \frac{3}{4}v^2 = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda v - 1 + v - \frac{3}{2}\theta^2 v + \frac{3}{4}v^2 = 0$$

d'où les solutions

$$\lambda = +v + \sqrt{v^2 - \frac{3}{4}v^2 - \frac{3}{2}\theta^2 v + v + 1}$$

$$\lambda' = -v + \sqrt{v^2 - \frac{3}{4}v^2 + \frac{3}{2}\theta^2 v - v + 1}$$

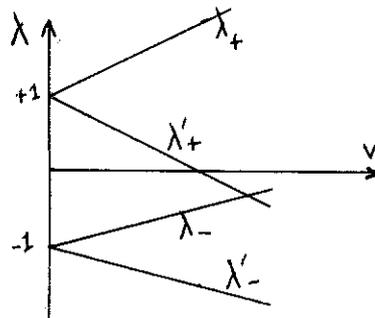
Nous appellerons ces quatre hyperboles : λ_+ , λ_- , λ'_+ , λ'_- elles représentent les niveaux.

Pour $\theta = 0^\circ$ $\lambda_+ = 1 + \frac{3}{2}v$

$$\lambda_- = -1 + \frac{v}{2}$$

$$\lambda'_+ = 1 - \frac{3}{2}v$$

$$\lambda'_- = -1 - \frac{v}{2}$$



Application au cas du C.H.S. du point D.

Pour θ petit, $H_0 \approx 1000$ oersteds

le signal est situé entre λ_- et λ'_-

la pompe étant entre λ'_+ et λ'_-

il y a C.H.S. de rapport 1 si $\lambda'_+ - \lambda'_- = \lambda_+ - \lambda_+$

On s'impose la fréquence de signal $\nu_s = \lambda_- - \lambda'_-$

d'où $\nu_s = 2v - \sqrt{(1 + \frac{v}{2})^2 - \frac{3}{2}\theta^2 v} + \sqrt{(1 - \frac{v}{2})^2 + \frac{3}{2}\theta^2 v} = 2v - A + B$

Si $A = + \sqrt{(1 + \frac{v}{2})^2 - \frac{3}{2}\theta^2 v}$ et $B = + \sqrt{(1 - \frac{v}{2})^2 + \frac{3}{2}\theta^2 v}$,

la condition d'égalité des fréquences de pompe et image donne :

$$2B = 2v + A - B$$

$$\text{d'où } 2B + \nu_s = 4v \quad \left\{ \begin{array}{l} B = 2v - \frac{\nu_s}{2} \\ A = 4v - \frac{3\nu_s}{2} \end{array} \right.$$

Ces deux conditions deviennent :

$$\left(2v - \frac{\nu_s}{2}\right)^2 = \left(1 - \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\theta^2 v$$

$$\left(4v - \frac{3\nu_s}{2}\right)^2 = \left(1 + \frac{v}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}\theta^2 v$$

En éliminant θ entre les deux équations

$$39v^2 - 28v\nu_s + 5\nu_s^2 - 4 = 0$$

$$v = \frac{14\nu_s \pm \sqrt{\nu_s^2 + 156}}{39}$$

La fréquence signal minimum pour $\theta = 0$ est donnée par

$$2v - \frac{\nu_s}{2} = 1 - \frac{v}{2}$$

$$4v - \frac{3\nu_s}{2} = 1 + \frac{v}{2}$$

$$\nu_{s \text{ min}} = \frac{1}{2} D \quad D = 5\,746 \text{ MHz}$$

$$\nu_{s \text{ min}} = 2\,873 \text{ MHz}$$

Connaissant ν_s on calcule v

$$\nu_p \text{ est donné par } \lambda'_- - \lambda'_+ = +2B$$

On calcule alors θ d'après

$$\frac{3}{2}\theta^2 v = B^2 - \left(1 - \frac{v}{2}\right)^2$$

Résultats numériques.

λ_s MHz	2,873	2,900	2,920	2,940	2,960	2,980	3,000	3,020	3,040	3,060
V	0,50165	0,50295	0,50420	0,50544	0,50669	0,50794	0,50919	0,51044	0,51169	
λ_p MHz	8,629	8,640	8,648	8,656	8,666	8,674	8,683	8,692	8,701	
θ	0°	3°20'	4°30'	5°40'	6°20'	7°	7°40'	8°10'	8°40'	9°10'

