

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE
ET L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE
DE GRENOBLE

pour obtenir le grade

DOCTEUR DE 3^{ème} CYCLE

par

Paul Marinus de GROOT

SUJET

**Contribution à l'étude de
l'anisotropie magnétique
des milieux déformables**

Soutenue le 25 Juin 1975

devant la commission d'Examen

MM. L. NÉEL

Président

G. AUBERT

P. AVERBUCH

E. de LACHEISSERIE

K. DRANSFELD

} Examineurs

Invité

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Magnétisme du C.N.R.S. de Grenoble, dirigé par Monsieur le Professeur L. Néel, Membre de l'Institut, Prix Nobel de Physique.

Je tiens à exprimer ma profonde et respectueuse gratitude à Monsieur Néel pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury.

Monsieur le Professeur Aubert a bien voulu m'accueillir dans son groupe et m'a confié le sujet de ce travail. Je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance pour son accueil et le soutien qu'il m'a toujours accordé afin de mener à bien ce travail.

Je remercie Monsieur le Professeur Dransfeld qui s'est intéressé à mon travail et qui a bien voulu me faire l'honneur de participer au jury.

Ma reconnaissance va également à Monsieur Averbuch, Directeur de Recherche, et à Monsieur de Lacheisserie qui me font aussi l'honneur de participer au jury.

Je remercie Monsieur Blanchard pour les échanges fructueux que j'ai eus avec lui tout au long de ce travail.

J'ai beaucoup apprécié l'aide morale de mes camarades de laboratoire. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

Je remercie enfin Madame Trévisson, Madame Boutroy et Madame Ranc qui ont assuré la réalisation technique de ce mémoire.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	1
CHAPITRE I <i>Description classique des milieux magnétoélastiques</i>	3
I - 1 - Définition d'une énergie d'anisotropie magnétocristalline	3
I - 2 - Les relations générales entre les k_n et les k_n^{exp}	5
I - 3 - La définition de l'état de non-déformation	13
I - 4 - L'exemple du cristal cubique	14
I - 5 - Critique de la méthode	18
CHAPITRE II <i>Etude rigoureuse du milieu magnétoélastique</i>	21
II - 1 - Les équations magnétostatiques	21
II - 1 - 1 - Quelques rappels	21
II - 1 - 2 - Le travail magnétique	24
II - 2 - L'élasticité du milieu magnétoélastique	27
II - 2 - 1 - Les forces et contraintes magnétiques	28
II - 2 - 2 - Un nouveau tenseur de contrainte	30
II - 2 - 3 - Rappel des déformations finies	31
II - 3 - L'énergie due au champ démagnétisant	34
II - 4 - Les équations d'équilibre	35
II - 5 - Une approximation justifiée	37
II - 6 - Application à un cristal cubique soumis à une pression hydrostatique	45

CONCLUSION

51

ANNEXE

*Valeurs des constantes caractéristiques pour le nickel
et le fer*

53

BIBLIOGRAPHIE

57

INTRODUCTION

Ce travail s'inscrit dans le cadre des études menées au Laboratoire de Magnétisme sur les propriétés anisotropes des matériaux magnétiques.

Le problème expérimental de la mesure de la partie anisotrope de l'énergie libre d'un cristal en fonction de la température et du champ magnétique appliqué a été résolu de façon très satisfaisante pour un échantillon sphérique soumis à la pression atmosphérique et libre de se déformer.

Toutefois la comparaison entre les résultats expérimentaux et les prévisions des modèles théoriques n'est pas immédiate. En effet, la trop grande complexité du problème interdit de tenir compte dans ces derniers des déformations du cristal. Il est donc important dans l'état actuel de la théorie de pouvoir corriger les résultats expérimentaux des influences dues à ces déformations.

Dans une première partie nous reprenons la description phénoménologique habituelle des milieux magnéto-élastiques et nous montrons comment, dans le cas d'un cristal cubique choisi comme exemple, elle permet de résoudre le problème posé.

Bien que largement utilisée, cette description n'est pas rigoureuse et son emploi peut conduire à des erreurs non négligeables comme nous le montrons dans la deuxième partie.

Enfin nous montrons comment les mesures d'anisotropie sous haute pression permettent de déterminer, pour un cristal cubique, la constante de magnétostriction h_3 et sa dérivée par rapport au champ $\frac{dh_3}{dH}$. Cette dernière n'a pas encore été mesurée jusqu'à maintenant, et la détermination de h_3 par des mesures de magnétostriction conduit à des valeurs qui sont actuellement du même ordre de grandeur que l'incertitude expérimentale.

CHAPITRE I

DESCRIPTION CLASSIQUE DES MILIEUX MAGNETO-ELASTIQUES

I - 1 - DEFINITION D'UNE ENERGIE D'ANISOTROPIE MAGNETOCRISTALLINE

L'énergie libre F d'un monocristal ferromagnétique, définie à partir de l'énergie interne U par $F = U - TS$, où T est la température et S l'entropie, peut être divisée en une partie F_{isotrope} et une partie $F_{\text{anisotrope}}$ respectivement indépendante et dépendante de la direction d'aimantation du cristal par rapport à ses axes cristallographiques.

Il est maintenant généralement accepté que l'interaction spin-orbite est le mécanisme microscopique responsable de l'existence de $F_{\text{anisotrope}}$ [1] [2] [3].

Le moment orbital \vec{L} de chaque atome est perturbé par un champ cristallin qui est fonction de la configuration cristallographique. D'autre part, en présence d'un blocage du moment orbital, ou dans un modèle de magnétisme de bandes, c'est le spin \vec{S} qui est essentiellement responsable du moment magnétique total.

Une déformation du cristal affecte la valeur perturbée de \vec{L} et modifie par conséquent l'énergie de couplage spin-orbite. Ce modèle n'explique donc pas seulement l'existence d'une énergie $F_{\text{anisotrope}}$ mais aussi sa dépendance vis à vis de l'état de déformation du cristal, donc l'existence des effets de magnétostriction.

L'expression phénoménologique habituelle de F pour un monocristal saturé est donnée par un développement limité au deuxième ordre des déformations autour d'un état de non-déformation défini convenablement:

$$\frac{F}{V} = F_0(\vec{M}, T) + b_{ij}(\vec{M}, T) e_{ij} + \frac{1}{2} C_{ijkl}(\vec{M}, T) e_{ij} e_{kl} \quad 1.1.1$$

V étant le volume du cristal et e_{ij} le tenseur de déformation.

Le deuxième terme est appelé énergie magnéto-élastique. Il contient les coefficients magnéto-élastiques b_{ij} , qui sont liés aux coefficients de magnétostriction h_{ij} , expérimentalement accessibles.

Le troisième terme représente l'énergie élastique du cristal.

La dépendance des modules élastiques C_{ijkl} en fonction de l'état d'aimantation est généralement négligeable et la partie magnétiquement anisotrope de F est alors entièrement contenue dans les deux premiers termes.

Le premier terme de 1.1.1 est défini pour une déformation nulle.

Bien que l'origine microscopique de l'énergie magnéto-élastique soit liée à celle de l'énergie d'anisotropie à déformation nulle et que le modèle du couplage spin-orbite puisse donner le bon ordre de grandeur [4] pour les coefficients b_{ij} , un calcul ab initio de ces derniers est encore inabordable. Il est alors préférable d'appeler le premier terme seul énergie d'anisotropie magnétocristalline.

Sa variation en fonction de la direction de l'aimantation peut être exprimée par un développement en série de combinaisons linéaires des harmoniques sphériques:

$$F_0(\vec{M}, T) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n(M, T) P_n(\vec{\alpha}) \quad 1.1.2$$

Les k_n sont appelés coefficients d'anisotropie magnétocristalline et ils décrivent par définition le comportement anisotrope du cristal en absence de déformation. Ils sont directement liés aux paramètres qui interviennent dans les modèles théoriques.

Dans les expériences ayant comme but la détermination des coefficients d'anisotropie k_n , les grandeurs qui peuvent être contrôlées directement sont la température, le champ extérieur et les forces mécaniques appliquées, généralement une pression hydrostatique.

La méthode la plus précise qui existe actuellement pour déterminer les coefficients d'anisotropie est celle qui mesure le couple nécessaire pour maintenir le cristal dans un champ extérieur \vec{H}_0 en fonction de l'angle que fait \vec{H}_0 avec les axes cristallographiques du corps [5].

Toutefois, le cristal étant libre de se déformer pendant ces expériences, les coefficients k_n^{exp} obtenus directement par analyse des couples mesurés ne sont pas les mêmes que ceux définis par l'expression 1.1.2, et il faut donc déterminer les coefficients k_n à partir des k_n^{exp} mesurés.

1 - 2 - LES RELATIONS GÉNÉRALES ENTRE LES k_n^{exp} ET LES k_n

Les relations entre les k_n^{exp} et k_n peuvent être trouvées directement par des considérations thermodynamiques, en admettant toutefois certaines approximations dont on discutera la justification dans le deuxième chapitre. On supposera le champ externe \vec{H}_0 et l'aimantation \vec{M} uniformes. Ces deux conditions ne sont compatibles que si le champ démagnétisant H_d est uniforme et l'échantillon doit alors être de forme ellipsoïdale. Pour que n'interviennent pas de couples supplémentaires dus à l'anisotropie de forme, il faut que l'ellipsoïde possède en plus un axe de révolution et que l'aimantation soit perpendiculaire à cet axe.

On admettra que l'élasticité du milieu peut être décrite par un tenseur de contrainte symétrique uniforme τ_{ij} et un tenseur de déformation infinitésimale symétrique uniforme ϵ_{ij} . Leurs propriétés sont données dans tous les ouvrages classiques sur l'élasticité, par exemple celui de Landau et Lifchitz [6].

On rappelle brièvement leurs propriétés les plus importantes:

$$\varepsilon_{ij} \equiv \frac{1}{2} (u_{ij*} + u_{ji*}) \quad * \quad 1.2.1$$

\vec{u} est le vecteur de déplacement défini par $\vec{u} \equiv \vec{x} - \vec{X}$ où \vec{x} et \vec{X} sont respectivement les vecteurs du même point matériel après et avant la déformation.

Le tenseur τ_{ij} est défini par $\tau_{ij} \equiv \tau_i(\vec{n} = \vec{j})$. C'est à dire que τ_{ij} est égal à la composante "i" de la force agissant sur un élément de surface $\vec{n} dS$ dont la normale \vec{n} est dans la direction \vec{j} .

La composante "i" de la force agissant sur un élément de surface dont la normale \vec{n} est dans une direction quelconque est alors donnée par :

$$\tau_i(\vec{n}) = \tau_{ij} n_j \quad ** \quad 1.2.2$$

où n_j est la composante "j" du vecteur unitaire \vec{n} . L'équilibre des forces mécaniques à l'intérieur et à la surface du corps est donné par :

$$\begin{aligned} \tau_{ij,j} + \rho f_i &= 0 && \text{à l'intérieur du corps} \\ \tau_{ij} n_j &= T_i && \text{sur la surface du corps} \end{aligned} \quad 1.2.3$$

f_i et T_i sont respectivement les composantes "i" de la force massique et de la force de surface appliquée et ρ la masse volumique. Par la suite, on supposera que les forces massiques sont nulles.

Pour des transformations réversibles, la variation de l'énergie libre du cristal est égale à :

* On utilise l'abréviation " $,j^*$ " pour indiquer la dérivée $\partial/\partial X_j$ et l'abréviation " $,j$ " pour $\partial/\partial x_j$. La différence entre les $\partial/\partial x_j$ et $\partial/\partial X_j$ est du deuxième ordre et peut être négligée dans une approximation infinitésimale (cf. aussi la relation 2.2.13)

** La convention d'Einstein est utilisée tout au long de ce travail.

$$dF = -SdT + dW \quad 1.2.4$$

dW est le travail fourni par des sources magnétiques et mécaniques extérieures.

Par énergie libre F , on entend ici l'énergie libre du cristal seul, sans incorporation de l'énergie d'interaction avec le champ: $-\int_V \vec{M} \cdot \vec{H}_0 d\tau$. Avec cette définition, la variation isotherme de l'énergie libre d'un corps magnétique rigide est égale à:

$$dF_{\text{magn}} = \int_V \vec{H}_0 \cdot d\vec{M} d\tau \quad 1.2.5$$

\vec{M} étant le moment magnétique par unité de volume.

La variation isotherme de l'énergie libre d'un corps élastique non magnétique est égale à [6]:

$$dF_{\text{méc.}} = \int_S T_i du_i dS = \int_V \tau_{ij} d\varepsilon_{ij} d\tau \quad 1.2.6$$

On admettra maintenant que la variation isotherme totale pour un corps magnétoélastique peut s'écrire comme la somme $dW_{\text{magn}} + dW_{\text{méc.}}$, soit:

$$dF = \int_V \vec{H}_0 \cdot d\vec{M} d\tau + \int_V \tau_{ij} d\varepsilon_{ij} d\tau \quad 1.2.7$$

Une partie de l'énergie libre totale F du cristal est formée par l'énergie d'interaction entre l'aimantation et son champ démagnétisant \vec{H}_1 . Cette énergie W_m qui dépend de la géométrie du corps et qui par conséquent n'est pas fonction des conditions locales microscopiques en chaque point doit être retranchée de F si l'on veut définir des grandeurs caractéristiques du matériau.

Pour un corps rigide W_m s'écrit:

$$W_m = -\frac{1}{2} \int_V \vec{H}_1 \cdot \vec{M} d\tau \quad 1.2.8$$

et sa variation est donnée par:

$$dW_m = - \int_V \vec{H}_1 \cdot d\vec{M} d\tau \quad 1.2.9$$

Les déformations entraînent aussi des changements de volume. Il est alors plus utile de définir les grandeurs thermodynamiques relatives à une quantité de matière donnée plutôt qu'à une quantité de volume. On introduit ainsi l'aimantation massique $\vec{M} = 1/\rho \vec{M}$ où $\rho = dm/dr$ est la masse volumique et nous écrirons la partie de F qui est indépendante de la forme sous forme d'une intégrale :

$$F - W_m = \int f_m dm = \int \rho f_m dr \quad 1.2.10$$

f_m est donc l'énergie libre par unité de masse, indépendante de la forme de l'échantillon.

Les expressions 1.2.7, 1.2.9 et 1.2.10 donnent avec $\vec{H} \equiv \vec{H}_0 + \vec{H}_1$,

$$\int \rho df_m dr = \int \rho \vec{H} \cdot d\vec{M} dr + \int \tau_{ij} d\varepsilon_{ij} dr \quad 1.2.11$$

La relation 1.2.11 montre qu'à température fixe f_m est fonction des variables locales \vec{M} et ε_{ij} et donne les équations d'équilibre:

$$\left(\frac{\partial f_m}{\partial M_k} \right)_{\varepsilon_{ij}} = H_k \quad 1.2.12$$

$$\rho \left(\frac{\partial f_m}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{M_k} = \tau_{ij} \quad 1.2.13$$

La densité ρ est fonction des variables ε_{ij} . Toutefois dans le cadre des approximations de ce chapitre la variation de ρ introduit des corrections d'ordre supérieur aux termes considérés. On supposera donc $\rho = \rho_0$ où ρ_0 est la masse volumique à déformation nulle.

L'expression phénoménologique de f_m est donnée par:

$$f_m = f_0(\vec{M}, T) + f_{ij}(\vec{M}, T) \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} f_{ijkl}(\vec{M}, T) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad 1.2.14$$

$$\rho_0 f_m = \rho_0 f_0(\vec{M}, T) + b_{ij}(\vec{M}, T) \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} C_{ijkl}(\vec{M}, T) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad 1.2.15$$

où $b_{ij} = \rho_0 f_{ij}$ et $C_{ijkl} = \rho_0 f_{ijkl}$ sont donc respectivement les coefficients magnétoélastiques et les modules d'élasticité du cristal.

On introduit maintenant le potentiel thermodynamique G défini par:

$$G \equiv F - \int_S \tau_i u_i dS \quad 1.2.16$$

Soit q_m la partie de G indépendante de la forme et rapportée à l'unité de masse:

$$G - W_m = \int q_m dm \quad 1.2.17$$

Alors:

$$\int q_m dm - \int f_m dm = - \int_V \tau_{ij} \varepsilon_{ij} d\tau \quad 1.2.18$$

Par substitution de 1.2.18 en 1.2.11 on a:

$$\int_V \rho dq_m d\tau = - \int_V d\tau_{ij} \varepsilon_{ij} d\tau + \int_V \rho \vec{H} \cdot d\vec{M} d\tau \quad 1.2.19$$

ce qui montre qu'à température constante q_m est fonction des variables \vec{M} et τ_{ij} et donne les équations d'équilibre:

$$\left(\frac{\partial q_m}{\partial M_k} \right)_{\tau_{ij}} = H_k \quad 1.2.20$$

$$\rho \left(\frac{\partial q_m}{\partial \tau_{ij}} \right)_{M_k} = - \varepsilon_{ij} \quad 1.2.21$$

q_m peut être développé autour de l'état de contrainte zéro c'est à dire l'état qui existe sans forces mécaniques appliquées:

$$q_m = q_0(\vec{M}, T) - q_{ij}(\vec{M}, T) \tau_{ij} - \frac{1}{2} q_{ijkl}(\vec{M}, T) \tau_{ij} \tau_{kl} \quad 1.2.22$$

$$\rho_0 q_m = \rho_0 q_0(\vec{M}, T) - h_{ij}(\vec{M}, T) \tau_{ij} - \frac{1}{2} S_{ijkl}(\vec{M}, T) \tau_{ij} \tau_{kl} \quad 1.2.23$$

$h_{ij} = \rho_0 q_{ij}$ et $S_{ijkl} = \rho_0 q_{ijkl}$ sont respectivement les coefficients de magnétostriction et les coefficients d'élasticité. Les signes "-" ont été introduits pour des raisons de commodité.

Par leur définition même les coefficients $b_{ij}, h_{ij}, C_{ijkl}, S_{ijkl}$ sont symétriques:

$$\begin{aligned}
 C_{ijkl} = C_{ijlk} = C_{klij} & \quad b_{ij} = b_{ji} \\
 S_{ijkl} = S_{ijlk} = S_{klij} & \quad h_{ij} = h_{ji}
 \end{aligned}
 \tag{1.2.24}$$

Les coefficients C_{ijkl} et S_{ijkl} sont liés par les relations d'orthogonalité:

$$C_{ijkl} S_{klrs} = \frac{1}{2} (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}) \tag{1.2.25}$$

Par substitution de 1.2.15 en 1.2.13 on a:

$$b_{ij} + C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \tau_{ij} \tag{1.2.26}$$

et par substitution de 1.2.23 en 1.2.21:

$$h_{ij} + S_{ijkl} \tau_{kl} = \varepsilon_{ij} \tag{1.2.27}$$

Les expressions 1.2.25 / 26 / 27 donnent les relations suivantes entre les coefficients h_{ij} et b_{ij} :

$$h_{ij} = -S_{ijkl} b_{kl} \quad \text{et} \quad b_{ij} = -C_{ijkl} h_{kl} \tag{1.2.28}$$

L'énergie $\rho_0 g_0(\vec{M}, T)$ définie à contrainte zéro est obtenue en substituant en 1.2.15 les déformations à contrainte zéro données par 1.2.27; on trouve:

$$\rho_0 g_0 = \rho_0 f_0 + \frac{1}{2} b_{ij} h_{ij}$$

$$\text{d'où :} \quad \rho_0 (g_0 - f_0) = -\frac{1}{2} C_{ijkl} h_{ij} h_{kl} \tag{1.2.29}$$

L'expression 1.2.29 nous permet de trouver les relations entre les coefficients d'anisotropie à contrainte zéro et les coefficients d'anisotropie à déformation nulle.

Les coefficients h_{ij} et b_{ij} peuvent être écrits d'une façon générale $h_{ij} = \sum_n h_n(\mathcal{M}, T) f_n(\vec{\alpha})$, etc., où les h_n sont des constantes fonction uniquement du module de l'aimantation et de la température et où les $f_n(\vec{\alpha})$ sont des combinaisons d'harmoniques sphériques de la direction $\vec{\alpha}$ de l'ai-

mantation. Les $h_n(\mathcal{M}, T)$ sont considérés comme constants à champ et températures constants et les C_{ijkl} et S_{ijkl} seront considérés comme indépendants de l'aimantation.

Le couple par unité de masse exercé sur son support par le cristal placé dans le champ H_0 est égal à :

$$\vec{\Gamma}_m = \vec{M} \times \vec{H}_0 = \vec{M} \times \vec{H} \quad 1.2.30$$

(en absence d'une symétrie de révolution on aura un couple supplémentaire dû à l'anisotropie de forme de l'échantillon)

Pour l'interprétation des couples il est plus utile de passer à un système d'axes polaires $\vec{\alpha}$, $\vec{\alpha}_\theta$, $\vec{\alpha}_\varphi$ avec $\vec{\alpha} = \frac{\vec{M}}{M}$, $\vec{\alpha}_\theta = \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial \theta}$ et $\vec{\alpha}_\varphi = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial \varphi}$ où θ et φ fixent la direction de \vec{M} .

Soient H_M , H_θ , H_φ les composantes du champ \vec{H} dans ce système. Le couple $\vec{\Gamma}_m$ s'écrit alors :

$$\vec{\Gamma}_m = M H_\theta \vec{\alpha}_\varphi - M H_\varphi \vec{\alpha}_\theta \quad 1.2.31$$

et les relations 1.2.20 deviennent

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial g_m}{\partial \mathcal{M}} \right)_{\tau_{ij}, \theta, \varphi} &= H_M \\ \left(\frac{\partial g_m}{\partial \theta} \right)_{\tau_{ij}, M, \varphi} &= M H_\theta \\ \left(\frac{\partial g_m}{\partial \varphi} \right)_{\tau_{ij}, M, \theta} &= M H_\varphi \sin \theta \end{aligned} \right\} 1.2.32$$

Le module de l'aimantation dans un monocristal saturé n'est pas nécessairement isotrope mais peut dépendre de la direction. A température finie cet effet peut être expliqué par une variation des fluctuations thermiques des moments magnétiques autour de la direction d'aimantation globale [7]. Les mesures les plus récentes semblent toutefois montrer qu'une anisotropie de l'aimantation subsiste à température zéro [8].

Il est alors utile de définir le potentiel thermodynamique Ψ_m par:

$$\Psi_m = g_m - \mathcal{M} H_M \quad 1.2.33$$

A l'aide de 1.2.32 on trouve les équations d'équilibre

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \Psi_m}{\partial H_M} \right)_{\tau_{ij}, \theta, \varphi} &= -\mathcal{M} \\ \left(\frac{\partial \Psi_m}{\partial \theta} \right)_{\tau_{ij}, H_M, \varphi} &= \mathcal{M} H_\theta \\ \left(\frac{\partial \Psi_m}{\partial \varphi} \right)_{\tau_{ij}, H_M, \theta} &= \mathcal{M} H_\varphi \sin \theta \end{aligned} \right\} 1.2.34$$

Donc à température, contrainte appliquée et champ constants, le couple mesuré est égal à la variation angulaire du potentiel Ψ_m :

$$\vec{\Gamma} = \int \vec{\Gamma} \, dm = \int \left[\frac{-1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial \Psi_m}{\partial \varphi} \right)_{\tau_{ij}, H_M, \theta} \vec{\alpha}_\theta + \left(\frac{\partial \Psi_m}{\partial \theta} \right)_{\tau_{ij}, H_M, \varphi} \vec{\alpha}_\varphi \right] dm \quad 1.2.35$$

Le module du champ H n'est pas rigoureusement constant mais dépend de l'anisotropie de l'aimantation. L'anisotropie de l'aimantation étant généralement très faible on montre que cette variation peut être négligée [8].

Le module de l'aimantation peut être développé d'une façon analogue à 1.1.2, suivant

$$\mathcal{M} = \sum_n \mathcal{M}_n f_n(\vec{\alpha}) \quad 1.2.36$$

\mathcal{M}_0 étant la partie prépondérante isotrope de \mathcal{M} .

L'analyse des courbes de couples à pression et champ donnés permet d'obtenir [8] les coefficients expérimentaux k_n^{exp} :

$$\rho_0 \Psi_m = \sum_n k_n^{\text{exp}} f_n(\vec{\alpha})$$

D'autre part d'après 1.1.2

$$\rho_0 f_0 = \sum_n k_n f_n(\vec{\alpha})$$

Les relations 1.2.23, 1.2.29 et 1.2.33 conduisent alors à :

$$\rho_0 (\Psi_m - f_0) = -\frac{1}{2} C_{ijkl} h_{ij} h_{kl} - h_{ij} \tau_{ij} - \frac{1}{2} S_{ijkl} \tau_{ij} \tau_{kl} - M H_m \quad 1.2.37$$

En développant explicitement chacun des termes de 1.2.37 en fonction des $f_n(\vec{\alpha})$ on obtient les relations explicites entre les k_n^{exp} et les k_n .

I - 3 - LA DEFINITION DE L'ETAT DE NON DEFORMATION

La relation 1.2.37 nous permet de déterminer les constantes d'anisotropie à déformation nulle. Pour les corps non magnétiques cet état de référence est défini comme celui qui existe en l'absence de forces mécaniques appliquées.

Dans le cas des milieux magnétoélastiques cependant, le réseau sera déjà spontanément déformé et aura en général une symétrie plus basse que celle du groupe cristallin auquel appartient le corps. On définira alors le milieu non déformé comme celui qui a la symétrie complète du groupe cristallin. Le milieu non déformé est ainsi défini à un facteur d'échelle près. Ce dernier sera déterminé par la définition du volume V_0 non déformé. Différentes définitions sont ici possibles. On rappelle celle donnée par Becker et Döring [9] qui définissent V_0 comme le volume du milieu si l'aimantation est dans une direction de facile aimantation. Nous définirons le volume V_0 à une température T par le volume qu'aurait le milieu en l'absence d'une aimantation. Le volume V_0 n'est alors pas réalisable expérimentalement mais peut être obtenu par extrapolation de la dilatation thermique normale au dessus de la température critique.

Avec cette définition les constantes d'anisotropie dépendent de la température par l'intermédiaire de la dilatation thermique normale. Bien qu'il ait été suggéré que cette influence peut être importante [10] la variation des constantes d'anisotropie en fonction de la température ne peut être expliquée par cet effet uniquement.

I - 4 - L'EXEMPLE DU CRISTAL CUBIQUE

Dans ce paragraphe on donne les relations explicites pour un cristal sphérique à symétrie cubique, soumis à une pression hydrostatique P et placé dans un champ uniforme \vec{H}_0 .

Pour cette symétrie, l'énergie d'anisotropie magnétocristalline est le plus souvent exprimée comme suit:

$$\rho_0 f_0(\vec{M}, T) = K_0(\mu, T) + K_1(\mu, T) S + K_2(\mu, T) \mathcal{P} + K_3(\mu, T) d + \dots \quad 1.4.1$$

$$\begin{aligned} \text{où} \quad S &\equiv \alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2 \\ \mathcal{P} &\equiv \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2 \\ d &\equiv \alpha_1^4 \alpha_2^4 + \alpha_2^4 \alpha_3^4 + \alpha_3^4 \alpha_1^4 \end{aligned}$$

Les coefficients K_i sont les constantes d'anisotropie magnétocristalline à déformation nulle. Les constantes déterminées directement par analyse des courbes de couple seront notées K_i^{exp} .

La première des constantes d'anisotropie, " K_0^{exp} ", représente l'énergie isotrope et ne peut évidemment jamais être obtenue par mesure de couple. Par analogie avec les autres constantes on écrira toutefois " K_0^{exp} " pour indiquer la densité de l'enthalpie libre isotrope du corps, fonction de T, P et H .

Des considérations de symétrie montrent [11] que la densité d'énergie élastique $\frac{1}{2} \rho_0 f_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl}$ se réduit pour une symétrie cubique à:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_i \rho_0 f_{iiii} \epsilon_{ii}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \rho_0 f_{iijj} \epsilon_{ii} \epsilon_{jj} + \sum_{i,j \neq i} \rho_0 f_{ijij} \epsilon_{ij}^2 &= \\ = \frac{1}{2} C_{11} \sum_i \epsilon_{ii}^2 + C_{12} \sum_{i < j} \epsilon_{ii} \epsilon_{jj} + \frac{1}{2} C_{44} \sum_{i < j} (2 \epsilon_{ij})^2 & \quad 1.4.2 \end{aligned}$$

avec les modules élastiques habituels

$$C_{11} = \rho_0 f_{iiii} \quad C_{12} = \rho_0 f_{iijj} \quad C_{44} = \rho_0 f_{ijij}$$

$$\begin{aligned} \text{De même: } \frac{1}{2} \rho_0 g_{ijkl} \tau_{ik} \tau_{kl} &= \frac{1}{2} S_{11} \sum_i \tau_{ii}^2 + S_{12} \sum_{i < j} \tau_{ii} \tau_{jj} + \\ &+ \frac{1}{2} S_{44} \sum_{i < j} \tau_{ij}^2 \end{aligned} \quad 1.4.3$$

$$\text{avec } S_{11} = \rho_0 g_{iiii} \quad S_{12} = \rho_0 g_{iijj} \quad S_{44} = 4 \rho_0 g_{ijij}$$

Les relations d'orthogonalité entre les C et S sont données par:

$$\left. \begin{aligned} (C_{11} + 2 C_{12}) (S_{11} + 2 S_{12}) &= 1 \\ (C_{11} - C_{12}) (S_{11} - S_{12}) &= 1 \\ C_{44} S_{44} &= 1 \end{aligned} \right\} 1.4.4$$

Les coefficients $b_{ij} = \rho_0 f_{ij}$ s'écrivent dans la notation de Becker et Döring [9]:

$$\left. \begin{aligned} b_{ii}(\vec{M}, T) &= b_0 + b_1 (\alpha_i^2 - 1/3) + b_3 \mathcal{S} + b_4 (\alpha_i^4 + 2/3 \mathcal{S} - 1/3) \\ b_{ij}(\vec{M}, T) &= b_2 \alpha_i \alpha_j + b_5 \alpha_i \alpha_j \alpha_k^2 \quad (i \neq j \neq k) \end{aligned} \right\} 1.4.5$$

Bien que cette notation ne soit pas la plus fondamentale [12] [13], elle est la plus répandue et sera utilisée dans ce travail. Les b_i sont appelés "constantes magnétoélastiques" et sont fonction de \mathcal{M} et T .

Un développement introduisant 9 constantes magnétoélastiques a été donné par Baltzer [14].

De même:

$$\left. \begin{aligned} h_{ii}(\vec{M}, T) &= h_0 + h_1 (\alpha_i^2 - 1/3) + h_3 \mathcal{S} + h_4 (\alpha_i^4 + 2/3 \mathcal{S} - 1/3) \\ h_{ij}(\vec{M}, T) &= h_2 \alpha_i \alpha_j + h_5 \alpha_i \alpha_j \alpha_k^2 \quad (i \neq j \neq k) \end{aligned} \right\} 1.4.6$$

Les constantes h_i sont les constantes de magnétostriction, fonction de M et T .

Les relations 1.2.28 s'écrivent pour une symétrie cubique :

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= -b_0 (S_{11} + 2 S_{12}) \\ h_1 &= -b_1 (S_{11} - S_{12}) \\ 2 h_2 &= -b_2 S_{44} \\ h_3 &= -b_3 (S_{11} + 2 S_{12}) \\ h_4 &= -b_4 (S_{11} - S_{12}) \\ 2 h_5 &= -b_5 S_{44} \end{aligned} \right\} 1.4.7$$

et l'expression 1.2.29 se réduit à :

$$p_0 (f_0 - g_0) = \frac{1}{2} C_{11} \sum_i h_{ii}^2 + C_{12} \sum_{i < j} h_{ii} h_{jj} + \frac{1}{2} C_{44} \sum_{i < j} (2 h_{ij})^2 \quad 1.4.8$$

Par substitution de 1.4.6 en 1.4.8 on obtient ainsi jusqu'au 6^e ordre dans les cosinus directeurs :

$$\begin{aligned} p_0 (f_0 - g_0) &= \left[\frac{3}{2} h_0^2 (C_{11} + 2 C_{12}) + \frac{1}{3} h_1^2 (C_{11} - C_{12}) + \frac{2}{3} h_1 h_4 (C_{11} - C_{12}) + \frac{1}{3} h_4^2 (C_{11} - C_{12}) \right] + \\ & \left[3 h_0 h_3 (C_{11} + 2 C_{12}) - h_1^2 (C_{11} - C_{12}) + 2 h_2^2 C_{44} - \frac{7}{3} h_1 h_4 (C_{11} - C_{12}) - \frac{4}{3} h_4^2 (C_{11} - C_{12}) \right] S \\ & + \left[3 h_3^2 (C_{11} + 2 C_{12}) + \frac{8}{3} h_4^2 (C_{11} - C_{12}) + 3 h_1 h_4 (C_{11} - C_{12}) + 12 h_2 h_5 C_{44} + 2 h_5^2 C_{44} \right] \varphi + \dots \end{aligned}$$

$p_0 g_0$ peut être développé de façon analogue à 1.4.1 :

$$p_0 g_0 (\vec{M}, T) = \bar{K}_0 (M, T) + \bar{K}_1 (M, T) S + \bar{K}_2 (M, T) \varphi + \dots \quad 1.4.10$$

\bar{K}_i étant alors les constantes d'anisotropie définies à contrainte zéro et liées aux constantes K_i par :

$$K_i = \bar{K}_i + \Delta K_i$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \Delta K_0 &= \frac{3}{2} h_0^2 (C_{11} + 2C_{12}) + \frac{1}{3} h_1^2 (C_{11} - C_{12}) + \frac{2}{3} h_1 h_4 (C_{11} - C_{12}) + \frac{1}{3} h_4^2 (C_{11} - C_{12}) \\
 \Delta K_1 &= 3h_0 h_3 (C_{11} + 2C_{12}) - h_1^2 (C_{11} - C_{12}) + 2h_2^2 C_{44} - \frac{7}{3} h_1 h_4 (C_{11} - C_{12}) - \frac{4}{3} h_4^2 (C_{11} - C_{12}) \\
 \Delta K_2 &= 3h_1 h_4 (C_{11} - C_{12}) + 12h_2 h_5 C_{44} + 2h_5^2 C_{44} + 3h_3^2 (C_{11} + 2C_{12}) + \frac{8}{3} h_4^2 (C_{11} - C_{12})
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \Delta K_0 \\ \Delta K_1 \\ \Delta K_2 \end{aligned}} \right\} 1.4.11$$

L'application d'une pression hydrostatique conduit à un tenseur de contrainte $\tau_{ij} = -P \delta_{ij}$. Soit K_i^P les constantes d'anisotropie mesurées à P fixe:

$$\rho_0 g_m(\vec{M}, T) = K_0^P(M, T) + K_1^P(M, T) \mathcal{S} + K_2^P(M, T) \varphi + \dots \quad 1.4.12$$

La relation 1.2.23 étant maintenant donnée par :

$$\rho_0 (g_m - g_0) = -\frac{1}{2} (S_{11} + 2S_{12}) P^2 + 3h_0 P + 3h_3 P \mathcal{S} \quad 1.4.13$$

on obtient les relations suivantes entre les \bar{K}_i et les K_i^P :

$$\left. \begin{aligned}
 K_0^P &= \bar{K}_0 - \frac{1}{2} (S_{11} + 2S_{12}) P^2 + 3h_0 P \\
 K_1^P &= \bar{K}_1 + 3h_3 P \\
 K_2^P &= \bar{K}_2
 \end{aligned} \right\} 1.4.14$$

La différence entre les K_i^P et les K_i^{exp} est due à l'anisotropie de l'alimentation. En écrivant :

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1 \mathcal{S} + \mathcal{M}_2 \varphi + \dots \quad 1.4.15$$

on obtient finalement :

$$\left. \begin{aligned}
 K_0 &= "K_0^{exp}" + \mathcal{M}_0 H_M + \frac{1}{2} (S_{11} + 2S_{12}) P^2 - 3h_0 P + \Delta K_0 \\
 K_1 &= K_1^{exp} + \mathcal{M}_1 H_M - 3h_3 P + \Delta K_1 \\
 K_2 &= K_2^{exp} + \mathcal{M}_2 H_M + \Delta K_2
 \end{aligned} \right\} 1.4.16$$

avec les ΔK_i donnés par 1.4.11. K_0 est la partie isotrope de la densité d'énergie libre à déformation nulle, et est fonction de la température et de l'aimantation seulement. Nous remarquons que le développement habituel des coefficients h_{ij} jusqu'au 4^e ordre ne conduit pas à un terme dépendant de la pression pour la constante K_2^{exp} . Un tel terme ne peut être trouvé que par un développement des h_{ij} à un ordre supérieur [14].

Les termes "correctifs" ΔK_i qui sont à basse température généralement faibles deviennent dans le cas du nickel de l'ordre de 10 % de l'énergie d'anisotropie totale et du même ordre de grandeur à des températures plus élevées.

Avec la définition du § I.3 de l'état non déformé la variation relative de volume due à l'existence d'une aimantation est donnée par $\omega \equiv \frac{V-V_0}{V_0} = 3h_0 + 3h_3 s$. La constante h_0 est une variation de volume isotrope et traduit le comportement anormal de la dilatation thermique des corps ferromagnétiques cubiques. La constante h_3 représente d'après 1.4.16 la variation de K_1^{exp} avec la pression.

I - 5 - CRITIQUE DE LA METHODE

Les relations entre k_i et k_i^{exp} données dans ce chapitre n'ont pu être obtenues que grâce à certaines approximations dont plusieurs sont justifiées par des considérations d'ordre de grandeur. Quelques approximations toutefois ont été faites sans aucune vérification de leur validité.

En particulier dans le calcul du travail dW il a été supposé que dW peut être écrit comme la somme de deux contributions: l'une valable pour un corps magnétique rigide et l'autre valable pour un corps déformable non magnétique. On suppose donc que d'une part l'existence d'une aimantation n'affecte pas les équations d'élasticité telles que 1.2.2. et 1.2.3. et que d'autre part la déformabilité du corps laisse les expressions magnétiques telles que 1.2.5 et 1.2.9 invariantes.

La deuxième objection qui peut être faite est à propos de l'utilisation du tenseur ϵ_{ij} défini en 1.2.1. En effet, pour que les relations thermodynamiques telles que 1.2.13 soient correctes jusqu'au 1^{er} ordre, il

faut que f_m soit correct jusqu'au 2^e ordre dans les déformations .
L'utilisation du tenseur ε_{ij} correct jusqu'au 1^{er} ordre dans les déformations est justifiée dans le terme quadratique en 1.2.14, mais ne l'est plus dès que des termes linéaires dans les ε_{ij} apparaissent .

Si l'on veut vérifier la justification de ces approximations il faut utiliser une description qui considère que le milieu est à la fois aimanté et déformable et utiliser un tenseur de déformations finies .

CHAPITRE II

ETUDE RIGoureuse DU MILIEU MAGNETO-ELASTIQUE

Dans ce chapitre nous nous proposons de déterminer de façon rigoureuse les équations d'équilibre thermodynamique des corps magnétoélastiques. Dans ce but nous suivrons la méthode proposée par Brown [15].

Nous traitons tout d'abord des équations magnétostatiques pour les milieux déformables et ensuite nous donnons les équations élastiques pour les milieux magnétiques. A partir de ces relations d'équilibre nous établissons les relations concernant les constantes d'anisotropie.

II - 1 - LES EQUATIONS MAGNETOSTATIQUESII - 1 - 1 - Quelques rappels

Par interactions magnétiques on entend les forces ou couples exercés sur un système par un autre, appelé la source, qui sont dûes aux propriétés magnétiques des deux systèmes. Ces forces et couples sont les seules grandeurs ayant un sens physique direct. Si nous décrivons les propriétés magnétiques en chaque point d'un système par le vecteur $\vec{M}(\vec{r})$ et l'influence magnétique de la source en tout point de l'espace par le champ $\vec{C}(\vec{r})$, les forces et couples sont entièrement déterminés par la connaissance de $\vec{M}(\vec{r})$ et $\vec{C}(\vec{r})$.

Dans la description de la matière comme un milieu continu, les propriétés magnétiques du milieu sont caractérisées par la densité de dipôles magnétiques \vec{m} en tout point: $\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{d\tau}$.

L'expression explicite de la force et du champ créé par un milieu aimanté dépend de la représentation microscopique que l'on prend pour le dipôle magnétique \vec{m} . Deux descriptions sont utilisées.

La plus ancienne, par analogie avec les interactions électrostatiques, suppose \vec{m} formé de deux monopôles magnétiques $\pm p$ de signe opposé: $\vec{m} = p\vec{l}$.

La deuxième, basée sur la théorie d'Ampère, assimile le dipôle à un courant i_0 filiforme définissant une surface \vec{S} : $\vec{m} = \frac{i_0 \vec{S}}{c}$ *.

La première méthode fait apparaître un potentiel scalaire $\varphi_1(\vec{r}_2) \equiv \frac{\vec{m}_1 \cdot \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$ et un champ $\vec{H}_1(\vec{r}_2) = -\vec{\nabla}_2 \varphi_1(\vec{r}_2)$, $\vec{\nabla}_2$ étant le gradient pris à \vec{r}_2 . Le potentiel φ et le champ \vec{H} ainsi définis n'ont un sens que pour des distances $r_{12} \gg l$.

Dans ces conditions la force est donnée par:

$$\vec{f}(\vec{r}_2) = (\vec{m}_2 \cdot \vec{\nabla}_2) \vec{H}_1(\vec{r}_2)$$

La deuxième méthode introduit un potentiel vecteur $\vec{A}_1(\vec{r}_2) \equiv \frac{\vec{m}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$ et un champ $\vec{B}_1(\vec{r}_2) = \vec{\nabla}_2 \times \vec{A}_1(\vec{r}_2)$.

Le potentiel \vec{A} et le champ \vec{B} ainsi définis n'ont également un sens que pour $r_{12} \gg l$ et l'expression pour la force est dans ce cas:

$$\vec{f}(\vec{r}_2) = (\vec{m}_2 \cdot \vec{\nabla}_2) \vec{B}_1(\vec{r}_2) + \vec{m}_2 \times (\vec{\nabla}_2 \times \vec{B}_1(\vec{r}_2)).$$

Dans la description des milieux continus les expressions précédentes s'écrivent:

* N.B.: On utilisera dans ce travail le système d'unités c.g.s. de Gauss.

$$\vec{F} = \int_{V_2} (\vec{M}_2 \cdot \vec{\nabla}_2) \vec{H}_1 \, d\tau_2 \quad 2.1.1$$

avec $\vec{H}_1 = -\vec{\nabla}_2 \varphi_1$ et $\varphi_1 = \int_{V_1} \frac{\vec{M}_1 \cdot \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \, d\tau_1$

$$\vec{F} = \int_{V_2} \{ (\vec{M}_2 \cdot \vec{\nabla}_2) \vec{B}_1 + \vec{M}_2 \times (\vec{\nabla}_2 \times \vec{B}_1) \} \, d\tau_2 \quad 2.1.2$$

avec $\vec{B}_1 = \vec{\nabla}_2 \times \vec{A}_1$ et $\vec{A}_1 = \int_{V_1} \frac{\vec{M}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \, d\tau_1$

Les champs \vec{H} et \vec{B} ainsi définis sont égaux en tout point de l'espace loin de la source. Pour calculer leur valeur en un point intérieur du milieu magnétique, on transforme φ_1 et \vec{A}_1 , respectivement en:

$$\varphi_1(\vec{r}_2) = \int_{V_1} \frac{-\vec{\nabla}_1 \cdot \vec{M}_1}{r_{12}} \, d\tau_1 + \int_{S_1} \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{M}_1}{r_{12}} \, dS_1 \quad 2.1.3$$

$$\vec{A}_1(\vec{r}_2) = \int_{V_1} \frac{\vec{\nabla}_1 \times \vec{M}_1}{r_{12}} \, d\tau_1 + \int_{S_1} \frac{-\vec{n}_1 \times \vec{M}_1}{r_{12}} \, dS_1 \quad 2.1.4$$

Les champs \vec{H} et \vec{B} peuvent être trouvés directement par dérivation de 2.1.3 et 2.1.4 respectivement :

$$\vec{H}_1(\vec{r}_2) = \int_{V_1} \frac{(-\vec{\nabla}_1 \cdot \vec{M}_1) \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \, d\tau_1 + \int_{S_1} \frac{(\vec{n}_1 \cdot \vec{M}_1) \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \, dS_1 \quad 2.1.5$$

$$\vec{B}_1(\vec{r}_2) = \int_{V_1} \frac{(\vec{\nabla}_1 \times \vec{M}_1) \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \, d\tau_1 + \int_{S_1} \frac{(-\vec{n}_1 \times \vec{M}_1) \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \, dS_1 \quad 2.1.6$$

les intégrales étant convergentes avant et après la dérivation. Toutefois les champs \vec{H} et \vec{B} ainsi trouvés ne sont plus égaux et on montre [16]:

$$\vec{B}_1(\vec{r}_2) - \vec{H}_1(\vec{r}_2) = 4\pi \vec{M}(\vec{r}_2) \quad 2.1.7$$

Par la suite on écrira $\vec{H}(\vec{B})$ pour le champ total à l'intérieur d'un milieu magnétique:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_1 \quad (\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1) \quad 2.1.8$$

$\vec{H}_0 (= \vec{B}_0)$ étant le champ des sources extérieures et $\vec{H}_1 (= \vec{B}_1)$ étant le champ démagnétisant. D'après 2.1.7:

$$\vec{B} - \vec{H} = 4\pi \vec{M} \quad 2.1.9$$

En absence de courants de conduction, les champs \vec{H} et \vec{B} obéissent aux équations:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{à l'intérieur} \\ (\vec{H}^+ - \vec{H}^-) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{et} \quad (\vec{B}^+ - \vec{B}^-) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur la surface} \end{array} \right\} 2.1.10$$

les suffixes "+" et "-" indiquant respectivement les valeurs justes à l'extérieur et à l'intérieur de la surface.

Dans la description des milieux continus la théorie de la magnétoélasticité peut être écrite aussi bien avec le champ \vec{H} qu'avec le champ \vec{B} . Vu la simplicité de l'expression 2.1.1 pour la force, ce sera le champ \vec{H} que nous utiliserons par la suite.

II - 1 - 2 - Le travail magnétique

Sous l'appellation travail magnétique on entendra le travail effectué par une source de champ extérieure, par exemple une spire C_2 parcourue par un courant i_0 . Les coordonnées de C_2 et la valeur de i_0 seront supposées invariantes dans un système de référence $\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0$. On suppose également que le milieu aimanté et la source sont et restent séparés par des distances macroscopiques c'est à dire grandes par rapport aux distances interatomiques pendant les transformations considérées. Les formules du § II-1-1 sont alors valables et $\left(\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_{\vec{r}_0} = 0$.

Calculons dans ces conditions le travail magnétique pendant une transfor-

mation pour un milieu magnétoélastique. La spire C_2 est traversée par un flux Φ_m provenant de la matière aimantée. Pendant une transformation infinitésimale le travail magnétique s'écrit : $dW_{\text{magn}} = i_0/c \, d\Phi_m$.

Or $\Phi_m = \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}_2 = \oint_{C_2} \vec{A}_1(\vec{r}_2) \cdot d\vec{l}_2$ et donc $d\Phi_m = \int_{C_2} d\vec{A}_1(\vec{r}_2) \cdot d\vec{l}_2$,

$\vec{A}_1(\vec{r}_2)$ étant le potentiel vecteur provenant de la matière aimantée.

D'après 2.1.2 $\vec{A}_1 = \int_{\infty} \frac{\vec{M} \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} d\tau$ et dW_{magn} est alors donnée par :

$$\begin{aligned} dW_{\text{magn}} &= \\ &= d \int_{\infty} d\tau \oint_{C_2} i_0/c \, d\vec{l}_2 \cdot \frac{\vec{M}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} = \\ &= d \int_{\infty} d\tau \vec{M}_1 \cdot \oint_{C_2} i_0/c \, \frac{d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{21}}{r_{12}^3} \quad 2.1.11 \end{aligned}$$

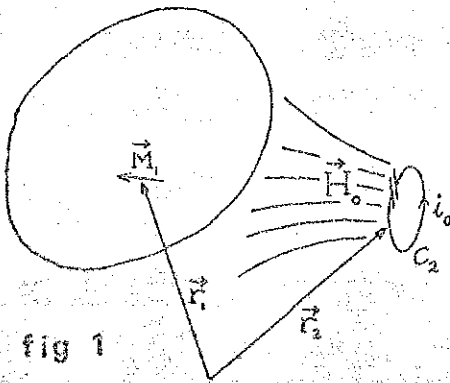


fig 1

Le deuxième facteur en 2.1.11 est égal au champ $\vec{B}_0 (= \vec{H}_0)$ créé par la source C_2 au niveau du milieu aimanté.

2.1.11 s'écrit alors $dW_{\text{magn}} = d \int_{\infty} \vec{M} \cdot \vec{H}_0 d\tau$. L'intégrale est étendue sur tout l'espace (à l'exclusion de la source) et les bornes sont donc invariantes dans les transformations. On peut alors écrire :

$$dW_{\text{magn}} = \int_{\infty} d(\vec{M} \cdot \vec{H}_0) d\tau \quad 2.1.12$$

$d\tau$ étant un élément de volume défini dans l'espace $\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0$.

L'expression 2.1.12 représente la variation de l'énergie magnétique de l'espace. Tous les autres paramètres thermodynamiques étant constants, elle correspond à la variation de $F+W$ où F est l'énergie libre du milieu magnétique, fonction de l'état de déformation, de l'aimantation et de la température, et où W représente l'énergie d'interaction du milieu avec le champ extérieur \vec{H}_0 .

Dans 2.1.12 \vec{M} n'est pas l'aimantation liée à une partie de la matière magnétique mais elle représente l'aimantation à un point fixe dans l'espace $\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0$.

On écrira:

$$dW_{\text{magn.}} = \int_{\infty} d(\vec{M}(\vec{r}_0) \cdot \vec{H}(\vec{r}_0)) \quad d\tau_0 \quad 2.1.13$$

Dans le cas spécial d'un champ uniforme et d'un corps rigide, cette expression se réduit à l'expression bien connue:

$$dW_{\text{magn.}} = \vec{H}_0 \cdot d\vec{\mu}$$

ici $d\vec{\mu}$ est la variation du moment magnétique total du corps.

Cependant, dans le cas général, le champ \vec{H}_0 ne sera pas uniforme et le milieu se déformera au cours de la transformation. On passe alors des coordonnées \vec{r}_0 aux coordonnées $\vec{r}(t)$ qui sont celles de chaque élément de masse du milieu au cours de la transformation.

Les bornes de l'intégrale en 2.1.13 étant indépendantes de la transformation, l'intégrale peut être écrite comme:

$$dW_{\text{magn.}} = \int_{\infty} d(\vec{M}(\vec{r}) \cdot \vec{H}(\vec{r})) \quad d\tau \quad 2.1.14$$

la somme étant prise sur chaque élément de volume $d\tau = dx(t) dy(t) dz(t) = \frac{dm}{\rho(t)}$. En passant de \vec{M} au moment magnétique par unité de masse $\vec{\mathcal{M}}$ 2.1.14 se met sous la forme:

$$\begin{aligned} dW_{\text{magn.}} &= \int d(\vec{\mathcal{M}}(\vec{r}) \cdot \vec{H}_0(\vec{r})) \quad dm = \\ &= \int d\vec{\mathcal{M}}(\vec{r}) \cdot \vec{H}_0(\vec{r}) \quad dm + \int \vec{\mathcal{M}}(\vec{r}) \cdot d\vec{H}_0(\vec{r}) \quad dm \end{aligned} \quad 2.1.15$$

Supposons que dm , se trouvant originalement à \vec{r}_0 , s'est déplacé suivant $d\vec{r}$ au cours de la transformation; on a alors

$$\vec{H}_0(\vec{r}) = \vec{H}_0(\vec{r}_0) + (d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{H}_0$$

et pour une transformation infinitésimale 2.1.14 s'écrit :

$$\begin{aligned} dW &= \int \vec{H}_0 \cdot d\vec{\mathcal{M}} \quad dm + \int \vec{\mathcal{M}} \cdot (d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{H}_0 \quad dm \\ &= \int \vec{H}_0 \cdot d\vec{\mathcal{M}} \quad dm + \int d\vec{r} \cdot (\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{\nabla}) \vec{H}_0 \quad dm \end{aligned} \quad 2.1.16$$

Le dernier passage est possible puisque $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$ dans l'espace sur laquelle la somme est prise, c'est à dire tout l'espace à l'exception de la source du champ. Le dernier terme de 2.1.16 représente l'énergie associée au déplacement $d\vec{r}$ de la masse dm en présence d'une force magnétique par unité de masse

$$\vec{F}_m = (\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{\nabla}) \vec{H}_0 \quad 2.1.17$$

Outre la force \vec{F}_m on aura un couple par unité de masse $\vec{\Gamma}_m = \vec{\mathcal{M}} \times \vec{H}_0$. Pour qu'il y ait équilibre des forces il faut un système mécanique antagoniste à cette force et à ce couple. En tenant compte de ces forces et couples dans le calcul du travail mécanique, le travail total effectué sur le corps représente la variation isotherme de l'énergie libre du milieu seul, c'est à dire sans incorporation de son interaction avec le champ extérieur.

II - 2 - L'ELASTICITE DU MILIEU MAGNETOELASTIQUE

La théorie de l'élasticité pour un corps magnétoélastique est différente de celle pour un corps non magnétique telle qu'on l'a utilisée dans le premier chapitre.

- Tout d'abord l'existence d'une aimantation entraîne une densité de couple $\vec{\mathcal{M}} \times \vec{H}_0$ qui fait que le tenseur de contrainte ne sera plus symétrique.
- Les termes énergétiques, linéaires dans les déformations, nécessitent l'utilisation d'une théorie de l'élasticité non infinitésimale.
- Les forces magnétiques entre les différentes parties du milieu ajoutent aux contraintes élastiques des contraintes dites "magnétiques".
- Finalement la définition de l'état non déformé comme étant celui qui existe en l'absence des forces appliquées n'est plus suffisante puisque le milieu non déformé serait ainsi dépendant de la direction de l'aimantation à cause de la magnétostriction sponta-

née. Différentes définitions sont alors possibles, en particulier pour le volume V_0 de référence et nous en avons proposé une au § I-3

II - 2 - 1 - Les forces et contraintes magnétiques

Dans ce paragraphe nous examinerons de quelle façon l'existence d'une aimantation affecte l'équilibre des forces dans le milieu. Dans ce but nous considérons une partie V_2 du milieu, limitée par une surface S_2 et nous calculons les forces avec lesquelles cette partie est sollicitée d'une part par le champ de la source extérieure et d'autre part par le champ provenant de la matière aimantée en $V-V_2$ (figure 2). Les forces dues au champ extérieur $\vec{H}_{o\ ext}$ sont directement données par 2.1.1.

Cette formule ne s'applique toutefois pas à la force due au champ provenant de la matière en $V-V_2$, puisque dans ce cas la source de champ et la matière soumise à ce champ ne sont pas séparées par une distance macroscopique.

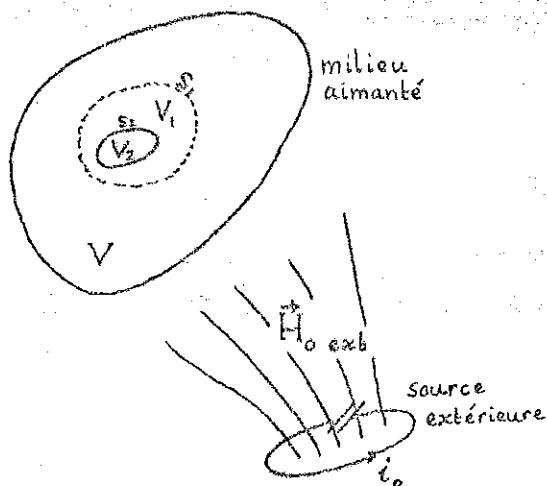


fig 2

Considérons alors une surface S_1 entourant S_2 , et limitant un volume V_1 ; et soit $\vec{H}_{o\ int}$ le champ de la matière aimantée en $V-V_1$. On suppose que la distance entre S_2 et S_1 est suffisamment grande pour que la relation 2.1.1 puisse être utilisée pour le calcul de la force due au champ $\vec{H}_{o\ int}$. La force

\vec{F}' due aux champs $\vec{H}_{o\ int}$ et $\vec{H}_{o\ ext}$ est donc donnée par :

$$\vec{F}' = \int_{V_2} (\vec{M}_2 \cdot \vec{\nabla}_2) H_o \, d\tau_2 \quad \text{avec} \quad \vec{H}_o \equiv \vec{H}_{o\ int} + \vec{H}_{o\ ext} \quad 2.2.1$$

Pour calculer la limite de cette force quand $S_1 \rightarrow S_2$ on transforme 2.2.1 en

$$\vec{F}' = \int_{V_2} (\vec{M}_2 \cdot \vec{\nabla}_2) \vec{H} \, d\tau_2 - \int_{V_2} (\vec{M}_2 \cdot \vec{\nabla}_2) \vec{H}_{12} \, d\tau_2 \quad 2.2.2$$

\vec{H} étant le champ total et \vec{H}_{12} le champ démagnétisant provenant de la matière en V_1 et évalué en V_2 .

Le premier terme de 2.2.2, \vec{F}_{V_2} est indépendant de la surface S_1 et il nous reste à calculer la limite du deuxième terme pour $S_1 \rightarrow S_2$. Ce terme peut être transformé en:

$$\vec{F}_{12} = \int_{V_2} (\vec{M}_2 \cdot \vec{\nabla}_2) \vec{H}_{12} d\tau_2 = \int (-\vec{\nabla}_2 \cdot \vec{M}_2) \vec{H}_{12} d\tau_2 + \int_{S_2} (\vec{n}_2 \cdot \vec{M}_2) \vec{H}_{12} dS_2 \quad 2.2.3$$

Par substitution de 2.1.5 en 2.2.3 et en changeant l'ordre d'intégration \vec{F}_{12} peut se mettre sous la forme

$$\vec{F}_{12} = -\int_{V_1} (-\vec{\nabla}_1 \cdot \vec{M}_1) \vec{H}_{21} d\tau_1 - \int_{S_1} (-\vec{n}_1 \cdot \vec{M}_1) \vec{H}_{21} dS_1 \equiv \vec{F}_{21} \quad 2.2.4$$

\vec{H}_{21} étant le champ provenant de la matière en V_2 et évalué en V_1 .

On écrit le deuxième terme en 2.2.2 maintenant comme la demi-somme de 2.2.3 et 2.2.4. Dans la limite $S_1 \rightarrow S_2$ les intégrales de volume s'annulent. En remarquant que dans cette limite les éléments de surface $\vec{n} dS_2$ et $-\vec{n} dS_1$ s'identifient, la contribution de ce deuxième terme s'écrit :

$$\vec{F}_{S_2} = \lim_{S_1 \rightarrow S_2} \frac{1}{2} (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) = -\frac{1}{2} \int_{S_2} (\vec{n}_2 \cdot \vec{M}_2) (\vec{H}_1^+ - \vec{H}_1^-) dS_2$$

Ici $\vec{H}_1^+ = \lim_{S_1 \rightarrow S_2} \vec{H}_{21}$ et $\vec{H}_1^- = \lim_{S_1 \rightarrow S_2} \vec{H}_{12}$ représentent le champ provenant de la matière en V_2 évalué respectivement juste à l'intérieur et à l'extérieur de la surface S_2 . A l'aide des relations 2.1.10 $\vec{H}_1^+ - \vec{H}_1^- = 4\pi (\vec{M} \cdot \vec{n}) \vec{n} \equiv 4\pi M_n \vec{n}$ et $\vec{F}_{S_2} = -2\pi \int_{S_2} M_n^2 \vec{n} dS$. On obtient finalement:

$$\vec{F} = \lim_{S_1 \rightarrow S_2} \vec{F}' = \int_{V_2} (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \vec{H} d\tau_2 + 2\pi \int_{S_2} M_n^2 \vec{n} dS_2 \quad 2.2.5$$

La force totale \vec{F} peut ainsi être divisée en une intégrale de volume sur une force "longue distance" et une intégrale de surface sur une force à court rayon d'action, appelée contrainte magnétique. En utilisant 2.1.2 pour décrire la force magnétique on aurait trouvé une expression analogue à 2.2.5. Toutefois la division entre forces "longue distance" et contrain-

tes n'aurait pas été la même. L'aimantation du milieu crée donc des contraintes et forces supplémentaires qui ne sont pas définies de façon unique, mais dont l'expression dépend de la méthode choisie pour la description macroscopique du milieu magnétique.

II - 2 - 2 - Un nouveau tenseur de contrainte

L'existence des forces magnétiques 2.2.5 modifie l'équilibre des forces tel qu'il est donné par les équations 1.2.2 et 1.2.3.

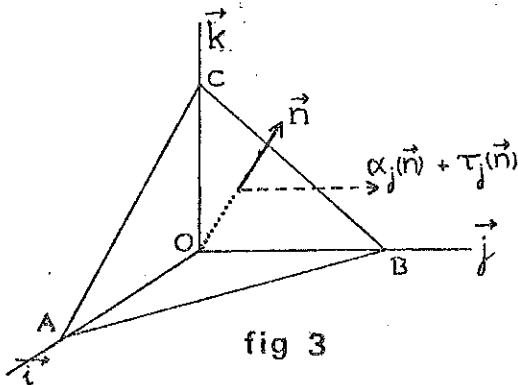


fig 3

Considérons d'abord l'équilibre des forces sur le tétraèdre de la fig. 3. Si l'on écrit $\vec{\alpha}(\vec{n})$ pour la contrainte magnétique : $\vec{\alpha}(\vec{n}) \equiv 2\pi M_n^2 \vec{n}$ cet équilibre s'écrit :

$$\begin{aligned} (\tau_i(\vec{n}) + \alpha_i(\vec{n})) \Delta S &= \\ &= (\tau_i(\vec{j}) + \alpha_i(\vec{j})) n_j \Delta S \end{aligned} \quad 2.2.7$$

avec $\vec{n} \Delta S =$ la surface ABC . Dans la limite $\Delta S \rightarrow 0$ l'aimantation dans le tétraèdre est uniforme. Puisque dans ce cas $\alpha_i(\vec{n}) \neq \alpha_i(\vec{j}) n_j$ la relation 1.2.2 ne sera plus valable et τ_{ij} ne se transformera plus comme un tenseur. On définit $t_i(\vec{n}) \equiv \tau_i(\vec{n}) + \alpha_i(\vec{n})$; 2.2.7 s'écrit alors :

$$t_i(\vec{n}) = t_{ij} n_j \quad \left(\text{où } t_{ij} \equiv \tau_i(\vec{j}) + \alpha_i(\vec{j}) \right) \quad 2.2.8$$

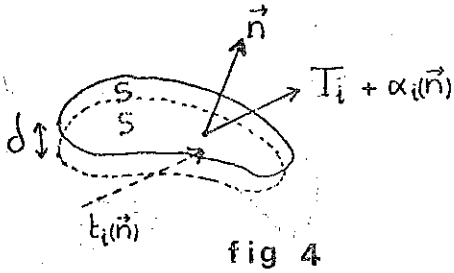
t_{ij} se transforme comme un tenseur.

La force totale sur un volume élémentaire doit être nulle. Donc

$$\int_r (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) H_i dr + \int_r \rho f_i dr + \int_s t_{ij} n_j dS = 0 \quad \text{Le dernier terme se transforme en } \int_r t_{ij,j} dr \quad \text{et dans la limite où } \tau \rightarrow 0 \text{ on a:}$$

$$M_j H_{i,j} + \rho f_i + t_{ij,j} = 0 \quad 2.2.9$$

L'équilibre des forces sur une couche mince à la surface (fig. 4) s'écrit dans la limite où $\delta \rightarrow 0$:



$$t_{ij}(\vec{n}) = T_i + \alpha_i(\vec{n}) \quad 2.2.10$$

Finalement l'existence d'une densité de couple $\vec{M} \times \vec{H}$ entraîne que τ_{ij} ne sera plus symétrique. L'équilibre des couples s'écrit:

$$t_{ij} - t_{ji} = \tau_{ij} - \tau_{ji} = M_i H_j - M_j H_i \quad 2.2.11$$

On voit donc que l'existence d'une aimantation change fondamentalement les propriétés du tenseur de contrainte classique τ_{ij} . On peut cependant définir un autre tenseur de contrainte dont les composantes se transforment comme un tenseur, et l'ancien équilibre des forces résumé dans les équations 1.2.2 et 1.2.3 est remplacé par les équations d'équilibre 2.2.9 - 2.2.11.

Le travail effectué par les forces de surface T_i et les forces massiques f_i appliquées sera donné par: $dW_{mec} = \int_S T_i du_i dS + \int_V \rho f_i du_i d\tau =$

$$= \int_S t_{ij} n_j du_i dS - 2\pi \int_S M_n^2 n_i du_i dS + \int_V \rho f_i du_i d\tau \quad 2.2.12$$

II - 2 - 3 - Rappel des déformations finies

L'existence de termes énergétiques linéaires dans les déformations nous oblige à employer a priori une théorie d'élasticité exprimée en termes de déformations finies. On donnera dans ce paragraphe un bref rappel de cette théorie qui peut être trouvée in extenso dans les ouvrages de Landau et Lifchitz [6], Truesdell et Toupin [17] par exemple.

Comme dans le § I-2 les coordonnées avant et après déformation seront indiquées respectivement par X_i et x_i ($i = 1, 2, 3$). Le déplacement

de chaque point matériel est déterminé par le vecteur de déplacement $\vec{u} = \vec{x} - \vec{X}$. La déformation est déterminée complètement par les neuf dérivées partielles $u_{i,j^*} \equiv x_{i,j^*} - \delta_{ij}$ ou $u_{i,j} \equiv -X_{i,j} + \delta_{ij}$ en chaque point. Les relations suivantes seront utiles:

$$u_{i,j^*} - u_{i,j} = u_{i,k} u_{k,j^*} \quad 2.2.13$$

$$\frac{\partial}{\partial u_{i,j}} = \frac{\partial}{\partial u_{i,k^*}} x_{j,k^*} = \frac{\partial}{\partial u_{i,j^*}} + u_{j,k^*} \frac{\partial}{\partial u_{i,k^*}} \quad 2.2.14$$

Les fonctions $u_{i,j}(\vec{X})$ et $u_{i,j^*}(\vec{X})$ obéissent à certaines règles de compatibilité [18] qui ne contiennent que des dérivées secondes des u_{i,j^*} ($u_{i,j}$) et qui découlent directement de leur propre définition. Ces règles de compatibilité sont donc automatiquement satisfaites pour des déformations uniformes ou des déformations qui varient linéairement avec leur position.

Si les déformations sont uniformes les $u_{i,j^*}(\vec{X})$ et $u_{i,j}(\vec{X})$ sont constants et on peut écrire directement les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes : $x_i = X_{i,j^*} X_j$. Toute déformation locale X_{i,j^*} peut être écrite comme le produit d'une "vraie" déformation irrotationnelle qui change les distances interatomiques et une rotation pure de l'ensemble local des voisins qui laisse les distances interatomiques invariants.

Calculons les distances entre deux points matériels voisins respectivement avant et après la déformation: $dl_0^2 = dX_i dX_i$ et $dl^2 = dx_i dx_i$.

$$dx_i dx_i = x_{i,j^*} x_{i,k^*} dX_j dX_k \quad \text{soit:}$$

$$dl^2 = dl_0^2 + (u_{j,k^*} + u_{k,j^*} + u_{i,j^*} u_{i,k^*}) dX_j dX_k \quad 2.2.15$$

La relation 2.2.15 justifie la définition du tenseur symétrique

$$e_{jk} \equiv \frac{1}{2} (u_{j,k^*} + u_{k,j^*} + u_{i,j^*} u_{i,k^*}) \quad 2.2.16$$

comme tenseur caractéristique de la "vraie" déformation.

Introduisons maintenant $C_{jk} \equiv x_{i,j^*} x_{i,k^*} = 2 e_{jk} + \delta_{jk}$. C_{jk} étant symétrique il peut être diagonalisé suivant les axes principaux avec

comme termes diagonaux C_1, C_2, C_3 .

On définit maintenant le tenseur $C^{1/2}$ ayant, dans ces axes, les éléments $C_1^{1/2}, C_2^{1/2}, C_3^{1/2}$. Il est évident que $C^{1/2} C^{1/2} = C$ et par conséquent, dans tout système d'axes, $(C^{1/2})_{ij} (C^{1/2})_{jk} = C_{ik}$.

La déformation $\bar{x}_{i,j^*} \equiv (C^{1/2})_{ij}$ correspond à la même vraie déformation irrotationnelle que x_{i,j^*} puisque $\bar{C}_{ij} \equiv \bar{x}_{k,i^*} \bar{x}_{k,j^*} = (C^{1/2})_{ki} (C^{1/2})_{kj} = C_{ij}$. La déformation totale locale peut alors être décrite par $X_{i,j} = R_{ik} (C^{1/2})_{kj}$ le tenseur R_{ik} étant défini par:

$$R_{ik} = x_{i,j^*} (C^{-1/2})_{jk} \quad 2.2.17$$

$C^{-1/2}$ est l'opérateur inverse de $C^{1/2}$. Le tenseur R_{ik} est orthogonal (cf 2.2.18) et son déterminant est égal à 1, comme on le voit tout de suite en substituant en 2.2.17 la déformation particulière $x_{i,j^*} = \delta_{ij}$. Il décrit donc effectivement une rotation pure.

$$\left. \begin{aligned} (R^t R)_{ij} &= R_{ki} R_{kj} = x_{k,l^*} (C^{-1/2})_{li} x_{k,m^*} (C^{-1/2})_{mj} = \\ &= (C^{-1/2})_{li} C_{lm} (C^{-1/2})_{mj} = (C^{-1/2})_{il} (C^{1/2})_{ls} (C^{1/2})_{sm} (C^{-1/2})_{mj} = \delta_{ij} \end{aligned} \right\} 2.2.18$$

Donc $R^t = R^{-1}$.

R_{ij} étant donné par 2.2.17 on ne peut donner son expression explicite que sous forme d'un développement de Taylor de $C^{-1/2}$:

$$C^{-1/2} = (1 + 2e)^{-1/2} = 1 - e + \frac{1}{2} e^2 - \dots \quad 2.2.19$$

Si les déformations u_{i,j^*} sont uniformes, R_{ij} décrit la rotation de l'ensemble du corps effectué pendant la transformation.

La séparation de X_{i,j^*} en un tenseur symétrique et un tenseur de rotation n'est pas unique et d'autres méthodes [19] sont possibles. Dans notre choix nous avons suivi la définition prise pour le tenseur e_{ij} par la plupart des auteurs (Landau et Lifchitz [6], Truesdell et Toupin [22]).

A partir du tenseur R_{ij} on peut définir le tenseur de rotation

$$\Omega_{ij} \equiv R_{ij} - \delta_{ij} \quad 2.2.20$$

En substituant 2.2.17, 2.2.19 et 2.2.20 on obtient l'expression de Ω_{ij} en fonction des u_{i,j^*} . Dans l'approximation des déformations infinitésimales Ω_{ij} et e_{ij} se réduisent à

$$\begin{aligned} e_{ij} &\rightarrow \varepsilon_{ij} \equiv \frac{1}{2} (u_{i,j^*} + u_{j,i^*}) \\ \Omega_{ij} &\rightarrow \omega_{ij} \equiv \frac{1}{2} (u_{i,j^*} - u_{j,i^*}) \end{aligned} \quad 2.2.21$$

On voit que dans ce cas Ω_{ij} représente un tenseur antisymétrique et dans cette approximation $u_{i,j^*} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$. Ces tenseurs ε_{ij} et ω_{ij} linéaires dans les u_{i,j^*} , sont utilisés dans tous les ouvrages élémentaires ainsi que dans les travaux de Hearmon [11], Love [18] e.a.

II - 3 - L'ENERGIE DUE AU CHAMP DEMAGNETISANT

L'énergie d'interaction de l'aimantation avec son champ démagnétisant \vec{H}_1 , s'écrit habituellement pour un corps rigide:

$$W_m \equiv -\frac{1}{2} \int \vec{H}_1 \cdot \vec{M} \, d\tau \quad 2.3.1$$

Sa variation est donnée par

$$dW_m = -\int \vec{H}_1 \cdot d\vec{M} \, d\tau \quad 2.3.2$$

Une autre définition $W'_m \equiv -\frac{1}{2} \int \vec{B}_1 \cdot \vec{M} \, d\tau$ pourrait être utilisée. Par 2.1.9 $W_m - W'_m = -2\pi \int M^2 \, d\tau$. La différence entre W_m et W'_m n'est fonction que de la variable locale M et la partie de l'énergie qui dépend de la géométrie du corps est donc représentée aussi bien par l'une ou l'autre des expressions 2.3.1. et 2.3.2.

Pour les milieux magnétoélastiques nous écrirons

$$W_m = -\frac{1}{2} \int \vec{H}_1(\vec{x}) \cdot \vec{M}(\vec{x}) \, d\tau = -\frac{1}{2} \int \vec{H}_1 \cdot \vec{M} \, dm \quad 2.3.3$$

l'intégrale étant évaluée aux coordonnées déformées \vec{x} . Pour une transformation infinitésimale, la variation de W_m d'une partie quelconque du corps est donnée d'une part par la variation de \vec{M} et d'autre part par les déformations en présence des forces et contraintes magnétiques du § II-2-1. Le champ à considérer en 2.2.5 est ici le champ \vec{H}_1 , puisque l'énergie W_m provient de la seule interaction de l'aimantation avec le champ \vec{H}_1 .

Les déformations pendant la transformation étant décrites par les vecteurs $d\vec{u}$, la variation de l'énergie du champ démagnétisant est donnée par:

$$dW_m = -\int \vec{H}_1 \cdot d\vec{M} \, dm - \int d\vec{u} \cdot (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \vec{H}_1 \, dm - 2\pi \int_s M_n^2 \vec{n} \cdot d\vec{u} \, dS \quad 2.3.5$$

II - 4 - LES EQUATIONS D'EQUILIBRE

L'analyse rigoureuse du système de forces dans un milieu magnétoélastique nous permet d'établir les équations d'équilibre qui doivent remplacer les relations 1.2.12 et 1.2.13.

Soit le corps placé dans un champ extérieur \vec{H}_0 , pas nécessairement uniforme, et soumis à des forces mécaniques extérieures \vec{T} et \vec{f} .

Pour toute transformation on a $dU = dW + dQ \leq dW + T dS$ où dU et dS sont respectivement la variation de l'énergie interne et de l'entropie du corps. dW représente le travail effectué sur le corps par l'extérieur et s'écrit d'après 2.1.15 et 2.2.12:

$$dW \equiv dW_{mec} + dW_{magn} = \int_s T_i \, du_i \, dS + \int_v \rho f_i \, du_i \, dr + \frac{i_0}{c} d\Phi_m \quad 2.4.1$$

Les paramètres accessibles expérimentalement sont la température T , le champ créé par la source \vec{H}_0 et les forces mécaniques appliquées. On définit alors le potentiel thermodynamique Ψ , fonction de ces variables:

$$\Psi \equiv U - TS - \frac{i_0}{c} \Phi_m - \int_s T_i \, u_i \, dS - \int_v \rho f_i \, u_i \, dr \quad 2.4.2$$

$$\delta\Psi \leq -SdT - di_{o/c} \Phi_m - \int_S u_i dT_i dS - \int_V \rho u_i df_i dr$$

Donc si les paramètres i_o, T, T_i, f_i sont maintenus constants $d\Psi \leq 0$ et l'équilibre sera donné par la valeur minimale du potentiel Ψ . Les équations d'équilibre seront alors obtenues en imposant que $\delta\Psi = 0$ (et $\delta^2\Psi > 0$) pour des variations virtuelles des variables M_i et u_i .

Comme en 1.2.10 on écrira: $U - TS = F = \int f_m dm + W_m$ où W_m est donné par 2.3.3. f_m est alors fonction des variables locales et est indépendant de la forme du cristal. Par 2.1.16 et 2.3.5 :

$$\begin{aligned} \delta\Psi = & \int \delta f_m dm - \int H_i \delta M_i dm - \int M_j H_{i,j} \delta u_i dm - \\ & - 2\pi \int_S M_n^2 n_i \delta u_i dS - \int_S T_i \delta u_i dS - \int_V \rho f_i \delta u_i dr \end{aligned} \quad 2.4.3$$

$$\begin{aligned} \int \delta f_m dm &= \int \left(\frac{\partial f_m}{\partial M_i} \right) \delta M_i dm + \int \left(\frac{\partial f_m}{\partial u_{i,j}} \right) \delta u_{i,j} dm = \\ &= \int \left(\frac{\partial f_m}{\partial M_i} \right) \delta M_i dm - \int_V \rho \left(\frac{\partial f_m}{\partial u_{i,j}} \right)_{,j} \delta u_i dr + \int_S \rho \left(\frac{\partial f_m}{\partial u_{i,j}} \right) n_j \delta u_i dS \end{aligned} \quad 2.4.4$$

Par substitution de 2.4.4. en 2.4.3 on obtient les équations d'équilibre:

$$\left(\frac{\partial f_m}{\partial M_k} \right)_{u_{i,j}, T} = H_k \quad 2.4.5$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f_m}{\partial u_{i,j}} \right)_{M_k, T} + \rho M_j H_{i,j} + \rho f_i = 0 \quad 2.4.6 (a)$$

$$\rho \left(\frac{\partial f_m}{\partial u_{i,j}} \right)_{M_k, T} n_j - 2\pi M_n^2 n_i - T_i = 0 \quad 2.4.6 (b)$$

Or f_m doit être invariant dans une rotation pure de l'élément de masse, c'est à dire f_m doit être invariant dans une rotation de l'ensemble des quatre vecteurs $\frac{\partial \vec{r}}{\partial X_i}$ et \vec{M} [17]. Cela doit être vrai en particulier pour une rotation infinitésimale $\vec{\omega}$. La variation d'un vecteur \vec{A} dans une telle rotation est donnée par $\delta A_i = \omega_{ij} A_j$ avec ω_{ij} anti-symétrique (cf. 2.2.21). Donc :

$$\delta f_m = \frac{\partial f_m}{\partial X_{i,j}^*} \delta X_{i,j}^* + \frac{\partial f_m}{\partial M_i} \delta M_i = \frac{\partial f_m}{\partial X_{i,j}^*} \omega_{ik} X_{k,j}^* + \frac{\partial f_m}{\partial M_i} \omega_{ik} M_k = 0$$

L'antisymétrie de w_{ij} impose que:

$$\frac{\partial f_m}{\partial x_{ij}^*} x_{kij}^* - \frac{\partial f_m}{\partial x_{kij}^*} x_{ij}^* + \frac{\partial f_m}{\partial M_i} M_k - \frac{\partial f_m}{\partial M_k} M_i = 0$$

Par 2.2.14 et 2.4.5 cette relation s'écrit:

$$\rho \frac{\partial f_m}{\partial u_{i,k}} - \rho \frac{\partial f_m}{\partial u_{k,i}} = M_i H_k - M_k H_i \quad 2.4.6 (c)$$

En comparant les relations 2.4.6 (a), (b), (c) aux relations 2.2.9, 2.2.10 et 2.2.11 on constate que les équations d'équilibre mécanique peuvent se mettre sous la forme

$$t_{ij} = \rho \left(\frac{\partial f_m}{\partial u_{ij}} \right)_{M_k, T} \quad 2.4.6$$

La variation isotherme de f_m s'écrit alors

$$df_m = H_i dM_i + 1/\rho t_{ij} du_{ij} \quad 2.4.7$$

Les équations 2.4.5 et 2.4.6 sont rigoureuses et remplacent les équations 1.2.12 et 1.2.13 de l'approximation habituelle.

Cependant les dérivations en 2.4.5 et 2.4.6 ne peuvent être effectuées sans approximations. En effet les termes énergétiques en 2.4.2 et par conséquent les équations d'équilibre sont toutes évaluées aux coordonnées déformées. Par contre f_m est fonction, d'une part du tenseur symétrique e_{ij} évalué à partir du milieu non déformé, et d'autre part des composantes de l'aimantation dans les axes cristallographiques de l'élément de masse dm . Pour pouvoir écrire les relations explicites par substitution de f_m comme en 1.2.26 tous les termes énergétiques doivent être exprimés à partir du milieu non déformé.

II - 5 - UNE APPROXIMATION JUSTIFIEE

A partir des équations d'équilibre du milieu magnétoélastique 2.4.5 et 2.4.6 nous établirons dans ce paragraphe les relations thermodynamiques qui doivent permettre de calculer les coefficients d'anisotropie k_n

définis en 1.1.2, à partir des couples mesurés. Il s'agit alors de trouver les relations entre la densité d'énergie f_0 définie à déformation nulle et la densité d'énergie qui existe à forces appliquées \vec{T}, \vec{f} et champ extérieur \vec{H}_0 constants. La troisième variable, la température T , qui est maintenue constante, sera omise dans ce paragraphe.

Dans ce but on supposera que la forme du cristal est ellipsoïdale et que les seules forces appliquées sont les forces de surface \vec{T} . Le potentiel Ψ se réduit alors à:

$$\Psi = \int_V \rho f_m d\tau - \int_V \rho \vec{H}_1 \cdot \vec{M} d\tau - \int_V \rho \vec{H}_0 \cdot \vec{M} d\tau - \int_S T_i u_i dS \quad 2.5.1$$

Il faut donc développer les quatre termes en 2.5.1 à partir du milieu non déformé, c'est à dire en fonction des variables M_i et u_{ij} ou u_i . Un développement jusqu'au deuxième ordre dans les u_{ij} sera suffisant dans tous les cas où les déformations sont des fonction linéaires des forces appliquées. On supposera qu'une telle linéarité existe.

D'abord on développera le terme $\int_V \rho f_m d\tau$. f_m s'écrit explicitement:

$$f_m = f_0(\bar{M}_k) + f_{ij}(\bar{M}_k) e_{ij} + \frac{1}{2} f_{ijkl}(\bar{M}_k) e_{ij} e_{kl} \quad 2.5.2$$

où les e_{ij} sont donnés par 2.2.16. Les \bar{M}_k sont les composantes de l'aimantation dans un système de référence lié à l'élément de masse dm . Elles sont liées aux composantes M_k avant la déformation par $\bar{M}_k = R_{ki} M_i$ où R_{ki} est défini par 2.2.17.

Dans une approximation jusqu'au deuxième ordre, les e_{ij} peuvent être remplacés par les ε_{ij} dans le dernier terme en 2.5.2. D'après 1.2.26 le rapport f_{ij}/f_{ijkl} est du même ordre de grandeur que les déformations qui existent en l'absence de forces mécaniques appliquées. En général l'ordre de grandeur du rapport f_{ij}/f_{ijkl} sera donc inférieur aux déformations u_{ij} . Il est alors suffisant de développer le terme $f_{ij}(\bar{M}_k) e_{ij}$ jusqu'au premier ordre dans les u_{ij} et e_{ij} et \bar{M}_k peuvent être remplacés par ε_{ij} et M_k . Plus généralement, un développement limité au premier ordre dans les u_{ij} et les u_i sera suffisant dans tous les termes dont le coefficient des u_{ij} et u_i ne dépasse pas l'ordre de grandeur des coefficients f_{ij} .

Par 2.2.21 on obtient jusqu'au premier ordre:

$$\bar{M}_k = M_k + w_{ki} M_i \quad 2.5.4$$

Donc, jusqu'au premier ordre, :

$$f_0(\bar{M}_k) = f_0(M_k) + \frac{\partial f_0}{\partial M_j} M_i w_{ji} \quad 2.5.5$$

Si les constantes d'anisotropie et les constantes magnétoélastiques sont du même ordre de grandeur comme dans le cas de Ni et de Fe, le développement (2.5.5) jusqu'au premier ordre est suffisant. Ainsi l'énergie f_m peut s'écrire:

$$f_m = f_0(M_k) + \frac{\partial f_0}{\partial M_j} M_i w_{ji} + f_{ij}(M_k) \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} f_{ijkl}(M_k) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$$

En ce qui concerne le deuxième et le troisième terme en 2.5.1 les résultats obtenus dans les paragraphes II-1-2 et II-3 nous permettent de les évaluer à partir du milieu non déformé jusqu'au premier ordre dans les u_i . On obtient:

$$\int_V \rho H_i M_i d\tau = \int_V H_i M_i d\tau_0 + \int_V M_i H_{i,j} u_j d\tau_0 + 2\pi \int_S M_n^2 n_i u_i dS. \quad 2.5.6$$

Le deuxième terme s'annule si le champ est uniforme. En réalité le champ \vec{H}_0 n'est jamais rigoureusement uniforme, mais les forces magnétiques $M_i H_{i,j}$ qui résultent de cette non-uniformité seront en général d'un ordre de grandeur inférieurs aux coefficients $b_{ij} = f_0 f_{ij}$ comme on le voit dans l'exemple caractéristique suivant.

On suppose que le gradient $\frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial x} \leq 10^4 \text{ mm}^{-1}$ et que l'aimantation est de l'ordre de $2 \cdot 10^3$ u.e.m. (exemple du Fe). Pour un champ de 10 kOe les forces magnétiques seront inférieures à $2 \cdot 10^4$ dyn/cm³.

Les coefficients b_{ij} sont de l'ordre de 10^{6-7} dyn/cm². L'ordre de grandeur du rapport u/D , où D est la dimension de l'échantillon est inférieur à l'ordre de grandeur des déformations $u_{i,j}$.

Pour D de l'ordre du centimètre le deuxième terme en 2.5.6 peut être négligé par rapport aux termes $f_{ij} \varepsilon_{ij}$. Pour des aimantations de l'ordre $2 \cdot 10^3$ u.e.m., M_n^2 est de l'ordre de 10^6 dyn/cm² ($\neq b_{ij}$) et le développement

donné par 2.5.6 est donc suffisant.

Ainsi 2.5.1 peut s'écrire :

$$\Psi = \int_V \rho_0 f_m d\tau_0 - \int_V H_i M_i d\tau_0 - 2\pi \int_S M_n^2 n_i u_i dS_0 - \int_{S_0} T_i^* u_i dS_0 \quad 2.5.7 (a)$$

$$\text{avec } \rho_0 f_m = \rho_0 f_0 + \rho_0 \frac{\partial f_0}{\partial M_i} M_j \omega_{ij} + b_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad 2.5.7 (b)$$

$$\text{et } T_i^* \equiv \frac{dS}{dS_0} T_i \quad 2.5.7 (c)$$

Toutes les grandeurs, sauf ε_{ij} et ω_{ij} , sont à évaluer aux coordonnées non déformées.

En 2.5.7 $\int_{S_0} T_i^* u_i dS_0$ peut être remplacé par $\int_S T_i u_i dS$ si les forces appliquées ne dépassent pas l'ordre de grandeur des b_{ij} .
La relation générale entre dS et dS_0 est donnée par [17] :

$$dS = \rho_0 / \rho [(C^{-1})_{ij} N_i N_j]^{1/2} dS_0 \quad 2.5.8$$

où \vec{N} est le vecteur unitaire normal à la surface $d\vec{S}_0$.

La variation de Ψ est maintenant donnée par

$$\delta \Psi = \int_V \rho_0 \delta f_m d\tau_0 - \int_V H_i \delta M_i d\tau_0 - 2\pi \int_S M_n^2 n_i \delta u_i dS_0 - \int_{S_0} T_i n_i \delta u_i dS_0 \quad 2.5.9$$

$$\text{avec } \int_V \rho_0 \delta f_m d\tau_0 = \int_V \rho_0 \frac{\partial f_m}{\partial u_{ij}^*} \delta u_{ij}^* d\tau_0 + \int_V \frac{\partial f_m}{\partial M_i} \delta M_i d\tau_0 =$$

$$= - \int_V \rho_0 \left(\frac{\partial f_m}{\partial u_{ij}^*} \right)_{,j^*} \delta u_i d\tau_0 + \int_{S_0} \rho_0 \frac{\partial f_m}{\partial u_{ij}^*} N_j \delta u_i dS_0 + \int_V \frac{\partial f_m}{\partial M_i} \delta M_i d\tau_0$$

La variation de Ψ est donnée à T , \vec{H} et \vec{T}^* constants. En réalité ce sont T , \vec{H}_0 et \vec{T} qui sont accessibles. La variation de \vec{H} est due à l'anisotropie de l'aimantation et peut être négligée pour un rapport $\Delta M / M$ de l'ordre de 10^{-3} à 10^{-4} (cette condition est largement remplie dans le cas du Ni et du Fe). En ce qui concerne la composante T_i^* , elle dépend des déformations par l'intermédiaire de 2.5.8. Dans le paragraphe suivant on verra cependant que dans le cas des hautes pressions cette variation peut être négligée.

En imposant que $\delta\Psi$ soit nul pour des variations virtuelles de M_i et u_i on trouve les équations d'équilibre:

$$\left(\frac{\partial f_m}{\partial M_k}\right)_{u_{ij}^*} = H_k \quad 2.5.9$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 \left(\frac{\partial f_m}{\partial u_{ij}^*}\right)_{M_k} N_j &= T_i^* + 2\pi M_n^2 N_i \\ \rho_0 \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{\partial f_m}{\partial u_{ij}^*}\right)_{M_k} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad 2.5.10$$

D'après 2.4.6 et 2.2.14

$$t_{ij} = \rho_0 / (1+w) \left(\frac{\partial f_m}{\partial u_{ij}^*} + \frac{\partial f_m}{\partial u_{ik}^*} u_{jk}^* \right) \quad 2.5.11$$

En négligeant en 2.5.11 le deuxième terme et le facteur $(1+w)^{-1}$ on introduit des erreurs qui sont du même ordre de grandeur que les erreurs introduits par l'expression approximative 2.5.7 (b) et on peut donc écrire:

$$t_{ij} = \rho_0 \frac{\partial f_m}{\partial u_{ij}^*} \quad 2.5.12$$

Le deuxième et le troisième termes de l'expression 2.5.7 (b) pour f_m peuvent être transformés en:

$$\rho_0 \frac{\partial f_0}{\partial M_i} M_j w_{ji} = \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{\partial f_0}{\partial M_j} M_i - \frac{\partial f_0}{\partial M_i} M_j \right) u_{ij}^* = \frac{1}{2} (M_i H_j - M_j H_i)$$

$$b_{ij} \varepsilon_{ij} = b_{ij} u_{ij}^*$$

à cause de l'antisymétrie et de la symétrie de w_{ij} et de ε_{ij} respectivement. On obtient alors par substitution en 2.5.12:

$$t_{ij} = b_{ij} + C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} (M_i H_j - M_j H_i) \quad 2.5.13$$

L'équilibre des forces à la surface s'écrit :

$$t_{ij} N_j = T_i^* + 2\pi M_n^2 N_i \quad 2.5.14$$

La relation 2.5.13 diffère de l'ancienne relation 1.2.26 par le terme antisymétrique $\frac{1}{2}(M_i H_j - M_j H_i)$.

Une partie des forces mécaniques appliquées T_i^* est formée par le couple exercé par le porte échantillon qui a pour but de fixer le corps. Nous écrivons $T_i^* = T_i^{a*} + T_i^{s*}$ avec $X_i T_j^{a*} - X_j T_i^{a*}$ les couples exercés par le porte échantillon et T_i^{s*} les autres forces appliquées (le plus souvent une pression hydrostatique) dont on supposera qu'elles n'exercent pas de couples sur le corps. La partie antisymétrique de t_{ij} est donc due aux couples $X_i T_j^{a*} - X_j T_i^{a*}$ seulement et les équations 2.5.13-2.5.14 peuvent être séparées en :

$$t_{ij}^s \equiv \frac{1}{2}(t_{ij} + t_{ji}) = b_{ij} + C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad 2.5.15 \text{ (a)}$$

$$t_{ij}^s N_j = T_i^{s*} + 2\pi M_n^2 N_i \quad 2.5.15 \text{ (b)}$$

$$t_{ij}^a \equiv (t_{ij} - t_{ji}) = M_i H_j - M_j H_i \quad 2.5.16 \text{ (a)}$$

$$\int_{V_0} t_{ij}^a d\tau_0 = \int_{S_0} (X_i T_j^{a*} - X_j T_i^{a*}) dS_0 \quad 2.5.16 \text{ (b)}$$

Le deuxième terme en 2.5.15 (b) n'est pas présent dans l'approximation habituelle traitée dans le premier chapitre. Cette force de surface "magnétique" est responsable de l'effet de forme, c'est à dire les déformations dues à l'existence de pôles magnétiques à la surface. Les contraintes t_{ij}^f qui correspondent à cette force de surface sont symétriques mais non uniformes sauf dans des cas limites tel que par exemple un cylindre infiniment long [20]. Dans le cas particulier d'une sphère ces contraintes ont été calculées explicitement [21][22] et on trouve au centre de la sphère des valeurs deux fois plus élevées que la moyenne sur la sphère.

On définit le potentiel $g_m \equiv f_m - \frac{1}{\rho_0} t_{ij} u_{ij}^*$ 2.5.17

De façon analogue à 1.2.23 $\rho_0 g_m$ peut être développé autour de l'état $t_{ij}=0$

$$\rho_0 g_m = \rho_0 g_0 - h_{ij} t_{ij} - \frac{1}{2} S_{ijkl} t_{ij} t_{kl} \quad 2.5.18$$

La variation de $\rho_0 g_m$ est donnée par $d \rho_0 g_m = -u_{ij}^* dt_{ij} + H_i dM_i$
d'où les équations d'équilibre:

$$\left(\frac{\partial g_m}{\partial M} \right)_{t_{ij}, T} = H_k \quad 2.5.19$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial g_m}{\partial t_{ij}} \right)_{M_k, T} = -u_{ij}^* \quad 2.5.20$$

Le potentiel g_m est fonction des contraintes non uniformes t_{ij} qui ne sont pas contrôlables expérimentalement et la relation 2.5.19 perd alors de son intérêt.

Toutefois dans le but de ce travail il est possible d'écrire g_m en fonction d'un tenseur τ_{ij} uniforme et expérimentalement contrôlable. En effet dans l'interprétation des mesures n'intervient que le couple total

$$\Gamma_k = \int (M_i H_j - M_j H_i) d\tau_0 = \int [M_i \left(\frac{\partial g_m}{\partial M_j} \right)_{t_{rs}} - M_j \left(\frac{\partial g_m}{\partial M_i} \right)_{t_{rs}}] d\tau_0 \quad (i \neq j \neq k) \quad 2.5.21$$

Si l'on considère que les constantes élastiques S_{ijkl} en 2.5.18 sont indépendantes de l'aimantation, les dérivées en 2.5.21 sont linéaires dans les t_{ij} et peuvent être remplacées par des \bar{t}_{ij} moyens uniformes. La relation 2.5.15 (b) peut alors s'écrire:

$$(\bar{t}_{ij}^s - b_{ij}^f) N_j = \tau_i^{s*} \quad 2.5.22$$

avec b_{ij}^f la moyenne uniforme des contraintes t_{ij}^f : $b_{ij}^f \equiv \bar{t}_{ij}^f$

Le tenseur τ_{ij} défini par

$$\tau_{ij} \equiv \bar{t}_{ij}^s - b_{ij}^f \quad 2.5.23$$

est alors directement accessible expérimentalement. Par substitution de 2.5.15 (a) on obtient:

$$\tau_{ij} = b'_{ij} + C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{avec} \quad b'_{ij} \equiv b_{ij} - b_{ij}^f \quad 2.5.24$$

Soit h_{ij}^f les déformations dues aux contraintes b_{ij}^f et h'_{ij} les déformations totales en absence de forces mécaniques appliquées. Dans le domaine où la loi de Hooke est valable :

$$h'_{ij} = h_{ij} + h_{ij}^f \quad 2.5.25$$

2.5.24 donne alors les relations mutuelles

$$\left. \begin{aligned} C_{ijkl} h_{kl}^f &= b_{ij}^f \\ C_{ijkl} h_{kl} &= -b_{ij} \\ C_{ijkl} h'_{kl} &= -b_{ij} \end{aligned} \right\} \quad 2.5.26$$

Par substitution de 2.5.23 et 2.5.24, 2.5.18 peut être transformée en :

$$\rho_0 g_m = \rho_0 g^0 - h'_{ij} \tau_{ij} - \frac{1}{2} S_{ijkl} \tau_{ij} \tau_{kl} \quad 2.5.27$$

$$\text{avec } \rho_0 g^0 = \rho_0 g_0 - h_{ij} b_{ij}^f - \frac{1}{2} S_{ijkl} b_{ij}^f b_{kl}^f$$

$\rho_0 g^0$ représente la densité d'énergie en l'absence de forces mécaniques appliquées. La relation entre g_0 et f_0 étant donnée par $\rho_0 (g_0 - f_0) = -\frac{1}{2} C_{ijkl} h_{ij} h_{kl}$ (cf 1.2.29) on trouve :

$$\rho_0 (g^0 - f_0) = -\frac{1}{2} C_{ijkl} h'_{ij} h'_{kl} \quad 2.5.28$$

Les relations 2.5.27 et 2.5.28 remplacent les relations 1.2.23 et 1.2.29 du premier chapitre.

Finalement le tenseur t_{rs} peut être remplacé par le tenseur τ_{rs} sous l'intégrale 2.5.21. En effet :

$$\left(\frac{\partial g_m}{\partial M_i} \right)_{t_{rs}, M_{k \neq i}} = \left(\frac{\partial g_m}{\partial M_i} \right)_{\tau_{rs}, M_{k \neq i}} + \left(\frac{\partial g_m}{\partial \tau_{rs}} \right)_{\vec{M}} \left(\frac{\partial \tau_{rs}}{\partial M_i} \right)_{t_{rs}, M_{k \neq i}}$$

Par substitution de 2.5.27 et 2.5.23 le deuxième terme s'écrit $\alpha_{rs} \frac{\partial b_{rs}^f}{\partial M_i}$

Or le tenseur b_{rs}^f étant étant symétrique, la contribution de ce terme dans l'intégrale 2.5.21 s'annule.

L'anisotropie de l'aimantation nous oblige finalement à introduire le potentiel

$$\Psi_m \equiv g_m - \mathcal{M} H_m \quad 2.5.29$$

De façon analogue à celle du § I-2 on trouve alors que le couple mesuré peut s'écrire:

$$\vec{\Gamma} = \int \left[-\frac{1}{\sin\theta} \left(\frac{\partial \Psi_m}{\partial \varphi} \right)_{\tau_{ij}, H_m, \theta} \vec{\alpha}_\theta + \left(\frac{\partial \Psi_m}{\partial \theta} \right)_{\tau_{ij}, H_m, \varphi} \vec{\alpha}_\varphi \right] dm \quad 2.5.30$$

Les coefficients d'anisotropie $K_n^{\text{exp}}(\tau_{ij}, H_m)$ ainsi déterminés sont liés aux coefficients K_n à déformation nulle par l'intermédiaire des relations 2.5.27/28/29 .

II - 6 - APPLICATION A UN CRISTAL CUBIQUE SOUMIS A UNE PRESSION HYDROSTATIQUE

Nous donnons dans ce paragraphe les relations explicites entre les constantes d'anisotropie mesurées K_i^{exp} à une pression hydrostatique $T_i = -n_i P$ et les constantes K_i à déformation nulle, pour un échantillon sphérique d'un cristal à symétrie cubique.

Si la pression appliquée est la pression atmosphérique les T_i sont du même ordre de grandeur que les b_{ij} et la différence entre les T_i et les T_i^* peut être négligée. A haute pression par contre la distinction (cf. 2.5.7 (c)) doit être gardée. T_i^* dépend alors des déformations par la relation 2.5.8. Cependant dans le cas d'une haute pression les déformations principales sont celles qui proviennent de la compression hydrostatique et 2.5.7 (c) se réduit alors:

$$T_i^* = -n_i P (1 - \frac{2}{3} \kappa P) \quad 2.6.1$$

où $\kappa = 3(S_{11} + 2S_{12})$ est la compressibilité.

Les expressions explicites des coefficients b_{ij} et h_{ij} pour la symétrie cubique sont données par 1.4.5 et 1.4.6 et il nous reste à déterminer les b_{ij}^f et h_{ij}^f .

Considérons dans ce but un système de référence $\vec{A} \vec{B} \vec{C}$ dont l'axe \vec{C} est parallèle à l'aimantation. Les contraintes b_{AB}^f dans ce système de référence sont pour un échantillon sphérique données par [21] [22] :

$$\left. \begin{aligned} b_{AA}^f &= 2\pi/3 M^2 - 4\pi/15 M^2 \\ b_{BB}^f &= 2\pi/3 M^2 - 4\pi/15 M^2 \\ b_{CC}^f &= 2\pi/3 M^2 + 8\pi/15 M^2 \\ b_{AB}^f &= b_{BC}^f = b_{CA}^f = 0 \end{aligned} \right\} 2.6.2$$

En transformant ces composantes dans le système d'axes cubiques on obtient:

$$\begin{aligned} b_{ii} &= 2\pi/3 M^2 + 4\pi/5 M^2 (\alpha_i^2 - 1/3) \\ b_{ij} &= 4\pi/5 M^2 \alpha_i \alpha_j \end{aligned}$$

où les α_i sont les cosinus directeurs de l'aimantation.

Parallèlement aux constantes de magnétostriction habituelles il existe alors les constantes de forme suivantes:

$$\left. \begin{aligned} b_0^f &= 2\pi/3 M^2 & h_0^f &= 2\pi/3 (S_{11} + 2S_{12}) M^2 \\ b_1^f &= 4\pi/5 M^2 & h_1^f &= 4\pi/5 (S_{11} - S_{12}) M^2 \\ b_2^f &= 4\pi/5 M^2 & h_2^f &= 2\pi/5 S_{44} M^2 \end{aligned} \right\} 2.6.3$$

Ces constantes sont positives et pour le nickel et fer respectivement de l'ordre de 10^{-7} et 10^{-6} . En comparant ces valeurs aux constantes de magnétostriction citées en annexe on constate que la constante h_0^f peut être négligée, mais que les constantes h_1^f et h_2^f sont, dans le cas du fer par exemple, de l'ordre de 20% des constantes de magnétostriction correspondantes. L'effet de forme est ainsi loin d'être négligeable.

Nous remarquerons à ce propos que les expressions 2.6.3 correspondent à un échantillon sphérique. Une autre forme d'échantillon pourrait être utilisée pour les mesures d'anisotropie magnétique, par exemple un el-

lipsoïde de révolution aplatie avec l'aimantation dans le plan perpendiculaire à l'axe de révolution. Bien que l'effet de forme devienne moins important dans la mesure où le rapport des axes diminue, il ne décroît pas très vite. Ainsi l'effet de forme dans un ellipsoïde de révolution avec un rapport des axes $1:1:\frac{1}{10}$ est encore de l'ordre de 30% de l'effet de forme dans une sphère.

De façon analogue au paragraphe I-3 on obtient maintenant pour les deux premières constantes d'anisotropie:

$$K_1 = K_1^{\text{exp}} + M_1 H_M - 3h_3 P + 6h_3(S_{11} + 2S_{12}) P^2 + \Delta K_1$$

$$K_2 = K_2^{\text{exp}} + M_2 H_M + \Delta K_2$$

2.6.4

$$\Delta K_1 = 3h'_0 h_3 (C_{11} + 2C_{12}) - h_1'^2 (C_{11} - C_{12}) + 2h_2'^2 C_{44} - \frac{7}{3} h_1' h_4 (C_{11} - C_{12}) - \frac{4}{3} h_4^2 (C_{11} - C_{12})$$

$$\Delta K_2 = 3h_1' h_4 (C_{11} - C_{12}) + 12h_2' h_5 C_{44} + 2h_5^2 C_{44} + \frac{8}{3} h_4^2 (C_{11} - C_{12}) +$$

$$(h_i' \equiv h_i + h_i^f) \quad + 3h_3^2 (C_{11} + 2C_{12})$$

Ces relations diffèrent des relations 1.4.16 de l'approximation habituelle par un terme supplémentaire en P^2 dans l'expression pour la première constante d'anisotropie et par les constantes h'_0, h'_1, h'_2 dans les expressions pour ΔK_1 et ΔK_2 . Le terme en P^2 dans l'expression pour K_1 peut être négligé par rapport au terme linéaire en P pour des pressions inférieures à 10 kbars.

En ce qui concerne les modifications introduites par les constantes de forme, on constate qu'elles interviennent principalement dans le terme correctif pour la première constante d'anisotropie ΔK_1 . Ces modifications, faibles dans le cas du nickel, sont importantes pour le fer. La substitution des valeurs expérimentales (voir annexe) montre que dans ce cas la modification de ΔK_1 est de l'ordre de 30%.

Les constantes, qui interviennent dans les relations 2.6.4 dépendent encore de différents paramètres. D'après 2.5.2 les constantes élastiques sont, à température constante, fonction de la direction et du module de l'aimantation. Une dépendance directionnelle des constantes élastiques

a effectivement été mesurée [23][24] et cet effet a été interprété par Mason [25] comme dû à un abaissement de la symétrie cristallographique par la magnétostriction. L'ordre de grandeur d'un tel effet semble toutefois inférieur [26] par un facteur 10^{-4} aux constantes élastiques totales et les déformations qui en résultent sont alors d'un ordre inférieur aux effets magnétostrictifs pour des pressions inférieures à 10 kbar. La dépendance des constantes élastiques en fonction du module de l'aimantation existe essentiellement au voisinage de la température de transition et la différence relative entre les constantes dans l'état paramagnétique et l'état ferromagnétique est de l'ordre de 1% [27]

En ce qui concerne les constantes de magnétostriction h_i elles dépendent explicitement de la température et du module de l'aimantation \mathcal{M} . Un calcul basé sur les déviations statistiques des moments magnétiques de l'état de l'alignement parfait permet [12][28] d'exprimer le rapport h_i/h_{i0} en fonction du rapport $\mathcal{M}/\mathcal{M}_0$ où h_{i0} et \mathcal{M}_0 sont les valeurs au zéro absolu. Ce calcul est une généralisation du calcul analogue fait pour les constantes d'anisotropie [29]. Or l'aimantation \mathcal{M} dépend des variables T , w , H et la variation isotherme est alors donnée par:

$$d\mathcal{M} = \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial H} \right)_{T,w} dH + \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial w} \right)_{T,H} dw \quad 2.6.5$$

Le premier terme représente la variation due aux effets statistiques mentionnés ci-dessus et le deuxième terme correspond à la variation du moment \mathcal{M} due à une variation de volume $dw (= dV - V_0)$ et par conséquent d'une variation de l'intégrale d'échange. \mathcal{M} et h_i dépendent alors de la pression et du champ par les grandeurs $\left(\frac{\partial w}{\partial P} \right)_{H,T}$ et $\left(\frac{\partial w}{\partial H} \right)_{T,P}$. Le premier terme est la compressibilité du milieu (à champ constant) et la deuxième grandeur représente la magnétostriction forcée.

Des valeurs caractéristiques pour le nickel et le fer sont:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{M}} \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial H} \right)_{T,P} &\# 10^{-6} \text{ Oe}^{-1} [9] \\ \frac{1}{\mathcal{M}} \left(\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial P} \right)_{T,H} &\# 10^{-7} \text{ bar}^{-1} [30] \end{aligned} \right\} 2.6.6$$

D'autre part les résultats expérimentaux donnent, pour le nickel et le fer:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h_i}{\partial H} &\# 10^{-10} \text{ oe}^{-1} \quad [22][31] \\ \frac{\partial h_i}{\partial P} &\# 10^{-10} \text{ bar}^{-1} \quad [34] \end{aligned} \right\} 2.6.7$$

Les variations des constantes h_i^f en fonction du champ et de la pression, obtenues directement par substitution des valeurs 2.6.6., sont d'un ordre inférieur aux valeurs données en 2.6.7.

L'ordre de grandeur de ces dernières justifie l'identification de $\frac{\partial K_1^{\text{exp}}}{\partial P}$ avec $3h_3$, d'une part et de $\frac{\partial K_1^{\text{exp}}}{\partial H} + M_1$ avec $-3 \frac{\partial h_3}{\partial H} P$ d'autre part .

Les mesures de couples en fonction de la pression et du champ permettent ainsi de déterminer la constante h_3 et sa dérivée par rapport au champ.

CONCLUSION

En partant d'une description rigoureuse du milieu magnétoélastique nous avons discuté la validité de la description approchée habituelle et des interprétations qui s'en déduisent pour les constantes d'anisotropie.

En particulier, nous avons montré que l'identification de $\frac{\partial K}{\partial P}^{exp}$ avec h_3 pour les cristaux à symétrie cubique est justifiée et que les mesures d'anisotropie sous haute pression permettent la détermination de $\frac{\partial h_3}{\partial H}$.

Les mesures d'anisotropie effectuées à pression constante ne peuvent pas être directement comparées aux prévisions des modèles théoriques qui supposent le plus souvent que le réseau est indéformable. Nous avons montré que les relations permettant cette comparaison, telles qu'elles sont obtenues dans la description approchée habituelle du milieu magnétoélastique, ne tiennent pas compte de l'effet de forme. Ce dernier conduit à des termes correctifs supplémentaires qui varient avec le carré de l'aimantation et qui peuvent être importants comme dans le cas du fer par exemple.

ANNEXE

VALEURS DES CONSTANTES CARACTERISTIQUES
POUR LE NICKEL ET LE FER

Dans cette annexe nous donnons sous forme d'un tableau les valeurs expérimentales des différentes constantes relatives au nickel et au fer. Il est important de préciser que :

1) Les constantes d'anisotropie ont été obtenues par extrapolation des constantes expérimentales en fonction du champ. Elles représentent les valeurs à champ $H=0$. La constante M_1 a été obtenue par détermination de la pente $K_1^{\text{exp}}(H)$. La constante M_2 n'a pas pu être déterminée par cette méthode de façon satisfaisante à cause d'un manque de linéarité dans la fonction $K_2^{\text{exp}}(H)$.

2) Les valeurs des constantes de magnétostriction h_1, h_2, \dots ont été obtenues par des mesures à l'aide de jauges de contrainte. Cette technique de mesure ne permet d'obtenir des résultats relativement précis que pour les constantes h_1 et h_2 . L'incertitude relative pour les autres constantes, en particulier h_3 est souvent de l'ordre de 100 %.

Des expériences très récentes de résonance ferromagnétique [36] ont données des nouvelles valeurs, plus précises, pour les constantes h_3 et h_4 du nickel à la température ambiante :

$$h_3 = -8.5 \pm 0.7 \cdot 10^{-6} \text{ et } h_4 = -14.3 \pm 1.4 \cdot 10^{-6}.$$

3) Les valeurs de h_0 ont été obtenues par des mesures de dilatation thermique au dessus et en dessous de la température critique :

$$h_0(T) = \int_T^{\infty} (\alpha_M - \alpha_H) dT .$$

α_M et α_H sont respectivement les coefficients de dilatation thermique linéaire à aimantation et champ constant . Dans la plage de température où la dilatation est anormale les valeurs de α_M sont obtenues par extrapolation. La variation de h_0 avec la température est importante dans le voisinage de la température critique et à basse température h_0 tend vers une valeur de saturation indépendante de la température.

Les résultats expérimentaux de Nix et Mc Nair [33] donnent des valeurs négatives pour le nickel et le fer. Les résultats expérimentaux de Gersdorf [22] montrent toutefois une anomalie de $h_0(T)$ pour le fer à des températures juste en dessous de la température critique et des résultats plus récents [37] contestent pour le fer le signe négatif de la valeur de saturation.

TABLEAU 1 Nickel

$-K_1$	$-K_2$	M_0	M_1	h_0	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	C_{11}	C_{12}	C_{44}
	10^5 erg/cm^3	uem/cm^3		10^{-4}			10^{-6}			10^{12} erg/cm^3		
293°K	0.56	480	0.24	- 3.6	- 87	- 41	0.3	6.3	0.2	2.51	1.51	1.24
77°K	8.3	500	0.67	- 3.6	-104	- 52	1.2	15.5	1.0			

TABLEAU 2 Fer

K_1	K_2	M_0	M_1	h_0	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	C_{11}	C_{12}	C_{44}
	10^5 erg/cm^3	uem/cm^3		10^{-4}			10^{-6}			10^{12} erg/cm^3		
293°K	4.8	1714	0.78	- 9.0	36	- 34	2	-	-	2.37	1.41	1.16
77°K	5.4	1735	0.51	- 9.0	35	- 45	3					

Sources : Valeurs de : K_1, K_2, M_1

M_0

h_0

$h_1 \dots h_5$ (Ni)

$h_1 \dots h_5$ (Fe)

C_{11}, C_{12}, C_{44}

: P. ESCUDIER [8]

: R. BOZORTH [32]

: F.C. NIX et D. Mac NAIR [33]

: J.J.M. FRANSE [34]

: J.J.M. FRANSE et M. STOLP [35]

: R. GERSDORF [22]

: Handbook Am.Phys.Society

BIBLIOGRAPHIE

- 1 F. Bloch et G. Gentile, *Z. Phys.*, 70, 395, (1931).
- 2 J.H. Van Vleck, *Phys. Rev.*, 52, 1178, (1937).
- 3 H. Brooks, *Phys. Rev.*, 58, 909, (1940).
- 4 G.C. Fletcher, *Proc. Phys. Soc. London*, A 68, 1066, (1955).
- 5 G. Aubert, Thèse, Université de Grenoble, (1966).
- 6 L. Landau et E. Lifchitz, *Théorie de l'élasticité*, Moscou, (1967).
- 7 E.R. Callen et H.B. Callen, *J. Phys. Chem. Sol.*, 16, 310, (1960).
- 8 P. Escudier, Thèse, Université de Grenoble, (1973).
- 9 R. Becker et W. Döring, *Ferromagnetismus*, Berlin, (1939).
- 10 R. Brenner, *Phys. Rev.*, 107, 1539, (1957).
- 11 R.F.S. Hearmon, *Applied Anisotropic Elasticity*, Oxford, (1961).
- 12 C. Kittel et J.H. Van Vleck, *Phys. Rev.*, 118, 1231, (1960).
- 13 E. de Lacheisserie, *Ann. Phys.*, 5, 267, (1970).
- 14 Ph. K. Baltzer, *Phys. Rev.*, 108, 580, (1957).
- 15 W.F. Brown Jr., *Am. Journal of Phys.*, 19, 290-304, (1951).
- 16 W.F. Brown Jr., *Magnetostatic Principles in Ferromagnetism* Amsterdam, (1962).
- 17 C. Truesdell et R. Toupin, *Handbuch der Physik III*, Berlin (1962).
- 18 A.E.H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover, (1944).
- 19 J.P. Perrier, Thèse de 3^e cycle, Université de Grenoble, (1966).
- 20 W.F. Brown Jr., *Rev. Mod. Phys.*, 25, 131, (1953).
- 21 R. Gersdorf, *Physica*, 26, 553, (1960).

- 22 R. Gersdorf, Thèse, Université d'Amsterdam, (1961).
- 23 R.M. Bozorth, W.P. Mason, H.J. Mc Skimmin, Bell Syst. Tech, J.,
30, 970, (1951).
- 24 J.R. Neighbours, G.A. Alers, H. Sato, Bull. Am. Phys. Soc., 2,
118, (1957).
- 25 W.P. Mason, Phys. Rev., 82, 715, (1951).
- 26 G.A. Alers, J.R. Neighbours, H. Sato, J. Phys. Chem. Solids, 9,
21, (1958).
- 27 G.A. Alers, J.R. Neighbours, H. Sato, J. Phys. Chem. Solids, 13,
40, (1959).
- 28 H.B. Callen et E.R. Callen, Phys. Rev., 139, A 455, (1965).
- 29 C. Zener, Phys. Rev., 96, 5, (1954).
- 30 J.S. Kouvel, R.H. Wilson, Progress in very High Pressure Research,
New-York, p. 271 (1961).
- 31 J.A. Lourens, L. Alberts, Solid State Comm., 2, 141, (1964).
- 32 R.M. Bozorth, Ferromagnetismus, Princeton, (1951).
- 33 F.C. Nix et D. Mc Nair, Phys. Rev., 60, 597, (1941).
- 34 J.J.M. Franse, Thèse, Université d'Amsterdam, (1969).
- 35 J.J.M. Franse et M. Stolp, Phys. Rev. Letters, 32 A, 316, (1970).
- 36 N.H. Ahmad, M. Prutton, J.S.S. Whiting, IEEE Trans. Magn., 8, n°3,
475, (1973).
- 37 R. Richter et U. Lotter, Phys. Stat. Solidi, 34, K 149, (1969).